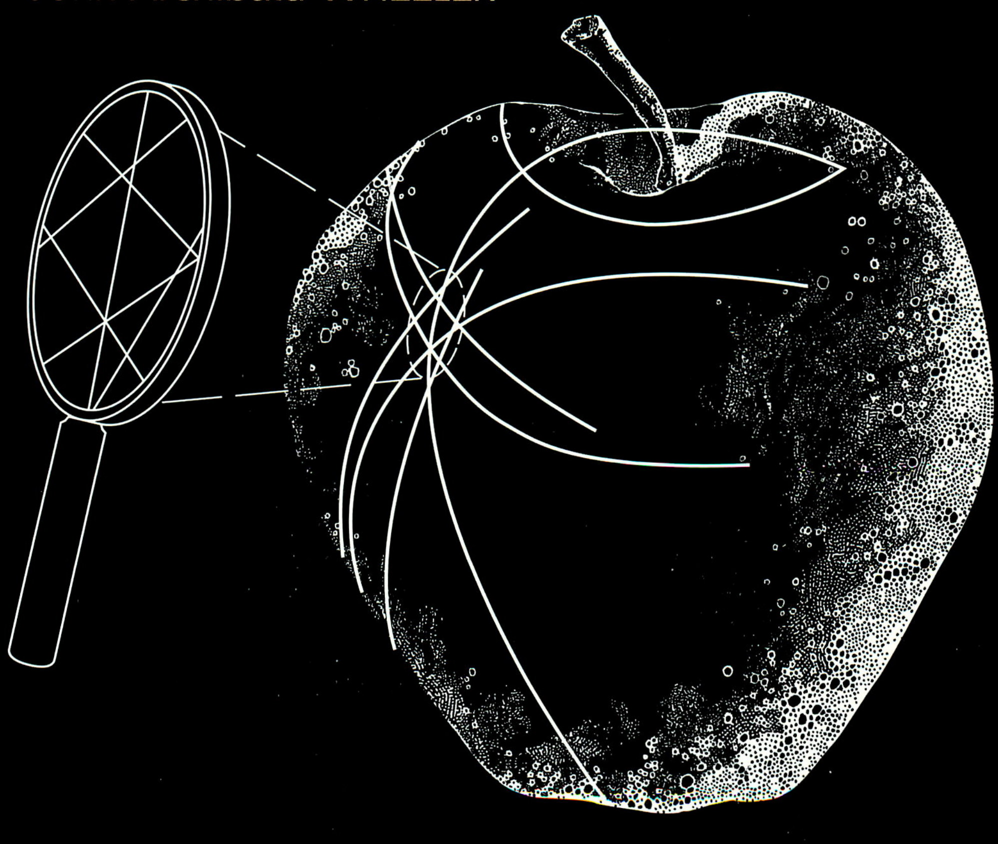
重力理論

Gravitation―古典力学から相対性理論まで，時空の幾何学から宇宙の構造へ

若野 省己［訳］

GRAVITATION

Charles W. MISNER
Kip S. THORNE
John Archibald WHEELER



丸善出版

重力理論

Gravitation—古典力学から相対性理論まで，時空の幾何学から宇宙の構造へ

若野 省己［訳］

GRAVITATION

Charles W. MISNER
Kip S. THORNE
John Archibald WHEELER

丸善出版

GRAVITATION

By Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler

First published in the United States
By W.H. FREEMAN AND COMPANY, New York

この書物を
親愛なる市民に捧げる.
真理を愛するがゆえに,
自ら欲するところに従い,
忍耐と才能をもって
この書物を手に取る市民に.
そして時としてその中から
献身的な僕が一人現れ,
われらの住みかなる
この不思議で美しい宇宙の
神秘と驚くべき単純さへの探究を
推し進めてくれるように.



かに星雲（NGC 1952），1054 年 7 月の超新星の残骸，K'ai–feng にある宋［中国の王朝（960–1279）］国立観測所で観測され，記録された事象．900 年の間に，爆発で生じた塵は約 3 光年にも広がっている．すなわち，光速の約 1/300 の速さで広がったのである．1934 年に Walter Baade と Fritz Zwicky は中性子星が超新星爆発で生み出されるはずであると予言した．1968 年に発見された最初の 6 個のパルサーの 1 つに，かに星雲の中心にあり，1 秒間に 30 回脈動するパルサーがあった．このパルサーについて，今日，スピンしている中性子星であるという以外の妥当な説明は存在しない．ここに示されている中国の歴史的記録は，北宋王朝の間に観測された異常な天文学の現象を羅列している．それは 1340 年代に初版が印刷された，宋史（*Sung Shih*）の第 9 部，第 56 章 "Journal of Astronomy" に載っている．この合成写真に用いられている標準的な記録の写真は大英博物館が版権をもっており，彼らの許可なしに複製してはならない．

序　　文

本書は重力物理学（Einstein の "一般相対論" あるいは "幾何力学"）についての教科書である．主題全体にわたり 2 つのトラック（区分）を提供する．第 1 のトラックは主要な物理学のアイデアに焦点を合わせる．これに必要な数学知識として，ベクトル解析と単純な偏微分方程式だけを想定している．大学学部生レベル，あるいは大学院における 1 学期（2 学期制の）教科課程にも適当であり，重力理論を学ぶさいに不可欠な知識である．

それ以外の部分はトラック–1 をふくらませてトラック–2 となる．読者と教師は，トラック–2 のもっとも興味をもつ部分を選んで教えたり，読んだりしてもよい．多少の例外はあるが，トラック–2 の章はどれも，トラック–1 を学んだ読者に理解できる内容である．例外は，トラック–2 の各章の初めに置いた "付説" で，あるいは章内でトラック–1 からトラック–2 へ移行するところで，例外であることを明確に示した．

本書全体（トラック–1 のすべてとトラック–2 のすべて）は，大学院レベルでの 1 年間のコース用に執筆されている．もっとも，多くの教師はトラック–2 の教材を若干省略し，よりゆっくりしたペースを好むであろうけれども．本書全体は，平均的な Ph.D. が電磁気学についてもつ能力に匹敵する能力を，重力物理学についてもつよう意図されている．学生がこの能力を獲得するとき，平坦な時空における物理学の法則を知る（1–7 章）．対象の大きさを予測できる．また，現代微分幾何学を用いて計算することができ（8–15 章），そして，すべてそれぞれに適した精度で予測することができる．物理学に対する Einstein の幾何学的な枠組みが理解できる（16–22 章）．今日関心の的になっている応用，すなわち，パルサーおよび中性子星（23–26 章），宇宙論（27–30 章），Schwarzschild 幾何学および重力崩壊（31–34 章），および重力波（35–37 章）について知る．Einstein の理論の実験的テスト（38–40 章）を精査したことになる．微分幾何学についての現代数学の文献，そしてまた幾何力学およびその応用についての，物理学や宇宙物理学の雑誌の最新論文を読むことができるようになるだろう．もし場の方程式や，4 つの重大な応用，およびテストを越えて，さらに進むことを望むならば，本書の終わり（41–44 章）で一般相対論における若干の高度なテーマの簡潔な概観を見出すことができるだろう．ここで触れられるテーマの中で，超空間と量子幾何力学は特に注目に値する．これらの章で，優れた物理学的な問題と，今日の研究の筋道をたどることができる．

学科が物理学であろうとあるいは宇宙物理学であろうとあるいは数学であろうと，これまでよりも多くの学生は一般相対論について，たんなるおしゃべり以上のものを求めている．彼らは，一般相対論の主要な論題が明白に述べられるのを聞くことを望んでいる．彼らは "一般相対論の情報をどう汲み上げたらいいか" を知りたいと望んでいる．これまでよりも

多くの大学が，Einstein が 1915 年に発表した幾何力学について学ぶ本格的なコースを設けている．1864 年の Maxwell の標準的な電気力学と何と対照的であることか！ Einstein が Zurich で学生であった 1897 年には，ヨーロッパの半分もの大学で，電気力学は履修課程になかった*．“われわれは Maxwell の理論の解説をむなしく待った” と，Einstein の同級生の 1 人は言う．“とりわけ落胆したのは Einstein であった”**，なぜなら彼は電気力学を “当時のもっとも魅惑的なテーマ” と評価していたからである***．多くの学生が Einstein の理論を今日評価するように！

Maxwell の理論は，受け入れられるまでにかかった時間という点で，Einstein の理論を思い起こさせる．1904 年になってもなお，William Thomson, Lord Kelvin のような偉大な研究者による本で，“いわゆる ‘光の電磁気論’ はこれまでわれわれの役に立たなかった…私には，それはむしろ退歩のように思える…私に 1 つわかるのは，とても受け入れられることとは思わないのだが…伝播の線に垂直な電気変位が存在するはずだということ”****，という言葉を載せたと書かれていたのである．大西洋の（電信用の）海底ケーブルの開拓者は，ついには，この問題で彼自身が抱えていた初期の困難に絡んで，Maxwell の電気力学に，単位，そして測定の原理から，電線によって導かれる波の理論にまでどれほど豊かな貢献をしたのだろうか？ さて，今日 Einstein の幾何力学を研究する多くの者には希望がある．1920 年代までに，Kelvin のケーブルから Marconi の無線へ，Rutherford および Bohr の原子から高い周波数の回路の新しい技術までという発展の勢いが，Maxwell は正しいという一般的な確信を生み出した．疑問は減少した．自信は応用に通じ，そして応用は自信に通じた．

多くの人たちは，最初，一般相対論になかなか興味をもたなかった．なぜなら，一般相対論は応用価値が低そうにみえたからである．Einstein の理論は，今日多くの人たちの関心を引きつける．なぜなら，それは応用価値が高いからである．もはや目を引くのは，3 つの有名だが貧弱なテスト，重力による赤方偏移，太陽による光の湾曲，および太陽周りの水星の近日点の歳差運動だけではない．レーダー測距と一般相対論の結合は一歩一歩，より古い世代の太陽系の天体力学を新しいレベルの精度，新しい種類の効果，および新しい観点をもつ，新しい学問に変えつつある．1968 年に発見されたパルサーは，中心密度が非常に高くて（$\sim 10^{14}\,\mathrm{g/cm^3}$），Einstein の質量の予言が Newton の予言と 10〜100%異なる物体であり，1934 年に予言された中性子星として解釈する以外，受け入れられる解釈は見出されない．さらなる密度の増大およびそれに続く最後の重力崩壊については，Newton の理論は言及できない．対照的に，1915 年に発表された Einstein の幾何力学は，1939 年に，完全に崩壊した物体，“凍りついた星” あるいは “ブラックホール” の性質を予言した．1966 年までに詳細な計算により，白色わい星核をもつ星の崩壊においてこのような物体の形成の記述が可能になった．今日，最初のブラックホールを発見するという期待だけでな

* G. Holton (1965).
** L. Kolbros (1956).
*** A. Einstein (1949a).
**** W. Thompson (1904).
文献に対する引用は巻末の文献一覧に見出されるだろう．

く，複数の探求が進められるようになっている．回転はいかにブラックホールの性質に影響を及ぼすか？　このような物体が形成されるときに，重力放射のどのような種類のパルスが放出されるか？　伴星からのガスがブラックホールに積み重なるときに，どのようなスペクトルのX線が現れるか？*　このような探究やそれ以上の研究は，Einstein の場の方程式に関する 1916 年の Schwarzschild の静的で球対称な解に基づいており，それが実際に現代的な意味で初めて 1960 年に理解され，そして 1963 年に角運動量をもつブラックホールとして一般化された．

相対論の太陽系でのテストおよび応用（パルサー，中性子星，およびブラックホール）を越えて，幾何静力学（電気静力学と比較せよ！）および定常的な幾何学（定常的な電流によって引き起こされる磁場と比較せよ！）を越えて，幾何力学はその言葉の本当の意味において存在する（電気力学と比較せよ！）．空間の幾何学が，自由度と自らの力学をもつ新しい物理学的な実体であるという，Einstein の偉大な概念が，ここ以上に明白に抜きん出ているところはない．Einstein が 1918 年に予言した空間の幾何学の変形は，エネルギーを場所から場所へ移動することができる．今日，Joseph Weber の創始のおかげで，重力放射の検波器が開発され，選択された振動数で地球を流れ通るエネルギー束に上限を与えるべく進化している．どのような過程から，重要な重力放射が予測できるかを真に理解したことはかつてなかった．この新しい種類の信号を見つけ，これを用いて遠く離れた事象を分析することに，現在以上の関心がもたれたことはかつてなかった．重力放射が宇宙についての日常の新しい窓になるまで機器の感度を上げるべく，いくつもの実験室でこのような衝動を起こしたことはかつてなかった．

宇宙の膨張は，Einstein の幾何力学のすべてのテストの中で最大のものであり，そして宇宙論はすべての応用の中で最大のものである．言った本人も信じられないくらい奇抜な予言をして，宇宙の膨張が観測される（1929）何年も前に理論は膨張を予測していた．Hubble が膨張に対して与えた短い時間のスケールを無視して，この短い時間のスケールを歓迎し利用するべくこしらえた“理論”（“定常状態”，“連続的な創生”）に直面しつつ，標準的な一般相対論は，長い時間スケールの予言に断固として固執した．距離と時間の Hubble のスケールは間違っており，因子を 5 以上も伸ばさなければならないという天体物理学的な発見（1952）よりも何十年も前に．1958 年の天体物理学の証拠から演繹された宇宙における質量–エネルギーの平均密度と 30 程度の因子だけ一致しない状態で，Einstein の理論は高密度に対する過去の議論と同じく，“見えない物質の謎” を宣言し，銀河間の空間に物質の新しい兆候を発見する探求を続けるよう天体物理学者を激励する．一般相対論は原始宇宙の火の玉放射，およびその現在の温度に対する近似値さえも，放射が発見される 17 年前に予測した．この放射は，今日の宇宙よりも 1000 分の 1 小さい直線寸法をもち，体積にして 10 億（10^9）分の 1 だったときの宇宙の情報をもたらす．クエーサーは 1963 年に発見され，宇宙が現在の 1/4～1/2 の大きさであった，より最近の時代からの，より詳細な情報を供給してくれる．これらの物体は，他のどのような方法でも到達できない銀河

* 1973 年 4 月現在，白鳥座（Cygnus）X–1 および別な堅く締まった X 線源はブラックホールであるだろうという重要な兆候が存在する．

および宇宙の進化段階について教え，はるか彼方および遠い過去に明かりをつける信号灯以上のものである．クエーサーは宇宙の他のどのような場所にも比べようのない割合でエネルギーを供給する．クエーサーは驚くばかりの指向性で物質を放出する．クエーサーは，スペクトルのマイクロ波と可視光との間で異なる，困惑する時間的変化を示す．大きいスケールでのクエーサーと，小さいスケールでのより近い銀河の中心核は，一般相対論への挑戦を表明する．これらの謎を解くべく助力を！

もし一般相対論の豊かな応用が，多くの若い天体物理学者を Einstein の幾何力学の研究に引きつけるならば，同じように，物理学的な宇宙論，実験的な一般相対論，重力放射，および超高密度の物質からつくられる物体の性質に関心をもつ，物理学の世界の人々も引きつける．この主題を研究するまったく別の動機，Einstein の幾何学を物理学の方法としてみる胸躍る観点を味わうことについては，ここでは何も言わずにおく．なぜなら，それは本書のどの章でも，声高く語られていると考えるからである．

なぜ新しい本なのか？　一般相対論の新たな応用とそこにある並外れた物理学的重要性は，過去の優れた教科書を時代遅れにする．Wolfgang Pauli が 21 歳でこの主題について書いた偉大な論文すら，その中に含まれる．さらに，微分幾何学では，すっかり見方が変わってしまったから，以前の教科書の伝統的なテンソル計算法でしか訓練されていない学生は孤立する．そのような学生にとっては，最新の数学者の著書を読んだり，あるいは親しく助けてくれる人に彼の物理学的な問題の数学的な内容を説明することは，いずれも困難であるかあるいは不可能である．われわれとしてはこの主題について，現代数学で，今日最大の関心事になっている物理学的および天体物理学的応用を志向するに十分な量を提供し，自然の美と単純さに対する確信に突き動かされて新たな解説をしようとする以外に，われわれの 3 つの研究機関の学生に対する責任を果す道はなかった．

High Island
South Bristol, Maine
September 4, 1972

Charles W. Misner
Kip S. Thorne
John Archibald Wheeler

謝　　辞

深い感謝を，本書を可能にしていただいたすべての方々に捧げる．ある仲間は，この書物の 1 章に適応する特別な講義を与えてくれた．別な研究者は，強い潮汐重力によって真空から物質を生み出すことについての紛糾した歴史を，われわれのために明白にしてくれた．遠く離れた仲間は，物理定数が時間とともに変化しないことに関する文献について電話をくれた．ある学生は，ヌル電磁場のエネルギー密度に関する問題を提供してくれた．別な学生は，距離の関数としての有効ポテンシャルの曲線を与えてくれた．ある図書館員は，出版が不明確な論文がわれわれに届くように外国に手紙を書いてくれた．面倒見のよい秘書は，ある章の 3 度目の改訂版をタイプしてくれた．編集者とイラストレーターは，創造力を発揮して，解説における当惑させる問題を解いてくれた．度重なる創造力を発揮されたこのような温かい援助と幸せなよい協力をいただいた回数は，勘定できないくらいである．さらに，われわれが 150 人以上の仲間に負っている広大な恩義について感銘を抱く．各人の顔はわれわれの心に焼きつけられており，そして各人へのわれわれの感謝は真心からのものである．われわれはまた本書を執筆している間のもてなしに対して，California 工科大学，Dublin 高等科学研究所，Princeton 高等科学研究所，京都大学，Maryland 大学，Princeton 大学，Austin の Texas 大学に温かい感謝を捧げる．われわれは，U. S. S. R. 学術会議，Moscow 大学，そして Soviet の仲間に対して，彼らのもてなし，および，重力物理学についての Soviet の仕事によって，1971 年 6–7 月によりよい知識を得ることができた機会に対して，感謝する．本書に結実した研究への援助に対してわれわれは，奨学金に対して National Science Foundation（GP27304 および GP28027 を Caltech に，GP17673 および GP8560 を Maryland に，そして GP3974 および GP7669 を Princeton に），U. S. Air Force of Scientific Research（奨学金 AF49-638-1545 を Princeton に），U. S. National Aeronautics and Space Agency（奨学金 NGR 05-002-256 を Caltech に，NSG 210-002-010 を Maryland に），われわれの 1 人（K. S. T.）に与えられた奨学資金に対する Alfred P. Sloan Foundation，および John Simon Guggenheim Memorial Foundation，および，別な 1 人（C. W. M.）に与えられた奨学資金に対して All Souls College，Oxford，England に，感謝する．

目　　次

パートVI　宇宙　735

パート VII　重力崩壊とブラックホール　857

パート VIII　重力波　989

パートX　未開拓の領域　1191

コラム目次

記号の慣例表

参照	g 記号	Riemann	Einstein	4 次元時空の記号	
Landau, Lifshitz (1962) "空間的な慣例"	+	+	+		ラテン
Landau, Lifshitz (1971) "時間的な慣例"	−	+	+		ラテン
Misner, Thorne, Wheeler (1973) このテキスト	+	+	+	ギリシャ	
Adler, Bazin, Schiffer (1965)	−	−	−	ギリシャ	
Anderson (1967)	−	−	−[b]	ギリシャ	
Bergmann (1942)	−	−[a]	−	ギリシャ	
Cartan (1946)		−	−		
Davis (1970)	−	+	−		ラテン
Eddington (1922)	−	+	−	ギリシャ	
Ehlers (1971)	+	+	+		ラテン
Einstein (1950)	−	+	−	ギリシャ	
Eisenhart (1926)		+	−		
Fock (1959)	−	−[a]	−	ギリシャ	
Fokker (1965)	−	−	+		ラテン
Hawking and Ellis (1973)	+	+	+		ラテン
Hicks (1965)		+	+		
Infeld, Plebanski (1960)	−	+	−	ギリシャ	
Lichnerowicz (1955)	−	+	+	ギリシャ	
McVittie (1956)	−	+	−	ギリシャ	
Misner (1969a)	+	+	+	ギリシャ	
Møller (1952)	+	−	−		ラテン
Pauli (1958)	+	−	−		ラテン
Penrose (1968)	−	−	−		ラテン
Pirani (1965)	−	−	−		ラテン
Robertson, Noonan (1968)	+	+	−		ラテン
Sachs (1964)	±	+	+		ラテン
Schild (1967)	−	+	−		ラテン
Schouten (1954)		−	+		
Schroedinger (1950)	−	+	−		ラテン
Synge (1960b)	+	+	−		ラテン
Thorne (1967)	−	+	+	ギリシャ	
Tolman (1934a)	−	+	−	ギリシャ	
Trautman (1965)	−	−	−		ラテン
Weber (1961)	+	+	+	ギリシャ	
Weinberg (1972)	+	−	−	ギリシャ	
Weyl (1922)	−	+	+		ラテン
Wheeler (1964a)	+	+	+	ギリシャ	

[a] ***Riemann*** 成分の内容をより明らかにする変わったしるしは $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ に対して異なる符合を与える
[b] 注意：彼の $\kappa < 0$ は重力定数のマイナスである

記号の慣例

この書物は "Landau–Lifshitz の空間的な慣例" (LLSC) に従う．下の矢印はそこで "+" である記号を記している．前頁の表は異なる著者が用いる記号を示している．

$$+\boldsymbol{g} = -(\boldsymbol{\omega}^0)^2 + (\boldsymbol{\omega}^1)^2 + (\boldsymbol{\omega}^2)^2 + (\boldsymbol{\omega}^3)^2$$

$\boldsymbol{g}$ 記号
(col. 2)

$$+\mathcal{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla_u \nabla_v} - \boldsymbol{\nabla_v \nabla_u} - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]}$$

$$+R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha}$$

Riemann 記号
(col. 3)

$$+R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$$

Einstein と ***Riemann*** の記号の指数

$$\boldsymbol{Einstein} = +8\pi \boldsymbol{T}$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = +8\pi T_{\mu\nu}$$

Einstein 記号
(col. 4)

$$T_{\hat{0}\hat{0}} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_{\hat{0}}, \boldsymbol{e}_{\hat{0}}) > 0$$

すべての著者はこの "正のエネルギー密度" 記号について同意する

Riemann に対する上の記号選択は，上の曲率演算子 $\mathcal{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ におけるように，曲率 2–形式 [式 (14.19)] において，座標によらない方法に対して好都合である，また，行列演算 (演習問題 14.9) に対して好都合である．上に採用された記号をもつ ***Ricci*** と ***Einstein*** の定義はそれらの固有値（そして $R \equiv R^{\mu}{}_{\mu}$）を正の定まった計量をもつ標準球に対して正にする定義である．

標準的で幾何学的単位系で役に立つ定数*

基本定数

重力定数	$G = (6.673 \pm 0.003) \times 10^{-8}\,\mathrm{cm^3/g\,sec^2} = 1$
光速度	$c = (2.997\,924\,562 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^{10}\,\mathrm{cm/sec} = 1$
有用な組み合わせ	$G/c^2 = 0.7425 \times 10^{-28}\,\mathrm{cm/g} = 1.476\,64\,\mathrm{km}/M_\odot = 1$
	$c^5/G = 3.629 \times 10^{59}\,\mathrm{erg/sec} = 2.030 \times 10^5\,M_\odot c^2/\mathrm{sec} = 1$ （放射係数）
	$G/c = 2.226 \times 10^{-18}\,\mathrm{cm^2\,Hz/g} = 1$ （吸収係数）
	$c^2/G^{1/2} = 3.479 \times 10^{24}\,\mathrm{gauss\,cm} = 3.479 \times 10^{24}\,\mathrm{statvolt} = 1$
Planck の既約定数	$\hbar = (1.054\,592 \pm 0.000\,008) \times 10^{-27}\,\mathrm{g\,cm^2/sec} = 2.612 \times 10^{-66}\,\mathrm{cm^2}$
Planck の距離, L^*	$(\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.616 \times 10^{-33}\,\mathrm{cm}$
Planck の時間, T^*	$(\hbar G/c^5)^{1/2} = 5.391 \times 10^{-44}\,\mathrm{sec}$
Planck の質量, M^*	$(\hbar c/G)^{1/2} = 2.177 \times 10^{-5}\,\mathrm{g}$
Planck の密度, M^*/L^{*3}	$c^5/\hbar G^2 = 5.157 \times 10^{93}\,\mathrm{g/cm^3}$
電気素量	$e = (4.803\,25 \pm 0.000\,02) \times 10^{-10}\,(\mathrm{g\,cm^3/sec^2})^{1/2} = 1.381 \times 10^{-34}\,\mathrm{cm}$
微細構造定数の逆数, $1/\alpha$	$\hbar c/e^2 = 137.0360 \pm 0.0002$
電子の静止質量	$m_e = (9.109\,56 \pm 0.000\,05) \times 10^{-28}\,\mathrm{g} = 8.1873 \times 10^{-7}\,\mathrm{erg} = 0.511\,004\,\mathrm{MeV}$
	$= 5.9301 \times 10^9\,\mathrm{K} \quad = 6.764 \times 10^{-56}\,\mathrm{cm}$
陽子の静止質量	$M_p = (1.672\,614 \pm 0.000\,012) \times 10^{-24}\,\mathrm{g} = 1.503\,27 \times 10^{-3}\,\mathrm{erg} = 0.938\,259\,\mathrm{GeV}$
	$= 1.088\,83 \times 10^{13}\,\mathrm{K} \quad = 1.2419 \times 10^{-52}\,\mathrm{cm}$
Bohr 半径	$a_0 = \hbar^2/m_e e^2 = 0.529\,177 \times 10^{-8}\,\mathrm{cm}$
既約 Compton 波長	$\lambda\!\!\!^{-}_e = \hbar/m_e c = 3.861\,59 \times 10^{-11}\,\mathrm{cm}$
古典的な電子半径	$r_0 = e^2/m_e c^2 = 2.817\,94 \times 10^{-13}\,\mathrm{cm}$
原子エネルギーの単位	$e^2/a_0 = m_e e^4/\hbar^2 = 4.359\,83 \times 10^{-11}\,\mathrm{erg} = 27.2116\,\mathrm{eV} = 3.157\,86 \times 10^5\,\mathrm{K} = 3.602 \times 10^{-60}\,\mathrm{cm}$

換算係数（上の“基本定数”参照）

距　離	$1\,\mathrm{pc} = 3.0856 \times 10^{18}\,\mathrm{cm}$, 1 光年 $= 0.94605 \times 10^{18}\,\mathrm{cm}$, $1\,\mathrm{A.U.} = 1.495\,985 \times 10^{13}\,\mathrm{cm}$
時　間	1 年 $= 3.155\,692\,6 \times 10^7\,\mathrm{sec}$, 1 日 $= 86\,400\,\mathrm{sec}$, 1 恒星日 $= 86\,164.091\,\mathrm{sec}$
質量，エネルギー，温度	$1\,\mathrm{eV} = 1.160\,48 \times 10^4\,\mathrm{K} = 1.602\,192 \times 10^{-12}\,\mathrm{erg} = 1.782\,68 \times 10^{-33}\,\mathrm{g} = 1.324 \times 10^{-61}\,\mathrm{cm}$

電磁放射	
黒体放射	
エネルギー密度 $= aT^4$	$a = 7.5647 \times 10^{-15}\,\mathrm{erg\,cm^{-3}\,K^{-4}}$
放射強度 $= \sigma T^4$	$\sigma = \frac{1}{4}ac = 5.6696 \times 10^{-5}\,\mathrm{erg\,cm^{-2}\,sec^{-1}\,K^{-4}}$
$dE/d\lambda$ スペクトルの頂点	$\lambda_{\max}T = 0.289\ 79\,\mathrm{cm\,K} = (0.289\ 79\,\text{Å})(10^8\,\mathrm{K})$
電離した水素の自由–自由放射率	$\epsilon = (6 \times 10^{20}\,\mathrm{erg/g\,sec})(\rho_{\mathrm{g\,cm^{-3}}})T_{\mathrm{K}}{}^{1/2}$
電離した水素の自由–自由放射の不透明度	$\bar{\kappa}_{\mathrm{ff}} = (0.8 \times 10^{23}\,\mathrm{cm^2/g})(\rho_{\mathrm{g\,cm^{-3}}})T_{\mathrm{K}}{}^{-7/2}$
Thomson 散乱断面積	$\sigma_T = (8\pi/3)r_0{}^2 = 0.665\ 24 \times 10^{-24}\,\mathrm{cm^2}$
電離した水素の電子散乱による不透明度	$\kappa_{\mathrm{es}} = 0.398\,\mathrm{cm^2/g}$
宇　宙	
太陽質量	$M_\odot = (1.476\ 64 \pm 0.000\ 02) \times 10^5\,\mathrm{cm} = 1.989 \times 10^{33}\,\mathrm{g} = 4.9255\,\mu\mathrm{sec}$
太陽半径	$R_\odot = (6.9598 \pm 0.0007) \times 10^{10}\,\mathrm{cm}$
太陽光度	$L_\odot = (3.90 \pm 0.04) \times 10^{33}\,\mathrm{erg/sec} = (1.07 \times 10^{-26})c^5/G$
地球と太陽の距離	$1\ \mathrm{A.U.} = (1.495\ 985 \pm 0.000\ 005) \times 10^{13}\,\mathrm{cm} = 499.007\,\mathrm{sec}$
地球質量	$M_\oplus = (5.977 \pm 0.004) \times 10^{27}\,\mathrm{g} = 0.4438\,\mathrm{cm}$
地球の平均半径	$R_\oplus = 6.371\ 03 \times 10^8\,\mathrm{cm}$
天の川（銀河）の質量	$M_{\mathrm{G}} = 1.8 \times 10^{11}\,M_\odot = 2.7 \times 10^{16}\,\mathrm{cm} = 0.028$ 光年
天の川銀河の中心までの距離	$r_\odot = 10\,\mathrm{kpc} = 30\ 000$ 光年
天の川銀河の直径	$D_{\mathrm{G}} \sim (30 \sim 50)\,\mathrm{kpc} \sim (100\,000 \sim 150\,000)$ 光年
太陽の位置での天の川銀河の厚さ	$h_{\mathrm{G}} \approx 500\,\mathrm{pc} \approx 1500$ 光年
近傍の銀河：距離と質量	大マゼラン雲, 52 kpc, $10^{10.1}\,M_\odot$; 小マゼラン雲, 54 kpc, $10^{9.2}\,M_\odot$; アンドロメダ星雲 (M31), 570 kpc, $10^{11.5}\,M_\odot$.
銀河団：銀河の数，距離，直径	局部銀河群, 16 個; $d \sim D \sim 0.4\,\mathrm{Mpc}$; おとめ座銀河団, 2500 個, $d \sim 11\,\mathrm{Mpc}$, $D \sim 12\,\mathrm{Mpc}$; “典型的な” 銀河団, 130 個, $D \sim 3\,\mathrm{Mpc}$.
Hubble 定数	$H = 55\,\mathrm{km\,sec^{-1}\,Mpc^{-1}} = (1.7 \times 10^{28}\,\mathrm{cm})^{-1} = (18 \times 10^9\,\mathrm{yr})^{-1}$
輝く物質の全宇宙での平均密度	$\langle\rho\rangle = 2 \times 10^{-31}\,\mathrm{g/cm^3}$

*数値は，Söding *et al.* (1971)，Allen (1963) およびそれらの参照文献に基づいて計算した.

パート I

時空の物理学

ここでは読者はひとまず足早に（**1.1** 節），次に今度は少しゆっくりと，頼れる数学というコンパスを使うことなく，**Einstein** の幾何力学の本道と若干の脇道に導かれていく．

1章
幾何力学の要約

1.1 リンゴのたとえ話

1666 年のある日 Newton は田舎に出かけた．そして彼の姪が私に話したところによると，彼はリンゴが落ちるのをみて，すべての物体をその延長線がほぼ地球の中心を通過する直線に沿ってこのように引っ張る原因について，深い瞑想に導かれた．

VOLTAIRE (1738)

あるとき 1 人の学生が庭のリンゴの木の下に寝そべって，重力についての Einstein の観点と Newton の観点との相違について考えていた．彼はリンゴが近くに落ちてきたので驚いた．彼がリンゴをみたとき，蟻がその表面に沿って走り始めるのに気づいた (図 1.1)．彼の好奇心は目覚めた．彼は蟻がどのような航法に従っているのかを調べようと思った．拡大鏡で 1 つの軌道に注目し，ナイフを取り出し，軌道の 1 mm 上のリンゴの皮に切り込みをつくり，そして軌道の 1 mm 下にもう 1 つの切り込みをつくった．彼はこうしてできた小さい道の皮をむきとり，それを本の表面に置いた．軌道は，この道に沿ってレーザー光線のように直線的に走っていた．蟻は皮の細長い一片の始めから終わりまでの 10 cm を踏破するのに，これ以上経済的な経路を見出しえなかっただろう．リンゴの皮に沿う出発点から終点までの経路ではどのようなジグザグをしても，あるいはどのような滑らかな屈曲をしても，その長さは増大してしまっただろう．

「なんと美しい測地線だ」と学生は言った．

彼は，共通点 P からわずかに異なる方向へ出発している 2 匹の蟻に目を落とした．それらのルートは，リンゴの頂上の窪んだ領域を通過して，窪みの両側に 1 匹ずつ計 2 匹の蟻を導いていた．それぞれの蟻は自分の測地線を気まじめにたどっていた．2 匹の蟻はリンゴの皮の細長い部分を可能な限り直線的に進んで行った．しかし窪み自体の曲率のために，2 つの軌道は交わっただけでなく非常に異なる方向を向いていた．

*1 「Einstein の重力についての幾何学理論に，これ以上みごとな実例を何か求められるだろうか?」と学生はつぶやいた．「蟻はリンゴの柄に引き寄せられるかのように動く．距離を隔てて作用する Newton 的な力が働いていると考えられるかもしれない．しかし，蟻は自分の軌道に沿う局所的な幾何学以外に，どこからも運動の命令を受けていない．これ

*1 Newton の遠隔作用と対比した Einstein の物理学についての局所的観点

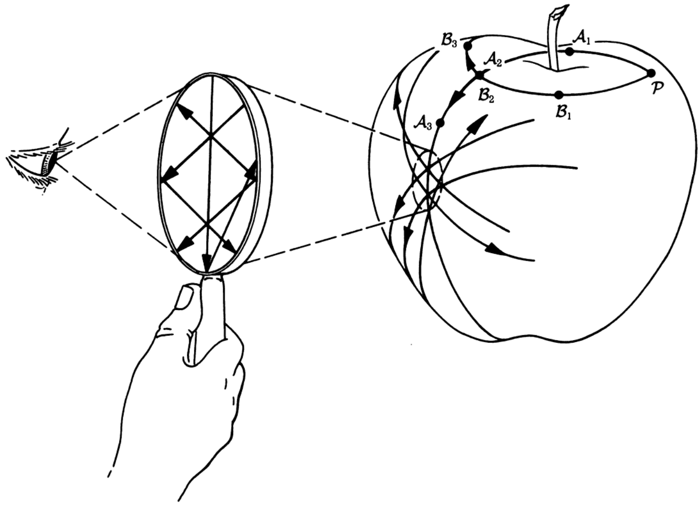


図 1.1 一般相対論の時空の Riemann 幾何学は，ここではリンゴの表面の 2 次元幾何学によって象徴されている．リンゴの表面上で蟻によってたどられる測地線の軌道は，自由粒子が時空をたどる世界線を象徴する．時空の十分に局所化された任意の領域内では，リンゴの 2 次元の表面上で拡大顕微鏡で眺めたときに軌道が直線コースによって表されるように（時空の幾何学の“局所 Lorentz 特徴”），幾何学は平坦であると理想化されうる．より大きな広がりをもつ領域内では，多様体の曲率（現実の物理学の世界の場合における 4 次元の時空．リンゴの場合における曲がった 2 次元の幾何学）が感じとれる．2 個の軌道 $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ は，最初は共通点 $\mathcal{P}$ から分岐して，後に接近し，交差し，そして非常に異なる方向に進んでいく．Newton 理論ではこの効果はここではリンゴの柄によって象徴される引力の中心から遠隔作用する重力に帰着される．Einstein によれば粒子はまさしく自らが存在する時空の幾何学から，局所的に運動の指示を受け取る．その指示は単純である．もっとも直線的な可能な軌道（測地線）をたどること．物理学は局所的であるほど単純である．それはただ大きい領域では時空は曲がり，軌道が交差するためである．幾何力学は，要するに，幾何学の物体に対する作用（元々は発散していく測地線を交差させる）と物体の幾何学に対する作用（リンゴの柄による近傍の表面上への作用によって象徴されるような，質量の集中によって起こる時空の曲がり）の二重の結果である．

は確かに，すべての物理学は“局所作用”によって生ずるという Einstein の概念である．Newton の物理学の“遠隔作用”の観点と何という相違であろうか！ 今や私は，この本の意味するところをもっとよく理解している．」

*2 そう言って彼は，本を開いて読んだ．「運動を，はるか彼方の対象に対して相対的に記述しようと試みるな．**物理学は局所的に解析されるときにのみ単純である．**そして人工衛星が [地球の周りの時空内で] 従う世界線は局所的に，どのような世界線もそうであるようにすでに直線である．“ずれ”や“重力”についてのこのような話をすべて忘れよ．私は宇宙船の中にいる．あるいは私は宇宙船の外，そして宇宙船の近くを浮遊している．私はどのような“重力”を感じるか？ まったく感じない．宇宙船はこのような力を“感じるか”？ いや，感じない．それではなぜ重力について話すのか？ 宇宙船と私は何の力も受けない時空の領域を旅行している．その領域での運動はすでに理想的な直線であることを認識せよ．」

食事のベルが鳴っていた．しかし学生は物思いにふけりながら座っていた．Einstein の重力についての幾何学理論を 3 つのアイデアに要約できるだろうか．(1) 局所的に，測地線は直線になる．(2) 空間と時間のさらに広い領域で，測地線は元は互いに遠去かろうとする

---

*2 物理学は局所的に解析されるときにのみ単純である

*3 が，時空の曲率で支配される割合で接近し始める．そして物体に対するこの幾何学的な効果が，われわれが今日あの“重力”という古い言葉によって意味するものである．(3) 逆に
*4 物体が幾何学を歪曲する．リンゴに窪みが生じるのは柄が存在するからである．話全体をより簡単に述べる方法がわかったように思う．**空間は物体に作用して，物体にどう動くかを教える．逆に，物体が空間に逆作用を及ぼし，空間にどう曲がるかを教える．**「言い換えると，ここにある物体が」と彼は言って身を起こし，柄をつまんでリンゴを取り上げ，「ここの空間を曲げる」と続けた．ここの空間に曲率を生み出せば，あそこの空間に曲率を押しつけることになる．リンゴの柄から指の幅だけ離れた測地線を忙しくたどってぐずぐずしている蟻をみつめながら，彼は続けた．「こうしてここの物体はあそこの物体に影響を及ぼす．それが Einstein の“重力”に対する説明である．」

そのとき食事のベルは鳴り止んでいた．そして彼は本と拡大鏡，それにリンゴをもって立ち去った．

1.2　座標をもつ時空ともたない時空

いま私は理解した ･･･ 重力加速度が落下する物体の性質に無関係であることは，以下のように表されるだろう．重力場（小さい空間的な広がりの）内で物体は重力の存在しない空間内と同じ振る舞いをする ･･･ この理解は 1908 年に得られた．一般相対性理論の構築になぜさらに 7 年を必要としたか？　おもな理由は，座標がそのまま計量の意味をもたねばならないという考えから解放されるのはきわめて難しい，ということである．

ALBERT EINSTEIN [Schilpp (1949), pp.65-67.]

*5 “曲がった時空”という概念に初めて接したとき，すべての単純な測定手段はこのよく知られていない状況ではその力を失ってしまうという恐怖以上に悩ましいものはない．巨大で異様に浸食された氷山の形を測定する仕事に直面して，波立つ大洋の表面で翻弄される小舟の中でメートル尺をもって立っている自分の姿を想像しよう．小舟自身の形が測定されるべきものであったならば，手続きは十分単純だろう．まず岸辺に小舟を引き上げ，それをひっくり返し，そして表面のここかしこの戦略的に重要な点に軽く杭を打ち込むだろう．杭から杭までの距離の測定は，表面の形を記録し明らかにするだろう．精度は，杭の数を任意に増やすことによって任意に高くできるだろう．そびえ立つ氷山にいくつかの切り込みピトン（piton，登山用の鉄釘）を打ち込もうと考えることは，さらなる大胆さを要する．しかしこれ以上ないくらい大胆だとしても，いかにして時空に釘を打ち込んで点を記すことができるか？　幸いにして，Einstein が初めて強調したように，自然は時空内の
*6 点を限定する自然自身の方法をもっている．点をそこで生ずるものによって特徴づけるの

---

*3　空間は物体にどう動くかを教える
*4　物体は空間にどう曲がるかを教える
*5　問題：曲がった時空でいかに測定するか
*6　答え：事象を，そこで起こるものによって特徴づける

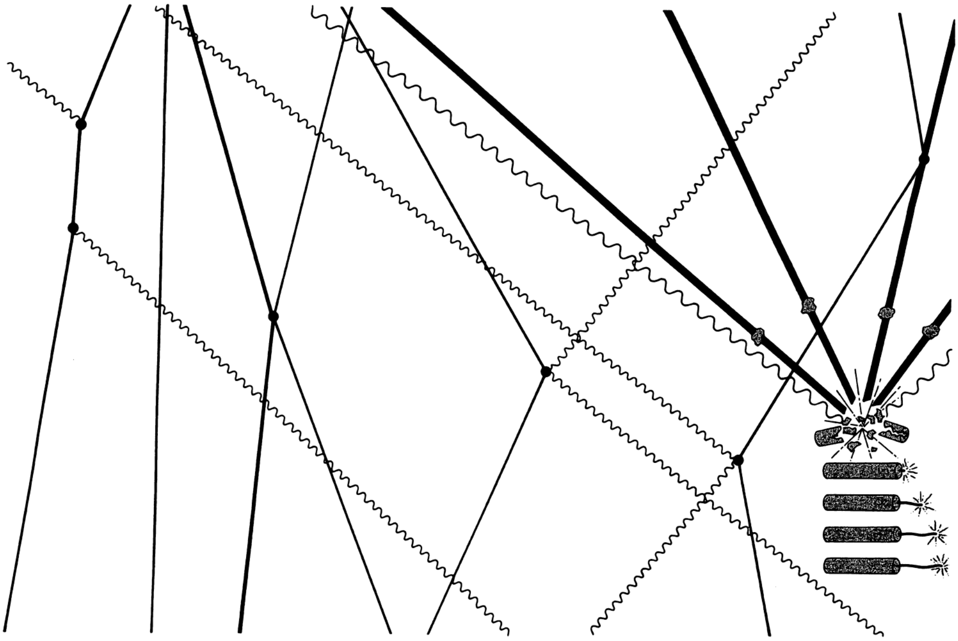


図 1.2 干し草でいっぱいの納屋内での藁の交わりは，時空を満たす世界線を象徴する．藁の交わりおよび曲がりによって，これらの世界線は座標系あるいは座標をまったく必要とせずに一義的に事象を示す．図において象徴される代表的な事象（黒点）は，左から右へ，光子の吸収，光子の再放射，粒子と粒子間の衝突，光子と粒子間の衝突，光子と粒子間の別な衝突，爆竹の爆発，およびその爆竹の 1 つの破片と外からきた粒子の衝突である．

である！ 時空内の点を“事象”で命名するのである．事象がどこに存在するかは，干し草でいっぱいの納屋（図 1.2）の中で 2 本の藁がどこで交錯するかと同じくらい明白に，そしてはっきりと定義される．事象がある光子とある粒子との衝突を明示するということは，十分な確認の手だてである．その光子とその粒子の世界線は過去に根ざし，そして未来に延びる．それらは近傍の世界線と豊かな接続の構造をもっている．これら近傍の世界線は，今度はより遠くの世界線と多くの方法でつながっている．そうすると，いかにして 1 つの事象の位置を記述できるか？ まず，どの世界線が事象に関与しているかを記述し，次に，これらの世界線のおのおのをたどろう．それらが遭遇する付加的な事象を記述する．これらの事象はさらなる世界線を取り出す．究極的に，納屋の干し草全体が目録に載るだろう．各事象は名づけられる．ロンドン市民がジェームズ通りとピカデリーの交点への経路を選ぶことができるのと同じくらい確かに，与えられた交わりへの道を見出すことができる．数はいらない．座標系はいらない．座標はいらない．

*7 日本のたいていの通りは名前をもたない．そして，たいていの家は番号をもたないということは，座標なしになしうることを実証している．2 つの世界線が交わる事象を確認する手段としての 2 つの世界線の名前は必要ない．ちょうど日本人の家をその世帯主の名で名づけることができるように，コラム 1.1 におけるように，時空内の特別な事象に任意の名前をつけることができるし，そしてしばしばつけている．

*7 事象の名前は任意でさえありうる

コラム 1.1　事象，座標，およびベクトルに対する数学的な記号

事象はアルファベット大文字 1 文字のスクリプト体で記される．　$\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$

下つき文字が用いられることもある．　$\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{B}_6$

事象 $\mathcal{P}$ の座標は　$t(\mathcal{P}), x(\mathcal{P}), y(\mathcal{P}), z(\mathcal{P})$

によって，あるいは　$x^0(\mathcal{P}), x^1(\mathcal{P}), x^2(\mathcal{P}), x^3(\mathcal{P})$

によって，あるいはより抽象的に　$x^\mu(\mathcal{P})$ あるいは $x^\alpha(\mathcal{P})$

によって，記される．ここにギリシャ文字の添字は 0,1,2, あるいは 3 の任意の値をとることができる．

時間座標（4 個の中の 1 個が選ばれこの役割を演ずるとき）　$x^0(\mathcal{P})$

空間座標は　$x^1(\mathcal{P}), x^2(\mathcal{P}), x^3(\mathcal{P})$

である．そして　$x^j(\mathcal{P})$ あるいは $x^k(\mathcal{P})$ あるいは $\cdots$

と記されることもある．添字のアルファベットは値 1，2，あるいは 3 をとると理解されねばならない．

省略表現の記号：座標 $x^\beta(\mathcal{P})$ の関数依存をそのまま書き表すとすぐに疲れてしまう．それで事象 $\mathcal{P}$ の座標として　x^β

および空間座標に対して省略した記号　x^j

を採用する．x^β を事象 $\mathcal{P}$ そのものを表すものと考えるようにする．しかし x^0, x^1, x^2, x^3 の値は $\mathcal{P}$ の選択だけでなく，座標の**任意の**選択にも依存することに気をつけなければならない！

同じ事象 $\mathcal{P}$ に対する**他の座標**は次のように記される．　$x^{\bar{\alpha}}(\mathcal{P})$ あるいはたんに $x^{\bar{\alpha}}$

$x^{\alpha'}(\mathcal{P})$ あるいはたんに $x^{\alpha'}$

$x^{\hat{\alpha}}(\mathcal{P})$ あるいはたんに $x^{\hat{\alpha}}$

例：図 1.3 で $(x^0, x^1) = (77.2, 22.6)$ および $(x^{\bar{0}}, x^{\bar{1}}) = (18.5, 51.4)$ は**同じ**事象に関係する．バー記号，プライム記号，およびハット記号は 1 つの座標系と他の座標系を区別する．それらを x ではなく添字につけることによって，後の記号を単純化する．

1つの座標系から他の座標系への**変換**は4つの関数によって達成される.

$$x^{\bar{0}}(x^0, x^1, x^2, x^3)$$
$$x^{\bar{1}}(x^0, x^1, x^2, x^3)$$
$$x^{\bar{2}}(x^0, x^1, x^2, x^3)$$
$$x^{\bar{3}}(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

それはより簡潔に次のように表される. $x^{\bar{\alpha}}(x^\beta)$

1つの事象 $\mathcal{Q}$ から近傍の事象 $\mathcal{P}$ に達する**間隔ベクトル***（小さい矢）は抽象的に次のように記される. $\boldsymbol{u}$ あるいは $\boldsymbol{v}$ あるいは $\boldsymbol{\xi}$ あるいは $\mathcal{P}-\mathcal{Q}$

それはまた$\mathcal{P}$と$\mathcal{Q}$との間の座標値の差*（ベクトルの"成分"とよばれる）によって特徴づけられる.

$$\xi^\alpha \equiv x^\alpha(\mathcal{P}) - x^\alpha(\mathcal{Q})$$
$$\xi^{\bar{\alpha}} \equiv x^{\bar{\alpha}}(\mathcal{P}) - x^{\bar{\alpha}}(\mathcal{Q})$$

1つの座標系から他の座標系へのベクトルの**成分の変換**は,変換方程式の偏微分によって達成される.

$$\xi^{\bar{\alpha}} = \frac{\partial x^{\bar{\alpha}}}{\partial x^\beta}\xi^\beta$$

なぜなら $\xi^{\bar{\alpha}} = x^{\bar{\alpha}}(\mathcal{P}) - x^{\bar{\alpha}}(\mathcal{Q}) = (\partial x^{\bar{\alpha}}/\partial x^\beta)[x^\beta(\mathcal{P}) - x^\beta(\mathcal{Q})]^\dagger$

Einstein の和の慣習がここで用いられる.

積で重複している任意の添字は自動的に足し合わされる.

$$\frac{\partial x^{\bar{\alpha}}}{\partial x^\beta}\xi^\beta \equiv \sum_{\beta=0}^{3} \frac{\partial x^{\bar{\alpha}}}{\partial x^\beta}\xi^\beta$$

---

* ベクトルのこの定義は平坦な時空でのみ成り立つ.曲がった時空での精練された定義（"接線ベクトル"）はここでは詳しく説明されない（9章をみよ),しかし平坦な幾何学の概念は,2点が十分近いときには,曲がった時空内でもよい近似で妥当する.

† これらの公式は,考察されている時空の領域が平坦であるとき,そしてさらに座標が Lorentz 的であるとき,厳密に正確である.それ以外ではそれらは近似である——点と点との間の間隔およびベクトルの長さが任意に小さくなるとき,それらの近似は任意によくなるけれども.

*8 しかし,座標は便利である.座標を使わないとしたら,どうやって,でたらめに登録されている事象の大きく厚い目録からある世界線に沿って,まず事象 Trinity,それから事象 Baker,それから事象 Mike,それから事象 Argus を容易に見出すことができるだろうか—しかもこのとおりの順序で.

事象を順序づけるために,座標を導入しよう!（図1.3をみよ.）座標は時空内の事象につき4個の添字をもつ.紙の上では,ただ2個だけだけれども.事象 Trinity は座標

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (77, 23, 64, 11)$$

を得る.事象に座標を与えるとき,滑らかさは求めるが,測定についてはまったく考えな

---

*8 座標は好都合な名づけの系を与える

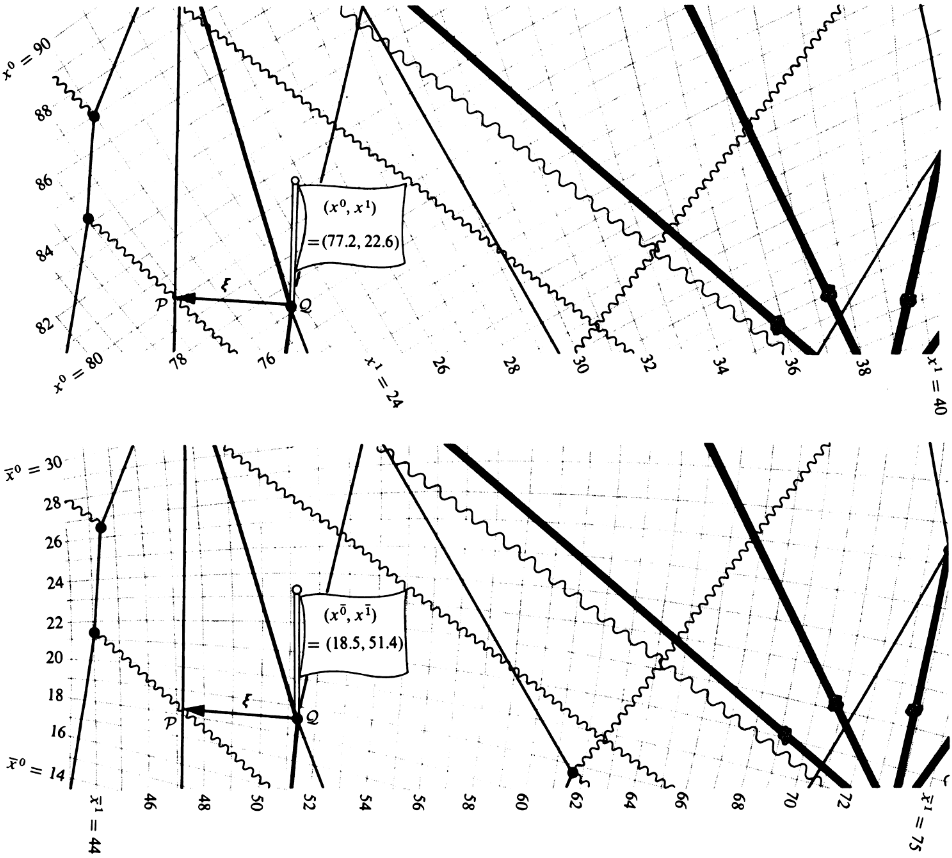


図 1.3　上：座標系によって事象に“電話番号”を割り当てること．座標系が“滑らか”であるということは，ほとんど同じ場所にある事象はほとんど同じ座標をもつということである．下：同じ事象の組を異なる座標系上で同等によい順序に置くこと．ここでは特別に 2 個の近傍の事象を選び出す．座標 $(x^0, x^1) = (77.2, 22.6)$ および $(x^{\bar{0}}, x^{\bar{1}}) = (18.5, 51.4)$ をもつ“$\mathcal{Q}$”と命名される事象，および座標 $(x^0, x^1) = (79.9, 20.1)$ および $(x^{\bar{0}}, x^{\bar{1}}) = (18.4, 47.1)$ をもつ“$\mathcal{P}$”と命名される事象．事象 $\mathcal{Q}$ と $\mathcal{P}$ は分離“ベクトル”$\boldsymbol{\xi}$ によって結ばれている（曲がった時空におけるベクトルの正確な定義は，2 点が無限小の分離 [分離 $\mathcal{P} - \mathcal{Q}$ の N 個の部分からなる約分] をもつ数学的な極限にいき，そして，生ずる局所的に平坦な空間で，分離に再び因子 N を掛ける [lim $N \to \infty$，“接線空間”，“接線ベクトル”] ことを要求する．ここでは事態を記述するあの厳密な方法を差し控え，そして完全な正確さを差し控え，したがって単語“ベクトル”の辺りの引用句に引用符をつけた）．おのおのの座標系で分離ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ は，“成分”（$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ 間の座標値における差）によって特徴づけられる．

$$(\xi^0, \xi^1) = (79.9 - 77.2, 20.1 - 22.6) = (2.7, -2.5),$$

$$(\xi^{\bar{0}}, \xi^{\bar{1}}) = (18.4 - 18.5, 47.1 - 51.4) = (-0.1, -4.3)$$

事象，座標，およびベクトルのさらなる議論に関してはコラム 1.1 をみよ．

*9　い．事象に対する 4 個の数は念入りな電話番号にほかならない．それらの“電話”番号を比較して 2 つの事象が近傍であるかどうかを見出そう．ただし，それらの電話番号の違いから，何 m 離れているかを知ろうと期待してはいけない！

*10　加入者が競合する電話システムのサービスを受けることを妨げるものは何もないし，また事象が別の座標系によって登録されることを妨げるものもない (図 1.3)．コラム 1.1 は，1 つの座標系と他の座標系との関係を，座標とそれらの変換を記すために用いられる記号

*9　座標は一般に長さを測定しない

*10　いくつかの座標系を同時に使用できる

とともに例示している.

*11 滑らかな座標系でそれらの座標値が近いことによって，近傍にあることがわかっている 2 つの事象を選ぼう．1 つの事象から他の事象へ小さい矢を描こう．このような矢はベクトルとよばれる（それは平坦な時空で，あるいは曲がった時空内でもほとんど無視できるような小さい長さでは，よく定義された概念である．曲がった時空での有限の長さに対しては，新しい名前 “接線ベクトル” のもとに精練し正確にしなければならない．このことについては 9 章をみよ)．このベクトルには，事象のように名前が与えられる．しかし “John” あるいは “Charles” あるいは “Kip” と名づけられようと，それは一義的で，よく定義された幾何学的な対象である．名前は便宜的なものであるが，ベクトルは名前がなくても存在する．

ちょうど 4 部分からなる座標

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (77, 23, 64, 11)$$

は，事象 “Trinity”（それはどんな別な事象が近傍にあるかを同定するために用いられる）に対してとりわけ有用な名前であるように，“4 部分からなる成分”

$$(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = (1.2, -0.9, 0, 2.1)$$

は

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (77, 23, 64, 11)$$

から

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (78.2, 22.1, 64.0, 13.1)$$

に達するベクトル “John” に対する好都合な名前である．ベクトルの成分をいかに扱うかはコラム 1.1 で調べられている．

*12 座標系はいろいろな形で不完全になりうる．図 1.4 は座標の特異性を図示している．座標の特異性の他の例については，地球表面上で北極に目を走らせよう．そこで出会う多くの子午線に注意せよ（“卵の木箱のセルがつぶれて容量ゼロになる”)．もっとうまくできないか？ 特異性なしに地球を覆う単一の座標系を見出せるだろうか？ 定理は No という．2–球を特異性なしに覆うために必要な “座標の断片” の最小数は 2 である（図 1.5)．この事情は点および事象は一次的であるが，座標はたんなる簿記の道具であることを改めて強調している．

*13 図 1.2 および 1.3 はいくつかの世界線と事象のみを示している．より詳細な図なら世界線と光線の迷路および両者の交わりを示すだろう．このような図から，理想化された極限へと想像の中で歩を進めることができる．すなわち，光線の無限に高密度の集まりと無限
*14 小の試験粒子の世界線の，無限に高密度の集まりを考えることができる．この理想化され

---

*11 ベクトル
*12 座標の特異性は通常避けられない
*13 時空の連続性
*14 時空の物理学に適用された多様体の数学

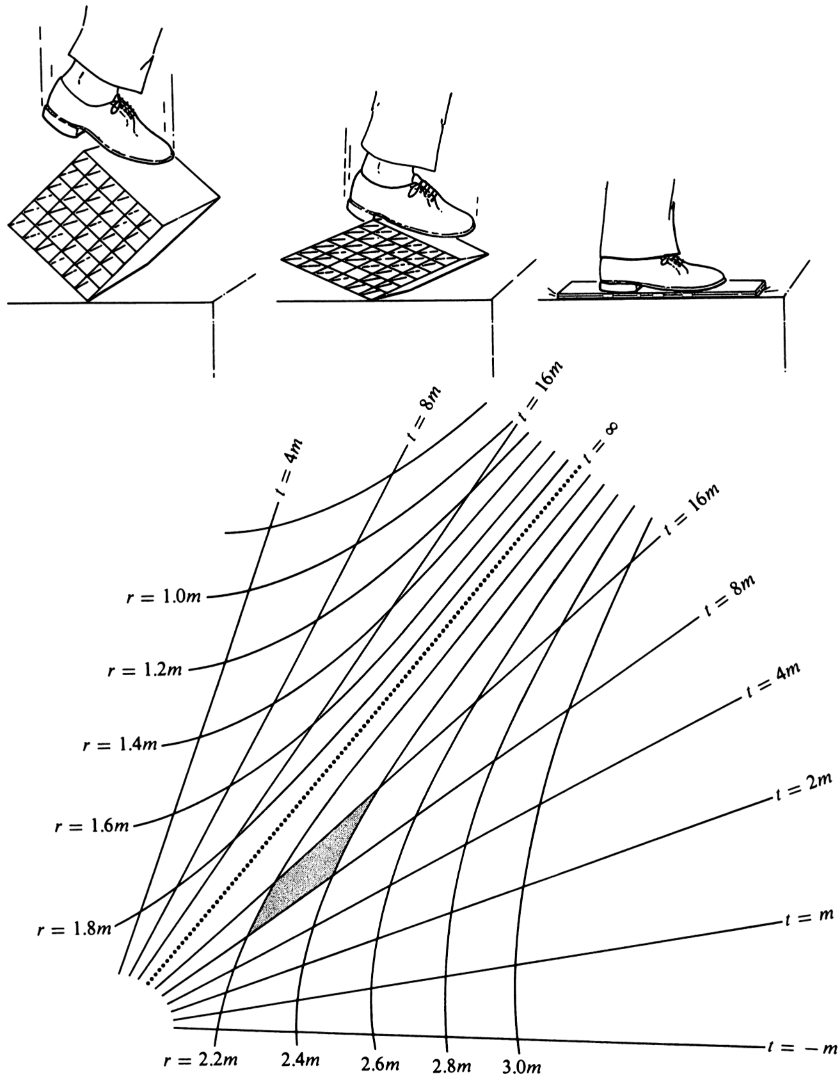


図 1.4　いかにして単なる座標の特異点が生ずるか．上：座標系は，"卵の木箱のセル" がゼロ体積に押しつぶされるときに**特異**なものになる．下：ブラックホール周りの幾何学を記述するのにしばしば用いられる Schwarzschild 座標 r, t におけるこのような特異点を示す例（31 章）．単純にするために角座標 θ, ϕ は削除されている．特異点は 2 つの方法で示される．第 1 に，点線に沿うすべての点は，それぞれまったく異なるけれども，(r, t) 値の同じ対によって明示される．すなわち，$r = 2m, t = \infty$．座標はこれらの点を区別するどのような方法も与えない．第 2 に，その 1 個が図内の灰色で示されている，"卵の木箱のセル" は，点線上でゼロ容積に崩壊する．要約すると，点線上では幾何学について何ら不思議なことは存在しない，すべての特異点は座標系に存在する（"電話番号の貧弱な系"）．混乱が t 座標が点線上で無限大に到達するという付加的な事情から生ずるということは，許されるべきでない．このような無限大は，もし t が

$$(t/2m) = \tan(\bar{t}/2m)$$

によって定義される，新しい座標 $\bar{t}$ で置き換えられるならば起こらないだろう．$t = \infty$ であるとき，新しい座標 $\bar{t}$ は $\bar{t} = \pi m$ である．$r, \bar{t}$ 座標は点線に沿う点を区別すべき何らの方法も依然として与えない．それらの座標は点線に沿う，ゼロ容積につぶれた "卵の木箱のセル" を依然として与える．

た物理的極限で，連続な 4 次元 "多様体"（ある程度の滑らかさの性質をもつ 4 次元空間）の数学的な概念が 1 対 1 対応をもち，そしてこの極限で連続な，微分可能な（すなわち滑らかな）座標系が機能する．そうすると数学は，物理学について論理的に考える道具を提

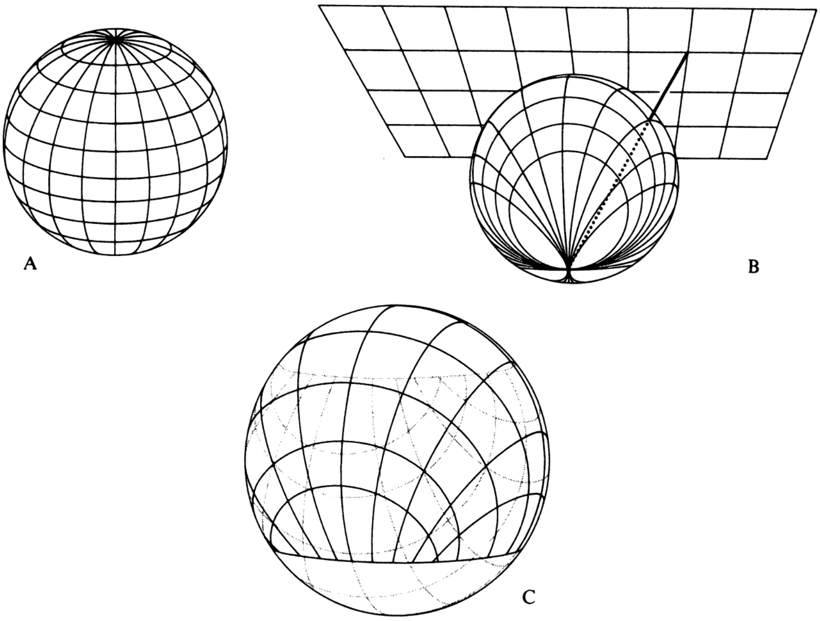


図 1.5 2–球上のよく知られた座標における特異点は，球を 2 個の重なる座標の断片で覆うことによって除去できる．A. 球面極座標，北極と南極で特異であり，そして国際日付変更線で不連続である．B. 北極に接している Euclid 2–平面上の Euclid 座標を，南極から引いた直線によって球に射影する．C. 2–球を 2 個の重なる座標の断片で覆う．1 個の断片は B と同じように構成され，北半球および南回帰線までの南部地方をも特異点なしに覆う．別な断片（灰色の線）はまたすべての回帰線および南半球までを特異点なしに覆う．

供する．

*15 単純なチェックで多様体の次元は明らかになる．n 次元多様体内に点 $\mathcal{P}$ をとろう．その近傍は n 次元の球である（すなわち，$n-1$ 次元の表面をもつ球の内部）．この球を，その境界が滑らかな多様体になるように選ぼう．この多様体の次元は $(n-1)$ である．この $(n-1)$ 次元多様体内に，点 $\mathcal{Q}$ をとる．その近傍は $(n-1)$ 次元の球である．この球を同様の操作が続けられるように選ぶ．この手続きによって最終的に，まだ 2 次元（2–球）とわかっていないけれど，2 次元である多様体にいたる．この 2 次元多様体内に，点 $\mathcal{M}$ をとる．その近傍は 2 次元の球（“円盤”）である．この円盤を滑らかな多様体（円）を境界にもつように選ぶ．この多様体内に，点 $\mathcal{N}$ をとる．その近傍は 1 次元の球であるが，まだ 1 次元（“線分”）であるかわからない．この対象の境界は 2 点である．この事情は介在する多様体は 1 次元であることを示している．したがってその前の多様体は 2 次元であった．そして同様のことをさらに続ける．元の多様体の次元は手続きに使われた点の数に等しい．時空に対しては，次元は 4 である．

次元についてのこの種の数学的な考察は，日常的な距離のスケールで，原子的な距離 (10^{-8} cm) で，核の規模 (10^{-13} cm) で，および高エネルギーでの量子電気力学における予言と観測との一致で判断するならば，さらに 10 の何乗かだけ小さい長さ（対応する de Broglie 波長 10^{-16} cm）でさえ，よく理解できる．さらに古典的な一般相対性理論は，時

*15 時空の次元

*16　空多様体を任意に小さい距離まで完全によく定義された決定論的な構造と考える．量子論的な一般相対性理論あるいは“量子幾何力学”は，そのように考えない．それはPlanckの長さ

$$
\begin{aligned}
L^* &= (\hbar G/c^3)^{1/2} \\
&= [(1.054\times10^{-27}\,\mathrm{g\,cm^2/sec})(6.670\times10^{-8}\,\mathrm{cm^3/g\,sec^2})]^{1/2} \\
&\qquad \times(2.998\times10^{10}\,\mathrm{cm/sec})^{-3/2} \\
&= 1.616\times10^{-33}\,\mathrm{cm}
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

の程度の距離での幾何学で激しい揺らぎを予言する．この予言から逃れるいかなる方法も見出されていない．これらの揺らぎはほとんど推定どおりに，小さい距離での空間に“多重連結の”あるいは“泡状の”性質を与える．この滑らかさの欠如は，Planckスケールの長さで次元という概念そのものからいかなる意味をもすべて奪ってしまうだろう．この問題のさらなる探求は，Einsteinの理論の最前線に1つの未開拓の領域を提示する（44章）．

*17　もし小さい距離での時空が，連続な多様体の数学的な模型とかけ離れているならば，より大きな距離でも数学的な理想と物理学的な現実との間に広い隔たりがあるのではないだろうか？　多様体のすべての点を定義するはずの，光線と無限小の試験粒子の世界線の無限に高密度の集まり，それらは確かに経験的な理解を超えている．電子よりも軽い（有限の静止質量をもつ）時間的な世界線上を動く粒子はいまだ見出されていない．電子の集まりは，たとえゼロ密度の電荷（同じ数だけ存在する e^+ および e^- の世界線）が与えられているとしても，質量密度をもつだろう．この密度は考察されている多様体そのものを曲げるだろう．無限に詳細な調査とは無制限の密度と，幾何学構造の無制限の攪乱を意味する．

*18　しかし，上述の意味での無限に詳細な調査が可能であることを要求するのは，電気力学あるいは気体力学におけると同じく，一般相対性理論では不適当である．電気力学は，空間内の各点および時間の各瞬間での電場および磁場の強さを述べる．これらの場を測定するために，電気力学は望む限りの高密度でいたるところに散乱される無限小の試験粒子を想定することにしている．しかし場に実在性を与えるために，試験粒子がそこに存在しなければならない理由はまったくない．場は，無限小の試験粒子が存在してもしなくても，いたるところで明白な値をもち，そしていやおうなしにそして連続的に決定論的な力学的展開を行っている．空間の幾何学についても同様である．

結論として，古典物理学の背景で時空を取り扱うときは，(1)“無限小の試験粒子”という概念および(2)同定できる事象の全体は4次元の連続多様体をつくるという理想化を受け入れる．本書の終わりでのみ，時空について語りそして時空を解析する方法に量子原理によって課せられる制限の若干を見てみることになるであろう．

---

*16　Planckの長さでの時空の滑らかさの破れ
*17　古典的な距離でさえ幾何学を定義することは困難?
*18　No：古典的な距離での幾何学を意味のあるものとして受け入れなければならない

1.3 無 重 量

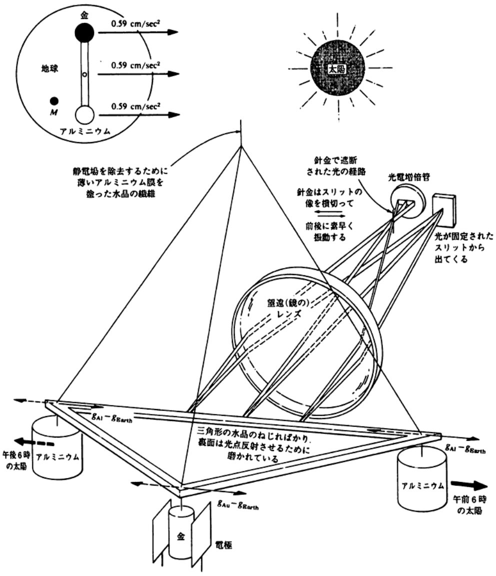
*19 “重力は偉大な神秘である．石を手から落とす．それが落下するのをみる．それが地面に落ちるのを聞く．なぜそうなるのか誰にもわからない．” 何という人を惑わす陳述！ 落下についての神秘？ 石は落下以外に何をすべきか？ 落下することが正常である．石が落ちていく途中で邪魔している物体があったらその方が異常である．もし “神秘” を追跡しようと望むならば，落下する石の軌道に従ってはいけない．代わりに衝撃に注目し，石を押して自然な “世界線”（すなわち，時空を通るその自然な軌道）から離れさせた力は何であったかを問うべきである．それは固体物理学の面白い問題に通じるだろう，しかしそれはここで関心のある話題でない．いま関心があるのは落下である．自由落下は無重量と同義である．物体を，時空を通る正常な軌道から離れるように追いやるいかなる力も存在しない．自由落下するエレベーターに乗っての運動は，無重量を経験させる．あるいは，地球に向かって直線的に落下する宇宙船に乗っての旅行も同様である．あるいは，さらに幸せなことに，円軌道を描いて地球に向かって一様な落下状態にある宇宙船に乗っての旅行も同様である．それぞれの場合，時空を通る自然な軌道に従っている．

*20 旅行者は 1 つの化学的な組成をもち，宇宙船は別の組成をもっている．しかしそれらはいっしょに旅行しており，旅行者は彼の動く宇宙船の中で無重量である．アルミニウムや金のような異なる核組成の物体は，Roll, Krotkov, and Dicke (1964) のあらゆる物理学の中でもっとも重要なヌル実験の 1 つによれば，10^{11} 分の 1 より正確に一致する加速度で落下する（図 1.6 をみよ）．個々の分子もまた，巨視的な物体と一致して落下する [Estermann, Simpson, and Stern (1938)]．そして個々の中性子も同様であり [Dabbs, Harvey, Paya, and Horstmann (1965)]，個々の電子 [Witteborn and Fairbank (1967)] および個々のミュー中間子 [Beall (1970)] も同様である．もっと重要なことは，これらの物体の 1 個を調べることではなく，いかに動くかを知るべく，空間内を調べなければならないということである．

宇宙船の内部をよくみてみよう．鍵，硬貨，ナッツ，およびエンドウマメが偶然かあるいは計画によって内部で自由に置かれている．宇宙船の壁によって外部世界のすべての視界から隠されて，おのおのの物体は宇宙船に相対的に静止している．あるいは一様な速度で直線的に部屋内を動いている．それは経験から明らかになっている知識である．

加速度の話はやめよう！ それは逆説的に，“すべての物体は同じ加速度で落下する” という事情からくる教訓である．それらの加速度は，結局，誰の過ちであったか？ それらの加速度は地上の観測者を登場させることから生じた．彼の足下の地表が押すことで，彼は自然な世界線から追いやられているのであった．彼の準備の欠陥によって，彼はそれらの全加速度の原因と

*19　自由落下は運動の自然な状態である
*20　すべての物体は同じ加速度で落下する



比	アルミニウム	金
中性子の数 / 陽子の数	1.08	1.5
K-電子の運動エネルギーの質量 / 電子の静止質量	0.005	0.16
核の静電気的な質量–エネルギー / 原子の質量	0.001	0.004

図 1.6　金 (Au) とアルミニウム (Al) の重力加速度は 10^{-11} あるいはそれ以上に良い精度まで等しいことを示した Roll–Krotokov–Dicke の実験の原理 (Princeton, 1964). 上部左側の隅に等しい質量の金とアルミニウムが支え棒からぶらさがっている. この棒は今度はその中点で支えられている. もし両物体が $g = 0.59\,\mathrm{cm/sec^2}$ の同じ加速度で太陽に向かって落下するならば, 棒は回転しない. もし金の質量がより高い加速度 $g + \delta g$ を受けるならば, 棒の金の端は地球に固定された枠内で太陽に向かって回転し始める. 12 時間後には太陽は異なった側にあって, 異なった方向に引っ張る. 交互に起こる回転力が, 正確な 24 時間の周期のために背景の雑音があっても認識される. 不幸にも, M に位置している実験者のような, 近傍に存在する任意の相当な質量は求められている効果を圧倒する回転力を生み出すだろう. したがって実際の装置は図の中心部に示されているようにしてあった. 1 個の金の錘と 2 個のアルミニウムの錘が水平な正三角形の 1 辺 6 cm の 3 つの隅で支えられた (三重の対称軸は重力場内のすべてのもっとも単純な非一様性に対してゼロ反応を与える). また, 観測者は彼ら自身の重力効果* を除去するためにすべての操作を遠く離れて遂行した. 平衡を乱さずに約 10^{-9} ラジアンほども小さいねじればかりの回転を見つけるために, Roll, Krotov, and Dicke は非常に弱い光線を水晶の三角形の光学的に平坦な裏面から反射させた. 源のスリットの像はこれとほとんど同じ大きさの針金の上に落ちた. 針金を越えて伝播させられた光は光電増倍管の上に落ちた. 分離した振動子の回路は像を横切って針金を 3,000 Hz で前後に駆動させた. 像が完全に中心に集められているときには, 振動数の偶数調波のみが光の強度に現れた. しかし, 像が 1 方向の側にわずかに変位させられていたときには, 基本振動数が光の強度に現れた. 光電増倍管の電気的な出力は, そうすると 3,000 Hz の成分を含んだ. この成分の大きさと符号は自動的に定められた. 等しく自動的に, 比例する D.C. (直流) 電圧は図に示されている電極に適用された. それはねじればかりをそのゼロ位置に戻した. はかりをそのゼロ位置に戻すために要求される直流電圧は, 振り子に作用する回転力の測度として記録された. この回転力は多くの日の周期にわたって Fourier 解析された. 24 時間周期の Fourier 成分の大きさは比 $\delta g/g = (0.96\pm1.04)\times10^{-11}$ を示した. アルミニウムと金はこうして, 表に要約されている両者の大きな差にもかかわらず, 同じ加速度で落下する.

* 別な摂動は以下の事柄に反して防御されなければならず, そして実際に防御された. (1) ねじれ平衡にある 1 辺上 10^{-3}cm ほどの大きさの位置にある小片の鉄は, 地球の磁場内で, 測定される回転力よりも 100 倍大きい回転力を与えただろう. (2) 1 個の質量の両側で放射の等しくない圧力は, もしこれらの両側間の温度差が 10^{-4}K を超えたならば受け入れられないほど大きい摂動を生み出しただろう. (3) 1 個の質量の一方の側からのガスの発生はロケットのように質量を推進させただろう. もし発生率が 10^{-8}g/day ほど大きかったならば, 計算される力は測定に影響するに足るだけの, $\sim10^{-7}\mathrm{g\ cm/sec^2}$ であっただろう. (4) 回転は装置を支えている控壁について測定された. この控壁自身が回転しなかったという保証として, 控壁は岩盤に固定された. (5) 静電力は除去された. さもなければ静電力は平衡を摂動させただろう.

この実験の理論的な暗示は 16 および 38 章でより詳細に議論されるだろう.

Braginsky and Panov (1971) は Moscow 大学で Dicke–Roll–Krotkov の実験に原理的に同等であるが, しかし修正された実験的な設備をもつ実験を遂行した. 金とアルミニウムの加速度よりもむしろプラチナとアルミニウムの加速度を比較して, 彼らは次のように述べる.

$$\delta g/g \lesssim 1\times10^{-12}$$

なった．彼を空間内に置き足にロケットをくくる．何の相違もない！* やはり彼がみるものに対する原因は彼にある．またしても彼は“すべての物体は同じ加速度で落下する”と記す．

コラム 1.2 どんなに多様な組成であってもその構成材料は同じ加速度で落下する（“基準的な世界線”）

Aristotle：“金あるいは鉛，あるいは重さをもつどのような物体も下向きの運動は，その大きさに応じてより速くなる．”

Galileo 以前の文献：金属の錘も木材の錘も同じ割合で落下する．

Galileo：(1) “金，鉛，銅，斑岩，および他の重い物質の球の空中での速さの違いは非常に小さいので，100 キュービット（約 46 m）の落下で，金の球は銅の球を確かに 4 本の指くらいしか追い越さないだろう．これを観察して，私はまったく抵抗のない媒質中ですべての物体は同じ速さで落下するだろうという結論に達した．” (2) 後により精度の高い実験で，“重力の効果を弱め” てさまざまな物体が同じ時間で斜面に沿って降下するのを見出す．

Newton：斜面は振り子の錘の弧で置き換えられる，異なる組成の物体に対する “落下時間” は 2 つの物質の振り子の錘の振動時間を比較して定まる．このような実験での精度の究極的な限界は，おのおのの振り子の有効長を定めるという問題によって制限される．(加速度) $= (2\pi/\text{周期})^2$(長さ).

Lorand von Eötvös, Budapest, 1889 and 1922：回転している地球上で，ある物質の下げ振り（糸の端につけられた錘）によって定められた鉛直線が，他の物質の下げ振りによって定められた鉛直線と比較された．2 本の切れない糸によってつるされた 2 つの質量が，時空（Eötvös の実験室の中央）を通る同じ世界線に沿って引っ張られた．もし糸が切られ自由になったら，それらはまた時空を通る同じ軌道（“試験粒子の基準世界線”）に従うだろうか？ もしそうならば，基準の自由落下世界線から実際の世界線を描写する加速度は標準的な値，$\boldsymbol{a}$ をもつだろう．Eötvös の実験は 2 つの質量の間での $\boldsymbol{a}$ の大きさについての一致を調べようと試みなかった．そうすることは (1) 糸を切ることおよび (2) 2 つの質量の落下を追跡することを要求しただろう．Eötvös は，2 つの質量に対する $\boldsymbol{a}$ の方向を比較するという，より高い精度でなし

* “何の相違もない” は，詳しく説明すると，“重力場” と加速度との間の局所同等性という Einstein の原理 (1911) に帰着する．**“もしわれわれが系 K および K′ は物理学的に厳密に同等であると仮定するならば，すなわち，もし系 K が重力場の存在しない空間内にあって，K が一様に加速されていると仮定するならば，われわれはこの経験法則の非常に満足な解釈に到達する．この厳密な物理学的同等性の仮定は，ちょうど通常の相対性理論が系の絶対速度について語ることを禁ずるように，基準系の絶対的な加速度について語ることを不可能にする．そして，それは重力場内でのすべての物体の等しい落下を当然のこととみえるようにする．”**

うる静的な観測を選んでこの方法を放棄した．したがって彼の議論は，支えている糸の方向が，“自由落下” あるいは “無重量” の基準世界線から質量が引きずられる方向を示す，と進んだ．この加速度は (1) いわゆる重力で内向きの‘加速度 $\boldsymbol{g}$’と，(2) 大きさ $\omega^2 R\sin\theta$（ω は角速度，R は地球の半径，θ は北極から実験の位置まで測定された極座標）の‘地球の回転方向に垂直で外向きの加速度’のベクトル合成である．この 2 番目の加速度は鉛直成分 $-\omega^2 R\sin^2\theta$ をもつ向心加速度と南向きで地表に平行な $\omega^2 R\sin\theta\cos\theta$ をもつ加速度とのベクトル合成である．それは糸を角度

$$\begin{aligned}\frac{\text{水平加速度}}{\text{鉛直加速度}} &= \frac{\omega^2 R\sin\theta\cos\theta}{g}\\ &= \frac{3.4\,\mathrm{cm/sec^2}}{980\,\mathrm{cm/sec^2}}\sin\theta\cos\theta\\ &= 1.7\times10^{-3}\text{ラジアン}\ (\theta=45^\circ\text{で})\end{aligned}$$

だけ地球の中心を質量を支えている点に結ぶ直線からずらす．2 つのつるされた物質に対する g の間の 10^8 分の 1 の相違 δg は，Budapest($\theta = 42.5^\circ$) で 1.7×10^{-11} ラジアンに等しい下げ振りの傾斜角の相違を生み出すだろう．Eötvös は 10^9 分の何がしかよりも小さい $\delta g/g$ を報告している．

Roll, Krotkov, and Dicke, Princeton, 1964：基準の加速度として，$\theta = 45^\circ$ で地球の回転によって生み出される定常的な水平加速度 $1.7\,\mathrm{cm/sec^2}$ でなく，太陽の引力によって生み出される日々交替する $0.59\,\mathrm{cm/sec^2}$ を用いた．1×10^{-11} よりも小さい $|g(\text{金})-g(\text{アルミニウム})|/g$ を報告した（図 1.6 をみよ）．

Braginsky, and Panov, Moscow, 1971：Roll, Krotkov, and Dicke と同じく，太陽の引力を基準の加速度として用いた．1×10^{-12} よりも小さい $|g(\text{プラチナ})-g(\text{アルミニウム})|/g$ を報告した．

Beall, 1970：地球の重力場あるいは太陽の重力場によって光子よりも少なく湾曲する粒子は，実際には光よりも速く進む．もしそれらが電荷を帯びているならば，あるいは他の電磁気的な構造をもっているならば，Čerenkov 放射を放出して，1 マイクロメートル以下の移動で速度を閾値以下に減ずるだろう．閾値は $10^3\,\mathrm{mc^2}$ 程度のエネルギーである．宇宙線シャワーでの超相対論的な粒子は容易には同定されない．しかし $10^{13}\,\mathrm{eV}$ のミュー粒子の観測は，ミュー粒子は 5×10^{-5} ほど “軽すぎる” ことはないことを示している．逆に，重力によって光子よりも強く束縛されている粒子 P は対生成 $\gamma\rightarrow \mathrm{P}+\bar{\mathrm{P}}$ を，1 マイクロメートル以下の崩壊の長さ以内で生ぜしめるに必要な運動量を移転させるだろう．$10^{13}\,\mathrm{eV}$ 以上のエネルギーをもつ光子の存在は $\mathrm{e}^{\pm}$ は 10^9 分の 5 だけ “重すぎる” ことはなく，$\mu^{\pm}$ は 10^4 分の 2 だけ重すぎることはない．$\varLambda, \varXi^-, \varOmega^-$ は数%だけ重すぎることはないことを示している．

物理現象はジェット機で飛行する観測者にとっても，地面上の人間にとってと同じように複雑にみえる．物理現象が単純にみえるように両方の観測者を除外しよう．代わりに，自由に動いている宇宙船に乗って旅行しよう．そこでみえるもの以上に自然なものは何もないだろう．すべての自由な物体は一様な速度で直線を動く．これが物理学をやる方法である!
*21 非常に特別な座標系，無重量である座標系，**局所慣性基準系**で仕事をしよう．あるいはこのような座標系で物事がいかにみえるかを計算しよう．あるいは—地面に基づいた基準系に拘束されているならば—非常に速く動く粒子と，非常に制限された経路の長さを用いよう．したがって理想的な自由落下の基準系と実際の地面に基づいた系は，実験のスケールについて無視できる量だけ一列の並びからはみ出る [1,500 m の線形加速器と 1 GeV の電子が与えられると，飛行時間 $\simeq(1.5\times10^5\,\mathrm{cm})/(3\times10^{10}\,\mathrm{cm/sec}) = 0.5\times10^{-5}\,\mathrm{sec}$，この時間内での落下 $\sim\frac{1}{2}gt^2 = (490\,\mathrm{cm/sec^2})(0.5\times10^{-5}\,\mathrm{sec})^2\simeq10^{-8}\,\mathrm{cm}$].

局所慣性基準系で物理現象を解析するとき，あるいはリンゴの皮の小さい切片上の蟻を追跡するときには，遠く離れたものとの関係はまったくなしで済ますことによって単純さを得る．物理現象は局所的に眺めたときのみ単純である．それが Einstein の偉大な教訓である．

*22 Newton は異なった意見を述べた．“絶対空間は，それ自身の性質として，外部の何ものにも関係なく，つねに同じで動きえない.” しかしいかにして Newton の絶対空間に意味を与え，その基礎を見出し，直線を記述するか？ 重力の現実の世界では，どんな粒子もけっして Newton の直線のどの 1 つにも従わない．彼の理想的な幾何学は観測を超えている．“太陽を通り過ぎる彗星は理想的な直線からずれる.” No である．その線を記述する舗道がない．“理想的な直線” は神話である．それはけっして起こらなかったし，そしてけっして起こらないだろう．

“[Newton にとって] 理論の展開に不可欠な，独立で絶対的な空間という概念に到達するには厳しい戦いを必要とした ⋯．Newton の決断は，当時の科学の状態で，唯一可能なものであったし，そしてとりわけ実りの多いものであった．しかし以後に続く問題の展開は，誰もおそらく予見できなかった遠回りの方法で進み，直感的によく基礎づけられてはいるが不適当な議論によって支えられているという，Leibnitz および Huygens の抵抗は，実際に正当化されたことを示した ⋯．それは非常に精力的な努力を必要とし，結果として [絶対空間という] この概念を克服した.”

[A. EINSTEIN (1954)]

*23 Einstein によれば，直接的で，単純でそして意味のあるものは，すべての局所慣性基準系での幾何学である．そこではすべての粒子は一様な速度で直線上を動く．局所慣性系を定義すると最初の数個の粒子に対してこの単純性が得られる（図 1.7)．このように定義された系では，すべての他の自由粒子もまた一様な速度で直線上を動くことが観測される．

---

*21 局所慣性系を用いて加速度を消去せよ

*22 Newton の絶対空間は観測できないし，存在しない

*23 しかし Einstein の局所慣性系は存在し，単純である

衝突および崩壊過程は，特殊相対性理論の運動量およびエネルギーの保存則に従う．これらすべての奇跡が生ずることは，素粒子物理学での何万もの観測によって証明されている
*24 ように，世界の機構が内的に働いていることについての証拠である．主旨は容易に要約される．(1) 物理学はつねにそしていたるところで局所 Lorentz 的である．すなわち，局所的に特殊相対性理論が成り立つ，(2) この単純性は局所 Lorentz 基準系（“慣性基準系”，図 1.7）でもっとも明白に現れる．そして (3) 局所 Lorentz 系の検査を行うには，無重量の検査を行うべし！

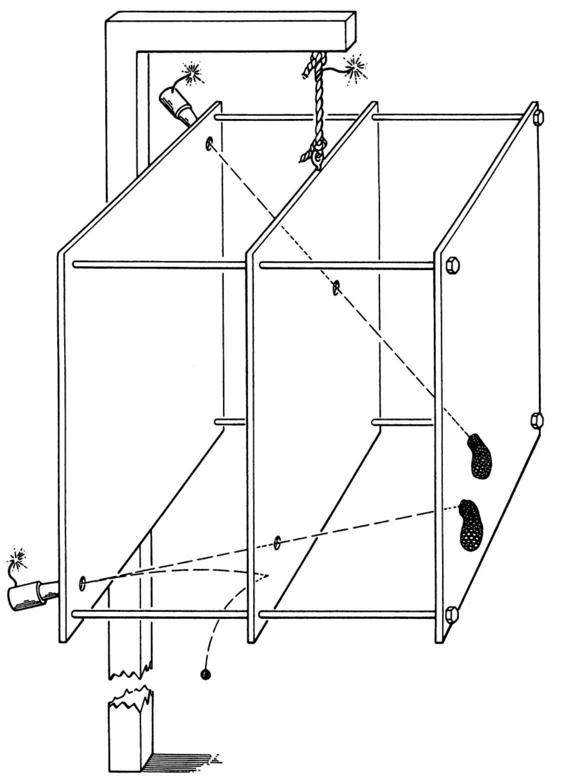


図 1.7　局所慣性基準系（“Lorentz 系”）に対するテストとしての “無重量”．基準系が回転せずに自由落下しているときに（“時空を通しての標準的な世界線”），おのおののバネで駆動される大砲が弾丸，つまり，何枚ものルーサイト（合成樹脂）内の一直線に並べられた穴を通して，織り合わされた網のポケットに向かう鋼鉄の球を，打ち込み続ける．もし大砲が発射したときに（“描かれている系は，網に引っ張られて時空を通しての標準的な世界線から離れて”），系が図示されているようにぶら下がっていたならば，貫通は失敗するだろう（図の下方にある曲がった跳飛する軌道のように）．Harold Waage は Princeton で一辺およそ 1 m の正方形のルーサイトを何枚ももつ，慣性基準系に対するこのような模型を構成した．時間の遅滞を象徴する “ヒューズ” は電気的な継電器によって置き換えられた．もし系が (1) 回転する，(2) 加速する，あるいは (3) 両者の任意の結合を行うならば，貫通は失敗する．述語 “局所 Lorentz 系” の意味をより完全に例示する，もっと容易に実現されうる方策を見出すことは難しい．

---

*24　局所慣性系では，物理学は Lorentz 的である

1.4 座標をもつおよびもたない，局所 Lorentz 幾何学

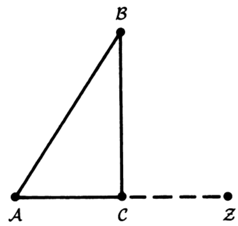
リンゴの表面についた親指の跡の空間では，幾何学は Euclid 的である（図 1.1，拡大鏡での眺め）．[*25] 時空で，制限された領域内で，幾何学は Lorentz 的である．リンゴの上で点と点との間の距離は Euclid の定理と一致している．時空で事象と事象との間の間隔（“固有の距離”，“固有時間”）は対応する Lorentz–Minkowski 幾何学の定理を満たす（コラム 1.3）．これらの定理は適当な，非常に特別な座標系で経験的に試される．Euclid 幾何学での Euclid 座標，物理学の局所 Lorentz 幾何学での Euclid 座標（局所 Lorentz 座標，局所慣性系）の自然な一般化．しかし，定理はそこに含まれるすべての座標系を超越している．定理は間隔あるいは距離に関係する．今日ではこれらの距離はその定義について，Euclid の時代ほど座標を頼りにしない．時空である大きい干し草の山の中の点，そしてこれらの点の間の距離．それが幾何学である！ それを座標に無関係な言葉であるいは座標の言葉で述べよ．それらは同じである（コラム 1.3）．

コラム 1.3 座標をもつおよびもたない局所 Lorentz 幾何学および局所 Euclid 幾何学

I. 局所 Euclid 幾何学

リンゴについた小さい親指の跡の幾何学は Euclid 的であると述べることは何を意味するか？

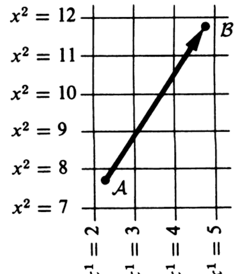
A. 座標に無関係な言葉（Euclid）：線 $\mathcal{AC}$ が与えられている．それを等しい距離$\mathcal{CZ}$だけ延長せよ．$\mathcal{B}$を$\mathcal{AZ}$上になく，$\mathcal{A}$および$\mathcal{Z}$から等距離の点とする．そうすると



$$s_{\mathcal{AB}}{}^2 = s_{\mathcal{AC}}{}^2 + s_{\mathcal{BC}}{}^2$$

（Pythagoras の定理，また他の Euclid 幾何学の定理）

B. 座標の言葉（Decartes）：任意の点 $\mathcal{A}$ から他の点 $\mathcal{B}$ まで，適当な（Euclid 的）座標で

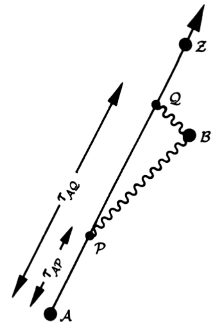


$$s_{\mathcal{AB}}{}^2 = [x^1(\mathcal{B}) - x^1(\mathcal{A})]^2 + [x^2(\mathcal{B}) - x^2(\mathcal{A})]^2$$

によって与えられる距離 s がある．親指の跡の内のすべての点 $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ に対して，これが真であるような任意の座標系を見出すことに成功すれば，(i) この座標系は局所 Euclid 的である，そして (ii) リンゴの表面の幾何学は局所 Euclid 的であると保証される．

*25 局所 Lorentz 幾何学は局所 Euclid 幾何学の時空類似物である

II. 局所 Lorentz 幾何学

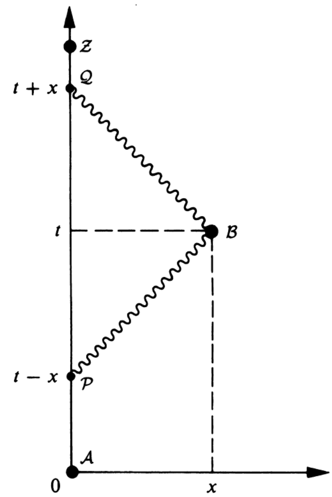


現実の物理世界で，時空の十分限られた領域の幾何学が Lorentz 的であると述べることは何を意味するか?

A. 座標に無関係な言葉 (Robb 1936)：$\mathcal{AZ}$ を自由粒子の世界線とする．$\mathcal{B}$ をこの世界線上にない事象とする．$\mathcal{B}$ からの光線が事象 $\mathcal{Q}$ で $\mathcal{AZ}$ に当たるとする．光線は，$\mathcal{AZ}$ に沿うより早い事象 $\mathcal{P}$ から出発して $\mathcal{B}$ に達するものとする．そうすると固有の距離 $s_{\mathcal{AB}}$（空間的な間隔）あるいは固有時間 $\tau_{\mathcal{AB}}$（時間的な間隔）は

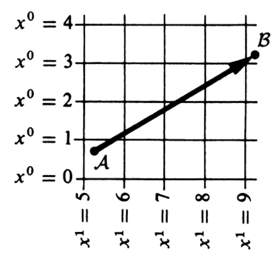
$$s^2_{\mathcal{AB}} \equiv -\tau^2_{\mathcal{AB}} = -\tau_{\mathcal{AQ}}\tau_{\mathcal{AP}}$$

によって与えられる．粒子が静止している局所 Lorentz 系で座標の方法を用いて，局所 Lorentz 幾何学に対する上述の尺度の証明.



$$\tau^2_{\mathcal{AB}} = t^2 - x^2 = (t-x)(t+x)$$
$$= \tau_{\mathcal{AP}}\tau_{\mathcal{AQ}}$$

B. 座標の言葉　(Lorentz, Poincaré, Minkowski, Einstein)：任意の事象 $\mathcal{A}$ から任意の他の近くの事象 $\mathcal{B}$ まで，適当な（局所 Lorentz）座標で



$$\begin{aligned} s^2_{\mathcal{AB}} = -\tau^2_{\mathcal{AB}} = &-[x^0(\mathcal{B}) - x^0(\mathcal{A})]^2 \\ &+ [x^1(\mathcal{B}) - x^1(\mathcal{A})]^2 \\ &+ [x^2(\mathcal{B}) - x^2(\mathcal{A})]^2 \\ &+ [x^3(\mathcal{B}) - x^3(\mathcal{A})]^2 \end{aligned}$$

によって与えられる固有距離 $s_{\mathcal{AB}}$ あるいは固有時間 $\tau_{\mathcal{AB}}$ がある．もしこれがすべての近傍の事象 $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ に対して局所的に真である任意の座標系を見出すことに成功すれば，(i) この座標系は局所 Lorentz 的であり，そして (ii) 時空の幾何学は局所 Lorentz 的であることが保証される.

III. 事実の陳述

リンゴの表面の幾何学はいたるところ局所 Euclid 的である．時空の幾何学はいたるところ局所 Lorentz 的である．

IV. 現代数学の言葉での局所幾何学

A. 任意の多様体に対する計量：リンゴ上の各点で，時空の各事象で，実際，任意の "Riemann 多様体" の各点で，**計量テンソル** $\boldsymbol{g}$ とよばれる幾何学的な対象が存在する．それは 2 つのベクトルの挿入に対する 2 つの入力投入口をもつ機械である．

投入口 1↓ ↓投入口 2

$$\boldsymbol{g}(\qquad,\qquad)$$

もし両方の投入口に同じベクトル $\boldsymbol{u}$ を挿入すれば，$\boldsymbol{u}$ の長さの 2 乗を取り出す．

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}^2$$

もし 2 つの異なるベクトル，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ を挿入すれば（どの順序でかは問題でない），"$\boldsymbol{u}$ の $\boldsymbol{v}$ についてのスカラー積" とよばれ，そして $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ と記される数を取り出す．

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$$

計量は線形機械である．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(2\boldsymbol{u}+3\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})&=2\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+3\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}),\\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{w})&=a\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+b\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})\end{aligned}$$

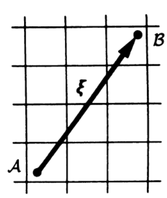
したがって，与えられた（任意の）座標系で，2 つのベクトルについての計量の操作はベクトルの成分によって双一次表現として書ける．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})&=g_{\alpha\beta}u^\alpha v^\beta\\ &\qquad(\alpha,\beta\text{についての和が意味されている})\\ &=g_{11}u^1v^1+g_{12}u^1v^2+g_{21}u^2v^1+\cdots\end{aligned}$$

量 $g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$（$\alpha$ および β は時空では 0 から 3 まで，リンゴ上では 1 から 2 まで及ぶ）は，"与えられた座標系での $\boldsymbol{g}$ の成分" とよばれる．

B. 局所 Lorentz 系および局所 Euclid 系での計量の成分：計量を局所幾何学についてのわれわれの以前の記述と結びつけるために，局所 Euclid 座標（リンゴ上で）あるいは局所 Lorentz 座標（時空で）を導入する．$\boldsymbol{\xi}$ を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ へ達する間隔ベクトルとする．

その局所 Euclid（Lorentz）座標は



$$\xi^\alpha = x^\alpha(\mathcal{B}) - x^\alpha(\mathcal{A})$$

（コラム 1.1 を参照せよ）．そうすると $\boldsymbol{u}_{\mathcal{AB}}$ の 2 乗された長さ（$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ までの 2 乗された長さと同じである）は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) &= g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \\ &= s_{\mathcal{AB}}{}^2 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 \quad \text{リンゴ上で} \\ &= -(\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 \quad \text{時空内で}\end{aligned}$$

でなければならない（上述の I.B. および II.B. を参照せよ）．したがって，計量の成分は以下のようである．

$$g_{11} = g_{22} = 1,\ g_{12} = g_{21} = 0,$$

$$\text{すなわち}\quad g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\quad \text{リンゴ上で (局所 Euclid 座標)},$$

$$g_{00} = -1,\ g_{0k} = 0,\ g_{jk} = \delta_{jk}\ \text{時空内で (局所 Lorentz 座標)}$$

局所 Lorentz 座標での計量のこれらの特別な成分は，Kronecker デルタ $\delta_{\alpha\beta}$ との類似により，以後 $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ あるいは $\eta_{\alpha\beta}$ と書かれる．マトリックス表記では以下のようになる．

$$\|g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\| = \|\eta_{\alpha\beta}\| = \alpha\downarrow \begin{array}{c|cccc} & \multicolumn{4}{c}{\text{— } \beta \longrightarrow} \\ & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

1.5 時　　　間

時間は運動が単純にみえるように定義されている．

時間はすべてのものが眠っているときに目を覚ましている．時間はすべてのものが倒れるときに直立している．時間はすべてを閉じ込め，そして閉じ込められないだろう．現在，過去，そして未来は時間の子どもである．おお推論，証人である，安定である．

VYASA. the **Mahabarata**　(*ca.* 西暦 400 年)

局所 Lorentz 系に相対的に，自由粒子は“一様な速度で直線上を動く”．“直線”の意味するものは，図 1.7 に例示されている模型の慣性基準系で十分明白である．しかし“一様

な速度”はどこに入ってくるか？ あるいは“速度”はどこに示されているか？ 図には 1 個の時計すら存在しない！

Lorentz 基準系のより完全に展開された模型には，図 1.7 におけるように，穴があるだけでなくおのおのの穴に時計で動くシャッターがあるだろう．発射されたものは，(1) 空間内の正しい領域を通過する．そして (2) 正しい時間間隔でその穴（“時間の窓”）を通過 *26 する場合に限り，目標に到達できる．そうすると時間はいかに定義されるか？ 時間は運動が単純にみえるように定義される！

正午から次の正午までの時間，1 日以上に広く用いられている時間の基準はない．しかし，1 日を基準にとってみよ．そうすれば掛時計も腕時計もみんな，単純な理由のために 1 日という基準と両立しないのを見出すだろう．地球はその軸の周りを自転し，また太陽の周りの軌道を回転する．太陽が空を横切る運動は太陽だけ，あるいは地球だけの効果からでなく，効果の大きさは異なるけれども組み合わさっている 2 つ天体から生ずる．地軸周りの地球の速い角速度（1 年あたり約 365.25 の完全な回転）は驚くほど一様である．地球の中心周りの太陽の見かけの角速度はそうでない（1 年あたり 1 回転）．その角速度は，地球がその軌道で太陽へ平均よりも 1%近づいたとき（離心率 0.017）平均よりも 2%大きい（Kepler の法則），そして地球が太陽から平均よりも 1%離れたとき 2%だけ小さい．最初の場合には，空を横切る太陽の瞬間回転率は 1 年あたりの回転で表すと，近似的に

$$366.25 - (1 + 0.02)$$

であり，他の場合には，

$$366.25 - (1 - 0.02)$$

である．“平均太陽日”は $24 \times 3{,}600 = 86{,}400$ 基準秒であるとすると，地球が太陽に平均よりも 1%近い（あるいは 1%太陽から離れている）とき，ある正午から次の正午までの基準秒数は標準よりも

$$\frac{0.02(1\,\text{年あたりの回転の減少})}{365.25(1\,\text{年あたりの平均の回転})} \times 86{,}400\,\text{秒} \sim 4.7\,\text{秒}$$

だけ大きい（あるいは小さい）．これは正午から正午までの時間についての簿記である．1 つの月から次の月までそれほど変化する時間の基準は受け入れられない．もし採用したら，それは光の速さを月ごとに変わらせることになるだろう！

この一様性の欠如は，ひとたび認められると（すでに古代人によって認められていた），太陽日を時間の基準として放棄することを余儀なくさせる．太陽日は運動を単純にみえるようにしない．太陽の周りの地球運動を除去する新しい基準に向かって，地軸周りの地球の自転に集中する．恒星日，星が天頂に達するのと次にその星が天頂に達する間の時間．そうである！ あるいは，測定精度が地球固有の角速度の変化をみせない限り，そうだ．どんな時計が正確さのために地球の自転に初めて挑戦するほど大胆であったか？ 宇宙の機構．

---

*26　局所 Lorentz 系の時間座標は運動が単純にみえるように定義される

Halley (1693) そして後に Kant (1754) を含め他の人たちが，当時一般に承認されていた時間の基準を用いて Newton 的重力理論で予言される太陽の食の全体の経路と，古代ギリシャ人およびローマ人が実際に問題の日に食を記録した遺跡の位置との間の明白な相違から，何かが間違っていると疑った．月は空間に動く影を投げる．日食の日に，その影は自転している地球の円盤に，しばしば長さが何千 km，しかし幅が一般的に 100 km よりずっと小さい黒いブラシ（brush）の一撃を描く．球をテーブル上で回転させ，影を正しくテーブル上に落とそうと望む者はきわめて厳密に 2 つの重要な項目，(1) 問題となる古代の日の各瞬間に，月は地球および太陽に対しどこにあったか，(2) 地球は当時から今日までに何度回転したか，を定めるべく過去にさかのぼって計算しなければならない．西暦 484 年 1 月 14 日の食を例としてとり（図 1.8），途中の 15 世紀で，地球が 1900 年（天文学的基準）にもったのと同じ角速度を地球に対して仮定せよ．間違いが明らかになる．アテネの観測者が黒いブラシの下にくるには，地球は 30° だけ戻されねばならない（あるいは月は計算された位置から移動した，あるいは 2 つの効果のある組合せ）．それらの 30°（あるいは，もし効果の一部が月の角運動量の遅い変化によるならば，これより小さい）を取り戻すためには，地球は過去において今日よりも速く回転せねばならなかった．相違の大部分を地球の自転速度の低下（現代の原子時計による証拠と両立する自転速度の低下率）のせいにし，当時から今日まで一様な低下率（経過時間の一次のべきに比例する角速度の補正，すなわち経過時間の 2 乗に比例する角度の補正そのもの）を仮定して，

30°　あるいは 2 時間　　　　1,500 年前

の補正から中間の時間に対する以下の補正

$30°/10^2$，あるいは　1.2 分　　　　150 年前，

$30°/10^4$，あるいは　0.8 秒　　　　15 年前

を見積もる．こうして地球の自転速度の低下を時間の基準としてみて，天体の軌道運動によるその置き換えをより良い基準，すなわちさらに“運動が単純にみえる”ようにする基準としてみる．ついで天文学的時間そのものも，現代では参照の基準として原子時間に取って代わられつつある（コラム 1.4“現代の時間”をみよ）．

*27 時間がいかに定義されているかをよくみるには悪い時計をみよ．t を“良い”時計の時間（局所慣性系の時間座標）とする，それは時空の局所領域を通過する自由粒子の軌道が直線にみえるようにする．$T(t)$ を“悪い”時計の示度とする，それは時空の局所領域を通過する自由粒子の世界線が曲がってみえるようにする（図 1.9）．加速度の古い値は，新しい（“悪い”）時間に翻訳されると，

$$0=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dt}\frac{dx}{dT}\right)=\frac{d^2T}{dt^2}\frac{dx}{dT}+\left(\frac{dT}{dt}\right)^2\frac{d^2x}{dT^2}$$

*27　良い時計は自由粒子の軌道が直線にみえるようにする

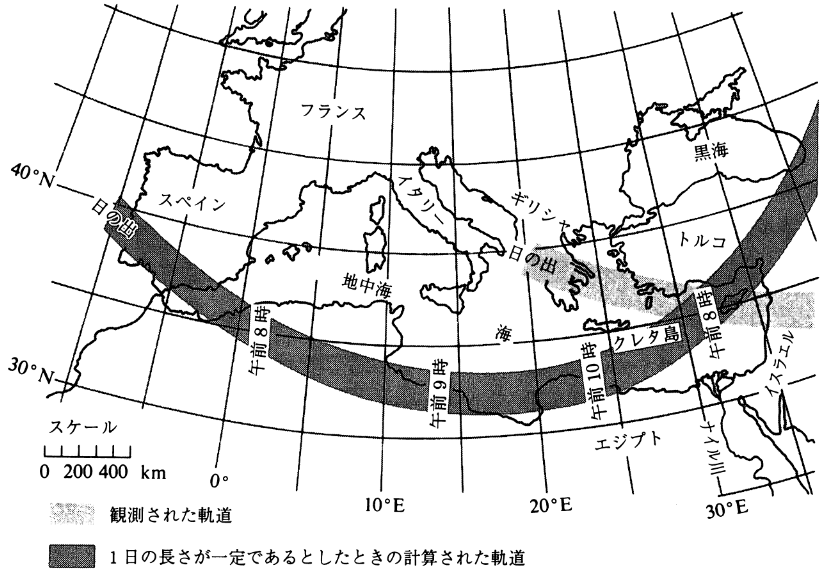


図 1.8　西暦 484 年 1 月 14 日の食に対する全体の計算された経路（左：地球の 1900 年での角速度に相対的な地球のスピン–下向きでない場合に基づいた計算）が，アテネに（日の出時で）全体の中心を置くに足るだけ前方に向かわせるのと同じ経路と対照される [30° に非常に近い変位．計算で採用される減速度の実際の数値，32.75 arc sec/(century)^2]．これは，とくに本書のためにもっとも親切にこの図を準備してくれた，Tyne（タイン）近くの Newcastle 大学の地球物理学および惑星物理学教室の F.R. Stephenson 博士によれば，“すべての古代ヨーロッパの食の中で疑いもなくもっとも信頼できる”．彼はまたナポリの Marinus によるアテネの Proclus（西暦 485 年アテネで死亡）の最初のギリシャ語で書かれた伝記から一節を伝えている，その節は “彼の死に先行する年に欠けている驚異的なものはまた存在しなかったと述べている．たとえば，昼間に夜が降りるようにみえたという太陽のこのような偉大な食．なぜなら深い暗黒が生じたので星が空に現れさえした．これは，太陽がやぎ座に留まったときに東の空に起こった” [Westermann and Boissonade (1878) から]．

この食に対するこの 30° は，他の食に対して対応する量とともに “正しい” 補正を呈示するか？ “正しい” は容易な言葉でない．地中海領域での太陽の 1 つの皆既食から別な皆既食までは通常多くの年数である．ギリシャやローマの世界の種々な地方は平和と安定した生活の一様なレベルをもつこと，そして食を観測してそれを後生のために書き留めることは何であるかという一様な基準をもつことからさらにかけ離れていた．もし過去の記録の多数が不幸にも断片的であるならば，よりいっそうの不幸は近年における若干の判断力のない “研究者” が飛び込んでこれおよびあれの歴史的な事象をこれおよびあれの計算された食と同一視する自発性であった．幸いにも，今日までに地球の回転の永続的な減速度について，天文学的と歴史的との両方の，厳密な学問のもっとも高い伝統において，偉大な文献が利用できる．O. Neugebauer (1959) および Munk and MacDonald (1960) の本の他に，Curott (1966) の論文，およびこれらの研究者によって引用されている項目，以下のものは主要な項目である．(それらへの指示に対してわれわれは Otto Neugebauer 教授に感謝する—下に引用されている別な Neugebauer に関係しない！) 古代の記録に対しては，および古代の食の軌道の計算に対しては，F.K. Ginzel (1882, 1883, 1884)，計算された食の軌道の地図書に対しては，Oppolzer (1887) および Ginzel (1899)，そして証拠の厳密な解析に対しては，P.V. Neugebauer (1927, 1929, および 1930) をみよ．この特別な食はその歴史的な記録の偉大な信頼性の故に任意の別な食よりもむしろ選ばれた．

となる．粒子の見かけの加速度を説明するために，新しい時間の使用者は偽りであると承知している力を導入する．

$$F_x = m\frac{d^2x}{dT^2} = -m\frac{\left(\dfrac{dx}{dT}\right)\left(\dfrac{d^2T}{dt^2}\right)}{\left(\dfrac{dT}{dt}\right)^2} \tag{1.2}$$

Newton が “時間は一様に流れる”（$d^2T/dt^2 = 0$）という原理を設定したとき，彼が “良い” 時間を考えていたことは “悪い” 時間のこの例から明白である．時間は運動が単純にみ

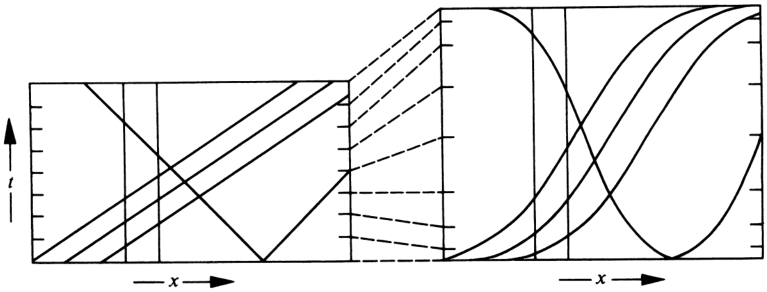


図 1.9　時空の同じ領域を通して動く同じ自由粒子について与えられている地図に示されているように，良い時計（左）対 悪い時計（右）．右に描かれている世界線は，力が作用しているという印象を与える．時間の良い定義はこのような偽りの力を除去する．点線は 2 つの時間スケール上での対応する瞬間を結びつける．

えるように定義される！

一様性の原理は，それだけをとれば，時間変数のスケールを自由に残す．量 $T = at + b$ は t 自身と同様に要求を満たす．計時の歴史は，時間の単位と起点にいろいろな選択がされたことを明らかにする．どの選択もそれを認めるには，ファラオの布告から委員会の公式声明にいたるまで，ある人間の行為を必要とした．この本では，光が 1 cm を進むのに要する時間の量が時間の単位であると定められている．空間的な間隔および時間的な間隔は 1 つの同じ幾何学的な単位：センチメートルで測定される．他のどのような決定も事実上単純なものを解析するとき，それを複雑にするだろう．他のどのような選択も Minkowski の言葉，「今後空間自身および時間自身は，たんなる影の中へ消え去ることを運命づけられている．そして両者の一種の結合のみが独立な実在を保存するだろう」を実践しないだろう．

*28

今日，距離よりも時間をより正確に測定できる．それは，基本的な単位がセンチメートルであるととることに反する議論であるか？　イイエ，このセンチメートルの定義を受け入れさえすれば．**幾何力学的な基準のセンチメートルは，回帰年，1900.0 を束ねた 2 つの "有効な分点" 間の間隔の分数**

$$1/(9.460546\times10^{17}) \tag{1.3}$$

である． 回帰年，1900.0 は，それを知らしめている明確さおよび精度からすでに国際的に基準間隔として認められている．基準委員会は，31,556,925.974 秒が基準間隔となるよう**暦表秒を定義**した．光の速さが完全な精度でわかっていたら，基準委員会は基準間隔内のセンチメートルの数を同時に与えることができたであろう．しかしそうでない．光の速さは 6 桁までしか知られていない．さらに，**国際的なセンチメートル**は 9 桁までのみ Kr^{86} のシアン色（橙赤）の波長で定義されている（波長の 16,507.6373 倍）．しかし基準秒は 11 桁まで与えられている．われわれは幾何力学的な基準センチメートルを任意に定義して

$$9.4605460000\times10^{17}$$

個のこのようなセンチメートルが基準的な回帰年 1900.0 に含まれるように基準秒を適応させる．光の速さはそうすると正確に

*28　時間を測定するためのわれわれの単位の選択: **幾何力学的なセンチメートル**

$$\frac{9.4605460000\times10^{17}}{31,556,925.974} \text{ 幾何力学的な cm/sec} \tag{1.4}$$

となる．これは 1967 年に知られている“国際的な cm/sec”の単位での光の速さ

$$29,979,300,000\pm30,000 \text{ 国際的な cm/sec}$$

と両立する．最近の測定 [Evenson 他，(1972)] は前述の 1967 年の議論の詳細を変えるが，原理を変えない．

コラム 1.4　現代の時間

1956 年以前は，秒は平均の太陽日の分数 1/86,400 として定義された．

1956 年から 1967 年までは“秒”は回帰年 1899 年 12 月 31 日 00 時間 00 分 00 秒の分数 1/(31,556,925.9747) として定義された暦表秒を意味した．

1967 年以来，基準的な秒は，Cs^{133} の基底状態の 2 つの超微細準位間の無摂動マイクロ波遷移の 9,192,631,770 周期として定義された，SI (Système International) 秒であった．

時間**間隔**に対する前述の単位の展開のように，時間**座標**の展開はいくつかの段階によって記されてきた．

普遍的時間，UTO は，歴史的に実際行われたように日の勘定に基づいている．言い換えれば，地軸周りの地球の実際の自転に，歴史的には Greenwich 天文台で定められるように，平均の太陽時間（“時間の方程式”によって，すなわち，地球が太陽に近いときは太陽から離れているときよりも速く動くことについて訂正された太陽の位置）に基づいている．

UT1，“航行者の時間スケール”は地軸周りの地球の動揺に対して補正されたものと同じ時間である（$\Delta t \sim 0.05$ 秒）．

UT2 は半年および 1 年の周期をもつ原因不明の周期的揺らぎに対して補正された UT1 である（$\Delta t \sim 0.05$ 秒，1 日に 0.003 秒まで測定される）．

暦表時，ET（重力理論および天文学的な観測と計算によって定義されている）は，本質的に太陽の周りの地球の軌道運動によって定まる．“測定の不確定さは正確な暦表時の実現を 9 年平均で約 0.05 秒にまで制限する．”

調和された宇宙的な時間（UTC）は WWV のような放送局に基づく放送である．それは 1971 年 2 月に国際的に採用され，1972 年 1 月 1 日に施行された．時計の進度は原子時計によって 1 年間可能な限り一様であるように調節されている（原子時計は 1 分につき $\sim 0.1\times10^{-6}$ 秒まで，時計の集合に対しては 1 日あたり 0.1×10^{-6} 秒の拡散率で測定される）．しかしまれに 1 秒の追加や削除—“跳躍秒”とよばれる—で変わるので UTC は航行者の時間スケール，UT1 と 0.7 秒以上に変わらない．

時間が 1 秒間未決定のままでおかれる

6 月 30 日の真夜中，世界中の時間が 1 秒間止まるだろう．すべてのラジオの時報信号は Greenwich 平均時間を 1 日につき 1 秒の 1000 分の 3 の地球のロスと一致させるために “閏秒” を挿入するだろう．

王立 Greenwich 天文台から GMT (Greenwich Mean Time) 真夜中での放送局への信号 (7 月 1 日，BST (Bureau of Standards Time) 午前 1 時) は 6 個の短いピッピ (時報の音) であるだろう，それは 55 秒から 60 秒までを記し，続く 1 秒で信号が長く延び，新しい分を記す．

Time suspended for a second

Time will stand still throughout the world for one second at midnight, June 30. All radio time signals will insert a "leap second" to bring Greenwich Mean Time into line with the earth's loss of three thousandths of a second a day.

The signal from the Royal Greenwich Observatory to Broadcasting House at midnight GMT (1 am BST July 1) will be six short pips marking the seconds 55 to 60 inclusive, followed by a lengthened signal at the following second to mark the new minute.

THE TIMES
Wednesday
June 21 1972

前述の説明は J. A. Barnes (1971) から抜き取られている．以下は the Time and Frequency Division of the U.S. National Burau of Standards in Boulder, Colorado によって親切に供給された表 (受領した時点で公表されていない) から抜粋されている．

あるよく知られた時計の時間保存の能力は以下のとおりである．

腕時計の調整 (1960)　1 分/月

水晶時計 (1921–1930)　1 マイクロ秒/日
　　　　1 秒/年

水晶腕時計 (1971)　0.2 秒/2 月
　　　　1 秒/年

セシウムビーム (原子共鳴，Cs^{133})，(1952–1955)　0.1 マイクロ秒/日
　　　　0.5 マイクロ秒/月

ルビジウム気体細胞 (Rb^{87} 共鳴)，(1957)　0.1 マイクロ秒/日
　　　　1 – 5 マイクロ秒/月

水素メーザー (1960)　0.01 マイクロ秒/2 時間
　　　　0.1 マイクロ秒/日

メタン安定レーザー (1969)　0.01 マイクロ秒/100 秒

1.6 曲　率

重力は消滅したようにみえる．いたるところ時空の幾何学は局所 Lorentz 的である．そして Lorentz 幾何学では，粒子は一定速度で直線上を動く．そのどこに，どのような重力的なかたよりがみられるか？ 答えのために，リンゴに戻る（図 1.1）．再びリンゴの表面の蟻の測地線軌道を検査しよう．最初共通点から分岐した 2 つの近傍の測地線の再収束に注意する．現実の物理学の世界での類似物は何であろうか？ どのような類似した概念が，物理学は局所的に解析されるときにのみ単純であるという Einstein の指示に合致するだろうか？ 宇宙船から地球までの距離をみるな．宇宙船から近傍の宇宙船までの距離をみよ！あるいは，2 つの宇宙船間の引力について起こりうるいかなる問題も避けるために，地球の周りの軌道内の 2 つの近傍の試験粒子をみよ．その状況における非局所的な要素（地球）に注意を奪われるのを避けるために，地球周りの軌道とともに，宇宙船内部でも調査をとり行え．しかしこの領域はすでに局所慣性系として勘定されてしまっている！ どのような重力的な物理学がそこにみられることになるか？ 何もない．宇宙船に従って互いに相対的に，2 つの試験粒子は一様な速度で予期される測定の精度まで直線上を動く（コラム 1.5 "平坦
*29 さに対するテスト" をみよ）．さて，手がかりになる点が現れ始める．測定の精度である．もし 2 つの試験粒子が地球の中心を通る共通の半径に沿っているならば，相手からの，もし 2 つの試験粒子が半径に垂直に分離して存在するならば相互への，加速度が徐々に認められ始めるまで測定の精度を高めよ．Newton 的言葉では，これらの加速度の原因は地球の潮汐を生み出す作用である．しかし，宇宙船内の観測者にとって，地球はみられるはずがない．そして Einstein に従って，観測者は運動を局所的に解析することが重要であることを知る．観測者は基準の試験粒子からの新しい試験粒子の隔たりをベクトル ξ^k（$k=1,2,3$: 局所 Lorentz 系で測定された成分）で表す．この隔たりの加速度に対して，Newton 物理学から見出されるものがわかる．もし直交座標系の z 軸が半径方向にあるならば，

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi^x}{dt^2} &= -\frac{Gm_{\text{慣習}}}{c^2r^3}\xi^x,\\ \frac{d^2\xi^y}{dt^2} &= -\frac{Gm_{\text{慣習}}}{c^2r^3}\xi^y,\\ \frac{d^2\xi^z}{dt^2} &= \frac{2Gm_{\text{慣習}}}{c^2r^3}\xi^z\end{aligned} \tag{1.5}$$

証明：Newton 物理学では 1 個の粒子の地球の中心に向かう加速度は慣習的な時間の単位で $Gm_{\text{慣習}}/r^2$ で，ここに G は重力の Newton 定数，$6.670\times10^{-8}\,\mathrm{cm^3/g\,sec^2}$ であり，そして $m_{\text{慣習}}$ は慣習的なグラムの単位で表された地球の質量である．幾何学的な時間の単位（光の進行時間のセンチメートル）で，加速度は $Gm_{\text{慣習}}/c^2r^2$ である．2 個の粒子が r に垂直に距離 ξ だけ離れているとき，1 つの下向きの加速度ベクトルは他の下向きの加速度ベクトルと角度 ξ/r だけ一致しない．したがって，1 つの粒子は他の粒子に向けて前述の量だ

*29　重力は近傍の試験粒子の相対加速度において明白である

コラム1.5　平坦さに対するテスト

1. 調べている領域の空間の広がり L (cm あるいは m) および時間の広がり (光の進行時間の cm あるいは m) の範囲を指定せよ.

2. この領域内での試験粒子の隔たりを測定できる精度 $\delta\xi$ を指定せよ.

3. 時空のこの領域を通る最初平行な世界線に沿って動く試験粒子の運動を追跡せよ.

4. 世界線が運動のすべての方向に対して精度 $\delta\xi$ まで平行に留まるときは, "そのように制限された領域内で, そしてそのように指定された精度まで, 時空は平坦である" という.

例：ちょうど地球の表面上, 100 m×100 m×100 m (空間の広がり), 光の進行時間 10^9 m ($T_{慣習}$～3 秒) に対して伴れる領域. 地球の質量, $m_{慣習} = 5.98\times10^{27}\,\mathrm{g}, m = (0.742\times10^{-28}\,\mathrm{cm/g})\times(5.98\times10^{27}\,\mathrm{g}) = 0.444\,\mathrm{cm}$ [式 (1.12) をみよ]. 潮汐を生み出す加速度 ${R^z}_{0z0}$ (最初静止しており, 鉛直方向の高さ 1 cm だけ離れている 2 個の試験粒子の z 方向の相対加速度) は

$$
\begin{aligned}
(d/dr)(m/r^2) &= -2m/r^3 \\
&= -0.888\,\mathrm{cm}/(6.37\times10^8\,\mathrm{cm})^3 \\
&= -3.44\times10^{-27}\,\mathrm{cm}^{-2}
\end{aligned}
$$

("鉛直方向の隔たりの 1 cm あたりの光の進行時間の 1 cm あたりの相対的な変位のセンチメートル"). 鉛直方向の隔たり $\xi^z = 10^4$ cm をもつ 2 個の試験粒子は, 時間 $t = 10^{11}$ cm (このような遅く動く試験粒子に対しては時間と固有時間との間の相違は無視できる) で相対的な変位

$$
\begin{aligned}
\delta\xi^z &= -\frac{1}{2}{R^z}_{0z0}t^2\xi^z \\
&= 1.72\times10^{-27}\,\mathrm{cm}^{-2}(10^{11}\,\mathrm{cm})^2 10^4\,\mathrm{cm} \\
&= 1.72\,\mathrm{mm}
\end{aligned}
$$

を得る (相対的な隔たりでの変化は他の運動方向に対して, より小さい). 100 m 間隔にわたる測定で達成できる最小の不確定さ $\delta\xi$ がこの数値よりも "悪い" (1.72 mm を超える). ときは, 精度のこの水準まで考察されている時空の領域は平坦として取り扱われる. 測定における不確定さが 1.72 mm よりも "良い" (小さい) ときは, その精度まで平坦とみなされうる時空の領域を見出すために, 注意をより小さい空間領域, あるいはより短い時間間隔, あるいはその両方に制限せねばならない.

け加速される．隔たりが r に平行であるときには，相対加速度は r と $r+\xi$ での Newton 加速度を求め，そして差をとる（$\xi\times d/dr$）ことによって与えられる．Q.E.D. 結論として，Newton 重力理論の “局所的な潮汐を生み出す加速度” は，Einstein が求めるよう命じる重力の局所的な記述を与える．

*30 この潮汐を生み出す加速度は曲率とどのような関係にあるか？（コラム 1.6 をみよ.）再びリンゴあるいは，さらに良いものとして半径 a の球（図 1.10）をみよう．近傍の測地線の隔たりは “測地線の逸脱の方程式”

$$d^2\xi/ds^2 + R\xi = 0 \tag{1.6}$$

を満たす．

ここに $R = 1/a^2$ は表面のいわゆる Gauss 曲率である．リンゴの表面に対しては，曲率 R が場所から場所へ変化するという 1 つの相違をもつが，同じ方程式が当てはまる．

2 次元以上の空間では，若干の相違はあるが，同じ一般的な形の方程式が当てはまる．2 次元では，1 つの測地線の近傍の基準測地線に相対的な加速度の**方向**は，それらの隔たりのベクトル $\boldsymbol{\xi}$ が基準測地線に垂直である（図 1.10 をみよ）という要求によって一義的に定まる．3 次元あるいはより高次元ではそうでない．そこでは $\boldsymbol{\xi}$ は基準測地線に垂直に留まりうるが，しかしその周りに回転する（図 1.11）．こうして，相対加速度を一義的に指定するには，その大きさだけでなく，その方向をも与えねばならない．

3 次元およびより高次の次元での相対加速度は，そうすると，ベクトルである．それを

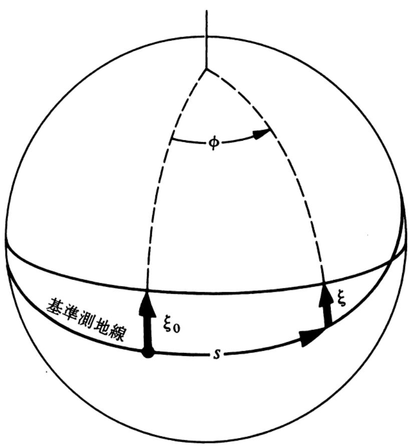


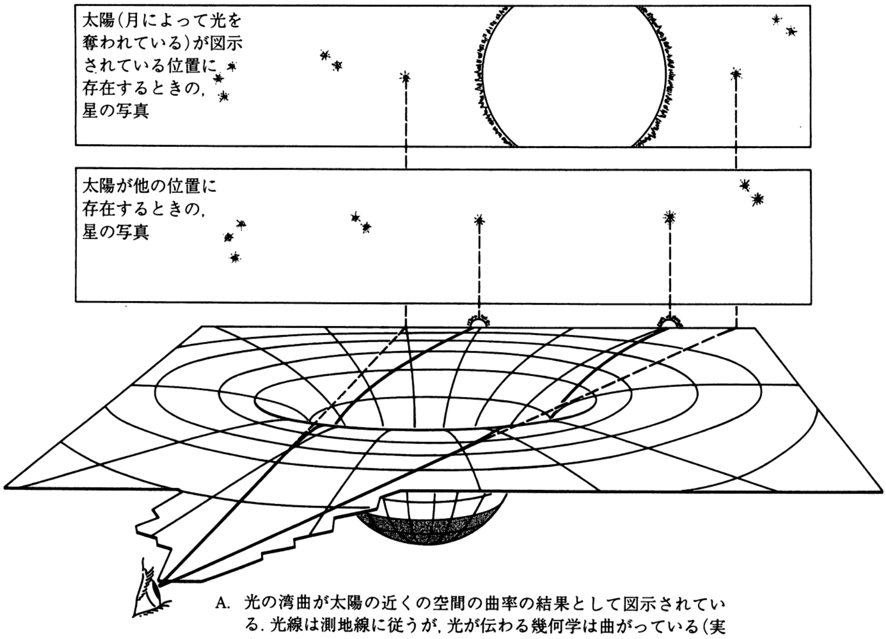
図 1.10　2 個の近傍にある測地線の “分離の加速度” に表されている曲率．2 個の測地線が最初平行で，距離（“測地線の逸脱”）ξ_0 だけ離れており，測地線に沿って距離 s たどるときに最早平行でない．分離は $\xi = \xi_0 \cos\phi = \xi_0 \cos(s/a)$，ここに a は球の半径である．分離は単純な調和運動の方程式，$d^2\xi/ds^2 + (1/a^2)\xi = 0$（“測地線の逸脱の方程式”）に従う．

分離ベクトル，$\boldsymbol{\xi}$ の方向は基準の測地線への直交性によって完全に固定される．したがって，$\boldsymbol{\xi}$ の方向への参照は測地線の逸脱の方程式に必要とされないあるいは用いられない．$\boldsymbol{\xi}$ の大きさ ξ のみがそこに現れる．そして相対的な加速度の方向でなく，大きさのみが現れる．

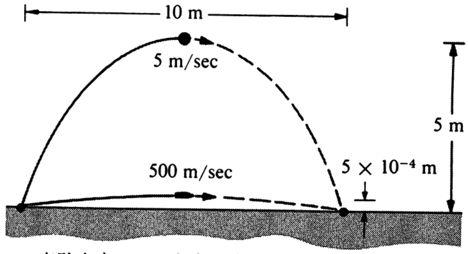
*30　相対加速度は曲率によってもたらされる

コラム 1.6　何の曲率か?

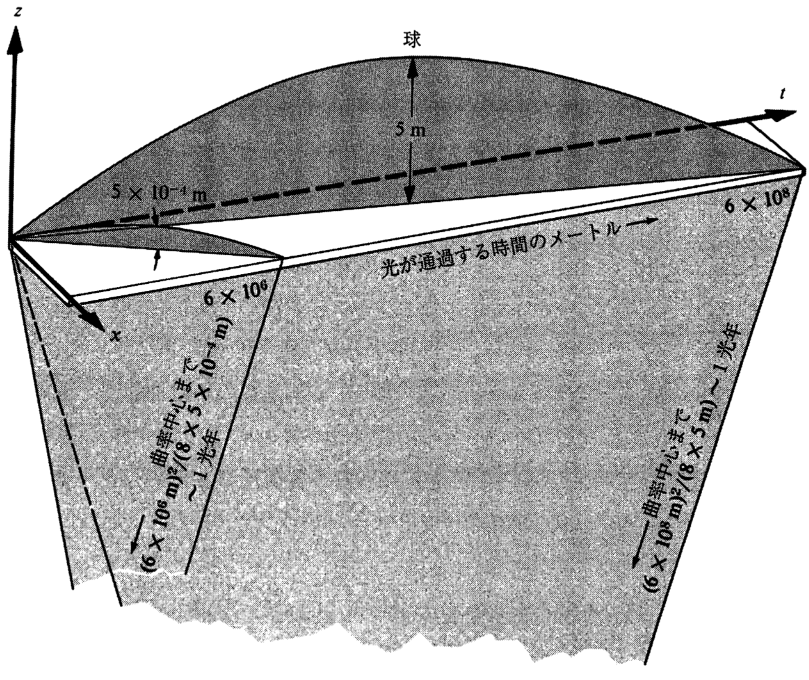
一見したところ，重力は空間の曲率の表示であるという概念ほど魅力的なものはないようにみえる (A)，そしてもう一度みると，これほど馬鹿げたものはないようにみえる (B)．もしその曲率が空間の幾何学から生ずるならば，どうして球の軌道と弾丸の軌道がそんなに異なって曲がりうるだろうか？ あの偉大な Riemann が世界に重力の幾何学的な理論を与えなかったことは不思議でない．そう，28 歳の（1854 年 6 月 10 日）彼は，曲率を定義しそして計算する数学的な仕組み（計量および Riemann 幾何学）を世界に与えた．そして，40 歳の彼は，死に向かう残り少ない日々を電気と重力の統一された説明を見出すことに費やした．しかし彼が重力と曲率との決定的なつながりをつくることに失敗した特別な理由が 1 つあったとすれば，それは彼が時空および時空の曲率でなく，空間および空間の曲率を考えたということであった．そこから一歩前へ進むのに，特殊相対性理論（1905 年，時間を空間と同じ土台の上に）まで 40 年，そしてさらに 10 年（1915 年，一般相対性理論）を要した．時空内に描くと (C)，球と弾丸の軌道は匹敵する曲率をもつようにみえる．しかし，実際は，いずれの軌道もいかなる曲率もまったくもっていない．それらはともに時空内 (C) で曲がっているようにみえるが，それはただそれらが存在する時空そのものが曲がっている—これらの軌道を正確に直線として存在させる（“測地線”）に足るだけ曲がっている—ことを忘れてしまっているからである．



A.　光の湾曲が太陽の近くの空間の曲率の結果として図示されている. 光線は測地線に従うが, 光が伝わる幾何学は曲がっている(実際には, 空間よりもむしろ時空内を伝わる. 正しい偏向は上の基本的な図で与えられているものの 2 倍である). 偏向は星と太陽の中心との間の分離角度に逆比例する. 食のときに実際に観測される偏向に対しては, コラム 40.1 をみよ.



B. 実験室内でみるとき，空間を通過する球と弾丸の軌道は非常に異なっている曲率をもっている．



C. 実験室内で記録するとき，時空を通過する球と弾丸の軌道はほぼ同等の曲率半径をもっている．軌道が円弧と比較される．(半径) = (水平距離)^2/8 × (上昇した高さ)

初めのうち曲率，時空の曲率が非常に直接な方法で目立ってくるのをみて満足であるならば，さらに少し熟考すれば事の一新された意味が生み出される．何についての曲率か？ 実験室についてでない．地球に結びつけられたどのような実験室も正確な議論では単純な地位をもたない．第1に，それはLorentz系でない．第2に，地球に言及するだけで重力の遠隔作用バージョン（地球の中心から球あるいは弾丸までの距離）を考えさせてしまう．対照的に，物理学は局所的に解析されるときにのみ単純にみえるというのがEinsteinの全論点であった．しかし，局所物理学をみることは1つの試験粒子の1つの測地線を，(1) 近傍を (2) ほとんど同じ方向と (3) ほとんど同じ速さで動いている他の試験粒子の測地線と比較することを意味する．そうすると“これらの近傍の試験粒子間の隔たりをみることおよびこれらの隔たりの2次の時間変化率と‘測地線の逸脱の方程式’（式1.8）から時空の曲率を読み出すことができる．”

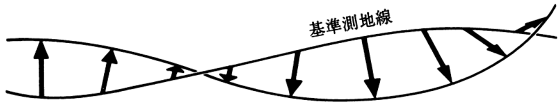


図 1.11　曲がった 3 次元多様体における 2 個の測地線間の分離ベクトル $\boldsymbol{\xi}$．ここに $\boldsymbol{\xi}$ は点から点へその長さを変化しうるのみならず，基準測地線周りに変化する割合で回転する．したがって，測地線の相対的な加速度は大きさとともに方向によって特徴づけられねばならない．それはベクトル，$D^2\boldsymbol{\xi}/ds^2$ でなければならない．

"$D^2\boldsymbol{\xi}/ds^2$" とよぶ．その 4 つの成分を "$D^2\xi^\alpha/ds^2$" とよぶ．なぜ大文字の D か？ なぜ "$d^2\xi^\alpha/ds^2$" でないのか？ なぜならわれわれの座標系は完全に任意であるから（1.2 節を参照せよ）．座標線の捻れおよび回転は，ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ がまったく変化していなくても，$\boldsymbol{\xi}$ の成分 ξ^α について点から点へ変化を引き起こすことができる．したがって，成分の加速度 $d^2\xi^\alpha/ds^2$ は一般に加速度の成分 $D^2\xi^\alpha/ds^2$ に等しくない！

*31 そうすると，曲がった時空でいかに相対加速度の成分 $D^2\xi^\alpha/ds^2$ を定めることができるか？ 測地線の逸脱の方程式 (1.6) のより複雑な変形によって．微分幾何学（本書のパート III）は **Riemann 曲率テンソル**，"***Riemann***" とよばれる幾何学的な対象をわれわれに与える．***Riemann*** はわれわれのリンゴの表面の Gauss 曲率 R の高次元の類似物である．***Riemann*** は時空での屈曲およびひずみの数学的な具体化である．そして ***Riemann*** はそれらの屈曲およびひずみ（時空の曲率）が測地線の相対加速度を生み出させる主体である．

Riemann は，コラム 1.3 の計量テンソル $\boldsymbol{g}$ のように一群の機械，1 つの機械は時空の各事象に内在している，と考えられうる．各機械は 3 個のベクトルの挿入に対して 3 個の投入口をもっている．

$$
\begin{array}{cccc}
 & \text{投入口 1} & \text{投入口 2} & \text{投入口 3} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\boldsymbol{Riemann}(& \qquad , & \qquad , & \qquad)
\end{array}
$$

事象 Q を通る基準測地線（自由粒子の世界線）を選び，そこでの単位接線ベクトル（粒子の 4–速度）を

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{dx}/d\tau; \qquad \text{成分で表すと，} u^\alpha = dx^\alpha/d\tau \tag{1.7}$$

で記せ．近傍の他の測地線を選び，$\boldsymbol{\xi}$ で基準測地線からの垂直な隔たりを記せ．それから $\boldsymbol{u}$ を Q での ***Riemann*** の第 1 の投入口に挿入し，$\boldsymbol{\xi}$ を第 2 の投入口に，そして $\boldsymbol{u}$ を第 3 の投入口に挿入せよ．***Riemann*** はしばらく粉をひくだろう．それから新しいベクトル，

$$\boldsymbol{Riemann}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u})$$

*32 をぽんと出すだろう．測地線の逸脱の方程式は，この新しいベクトルが 2 つの測地線の相対加速度の負数であることを述べる．

*31　曲率は Riemann テンソルによって特徴づけられる

*32　Riemann テンソルは，測地線の逸脱の方程式を通して，相対加速度を生み出す

$$D^2\boldsymbol{\xi}/d\tau^2 + \boldsymbol{Riemann}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}) = 0 \tag{1.8}$$

Riemann テンソルは，計量テンソルのように（コラム 1.3），そしてすべての他のテンソルのように，線形機械である．それが提供するベクトルは，投入口に挿入される各ベクトルの線形関数である．

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Riemann}(2\boldsymbol{u}, a\boldsymbol{w} + b\boldsymbol{v}, 3\boldsymbol{r})\\&= 2 \times a \times 3\boldsymbol{Riemann}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{r}) + 2 \times b \times 3\boldsymbol{Riemann}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{1.9}$$

したがって，任意の座標系で提供されるベクトルの成分は，挿入されるベクトルの成分の“三重線形関数”として書かれうる．

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{Riemann}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \Longleftrightarrow r^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} u^\beta v^\gamma w^\delta \tag{1.10}$$

（ここでは添字 β, γ, δ についての和が含意されている．コラム 1.1 を参照せよ．）$4\times4\times4\times4 = 256$ 個の $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ は“与えられた座標系での Riemann テンソルの成分”とよばれる．成分の言葉で，測地線の逸脱の方程式は

$$\frac{D^2\xi^\alpha}{d\tau^2} + R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\gamma\frac{dx^\delta}{d\tau} = 0 \tag{1.8$'$}$$

となる．

*33　重力の Einstein の幾何学的な理論では，測地線の逸脱のこの方程式は物体に対する幾何学の全効果を要約している．それは重力物理学に対して，Lorentz 力の方程式，

$$\frac{D^2x^\alpha}{d\tau^2} - \frac{e}{m}F^\alpha{}_\beta\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \tag{1.11}$$

が電磁気学に対してなすものをなす（コラム 1.7 をみよ）．

*34　曲率の測定の単位は，時空においてもまさにリンゴの表面上と同じく cm^{-2} である．これらの単位を，質量を“幾何学化された単位”で表すほど明白な状態にさせるものはない．

$$\begin{aligned}m(\mathrm{cm}) &= (G/c^2)m_{慣習}(\mathrm{g})\\&= (0.742\times10^{-28}\,\mathrm{cm/g})m_{慣習}(\mathrm{g})\end{aligned} \tag{1.12}$$

比率

$$G/c^2 = 0.742\times10^{-28}\,\mathrm{cm/g}$$

による g から cm へのこの変換は，比率

$$c = \frac{9.4605460000\times10^{17}\,\mathrm{cm}}{31,556,925.974\,\mathrm{sec}}$$

によって秒から cm へ変換する（1.5 節の終わりをみよ）ことに完全に類似している．慣習的な単位で $m_{慣習} = 1.989\times10^{33}$ g をもつ太陽は，幾何学化された単位で質量 $m = 1.477$ km をもつ．コラム 1.8 はさらなる議論を与える．

*33　測地線の逸脱の方程式は Lorentz 力の法則の類似物である

*34　幾何学化された単位

コラム 1.7　重力場および電磁場の影響のもとでの運動方程式：対比と対照

	電磁気 [Lorentz 力，式 (1.11)]	重力 [測地線の逸脱の方程式 (1.8′)]
加速度は 1 個の粒子に対して定義されるか？	ハイ	イイエ
加速度はいかに定義されるか？	実際の世界線は，同じ点を同じ 4–速度で通過する電荷をもたない“基準の”試験粒子の世界線に比較される．	すでに電荷をもたない試験粒子．これはそれ自身に対して加速できない！　加速度は基準粒子としての近傍の試験粒子に相対的に測定される．
加速度は，粒子の 4–速度のすべての 4 個の成分に依存するか？	ハイ	ハイ
同じ 4–速度で同じ位置にあるすべての試験粒子に対する普遍的な加速度？	イイエ，　e/m に比例する	ハイ
駆動する場	電磁場	Riemann 曲率テンソル
駆動する場の異なる成分のみかけの数	$4{\times}4 = 16$	$4^4 = 256$
テンソルの対称性が認められるときの実際の数	6	20
これらの成分のよりよく知られたものに対する名称	3　電気的，3　磁気的	局所 Newton 的な潮汐を生み出す加速度の 6 個の成分

幾何学化された単位と重力の Newton 的理論を用いて，地球あるいは太陽近くの Riemann 曲率テンソルのもっとも興味ある成分の 9 個を容易に求めることができる．方法は，ゆっくり動く試験粒子の加速度を測定することによって電場の強さを定めることの，重力的な
*35 アナロジーである．地球あるいは太陽から距離 r のところをゆっくり動く $(v \ll c)$ 2 つの

*35　Riemann テンソルの成分はゆっくり動く粒子の相対加速度から求められる

コラム 1.8 幾何学化された単位

本書を通して，われわれは “幾何学化された” 単位を用いる，その単位では光の速さ c，Newton の重力定数 G，そして Boltzman 定数 k はすべて 1 に等しい．数 1.0 を表す以下の択一的な方法は大きい価値がある．

$$
\begin{aligned}
1.0 &= c = 2.997930...\times10^{10}\,\mathrm{cm/sec},\\
1.0 &= G/c^2 = 0.7425\times10^{-28}\,\mathrm{cm/g},\\
1.0 &= G/c^4 = 0.826\times10^{-49}\,\mathrm{cm/erg},\\
1.0 &= Gk/c^4 = 1.140\times10^{-65}\,\mathrm{cm/K},\\
1.0 &= c^2/G^{1/2} = 3.48\times10^{24}\,\mathrm{cm/gauss^{-1}}
\end{aligned}
$$

これらのどの方法で表されている 1 の因子でも，任意の式の任意の項に式の妥当性に影響を及ぼすことなく掛けることができる．それによって度量の 1 つの単位を g から cm へ，秒へ，エルグへ，$\cdots$ と転換できる．たとえば，

$$
\begin{aligned}
\text{太陽の質量} = M_\odot &= 1.989\times10^{33}\,\mathrm{g}\\
&= (1.989\times10^{33}\,\mathrm{g})\times(G/c^2)\\
&= 1.477\times10^{5}\,\mathrm{cm}\\
&= (1.989\times10^{33}\,\mathrm{g})\times(c^2)\\
&= 1.788\times10^{54}\,\mathrm{erg}
\end{aligned}
$$

本書であらゆる測定に使う標準的な単位はセンチメートルである．しかし，ときどき慣習的な単位が使われる．そのような場合には下つき文字 “慣習” が，つねにではないが時として，測定される量に添付される．

$$
M_{\odot\text{慣習}} = 1.989\times10^{33}\,\mathrm{g}
$$

近傍の粒子の測地線間の隔たりを考える．天体力学の基準のほとんど慣性系に近い座標で，基準の試験粒子の 4–速度のすべての成分は $dx^0/d\tau = 1$ を除いて無視できる．測地線の逸脱の方程式の空間成分は

$$
d^2\xi^k/d\tau^2 + R^k{}_{0j0}\xi^j = 0 \tag{1.13}
$$

になる．Newton 理論の結論，式 (1.5)，と比較して，われわれは質量中心近くの時空の曲率について以下の知識に達する（単位 cm^{-2}）．

$$\begin{Vmatrix} R^{\hat{x}}{}_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}} & R^{\hat{y}}{}_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}} & R^{\hat{z}}{}_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}} \\ R^{\hat{x}}{}_{\hat{0}\hat{y}\hat{0}} & R^{\hat{y}}{}_{\hat{0}\hat{y}\hat{0}} & R^{\hat{z}}{}_{\hat{0}\hat{y}\hat{0}} \\ R^{\hat{x}}{}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}} & R^{\hat{y}}{}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}} & R^{\hat{z}}{}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m/r^3 & 0 & 0 \\ 0 & m/r^3 & 0 \\ 0 & 0 & -2m/r^3 \end{Vmatrix} \tag{1.14}$$

ここで，そしてここから先では記号 ^ を局所 Lorentz 基準系でのベクトルあるいはテンソルの成分（一般座標系での成分と区別するものとしての，"物理学的な成分"）を示すために用いる．Einstein の理論は曲率の他の成分の値を定めるだろう（たとえば，$R^{\hat{x}}{}_{\hat{z}\hat{x}\hat{z}} = -m/r^3$）．しかしこれらの 9 個の項は重力理論の多くの応用に対して最高の適切さをもつ項である．それらは Lorentz 運動方程式での電場の成分に類似している．求められていない項の多くは磁場の成分に類似している—源が素早い運動をしていなければ通常弱い．

これで幾何学の物体に対する効果の概観を終わる（"測地線を交差させるときのリンゴの曲率の効果"—まさに時空の曲率が重力的な引力の中心近くでとくに大きいように，てっぺんの窪み近くでとくに大きい）．さて，物体の幾何学に対する効果に移ろう（"窪みを引き起こすことについてのリンゴの柄の効果"）！

1.7　物体の幾何学に対する効果

世界の中心からある特定の距離での重さが知られている任意の重い物体の重さは，そこからの距離の変化に応じて変化する．したがって中心から離れるほど重くなり，そして中心に近くなるほど軽くなる．このために，重力の重力に対する関係は中心からの距離に対する距離の関係のようである．

AL KHĀZINĪ （Merv, 1115）Book the Balance of Wisdom

図 1.12 は地球の平均密度と同じ密度，$\rho = 5.52\,\mathrm{g/cm^3}$ の球を示している．穴がこの球を通って掘られる．2 個の試験粒子 A および B は，この穴の中で 84 分の周期をもつ単振動を行う．したがってそれらの測地線の隔たり $\boldsymbol{\xi}$ は，いかにそれが位置づけられようと同じ 84 分の周期をもつ単振動を行う．

$$d^2\xi^j/d\tau^2 = -\left(\frac{4\pi}{3}\rho\right)\xi^j, \quad j = x \text{ あるいは } y \text{ あるいは } z \tag{1.15}$$

この実際の運動を，ほとんど慣性的な系内をゆっくり動く粒子に対する測地線の逸脱の方
*36 程式 (1.13) と比較して，われわれはこの模型の地球の内部に対する曲率成分のいくつかを読みとることができる．

$$\begin{Vmatrix} R^{\hat{x}}{}_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}} & R^{\hat{y}}{}_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}} & R^{\hat{z}}{}_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}} \\ R^{\hat{x}}{}_{\hat{0}\hat{y}\hat{0}} & R^{\hat{y}}{}_{\hat{0}\hat{y}\hat{0}} & R^{\hat{z}}{}_{\hat{0}\hat{y}\hat{0}} \\ R^{\hat{x}}{}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}} & R^{\hat{y}}{}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}} & R^{\hat{z}}{}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}} \end{Vmatrix} = (4\pi\rho/3) \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{1.16}$$

この例は，時空の曲率は物質の分布にいかに結びついているかを説明する．

---

*36　地球内部の Riemann テンソル

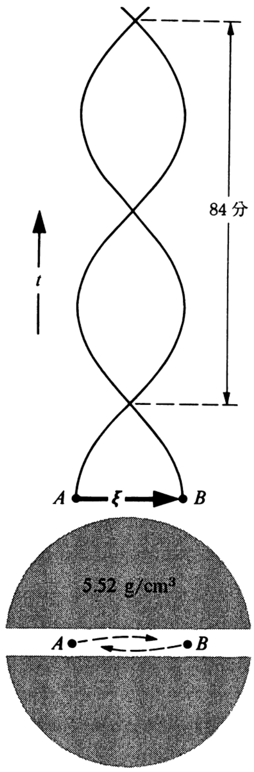


図 1.12 試験粒子 A および B が一様な密度をもつと理想化されている，模型地球を通してくり抜かれた穴を上下に運動する．半径 r で，粒子は Newton の加速度

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{d\tau^2} &= \frac{1}{c^2}\frac{d^2r}{dt_{慣習}{}^2}\\ &= -\frac{G}{c^2}\frac{(半径\ r\ 内部の質量)}{r^2}\\ &= -\left(\frac{G}{r^2c^2}\right)\left(\frac{4\pi}{3}\rho_{慣習}r^3\right)\\ &= -\omega^2 r\end{aligned}$$

を感じる．したがって，おのおのの粒子は衛星と正確に同じ角振動数をもって単純な調和運動で振動し，模型地球をかすめて通り，円軌道を横切る．

$$\omega^2(\mathrm{cm}^{-2}) = \frac{4\pi}{3}\rho(\mathrm{cm}^{-2}),$$

$$\omega^2_{慣習}\,(\mathrm{sec}^{-2}) = \frac{4\pi G}{3c^2}\rho_{慣習}\,(\mathrm{g/cm}^3)$$

超新星からの重力波が地球を貫通するとする．地球の物質はほとんど非圧縮性で，その密度は実際的に変わらずにいると理想化する．波は光の速さで伝播して，時空の曲率でのさざなみで特徴づけられる．さざなみは Riemann テンソルの成分 $R^j{}_{0k0}$ に，そしてわれわれの 2 個の試験粒子の相対加速度に現れるだろう．式 (1.16) の左辺はさざめくだろう．しかし右辺はさざめかないだろう．式 (1.16) は壊れるだろう．Riemann 曲率はもはや，直接的に，そして地球の物質だけでは生成されないだろう．

*37

にもかかわらず，Einstein はわれわれに，式 (1.16) の部分は波によってかき乱されないと告げる．そのトレースは

$$R_{\hat{0}\hat{0}} \equiv R^{\hat{x}}{}_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}} + R^{\hat{y}}{}_{\hat{0}\hat{y}\hat{0}} + R^{\hat{z}}{}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}} = 4\pi\rho \tag{1.17}$$

である．地球外の真空中でもこれは成り立つ．そこでは両辺はゼロである [式 (1.14) を参照せよ]．

*38 より一般的に，**Einstein テンソル**とよばれ，***Einstein*** あるいは $\boldsymbol{G}$ と記される Riemann テンソルのある 1 個はつねに物質の局所的な分布によって直接生成される．***Einstein*** は式 (1.17) の左辺，$R_{\hat{0}\hat{0}}$ を一般化する幾何学的な対象である．$R_{\hat{0}\hat{0}}$ のように，***Einstein*** は ***Riemann*** のすべての方向にわたる一種の平均である．***Einstein*** を生成し，そして式 (1.16) の右辺を一般化することは，物質のストレス–エネルギーテンソルとよばれる幾何

*37 重力波の Riemann テンソルに対する影響
*38 Einstein テンソルの導入

*39 学的な対象である．それは $\boldsymbol{T}$ と記される．***Einstein*** を定義するのに座標は必要でない．そして $\boldsymbol{T}$ を定義するのに座標は必要でない．Riemann テンソル，***Riemann*** および計量テンソル $\boldsymbol{g}$ のように，それらは座標が完全に存在しないときに存在する．さらに，自然
*40 界ではそれらは 8π の因子は別としてつねに等しい．

$$\boldsymbol{Einstein} \equiv \boldsymbol{G} = 8\pi \boldsymbol{T} \tag{1.18}$$

任意の座標系での成分で書き直されたこの **Einstein の場の方程式**は

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \tag{1.19}$$

となる．

Einstein の場の方程式は優雅でありそして豊かである．物理学のどの方程式もこれよりも単純に書けない．そして何ものもこのような応用と結果の宝をもたない．

*41 場の方程式は，物質のストレス–エネルギーがいかにその近傍での平均の曲率（$\boldsymbol{Einstein} \equiv \boldsymbol{G}$）を生成するかを示している．同時に，場の方程式は曲率の残りの，非等方性の部分に対する伝播式である．それは静的な源（地球）の外部時空の曲率を支配する，それは運動しているストレス–エネルギーによる重力波（時空の曲率でのさざなみ）の生成を支配する，そして場の方程式は宇宙を通過する波の伝播を支配する．場の方程式はさらに自分自身の中に，そのストレス–エネルギーが曲率を生成する物質に対する運動方程式（“力 ＝ 質量×加速度”）を含んでいる．

*42 それらは $\boldsymbol{G} = 8\pi \boldsymbol{T}$ のある結果であった．さて，それでは応用について．

場の方程式は太陽系の惑星の運動を支配する．それは太陽による光の湾曲を支配する．それは星が崩壊してブラックホールを形成することを支配する．それはブラックホールの外部時空の幾何学を一義的に定める（“ブラックホールには毛がない”）．それは崩壊の終点で時空の特異点の展開を支配する．それは宇宙の膨張と再収縮を支配する．そしてさらに，さらにもっと．

単純な方程式 $\boldsymbol{G} = 8\pi \boldsymbol{T}$ がどうしてそんなにすべてに強力であるかを理解するためには，引き返して，時空の，その曲率の，そしてその法則の，完全な状況を再構築して数章を費やすことが望ましい．今度は大いに注意し，詳細にわたり，そして数学を使って．

こうして，リンゴのたとえ話を完成させて，幾何学の物質に対する効果，および物質の幾何学に対する逆作用についてのこの概観を終わる．

---

*39　ストレス–エネルギーテンソルの導入
*40　Einstein の場の方程式：いかに物質は曲率を生成するか
*41　Einstein の場の方程式の結果
*42　Einstein の場の方程式の応用

［練習問題］

1.1 円筒の曲率

円筒の表面上の測地線（展開する!）は測地線の逸脱を受けないことを示すことによって，円筒の表面の Gauss 曲率 R はゼロであることを示せ．公式 $R = 1/\rho_1\rho_2$（ここに ρ_1 およびρ_2 は問題の点での包絡する Euclid 3 次元空間について曲率の主半径である）を用いて同じ結論に対する独立な論証を与えよ．

1.2 春の潮汐対小潮

(1) 月（$m_{慣習} = 7.35\times10^{25}\,\mathrm{g}, r = 3.84\times10^{10}\,\mathrm{cm}$）および (2) 太陽（$m_{慣習} = 1.989\times10^{33}\,\mathrm{g}, r = 1.496\times10^{13}\,\mathrm{cm}$）によって，地球に生成される Newton 的な潮汐を生み出す加速度の大きさ $R^m{}_{0n0}(m, n = 1, 2, 3)$ を，(1) 慣習的な単位で，(2) 幾何学化された単位で，求めよ．どのような因数だけ，春の潮汐が小潮より大きいと予想するか？

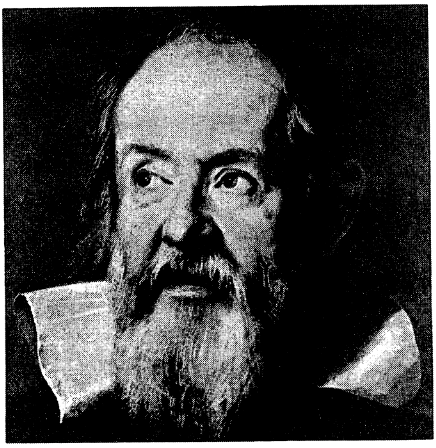
1.3 要約された KEPLER

小さい人工衛星が質量 m (cm) の中心物体の周りの半径 r cm の軌道で，角振動数 ω (cm^{-1}) をもっている．ω の既知の値から，r あるいは m をそれぞれ定めることは不可能であるが，しかし軌道と同じ半径をもつ球について平均されたものとしての，対象の有効な “Kepler 密度” だけを定めることが可能であることを示せ．Kepler 密度によって ω^2 に対する公式を与えよ．

Kepler と Galileo（コラム 1.9）が前後逆に書かれていること，および Galileo の死が確認されている年に Newton の生誕（コラム 1.10）をみたということは，歴史の連続性を思い出させるものである．Newton 以後，重力法則の最初の劇的に新しい統合は，Einstein（コラム 1.11）によってもたらされた．

コラム 1.9　GALILEO GALILEI

1564年2月15日 Pisa に生まれ，**1642年1月8日 Florence**（フィレンツェ）の **Arcetri** に没．



Uffizi Gallery, Florence

"科学の問題では，千の権威もたった一人の人間の謙虚な推論に値しない．"

GALILEO GALILEI (1632)

"静止から一様な加速度で落下する物体によって記述される空間は，これらの距離を通過するのに使われる時間間隔の **2** 乗として互いに対して存在する．"

GALILEO GALILEI (1638)

"[潮汐について] すでに言われ，そして他の人々によって想像されているすべてのことは，私の考えでは完全に成り立たない．しかしこの自然の驚くべき効果について思索した偉大な人たちの中で，私をもっとも驚かした人は **Kepler** である．他の人たち以上に彼は独立した天分，鋭さをもつ人であり，そして地球の運動を手中にしていた．彼は後に自分の耳をぴんと立て，月の水に対する作用，そして他の不可思議な現象，そして類似の子どもじみたことに関心を抱いた．"

GALILEO GALILEI (1632)

月の物体を [新しい望遠鏡で] みることはもっとも美しく楽しい眺めである ··· 月は確かに滑らかで磨かれた表面をもたず，ざらざらで平坦でない ··· 広大な突起，深い峡谷および湾曲をもっている ··· 以前にはけっしてみられなかった，そして古い既知の星の数を **10** 倍以上もしのぐ無数の星．私は私の時代以前のいかなる天文学者によっても知られていないし，また観測されていない **4** 個の惑星を発見した ··· 銀河あるい

は天の川についての論争を免れ，そしてその性質を理解にとまでは言わなくとも認識にまで明白にした・・・銀河は群をなして配置された明るい星の集団にほかならない・・・小さい銀河の数はまったく確定できない—今日まですべての天文学者によって星雲とよばれていた星は，素晴らしい方法で密集した小さい星の群である.”

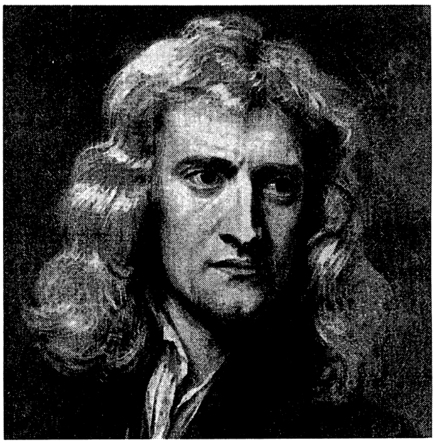
GALILEO GALILEI IN SIDEREUS NUNCUS (1610)

“したがってこの論文で述べられる原理は，思慮深い人によって取り上げられるとき，多くのより注目すべき結果に達する．そして自然界の他の何よりもすぐれている，主題の気品のゆえにそうであろうと信じられるべきである.”

GALILEO GALILEI (1638)

コラム 1.10 ISAAC NEWTON

1642 年 12 月 25 日英国の Lincolnshire 州 Woolsthorpe に生まれ 1726 年 3 月 20 日 London，Kensington に没.



“幾何学の基礎となる正しい直線や円の記述は力学に属する．幾何学はこれらの直線を描くことをわれわれに教えるのではなく，それらが描かれることを要求する.”

[FROM P. 1 OF NEWTON'S PREFACE TO THE FIRST (1687) EDITION OF THE *PRINCIPIA*]

“絶対空間は，それ自身の性質として，いかなる外的なものに関係なく，つねに同じで不動であり続ける．絶対的な，真実の，そして数学的な時間は，それ自身，およびそれ自身の性質から，一様にいかなる外的なものに関係なく流れる.”

[FROM THE *SCHOLIUM* IN THE *PRINCIPIA*]

“私は重力のそれらの性質の原因を現象から発見することができなかった．そして私は仮説を立てない．なぜなら何でも現象から体系化されないものは仮説とよばれるべきである．そして仮説 · · · は実験哲学には存在しない · · ·．そしてわれわれにとって重力は実際に存在し，われわれが説明した法則に従って作用し，そして天体，およびわれわれの海のすべての運動を説明するのに十分役立つ．”

[FROM THE *GENERAL SCHOLIUM* ADDED TO THE END OF THE THIRD BOOK OF THE *PRINCIPIA* IN THE SECOND EDITION OF 1713; ESPECIALLY FAMOUS FOR THE PHRASE OFTEN QUOTED FROM NEWTON'S ORIGINAL LATIN. “*HYPOTHESIS NON FINGO.*”]

“そして同じ年に [**1665** あるいは **1666**] 私は月の軌道にまで及ぶ重力について考え始めた，そして発見して · · ·．このすべてはペスト大流行の **2** 年，**1665** 年および **1666** 年のことであった．なぜなら私は当時年齢的に創造の絶頂期にあり，そして以後のいかなる時期よりも数学と哲学に専念したから．”

[FROM MEMORANDUM IN NEWTON'S HANDWRITING ABOUT HIS DISCOVERIES ON FLUXIONS, THE BINOMIAL THEOREM, OPTICS, DYNAMICS, AND GRAVITY, BELIEVED TO HAVE BEEN WRITTEN ABOUT 1714, AND FOUND BY ADAMS ABOUT 1887 IN THE “PORTSMOUTH COLLECTION” OF NEWTON PAPERS]
注：FLUXIONS，流率法（Newton の用語，微積分法を指す）

“なぜなら仮説は物事の性質を説明すべきであって，仮説が実験に役立ちうる場合を除いて，物事の性質をあらかじめ定めようと試みるべきでない．”

[FROM LETTER OF NEWTON TO I. M. PARDIES, 1672, AS QUOTED IN THE CAJORI NOTES AT THE END OF NEWTON (1687), p. 673]

“**1** つの物体が真空を通して距離を隔てた他の物体に，他の何ものも介さずに，作用と力が **1** つの物体から他の物体に伝えられることによって作用することは，私にとって非常にばからしいことなので，哲学の問題として有能な思索力をもってそれを受け入れる人間を信じない．”

[PASSAGE OFTEN QUOTED BY MICHAEL FSARADAY FROM LETTERS OF NEWTON TO RICHARD BENTLY, 1692-1693, AS QUOTED IN THE NOTES OF THE CALORI EDITION OF NEWTON (1687), p. 643]

“重力，磁気，および電気の引力は非常にかなりの距離にまで達する，そしてそのよう

に観測された･･･，そして非常に小さい距離にまで達し，これまで観測を免れた他のものがあるだろう，･･･直接接触して非常に強い，小さい距離で上述の化学的な作用を行う，そして何らかの感じられるほどの影響で粒子からそう遠くないところまで達するある力が．"

[FROM QUERY 31 AT THE END OF NEWTON'S *OPTICKS* (1730)]

"ほとんど物質が存在しない場所には何があるか，どうして太陽と惑星が互いに他に引きつけられるか，両者の間に密な物質が存在しないのに？　どうして自然は無駄なことは何もしないのか，どうしてわれわれが世界でみるあの秩序と美のすべては生じるのか？　彗星はどこに向かうのか，どうして惑星はすべて 1 つの同じ道筋で同心の軌道を動くのか，しかるに彗星はあらゆる方法で非常に常軌を逸した軌道を動くのか，動かない星が互いに他の星に落下するのを何が妨げるのか？"

[FROM QUERY 28]

"彼は永遠あるいは無限ではない，それでいて永遠であり無限である．彼は持続する時間あるいは空間ではない，それでいて彼は存続しそして存在する．彼は永久に存続し，遍在する，つねにそしていたるところ存在することによって，彼は持続する時間と空間を構成する･･･．こうして大いに神に関わる，神について事物の現象から論述することは確かに自然哲学に属する．"

[FROM THE GENERAL *SCHOLIUM* AT THE END OF THE *PRINCIPIA* (1687)]

コラム 1.11　ALBERT EINSTEIN

1879 年 3 月 14 日ドイツの Ulm に生まれ 1955 年 4 月 18 日 New Jersey 州 Princeton に没.



Library of E. T. Hochschule, Zürich　　Académie des Sciences, Paris　　Archives of California Institute of Technology

SEAL: Courtesy of the Lewis and Rosa Strauss Foundation and Princeton University Press

“本当に私が関心をもっているのは，神は宇宙創造において何らかの選択をしたかどうかである.”

EINSTEIN TO AN ASSISTANT, AS QUOTED BY G. HOLTON (1971), p.20

“しかし激しい熱望，自信と消耗を交互に繰り返す暗闇の中での不安な探索の年々，そして最後に光への浮上――それを経験した者のみが理解できる.”

EINSTEIN, AS QUOTED BY M. KLEIN (1971), p.1315

“われわれの手に入るすべての社会の中で，いつのときにもきわめてわずかな現存会員をもつ真の探求者の社会以外に，私自身を捧げたいと望む社会は存在しない….”

EINSTEIN LETTER TO BORN, QUOTED BY BORN (1971), p.82

“私はあなたの偉大な仕事を研究しています．そして――私はそのどこかに取り組んでいるとき――今やあなたの優しい若い顔が私の前で微笑み，そして説明しているのを目

にする喜びを感じています.”

EINSTEIN, LETTER OF 5月2日, 1920年, AFTER MEETING NIELS BOHR

“数学の法則が実在に関係する限り，それらは確かでない．そしてそれらが確かである限り，それらは実在に関係しない.”

EINSTEIN (1921), p.28

“世界についてもっとも理解できないのは，それが理解できるということである.”

EINSTEIN, IN SCHILPP (1949), p.112

そして死者が生きていたときに言及しなかったこと，彼らは死んでいるから，あなたに言うことができる．死者の伝言は生きている者の言葉を越えて熱情をもって話される．

T. S. ELIOT, in *LITTLE GIDDING* (1942)

私は空を測定した
いま私は影を測定する
精神は天空にある
体は地球に安らっていても

JOHANNES KEPLER, d. November 15, 1630.
彼は自分の墓碑銘をラテン語で書いた.
それは Colemann によって翻訳されている (1967), p.109.

物質あるところ，そこに幾何学あり．

JOHANNES KEPLER

パート II

平坦な時空での物理学

ここで読者は新しい流行の装いに身をこらしたあの懐しい友，特殊相対性理論に出会い，その魅力にさらに親密に接することになる．

2章
特殊相対性理論の基礎

幾何学的な，また，物理学的な応用においては，量はそのテンソルの次数だけでなく対称性によって特徴づけられることがつねに明らかになる．

HERMAN WEYL (1925)

過去 2000 年間のもっとも驚嘆すべき幾何学の発展は疑いもなく，"幾何学的な対象"という概念の絶えざる発展である．この概念は，ギリシャ人の総合幾何学での，若干の曲線と曲面だけを含むことから始まった．それはルネッサンスのときに，解析幾何学で定義される対象の全領域を覆うまでに広げられた．ごく最近には，それは点集合論で取り扱われる，果てしない宇宙を覆うまでに拡大された．

KARL MENGER, SCHILPP (1949), p.466.

2.1 概　　観

幾何学的な曲率は重力として現れる．近接した，粒子の世界線が分離していくとき，そこには重力の作用が働いている．逆に，粒子や他の質量–エネルギーの源は幾何学的な曲率を生ずる．幾何学が物質に及ぼす作用と物質が幾何学に及ぼす反作用のこの閉じた輪は，どうすれば解きほぐされるであろうか．非常に限られた，平坦とみなせる時空の領域での粒子の運動と，場の力学の解析から始めるのがもっともよいと思われる（コラム 1.5 "平坦さに対するテスト" をみよ）．

*1 2–6 章では，この平坦な時空の観点（特殊相対性理論）が展開される．読者は当然，すでに特殊相対性理論*についてかなりの知識をもっているものとする．4–ベクトル一般，エネルギー–運動量 4–ベクトル，基本的な Lorentz 変換，荷電粒子に作用する力に対する Lorentz の法則，少なくとも，電磁場のテンソル $F_{\mu\nu}$ に関する式を本でみていること．そして，時空図の定性的な特徴．これは次のものを含んでいる．(1) 未来と過去の光円錐，(2) 因果関係（"〜の過去"，"〜の未来"，"中間的な" あるいは，"〜と空間的な関係にある"），(3) Lorentz 収縮，(4) 時間膨張，(5) 同時性の普遍的な概念が存在しないこと，そして，(6) コラム 2.4 の $\bar{t}$ 軸と $\bar{z}$ 軸は直交していないようにみえるけれども，実は直交しているという事実．読者は以下の章で次のような新しいものを見出すであろう．(i) 特殊相対性理

* たとえば，Goldstein (1959)，Leighton (1959)，Jackson (1962)，あるいは，幾何学的に提示された物理的な像については，Taylor and Wheeler (1966) をみよ．

*1 読者に当然あるとされている予備知識

論に対する新しい視点，そこでは，座標に無関係な概念と曲がった時空に容易に拡張される記号が強調されている（“幾何学的な対象”，機械としてみたテンソルは 2–4 章で扱われている）．あるいは (ii) 特殊相対性理論ではあまりみられない話題，後で展開される重力理論に決定的に重要な話題（5 章 “ストレス–エネルギーテンソルおよび保存則”，6 章 “加速された観測者”）．

2.2 幾何学的な対象

*2 時空間で起こるすべては幾何学的に記述される．そのような記述はほとんどすべて，平坦な時空から曲がった時空へ容易に拡張できる．1 つの幾何学的な対象と他の幾何学的な対象との間のもっとも大きい相違は，領域である．ある粒子がその運動の履歴のある段階でもつ運動量に対する 1 個の対象（ベクトル）は，空間と時間にわたって定義された電磁場を記述する拡張された幾何学的な対象（“非対称な 2 階のテンソル場” あるいは，もっと簡単に，“2–形式の場”）に対照される．すべての物理量は幾何学的な対象で記述できなければならない，また，物理法則はすべて，これらの幾何学的な対象間の幾何学的な関係として表現できなければならない，という考え方は，Felix Klein (1872) のエルランゲン・プログラムが知的発端になり，Einstein の “一般共変性の原理” と Hermann Weyl (1925) の著作物においてさらに物理学に近づき，Veblen and Whitehead (1932) によって初めて明白に定式化され，そして今日，特殊相対性理論および一般相対性理論の両方に広く行きわたっている．

*3

A. Nijenhuis (1952) と S.-S. Chern (1960, 1966, 1971) は，幾何学的な対象の数学理論を詳述した．しかし，幾何力学を理解したり，また，その研究をするにはこの優雅で美しい題目に精通する必要はない．時空における幾何学的な対象は，座標系とか基準系には無関係に存在している実体であることを知りさえすればよい．時空内の点（“**事象**”）は幾何学的な対象である．2 つの近傍の事象をつなぐ矢印（“**ベクトル**”）は平坦な時空における幾何学的な対象であり，その拡張である “**接線ベクトル**” は，時空が曲がっているときでも幾何学的な対象である．“**計量**”（任意のベクトルの 2 乗の長さをつくるための機械，コラム 1.3 をみよ）は幾何学的な対象である．これらの概念のいずれを定義するのにも座標は必要でない．

次の数節で若干の幾何学的な対象を導入して，それらは平坦な時空における物理量を具象化している役割を示そう．

2.3 ベクトル

*4 もっとも単純なベクトルの概念から始めよう（図 2.1 B）．1 つの時空事象 $\mathcal{A}$（“後部”）

*2 すべての物理量は幾何学的な対象で記述されうる
*3 すべての物理法則は幾何学的に表現されうる
*4 ベクトルを定義する方法：矢印として

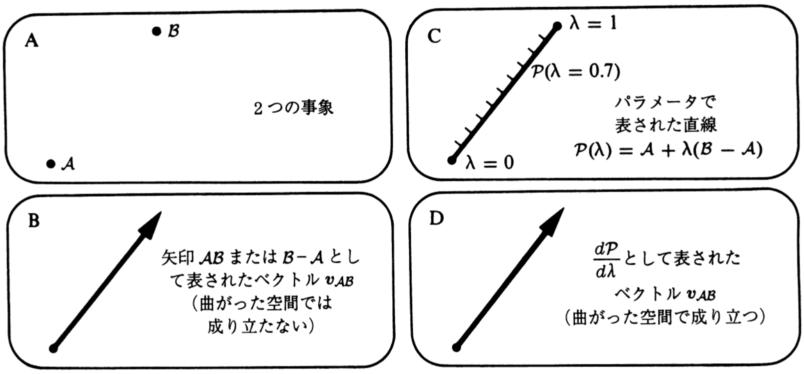


図 2.1　2 点の接続子としてのベクトルから微分としてのベクトルへ［“接線ベクトル”，バイローカル（bilocal）な概念よりもむしろ局所的な概念］

から他の事象 $\mathcal{B}$（“先端”）へ延びる矢印．このベクトルを

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{AB}} = \mathcal{B} - \mathcal{A} \ \text{（あるいは } \mathcal{AB}\text{）}$$

と書く．多くの目的（後の，曲がった時空への拡張を含めて）に対しては，このベクトル
*5 を考える，他のまったく同等な方法がより便利である．矢印をパラメータで表された直線 $\mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{A} + \lambda(\mathcal{B} - \mathcal{A})$ で表す．$\lambda = 0$ は矢印の後部を，そして $\lambda = 1$ は矢印の先端を表している．$\mathcal{P}(\lambda)$ に対するこの単純な線形表現の微分をつくる．

$$(d/d\lambda)[\mathcal{A} + \lambda(\mathcal{B} - \mathcal{A})] = \mathcal{B} - \mathcal{A} = \mathcal{P}(1) - \mathcal{P}(0) \equiv (\text{先端}) - (\text{後部}) \equiv \boldsymbol{v}_{\mathcal{AB}}$$

この結果から，2 点に関する対象（“2 局所的な”）としてのベクトルの観念は 1 点に関する対象（“接線ベクトル”，局所的な）としてのベクトルの概念で置き換えられる．

*6
$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{AB}} = (d\mathcal{P}/d\lambda)_{\lambda=0} \tag{2.1}$$

例：もし，$\mathcal{P}(\tau)$ を，固有時間をパラメータとして表した，自由粒子の直線的な世界線とすれば，1 秒の固有時間間隔で起こる変位は矢印 $\boldsymbol{u} = \mathcal{P}(1) - \mathcal{P}(0)$ を与える．この矢印は容易に時空図上に描ける．それは正確に粒子の 4–速度を示している．しかし，同じ変位を計算するにしても微分形式 $\boldsymbol{u} = d\mathcal{P}/d\tau$ は (1) 速度の概念をよりよく連想させる，(2) 加速度運動の場合に適する．こうして，図 2.2 におけるように，直線でない世界線 $\mathcal{P}(\tau)$ が与えられたとき，われわれはまず形式 $d\mathcal{P}/d\tau$ をつくり，その後に初めて 4–速度 $\boldsymbol{u}$ をみせるために，矢印 $\boldsymbol{u} = d\mathcal{P}/d\tau$ の直線 $\mathcal{P}(0) + \lambda(d\mathcal{P}/d\tau)_0$ を描かなければならない．

読者はこのような観点に慣れていないかもしれない．特別な Lorentz 基準系での 4–速
*7 度の成分の方にもっと慣れているかもしれない．

---

*5　パラメータで表された直線として
*6　曲線に沿う点の微分として
*7　ベクトルの成分

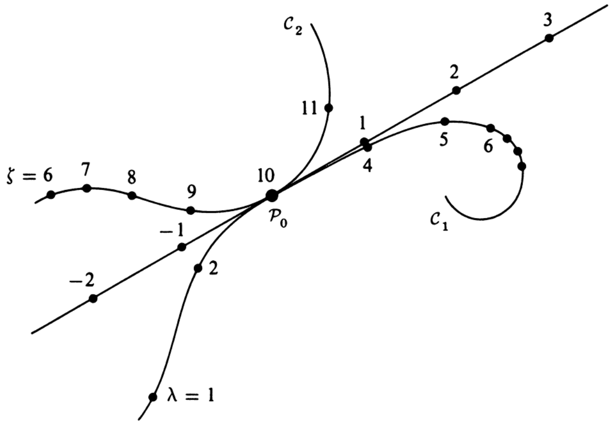


図 2.2 2 個の非常に異なる曲線から導かれる同じ接線ベクトル．$\mathcal{P}_0$ で 2 個の曲線にもっともよく合致する，パラメータ化された直線もまた描かれている．接線ベクトルはこの直線上で 0 から 1 に達する．

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}, \qquad u^j = \frac{dx^j}{d\tau} = \frac{v^j}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}} \tag{2.2}$$

ただし，

$$v^j = dx^j/dt = \text{“通常の速度” の成分},$$
$$\boldsymbol{v}^2 = (v^x)^2 + (v^y)^2 + (v^z)^2$$

もし読者がベクトルの第 4 成分に因数 $i = \sqrt{-1}$ が掛けられることに慣れているならば，4–速度の成分 [式 (2.2)] すら，少し見慣れないように思えるだろう（コラム 2.1 “‘ict’ にさようなら” をみよ）．

コラム 2.1 “ict” にさようなら

以前，特殊相対性理論に関わった者は，刀，すなわち “$x^4 = ict$” に掛けられなければならないだろう．この虚数座標は，時空の幾何学が Euclid 空間の幾何学と形式的になるべく異ならないようにみせるために発明された．Lorentz 変換が紙上で回転のようにみえるようにするために．そして，これを用いないときに必要になる，上つき文字をもつ量（エネルギー–運動量ベクトルの成分 p^μ のような）と下つき文字をもつ量（エネルギー–運動量 1–形式の成分 p_μ のような）の区別をせずに済ませるために．しかし，この後の区別をなしで済ませられるのはけっして親切からではない．この区別がなければ，ベクトル（2.3 節）かあるいは 1–形式（2.5 節）である非常に異なった幾何学的対象のいずれが考慮されているのかわからない．さらに，何もかも周期的に依存する（回転）角度と，つねに増大する運動量差を与えるパラメータ（コラム 2.4 “Lorentz 変換” の “速度パラメータ”）との間には重要な相違がある．もし虚時間座標が，取り扱われている幾何学的な対象の特徴と変換のパラメータの性質を視

界から隠してしまうならば，それはまた，さらに由々しい何かを行っている．それは＋＋＋幾何学と－＋＋＋幾何学の完全に異なる計量構造（2.4 節）を隠してしまう．Euclid 幾何学では，2 点間の距離がゼロであるときは，2 点は同じ点でなければならない．Lorentz–Minkowsky 幾何学では，2 つの事象間の間隔がゼロであるときは，1 つの事象は地球上にあって他の事象は銀河 M 31 の超新星上にあってよいが，それらの間隔はヌル光線（光円錐の一部）でなければならない．与えられた事象での後方向きの光円錐は，その事象が影響を受けうるすべての事象を含み，前方向きの光円錐はその事象が影響しうるすべての事象を含んでいる．時空のすべての事象から立ち去る二重の光円錐の群集は，からみあった因果関係の構造を形成する．この構造は実際，物理学的世界の機能の機構をつくる（この構造に関するさらなる注釈は Wheeler and Feynman 1945 および 1949, と Zeeman 1964 にある）．もし時空が平坦である領域で，以下のように書いてこの構造を視界から隠しうるならば

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 + (\Delta x^4)^2$$

ここに，$x^4 = ict$，一般的な曲がった時空多様体で虚座標を機能させる方法を誰も発見していない．もし “$x^4 = ict$” がそこで使用できないならば，ここで使用されないだろう．本章および今後，一般相対性理論の文献のいたるところと同じく，実時間座標が使用される，$x^0 = t = ct_{慣習}$（上つき文字は虚時間座標との混乱のいかなる可能性も避けるために 4 よりも 0）．

ベクトル自身はベクトルの成分よりもさらに基本的である．それはすべての座標に無関係な意味をもった幾何学的な対象である．こうして粒子は世界線 $\mathcal{P}(\tau)$ と，4–速度 $\boldsymbol{u} = d\mathcal{P}/d\tau$ をもち，それらはどのような座標とも関係がない．座標はコンピュータによる解析が必要なとき（ベクトルを拒否せよ，数値を受け入れよ）関わってくる．この目的のために，直交基底ベクトル（図 2.3）$\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, と $\boldsymbol{e}_3$ をもつ Lorentz 系を採用する．この系の原点
*8 $\mathcal{O}$ に相対的に，世界線は座標記述

$$\mathcal{P}(\tau) - \mathcal{O} = x^0(\tau)\boldsymbol{e}_0 + x^1(\tau)\boldsymbol{e}_1 + x^2(\tau)\boldsymbol{e}_2 + x^3(\tau)\boldsymbol{e}_3 = x^\mu(\tau)\boldsymbol{e}_\mu$$

をもつ．粒子の 4–速度を同じ Lorentz 系に相対的に表すと

$$\boldsymbol{u} = d\mathcal{P}/d\tau = (dx^\mu/d\tau)\boldsymbol{e}_\mu = u^0\boldsymbol{e}_0 + u^1\boldsymbol{e}_1 + u^2\boldsymbol{e}_2 + u^3\boldsymbol{e}_3 \tag{2.3}$$

*9 である．任意の他のベクトル $\boldsymbol{w}$ のこの系での成分 w^α は同様にこのような展開の係数として定義される．

$$\boldsymbol{w} = w^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \tag{2.4}$$

注意：$\boldsymbol{e}_\alpha$ の下つき文字 α はどのベクトルかを述べているのであって，どの成分かを述べているのではない！

*8　基底ベクトル
*9　ベクトルを基底ベクトルで展開する

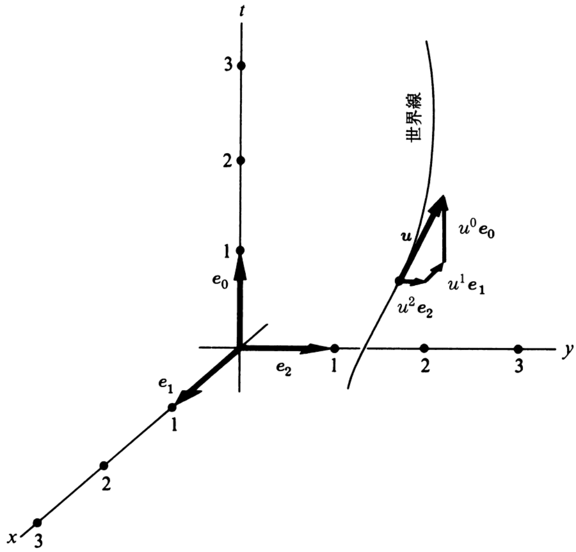


図 **2.3** 平坦な時空内の粒子の 4–速度．4–速度 $\boldsymbol{u}$は 粒子の世界線に接する接線ベクトル（矢印）である．世界線上の各事象に対して 1 個の接線ベクトル．特別な Lorentz 座標系には，4 個の座標軸に沿って指し示す，単位長の基底ベクトルが存在する．e_0, e_1, e_2, e_3．4–速度は，任意のベクトルのように，基底ベクトルに沿う成分の和として表されうる．

$$\boldsymbol{u} = u^0\boldsymbol{e}_0 + u^1\boldsymbol{e}_1 + u^2\boldsymbol{e}_2 + u^3\boldsymbol{e}_3 = u^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha$$

2.4 計量テンソル

計量テンソルは，コラム 1.3 のパート IV を思い出して，1 つのベクトルの 2 乗された長さ，あるいは 2 つの異なるベクトルのスカラー積を計算するための機械である．より正確には，計量テンソル $\boldsymbol{g}$ はベクトルを挿入するための 2 つの投入口をもつ機械である．[*10]

$$\begin{array}{ccc} & \text{投入口 1} & \text{投入口 2} \\ & \downarrow & \downarrow \\ \boldsymbol{g}(& \quad\quad & , \quad\quad) \end{array} \tag{2.5}$$

挿入すると機械は実数を吐き出す．

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \text{“}\boldsymbol{u}\ \text{と}\ \boldsymbol{v}\ \text{とのスカラー積”，また}\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\ \text{と表される} \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \text{“}\boldsymbol{u}\ \text{の 2 乗された長さ”，これはまた}\ \boldsymbol{u}^2\ \text{と表される}$$

さらにこの数は，ベクトルが挿入される順序に無関係である（“計量テンソルの対称性”），

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \tag{2.7}$$

そして，計量テンソルは挿入されるベクトルについて線形である．

*10 ベクトルのスカラー積を計算するための機械として定義された計量

$$\boldsymbol{g}(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w},a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})+b\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \tag{2.8}$$

計量“機械”は線形であるから，もしLorentz系の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\alpha$ に対してすることだけがわかれば，任意の入力に対して出力を以下のように計算することができる．

*11 (1) 記号（“計量係数”）$\eta_{\alpha\beta}$ を

$$\eta_{\alpha\beta}\equiv\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_\alpha,\boldsymbol{e}_\beta)=\boldsymbol{e}_\alpha\cdot\boldsymbol{e}_\beta \tag{2.9}$$

によって定義せよ．

(2) 計量テンソルの数値について，2つの事象間の間隔ベクトル $\boldsymbol{\xi}=\Delta x^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha$ の既知の

*12 2乗された長さからそれらの数値を計算せよ．

$$\begin{aligned}(\Delta s)^2&=-(\Delta x^0)^2+(\Delta x^1)^2+(\Delta x^2)^2+(\Delta x^3)^2\\&=\boldsymbol{g}(\Delta x^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha,\Delta x^\beta\boldsymbol{e}_\beta)=\Delta x^\alpha\Delta x^\beta\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_\alpha,\boldsymbol{e}_\beta)\\&=\Delta x^\alpha\Delta x^\beta\eta_{\alpha\beta}\qquad \Delta x^\alpha\text{のどのような選択に対しても}\\ \Longrightarrow\|\eta_{\alpha\beta}\|&\equiv\left\|\begin{matrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}\right\|\qquad\text{任意の Lorentz 系において}\end{aligned} \tag{2.10}$$

(3) 任意の2つのベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のスカラー積を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}&=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{g}(u^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha,v^\beta\boldsymbol{e}_\beta)=u^\alpha v^\beta\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_\alpha,\boldsymbol{e}_\beta),\\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}&=u^\alpha v^\beta\eta_{\alpha\beta}=-u^0v^0+u^1v^1+u^2v^2+u^3v^3\end{aligned} \tag{2.11}$$

から計算せよ．

時空における方向とベクトルを，**“時間的”**（負の，2乗された長さ），**“空間的”**（正の，2乗された長さ），および**“ヌル”**あるいは**“光的”**（ゼロの，2乗された長さ）に分類できるのは，計量係数 η_{00} の負の記号で可能になる．

コラム2.2は上述の考え方と記号の，特殊相対性理論における2つの簡単な問題への応用を示している．

2.5 微分形式

ベクトルと計量テンソルは，1章から，また特殊相対性理論における基本的な教科課程からすでによく知られた幾何学的対象である．3番目の幾何学的対象**“微分形式”**あるいは**“1–形式”**は，それほどよく知られていないが同様に重要である．

粒子，たとえば電子の4–運動量 $\boldsymbol{p}$ を考えよ．運動量の1つの概念をわかりやすく説明

*11 計量係数
*12 スカラー積はベクトルの成分から計算される

コラム 2.2 計量を用いた練習問題の解

練習問題：試験粒子の 4–速度 $\boldsymbol{u}$ の 2 乗された長さは -1 に等しいことを示せ．

解：任意の Lorentz 系で，成分 (2.2) を用いて，以下のように計算する．

$$\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = u^\alpha u^\beta \eta_{\alpha\beta} = -(u^0)^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2$$
$$= -\frac{1}{1-\mathbf{v}^2} + \frac{\mathbf{v}^2}{1-\mathbf{v}^2} = -1$$

練習問題：粒子の静止質量はそのエネルギーと運動量に，有名な式

$$(mc^2)^2 = E^2 - (\boldsymbol{p}c)^2$$

あるいは，同等な式（幾何学化された単位！）

$$m^2 = E^2 - \mathbf{p}^2$$

によって関係づけられることを示せ．

第 1 の解：4–運動量は $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u}$ によって定義される．ここに $\boldsymbol{u}$ は 4–速度であり，m は静止質量である．したがって，その 2 乗された長さは

$$\boldsymbol{p}^2 = m^2\boldsymbol{u}^2 = -m^2$$
$$= -(mu^0)^2 + m^2\mathbf{u}^2 = -\underset{\substack{\uparrow \\ E^2}}{\frac{m^2}{1-\mathbf{v}^2}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{p}^2}}{\frac{m^2\mathbf{v}^2}{1-\mathbf{v}^2}}$$

第 2 の解：E と $\mathbf{p}$ が測定される，観測者の系では，4–運動量は時間部分と空間部分に分かれる．

$$p^0 = E, \quad p^1\boldsymbol{e}_1 + p^2\boldsymbol{e}_2 + p^3\boldsymbol{e}_3 = \mathbf{p}$$

したがって，その 2 乗された長さは

$$\boldsymbol{p}^2 = -E^2 + \mathbf{p}^2$$

しかし，粒子の静止系では，$\boldsymbol{p}$ は次のように分かれる．

$$p^0 = m, \quad p^1 = p^2 = p^3 = 0$$

したがって，その 2 乗された長さは $-\boldsymbol{p}^2 = m^2$ である．しかし，2 乗された長さはどんな座標系にも無関係に定義された幾何学的な対象である．したがって，それはどのような手段によって計算しようとも同じでなければならない．

$$-\boldsymbol{p}^2 = m^2 = E^2 - \mathbf{p}^2$$

するために，この電子の4–速度，$\boldsymbol{u} = d\mathcal{P}/d\tau$（“世界線を近似的に表した直線に沿った，単位の固有時あたりの時空変位”）から始めよ．これは単位長のベクトルである．**運動量ベクトル**を得るために粒子の質量 m を掛けよ．

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u}$$

*13 しかし物理学はまた，運動量のまったく別な考え方を与える．物理学は de Broglie 波を各粒子に結びつける．さらに，この波はもっとも直接的な可能な物理学的意味をもっている．この波を結晶格子で回折させる．回折のパターンから，de Broglie 波の波長だけでなく，等しい整数の位相 $\phi = 7, \phi = 8, \phi = 9, \cdots$ の面で空間につくられるパターンを決めることができる．“$\tilde{\boldsymbol{k}}$” と名づけられる，この面のパターンは，1–形式に対して容易に見出せるもっとも単純な例証を与える．

このような1–形式でつくられる時空内の面のパターン，それは何の役に立つか？　時空における2つの近傍点，$\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}_0$ をとり，$\mathcal{P}_0$ から $\mathcal{P}$ へ矢印 $\boldsymbol{v} = \mathcal{P} - \mathcal{P}_0$ を伸ばす．そ

*14 れはある数の，整数の位相をもつ de Broglie 波の面を貫くだろう．おのおのの貫通ごとに仮想的なベルがゴーンと音を鳴らす．貫かれる面の数（ベルがゴーンと鳴らす音の数）は次のように表される．

$$\langle \tilde{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{v} \rangle$$

貫かれる1–形式 ↗　　　↖ 貫くベクトル

この例では，それは $\boldsymbol{v}$ の後部（$\mathcal{P}_0$）と先端（$\mathcal{P}$）の間の位相差に等しい．図2.4をみよ．

$$\langle \tilde{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{v} \rangle = \phi(\mathcal{P}) - \phi(\mathcal{P}_0)$$

通常は $\mathcal{P}_0$ も $\mathcal{P}$ も整数の位相をもつ点に存在しないだろう．したがって，整数の位相をもつ面の間に一様に内挿されたものとして，すべての中間の位相値をもつ無限個の面を想像することができるし，また，想像するだろう．その助けを借りて，$\langle \tilde{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{v} \rangle = \phi(\mathcal{P}) - \phi(\mathcal{P}_0)$ の正確な値が決められうる．

*15 数学を単純にするために，$\tilde{\boldsymbol{k}}$ を de Broglie 波の面の包括的なパターンとしてでなく，時空の特定の点近くの局所的なパターンとみなせ．ちょうど，ベクトル $\boldsymbol{u} = d\mathcal{P}/d\tau$ が粒子の世界線の局所的な振る舞いを表現するように（一般的な曲線の線形近似），1–形式 $\tilde{\boldsymbol{k}}$ は de Bloglie 波の面の局所的な形式を表現する（線形近似，平坦で等間隔の面，図2.5をみよ）．

1–形式 $\tilde{\boldsymbol{k}}$ を，ベクトルが挿入され，そこから数値が現れる機械とみなせ．$\boldsymbol{v}$ の挿入は出力として $\langle \tilde{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{v} \rangle$ を生み出す．$\tilde{\boldsymbol{k}}$ は平坦であり，また等間隔であるから，出力は入力の線形関数である．

$$\langle \tilde{\boldsymbol{k}}, a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} \rangle = a\langle \tilde{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{u} \rangle + b\langle \tilde{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{2.12a}$$

---

*13　de Broglie 波によって例証される 1–形式

*14　ベクトルが 1–形式を貫く

*15　平坦な，等間隔の面の集団とみられた 1–形式

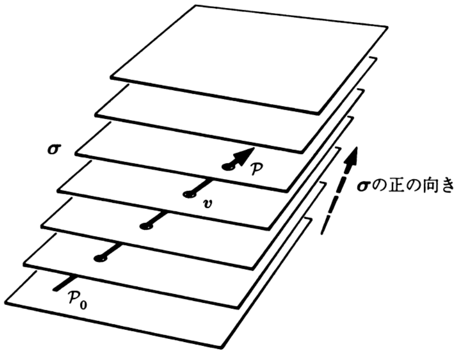


図 **2.4**　2 個の近傍事象 $\mathcal{P}_0$ および $\mathcal{P}$ 間のベクトル分離 $\boldsymbol{v} = \mathcal{P} - \mathcal{P}_0$，1–形式 $\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{\sigma}$ を $\boldsymbol{v}$ で貫通して数を与える．

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v} \rangle = (\text{貫通される面の数}) = 4.4$$

(4.4 個の "ベルのゴーンという音".) $\boldsymbol{\sigma}$ が電子に対する de Broglie 波の一定位相，$\phi = 17, \phi = 18, \phi = 19, \cdots$ の面からつくられているときには，$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v} \rangle$ は事象 $\mathcal{P}_0$ および $\mathcal{P}$ 間の位相差である．$\boldsymbol{\sigma}$ は面によって完全には指定されないことに注意せよ．方向づけもまた必要である．面から面へのどの方向が "正" であるか，すなわち，どの方向に ϕ は増大するか？

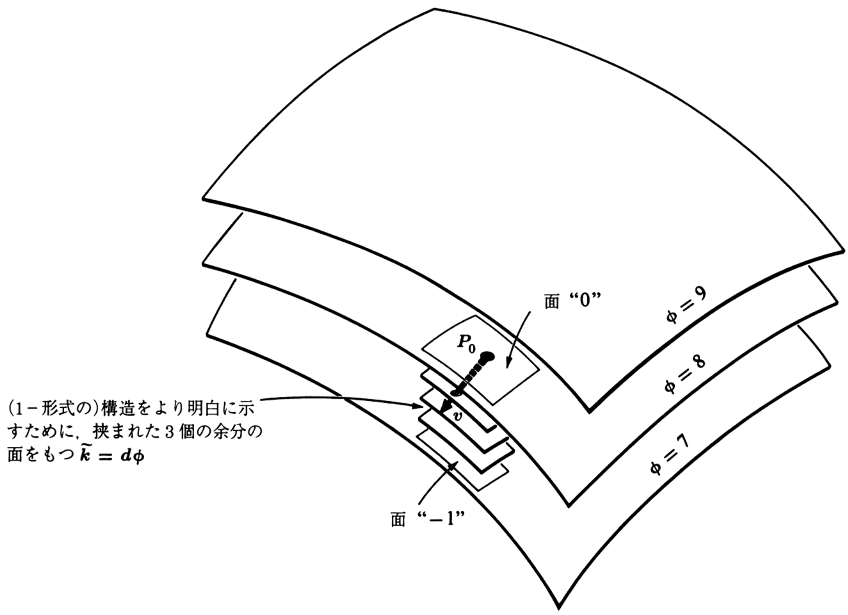


図 **2.5**　これは一石二鳥の図である．(a) それは事象 $\mathcal{P}_0$ での de Broglie 波 1–形式 $\tilde{\boldsymbol{k}}$ (等しく間隔を置かれた，平坦な面，あるいは一定位相の面を近似する "超平面" の群) を例示する．(b) それは関数 ϕ の勾配 $\boldsymbol{d}\phi$ (2.6 節で定義されている概念) を例示し，同じ方向づけられた平坦な面の群である．

$$\tilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{d}\phi$$

異なる事象では，$\tilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{d}\phi$ は異なる，すなわち面の方向づけが異なり，間隔が異なる．非常に短いベクトル $\boldsymbol{v}$ の末端と先端間の ϕ の変化は $\boldsymbol{v}$ によって貫通される $\boldsymbol{d}\phi$ の面の数，$\langle \boldsymbol{d}\phi, \boldsymbol{v} \rangle$ に等しい．それはこの図では -0.5 に等しい．

*16　これは，実際，1–形式の数学的な定義である．**1–形式はベクトルの線形で実数値の関数である．**すなわち，ベクトルを取り入れ数を生産する線形機械．機械 $\tilde{\boldsymbol{k}}$ が与えられると，対応する面を時空に描くことは簡明である．機械が駐在する点 $\mathcal{P}_0$ を選ぶ．$\mathcal{P}_0$ を通過する

*16　ベクトルの線形関数としてみられる 1–形式

$\tilde{\boldsymbol{k}}$ の面は $\langle \tilde{\boldsymbol{k}}, \mathcal{P} - \mathcal{P}_0 \rangle = 0$（ベルが鳴らすゴーンという音がない）なる点 $\mathcal{P}$ を含んでいる．他の面は $\langle \tilde{\boldsymbol{k}}, \mathcal{P} - \mathcal{P}_0 \rangle = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$ なる点を含んでいる．

ときどき 1–形式は太字体の，上に波形記号のついたラテン文字，たとえば，$\tilde{\boldsymbol{k}}$ で表される．しかし，よりしばしば太字のギリシャ文字，たとえば，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}$ で表される．ベクトル $\boldsymbol{u}$ が挿入されるとき，1–形式 $\boldsymbol{\sigma}$ の出力は "**$\boldsymbol{\sigma}$ の $\boldsymbol{u}$ 上の値**" あるいは "**$\boldsymbol{\sigma}$ の $\boldsymbol{u}$ についての縮約**" とよばれる．

*17 また，1–形式は，任意の他の種類の関数のように加えられうる．1–形式 $a\boldsymbol{\alpha} + b\boldsymbol{\beta}$ はベクトル $\boldsymbol{u}$ が挿入されるとき，次の数を生産する機械（面の集団）である．

$$\langle a\boldsymbol{\alpha} + b\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{u} \rangle = a\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{u} \rangle + b\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{u} \rangle \tag{2.12b}$$

図 2.6 はこの加法を面によって表現する．

与えられた事象でのすべての 1–形式の集合は，この術語の抽象的で，代数的な意味で "ベクトル空間" であることを証明することができる．

粒子とその de Broglie 波に戻ろう．ちょうど，矢印 $\boldsymbol{p} = md\mathcal{P}/d\tau$ が粒子の実際の世界線の $\mathcal{P}_0$ 近くでの最善の**直線**近似を表現するように，1–形式 $\tilde{\boldsymbol{k}}$ の平坦な面は粒子の de Broglie 波の曲がった面に対する最善の線形近似を与える，そして $\tilde{\boldsymbol{k}}$ 自身，$\mathcal{P}_0$ 近くでの de Broglie 位相 ϕ をもっともよく近似する**線形関数**である．

$$\phi(\mathcal{P}) = \phi(\mathcal{P}_0) + \langle \tilde{\boldsymbol{k}}, \mathcal{P} - \mathcal{P}_0 \rangle + (\mathcal{P} - \mathcal{P}_0) \text{ について高次の項} \tag{2.13}$$

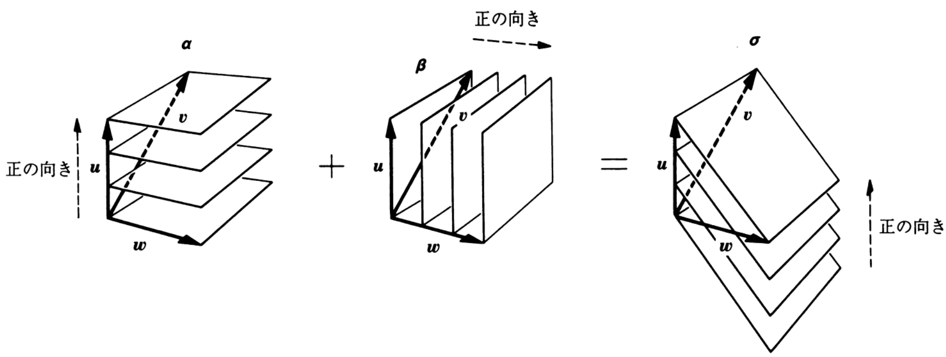


図 2.6　1–形式，$\boldsymbol{\sigma}$ を生み出す，2 個の 1–形式，$\boldsymbol{\alpha}$ および $\boldsymbol{\beta}$ の加法．$\boldsymbol{\alpha}$と$\boldsymbol{\beta}$ の面から出発する絵で表した構成が要求される．たとえば，$\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathcal{P} - \mathcal{P}_0 \rangle = \cdots - 1, 0, 1, 2, \cdots$，そして $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ の同様な構成を行う．加法過程の線形性 (2.12b) に基づいた，このような構成は以下のようである．(1) $\boldsymbol{\beta}$ の面に平行に存在する（貫通がない!）が，しかし $\boldsymbol{\alpha}$ の正確に 3 個の面を貫通する若干のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \cdots$ を取り上げる．これらのおのおのはそうすると $\boldsymbol{\sigma}$ の正確に 3 個の面を貫通しなければならない．

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{u} \rangle = 3$$

(2) $\boldsymbol{\alpha}$ の面に平行に存在するが，しかし $\boldsymbol{\beta}$ の正確に 3 個の面を貫通する若干の別なベクトル $\boldsymbol{w}, \cdots$ を取り上げる．これらは $\boldsymbol{\sigma}$ の正確に 3 個の面をまた貫通するだろう．(3) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \cdots, \boldsymbol{w}, \cdots$ はすべてそれらの末端を 1 個の面上にもちそしてそれらの先端を 3 番目の続く面上にもつような，等しい間隔をもった一義的な面の群を構成せよ．

*17　1–形式の加法

*18 実際，de Broglie 1–形式 $\tilde{\boldsymbol{k}}$ と運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ は物理学的にも（量子論を通して）また数学的にも正確に同じ情報を含んでいる．それらの関係をみるために，$\tilde{\boldsymbol{k}}$ の面を $\hbar\times$位相で名前をつけ直せ．それによって **"運動量 1–形式"** $\tilde{\boldsymbol{p}}$ を得る．この 1–形式を任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ で貫き，そして次の結果（練習問題 2.1）を見出せ．

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v} = \langle\tilde{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{v}\rangle \tag{2.14}$$

言葉で述べると，$\boldsymbol{v}$ の 4–運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ 上への射影は，$\boldsymbol{v}$ が 4–運動量 1–形式 $\tilde{\boldsymbol{p}}$ で貫く面の数に等しい．例：$\tilde{\boldsymbol{p}}$ の面内にあるベクトル $\boldsymbol{v}$（貫通がない）は $\boldsymbol{p}$ に直交している（射影がない）．$\boldsymbol{p}$ 自身は $\tilde{\boldsymbol{p}}$ の $\boldsymbol{p}^2 = -m^2$ 個の面を貫く．

*19 任意のベクトル $\boldsymbol{p}$ に対応して，式 (2.14) で定義される一義的な 1–形式（ベクトルの線形関数）$\tilde{\boldsymbol{p}}$ が存在する．そして任意の 1–形式 $\tilde{\boldsymbol{p}}$ に対応して，すべての他のベクトル上へのその射影が式 (2.14) で定義される，一義的なベクトル $\boldsymbol{p}$ が存在する．図 2.7 はいくつかのベクトルとそれらに対応する 1–形式を示している．

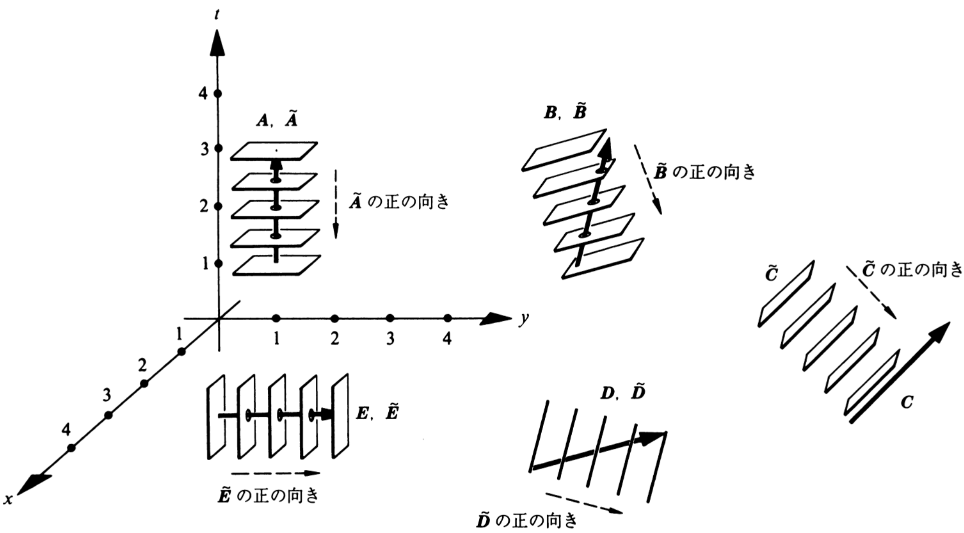


図 2.7 若干のベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$，および対応する 1–形式 $\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{B}}, \tilde{\boldsymbol{C}}, \tilde{\boldsymbol{D}}, \tilde{\boldsymbol{E}}$．与えられたベクトル $\boldsymbol{U}$ に対応する $\tilde{\boldsymbol{U}}$ を描く過程はまったく単純である．(1) $\tilde{\boldsymbol{U}}$ の面をベクトル $\boldsymbol{U}$ に直交して方向づけよ（なぜか？ なぜなら $\boldsymbol{U}$ に直交する任意のベクトル $\boldsymbol{V}$ は $\tilde{\boldsymbol{U}}$ の面を貫通してはならない $(0 = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V} = \langle\tilde{\boldsymbol{U}}, \boldsymbol{V}\rangle)$，したがって $\tilde{\boldsymbol{U}}$ の面内に存在しなければならないからである）．(2) $\tilde{\boldsymbol{U}}$ の面を，ある任意のベクトル $\boldsymbol{Y}$（たとえば，$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{U}$）によって貫通される面の数が $\boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{U}$ に等しくなるように間隔を置け．

図で $\tilde{\boldsymbol{B}}$ の面は，実際，$\boldsymbol{B}$ に垂直である，$\tilde{\boldsymbol{C}}$ の面は，実際，$\boldsymbol{C}$ に垂直であるなど．もしそれらがそうみえないならば，それは読者が時空図を Lorentz 幾何学でなく，Euclid 幾何学の属性と考えるからである．読者は，たとえば，$\boldsymbol{C}$ はヌルベクトルであるから，それは自らに直交する $(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{C} = 0)$．したがってそれ自身は 1–形式 $\tilde{\boldsymbol{C}}$ の面内に存在しなければならない．混乱した読者は，より基本的な教科書，たとえば，Taylor and Wheeler (1966) における時空図を見直せ．

ただ 1 個の物理量はベクトル $\boldsymbol{p}$ によって，あるいは対応する 1–形式 $\tilde{\boldsymbol{p}}$ によって，同じようによく記述されうる．ベクトル記述がもっとも単純でもっとも自然なこともある．1–形

*18 1–形式とベクトルとの間の物理学的な対応

*19 1–形式とベクトルとの間の数学的な対応

式記述がよりふさわしいこともある．**例**：Lorentz 座標時間の未来への進行を表す 1–形式—$x^0 = \cdots, 7, 8, 9, \cdots$ の面を考えよ．対応するベクトルは過去の方向を指し示す [図 2.7 あるいは式 (2.14) をみよ]．時間の前方への進行のこの記述はあまりふさわしくない！ 1–形式の正の向きは，どのように定められるか？

しばしば，ベクトル $\boldsymbol{p}$ に対応する 1–形式 $\tilde{\boldsymbol{p}}$ から波形記号を省略して，両方に対して同じ記号 $\boldsymbol{p}$ を用いる．このような習慣は $\tilde{\boldsymbol{p}}$ と $\boldsymbol{p}$ との間の一義的な対応（数学的なまた物理学的な）によって正当化される．

[練習問題]

2.1

式 (2.14) は de Broglie 波の量子力学的な性質と一致していることを示せ．

$$\psi = e^{i\phi} = \exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)]$$

2.6 勾配と方向微分

*20 関数 f の**勾配** "$\boldsymbol{d}f$" よりも単純な 1–形式は存在しない．勾配は 1–形式であるか？ どうしてそうなのか？ 勾配をベクトルとしてつねに知っていたのではないのか？ そう，そのとおり，しかしそれは，より適切な 1–形式の概念に慣れていなかったからである．よりよく知られた勾配は，式 (2.14) を通して 1–形式の勾配に対応するベクトルである．点 $\mathcal{P}_0$ における $\boldsymbol{d}f$ を表示する超平面は，平坦にし，等間隔に合わせる（図 2.5，ここでの f をそこでの ϕ と同一視せよ）ことを除けば，まさに f 自身の平面である．より正確に，これらの超平面は $\mathcal{P}_0$ の無限小近傍において f を近似する線形関数の平面である．

なぜ，"勾配" という名前が？ なぜなら $\boldsymbol{d}f$ は $\mathcal{P}_0$ の近傍において f の 1 次の変化を記述するからである．

$$f(\mathcal{P}) = f(\mathcal{P}_0) + \langle \boldsymbol{d}f, \mathcal{P} - \mathcal{P}_0 \rangle + (\text{非線形項}) \tag{2.15}$$

[何かの "微分" という基本的な考え方を，"点におけるその何かに対する最善の線形近似" と比較せよ—値と独立変数が，無限次元のベクトルであるような関数に対してもうまくいく考え方！ たとえば，Dieudoné (1960) をみよ．]

任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ をとれ．$\mathcal{P}(\lambda) - \mathcal{P}_0 = \lambda \boldsymbol{v}$ で定義された曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ をつくれ，そして関数 f をこの曲線に沿って微分せよ．

$$\partial_{\boldsymbol{v}} f = (d/d\lambda)_{\lambda=0} f[\mathcal{P}(\lambda)] = (df/d\lambda)_{\mathcal{P}_0} \tag{2.16a}$$

---

*20　1–形式としての関数の勾配

*21 この微分を行う“微分演算子”,

$$\partial_{\boldsymbol{v}} = (d/d\lambda)_{\lambda=0\ \text{において, 曲線}\ \mathcal{P}(\lambda)-\mathcal{P}_0=\lambda\boldsymbol{v}\ \text{に沿って}} \tag{2.16b}$$

は,“**ベクトル $\boldsymbol{v}$ に沿った方向微分演算子**”とよばれる．方向微分 $\partial_{\boldsymbol{v}} f$ と勾配 $\boldsymbol{d}f$ とは密接に関係していて，それは $\partial_{\boldsymbol{v}}$ を式 (2.15) に適用し，点 $\mathcal{P}_0$ における結果を求めればわかる．

$$\partial_{\boldsymbol{v}} f = \langle \boldsymbol{d}f, d\mathcal{P}/d\lambda \rangle = \langle \boldsymbol{d}f, \boldsymbol{v} \rangle \tag{2.17}$$

この結果は，言葉で表現すると次のようになる．$\boldsymbol{d}f$ は，任意の要求されるベクトル $\boldsymbol{v}$ に沿った f の変化率を計算するための線形機械である．$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{d}f$ に挿入せよ．出力（“貫かれる面の数，ベルがゴーンと鳴らす音の数”）は $\partial_{\boldsymbol{v}} f$ である—それは，十分小さい $\boldsymbol{v}$ に対して，単純に $\boldsymbol{v}$ の先端と後部の間の f の差である．

2.7 幾何学的な対象の座標表示

平坦な時空では，特別な注意が Lorentz 系に集まる．Lorentz 系の座標 $x^0(\mathcal{P}), x^1(\mathcal{P})$,
*22 $x^2(\mathcal{P}), x^3(\mathcal{P})$ は関数である．したがって，それらの勾配が計算できる．生ずる“基底 1–形式”のおのおのは,

$$\boldsymbol{\omega}^\alpha = \boldsymbol{d}x^\alpha \tag{2.18}$$

その超平面として座標面 $x^\alpha =$ 一定 をもっている，図 2.8 をみよ．したがって基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\alpha$ は正確に基底 1–形式 $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ の 1 つの面を貫きこれに対して他の 3 つの基底ベクトルは $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ の面に平行状態にあり，したがって何も貫かない．

$$\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha{}_\beta \tag{2.19}$$

（基底 1–形式 $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$ の集合と基底ベクトル $\{\boldsymbol{e}_\beta\}$ の集合がこの性質をもつならば，それらは互いに他の“**双対**”であるという.）

ちょうど任意のベクトルは基底 $\boldsymbol{e}_\alpha$ によって $\boldsymbol{v} = v^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$ と展開できるように，任意の
*23 1–形式は $\boldsymbol{\omega}^\beta$ によって展開できる．

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_\beta \boldsymbol{\omega}^\beta \tag{2.20}$$

展開係数 σ_β は“$\boldsymbol{\sigma}$ の基底 $\boldsymbol{\omega}^\beta$ 上の成分”とよばれる．
*24 これらの定義は洗練された計算の形式を生み出す．こうして，$\boldsymbol{\sigma}$ の何個の面が基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\alpha$ で貫かれるか，式 (2.19) と (2.20) が答えを与える．

---
*21　方向微分演算子が定義される
*22　基底 1–形式
*23　基底による 1–形式の展開
*24　ベクトルおよび 1–形式の成分の計算と操作

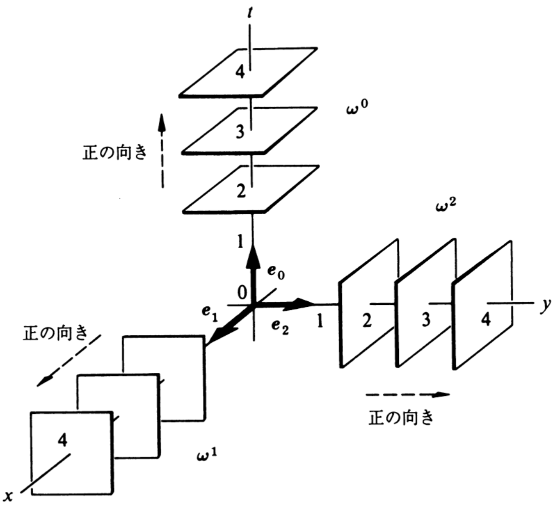


図 2.8　特別な Lorentz 座標系の基底ベクトルと 1–形式．基底 1–形式は

$$\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha{}_\beta$$

となるように設定されている．

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{e}_\alpha \rangle = \langle \sigma_\beta \boldsymbol{\omega}^\beta, \boldsymbol{e}_\alpha \rangle = \sigma_\beta \langle \boldsymbol{\omega}^\beta, \boldsymbol{e}_\alpha \rangle = \sigma_\beta \delta^\beta{}_\alpha$$

すなわち，

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{e}_\alpha \rangle = \sigma_\alpha \tag{2.21a}$$

同様に，任意のベクトル $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_\beta v^\beta$ に対して $\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{v} \rangle$ を計算せよ．結果は

$$\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{v} \rangle = v^\alpha \tag{2.21b}$$

である．式 (2.21a) に v^α を掛けて和をとれ，あるいは式 (2.21b) に σ_α を掛けて和をとれ．いずれの場合にも結果は

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v} \rangle = \sigma_\alpha v^\alpha \tag{2.22}$$

である．これは，成分を用いて，$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v} \rangle$ の座標に無関係な値を計算する方法を与える．

おのおのの Lorentz 系は，任意の幾何学的な対象あるいは関係の座標に依存した表示を与える．$\boldsymbol{v}$ はその成分 v^α によって表示される．$\boldsymbol{\sigma}$ はその成分 σ_α によって，点 $\mathcal{P}$ はその座標 x^α によって，関係 $\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v} \rangle = 17.3$ は，$\sigma_\alpha v^\alpha = 17.3$ による．

方向微分演算子 $\partial_{\boldsymbol{v}}$ の座標表示を見出すために，式 (2.16b) を基本的な計算法を用いて書き直す．

$$\partial_{\boldsymbol{v}} = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)_{\mathcal{P}_0} = \underbrace{\left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\right)_{\mathcal{P}(\lambda)-\mathcal{P}_0=\lambda \boldsymbol{v}\text{ に沿って，}\mathcal{P}_0\text{ において}}}_{v^\alpha;\ \text{式 (2.3) をみよ}} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$$

結果は

*25
$$\partial_{\boldsymbol{v}} = v^\alpha \partial/\partial x^\alpha \tag{2.23}$$

である．とくに，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\alpha$（成分 $[\boldsymbol{e}_\alpha]^\beta = \langle \boldsymbol{\omega}^\beta, \boldsymbol{e}_\alpha \rangle = \delta^\beta \alpha$）に沿う方向微分は

$$\partial_\alpha \equiv \partial_{\boldsymbol{e}_\alpha} = \partial/\partial x^\alpha \tag{2.24}$$

である．これは，また，図 2.8 から明白であるはずである．

*26 勾配 1–形式 $\boldsymbol{d}f$ の成分，それは $f_{,\alpha}$ と表される．

$$\boldsymbol{d}f = f_{,\alpha}\boldsymbol{\omega}^\alpha \tag{2.25a}$$

は上の公式を用いて容易に計算される．

$$\begin{aligned} f_{,\alpha} &= \langle \boldsymbol{d}f, \boldsymbol{e}_\alpha \rangle && [\text{成分を計算する標準的な方法, 式 (2.21a)}] \\ &= \partial_\alpha f && [\text{方向微分と勾配との間の関係 (2.17) によって}] \\ &= \partial f/\partial x^\alpha && [\text{式 (2.24) によって}] \end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{d}f$ の成分は勾配の基本的な計算方法の考え方と一致して，まさに，座標軸に沿う偏微分である．

$$f_{,\alpha} = \partial f/\partial x^\alpha, \qquad \text{すなわち}, \qquad \boldsymbol{d}f = (\partial f/\partial x^\alpha)\boldsymbol{d}x^\alpha \tag{2.25b}$$

（思い出せ：$\boldsymbol{\omega}^\alpha = \boldsymbol{d}x^\alpha$.）公式 $\boldsymbol{d}f = (\partial f/\partial x^\alpha)\boldsymbol{d}x^\alpha$ は，$\boldsymbol{d}f$ が基本的な計算方法である "微分" の厳密な説明であることを正しく暗示している．コラム 2.3 をみよ．

コラム 2.3 微　　分

関数 f の "外微分" あるいは "勾配" $\boldsymbol{d}f$ は "微分" の基本的な概念のより厳密な説明である．

初歩的な教科書では，微分 df は，点 $\mathcal{P}$ のある無限小変位に関連した，"関数 $f(\mathcal{P})$ の無限小変化" を表すものとして提示される．しかし $\mathcal{P}$ の変位は無限小であるけれども，任意であることを思い出そう．こうして df はある指定されない方向での f の変化を表している．

しかし，これはまさに外微分 $\boldsymbol{d}f$ が表しているものである．点 $\mathcal{P}$ の特別な無限小変位 $\boldsymbol{v}$ を選べ．変位ベクトル $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{d}f$ を貫くと，数 $\langle \boldsymbol{d}f, \boldsymbol{v} \rangle = \partial_{\boldsymbol{v}} f$ が与えられる．その数は $\boldsymbol{v}$ の後部から先端まで行くときの f の変化である．こうして $\boldsymbol{d}f$ は，貫かれて数を与えてしまうまでは，指定されない方向での f の変化を表している．$\boldsymbol{d}f$ を $\boldsymbol{v}$ が貫くという行為は，変化が測定される方向を明確にするという行為である．教科書的表現の唯一の失敗は，そうすると，$\boldsymbol{d}f$ はスカラーあるいは数であるという示唆

*25 座標による方向微分
*26 勾配の成分

であった．df を数 $\langle df, v \rangle$ に帰着させるには，方向 v を指定する必要があることを明確に認識することは，実際に df は1–形式，f の勾配であることを示している．

幾何学的な関係に対する他の重要な座標表示は次の練習問題で研究されている．

[練習問題]

計算に次の便利な公式を導け．

2.2 ベクトルに対応する1–形式を得るために添字を下げる

ベクトル u に対応する1–形式 $\tilde{u}$ の成分 u_α は計量係数 $\eta_{\alpha\beta}$ で“添字を下げる”ことによって得ることができる．

$$u_\alpha = \eta_{\alpha\beta} u^\beta, \qquad \text{すなわち}, \qquad u_0 = -u^0, u_k = u^k \tag{2.26a}$$

2.3 ベクトルを取り戻すために添字を上げる

添字を上げることによって u の成分に戻ることができる．

$$u^\alpha = \eta^{\alpha\beta} u_\beta \tag{2.26b}$$

行列 $\|\eta^{\alpha\beta}\|$ は行列 $\|\eta_{\alpha\beta}\|$ の逆として定義され，$\|\eta_{\alpha\beta}\|$ に等しくなる．

$$\eta^{\alpha\beta}\eta_{\beta\gamma} \equiv \delta^\alpha{}_\gamma, \qquad \eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad \text{すべての } \alpha, \beta \text{ に対して} \tag{2.27}$$

2.4 スカラー積へのいろいろな道

u と v とのスカラー積は次の方法のいずれによっても計算できる．

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u^\alpha v^\beta \eta_{\alpha\beta} = u^\alpha v_\alpha = u_\alpha v_\beta \eta^{\alpha\beta} \tag{2.28}$$

2.8 遠心分離器と光子

ベクトル，計量，1–形式，関数，勾配，方向微分，これらすべての幾何学的対象とさらに多くのものは，平坦な時空で物理量を表すために用いられる．そして，すべての物理法則はこのような幾何学的対象で表されなければならない．

*27 例として Mössbauer 効果（図2.9）を用いる高精度の赤方偏移実験を考える．光子の放出器と吸収器が，慣性実験室で測定されるとき，角度 α だけ離れた点にある遠心分離器の縁に結びつけられている．放出器と吸収器は，実験室で測定されるとき，半径 r の位置にあり，遠心分離器は角速度 ω で回転している．

*27 活動している幾何学的対象：遠心分離器と光子の例

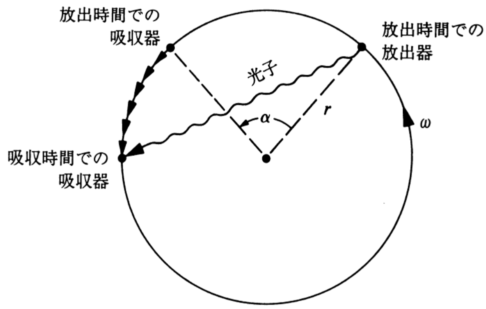


図 **2.9** 遠心分離機と光子.

問題：測定される赤方偏移,

$$z = (\lambda_{\text{吸収}} - \lambda_{\text{放出}})/\lambda_{\text{放出}}$$

は ω, r と α でいかに与えられるか？

解：$\boldsymbol{u}_e$ を与えられた光子の放出という事象での放出器の 4–速度とする，$\boldsymbol{u}_a$ を吸収という事象での吸収器の 4–速度とする，そして $\boldsymbol{p}$ を光子の 4–運動量とする．3 個の量はすべて座標と無関係に定義されたベクトルである．放出器と吸収器で測定される光子のエネルギー E_e と E_a も，同じように座標と無関係である．ある一定の光子を放出するある一定の放出器が，光子にエネルギー E_e という属性をもたせる事実を記述するのに，座標は必要でない．E_e に対する幾何学的な公式,

$$E_e = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}_e \tag{2.29}$$

に座標は必要でない [この公式がうまくいくのは，次のことを思い出せば容易に確かめることができる．放出器の系では，${u_e}^0 = 1$，そして ${u_e}^j = 0$．したがって

$$E_e = -p_\alpha {u_e}^\alpha = -p_0 = +p^0$$

これは同定 "(4–運動量の時間成分 = エネルギー)" と一致している]．吸収されたエネルギーに対する純粋に幾何学的な公式,

$$E_a = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}_a$$

は式 (2.29) に類似している．

吸収された波長の放出された波長に対する比は，エネルギー比の逆である ($E = h\nu = hc/\lambda$ であるから)．

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_e} = \frac{E_e}{E_a} = \frac{-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}_e}{-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}_a}$$

この比はもっとも容易に慣性実験室系で計算される．

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_e} = \frac{p^0 {u_e}^0 - p^j {u_e}^j}{p^0 {u_a}^0 - p^j {u_a}^j} \equiv \frac{p^0 {u_e}^0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}_e}{p^0 {u_a}^0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}_a} \tag{2.30}$$

(ここで，そして以下一貫して，与えられた Lorentz 系での 3 次元ベクトルに対しゴシッ

クのラテン文字を用いる．そして，われわれはそれらを操作するために3次元の，Euclid ベクトル解析の通常の記号と形式を用いる.）遠心分離器の縁の通常の速度，$v=\omega r$ の大きさは時間的に変わらないから，${u_e}^0$ と ${u_a}^0$ は等しい，そして $\boldsymbol{u}_e$ と $\boldsymbol{u}_a$ の大きさ—ただし方向ではない—は等しい．

$$ {u_e}^0 = {u_a}^0 = (1-v^2)^{-1/2}, \quad |\boldsymbol{u}_e| = |\boldsymbol{u}_a| = v/(1-v^2)^{1/2} $$

図2.9の幾何学から，$\boldsymbol{u}_e$ は $\boldsymbol{p}$ について $\boldsymbol{u}_a$ と同じ角度をつくる．したがって，$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}_e = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}_a$，そして $\lambda_{吸収}/\lambda_{放出} = 1$．**赤方偏移は存在しない！**

この解はLorentz変換にまったく関係しなかったことに注意せよ—Lorentz変換は本書でいまだ議論すらされなかった！ 幾何学的で座標から自由な観点の力は明らかである！

[**練習問題**]

幾何学的な観点を用いるためには，理論と実験との間のいろいろな座標によらない接点をもたなければならない．1つのこのような接触は，4–速度 $\boldsymbol{u}$ をもつ観測者によって測定されるとき，4–運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつ光子のエネルギーに対する式 $E=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}$ である．以下の他の接点を証明せよ．

2.5　4–運動量からエネルギーと速度を求める

静止質量 m と4–運動量 $\boldsymbol{p}$ の粒子が4–速度 $\boldsymbol{u}$ をもつ観測者によって考察される．以下のことを示せ．(a) 観測者が測定するエネルギーは

$$ E = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u} \tag{2.31} $$

である．したがって (b) 観測者が粒子に帰する静止質量は

$$ m^2 = -\boldsymbol{p}^2 \tag{2.32} $$

である．(c) 観測者が測定する運動量は大きさ

$$ |\boldsymbol{p}| = [(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u})^2 + (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p})]^{1/2} \tag{2.33} $$

をもつ．(d) 観測者が測定する通常の速度 $\boldsymbol{v}$ は大きさ

$$ |\boldsymbol{v}| = \frac{|\boldsymbol{p}|}{E} \tag{2.34} $$

をもつ．ただし，$|\boldsymbol{p}|$ と E は上に与えられている．そして (e) 観測者のLorentz系での成分が

$$ v^0 = 0, \quad v^j = (dx^j/dt)_{粒子} = 通常の速度 $$

である4–速度 $\boldsymbol{v}$ は，

$$ \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p} + (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}}{-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}} \tag{2.35} $$

で与えられる．

2.6 温度勾配

太陽内部のおのおのの事象 $\mathcal{Q}$ は，そこでの暑い気体内に静止している温度計で測定された温度，$T(\mathcal{Q})$ であるとする．そうすると $T(\mathcal{Q})$ は関数である．その定義と議論に座標は必要でない．外部空間からの宇宙線は 4–速度 $\boldsymbol{u}$ で太陽を飛び抜ける．宇宙線の時計で測定したとき，その近傍における温度の時間勾配は

$$dT/d\tau = \partial_{\boldsymbol{u}} T = \langle \boldsymbol{d}T, \boldsymbol{u} \rangle \tag{2.36}$$

である．太陽内部での局所 Lorentz 系では，この式は

$$\frac{dT}{d\tau} = u^{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v^j}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}} \frac{\partial T}{\partial x^j} \tag{2.37}$$

と書ける．なぜこの結果は適正であるか？

2.9 Lorentz 変換

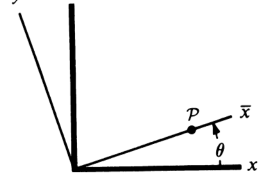
計算を簡単にするために，われわれはしばしば座標によらない言葉でよりもむしろ，ベクトルや 1–形式の成分を取り扱う．このような成分の操作はときどき 1 つの Lorentz 系から他の Lorentz 系への変換を含む．読者はすでにこのような Lorentz 変換を熟知している．しかし，コラム 2.4 の簡単な復習は読者の記憶を新たにし，本書で用いられている記号に馴れていけるだろう．

コラム 2.4 Lorentz 変換

x–y 平面で角度 θ だけ基準系を回転する

傾き $s = \tan\theta$, $\quad \sin\theta = \dfrac{s}{(1+s^2)^{1/2}}$, $\quad \cos\theta = \dfrac{1}{(1+s^2)^{1/2}}$

$$t = \bar{t}$$
$$x = \bar{x}\cos\theta - \bar{y}\sin\theta$$
$$y = \underbrace{\bar{x}\sin\theta}_{*} + \bar{y}\cos\theta$$
$$z = \bar{z}$$



$$\bar{t} = t$$
$$\bar{x} = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$\bar{y} = -x\sin\theta + y\cos\theta$$
$$\bar{z} = z$$

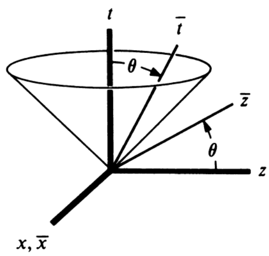
* すべての符号はこの項の符号に従う．点 $\mathcal{P}$ からみれば正である．

2 つのこのような回転の結合

$$s = \frac{s_1 + s_2}{1 - s_1 s_2} \quad \text{あるいは} \quad \theta = \theta_1 + \theta_2$$

z–t 平面における速度パラメータ α による基準系の推進（boost）

$$\text{速度}\beta = \tanh\alpha, \qquad \sinh\alpha = \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}}, \qquad \cosh\alpha = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \text{“}\gamma\text{”}$$



$$\tan\theta = \text{速度}\beta$$
$$= \tanh\alpha$$

$$t = \bar{t}\cosh\alpha + \bar{z}\sinh\alpha \qquad \bar{t} = t\cosh\alpha - z\sinh\alpha$$
$$x = \bar{x} \qquad \bar{x} = x$$
$$y = \bar{y} \qquad \bar{y} = y$$
$$z = \underbrace{\bar{t}\sinh\alpha}_{*} + \bar{z}\cosh\alpha \qquad \bar{z} = -t\sinh\alpha + z\cosh\alpha$$

*　すべての符号はこの項の符号に従う．ロケット系の $\bar{z} = 0$ に静止している対象は，実験室系では z の増大する方向に動いているから正である．

行列記号：$x^\mu = \Lambda^\mu{}_{\bar{\nu}} x^{\bar{\nu}}, \qquad x^{\bar{\nu}} = \Lambda^{\bar{\nu}}{}_\mu x^\mu$

$$\|\Lambda^\mu{}_{\bar{\nu}}\| = \begin{Vmatrix} \cosh\alpha & 0 & 0 & \sinh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\alpha & 0 & 0 & \cosh\alpha \end{Vmatrix}, \quad \|\Lambda^{\bar{\nu}}{}_\mu\| = \begin{Vmatrix} \cosh\alpha & 0 & 0 & -\sinh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\alpha & 0 & 0 & \cosh\alpha \end{Vmatrix}$$

エネルギー–運動量 4–ベクトル

$$E = \bar{E}\cosh\alpha + p^{\bar{z}}\sinh\alpha$$
$$p^x = p^{\bar{x}}$$
$$p^y = p^{\bar{y}}$$
$$p^z = \bar{E}\sinh\alpha + p^{\bar{z}}\cosh\alpha$$

電荷密度–電流 4–ベクトル

$$\rho = \bar{\rho}\cosh\alpha + j^{\bar{z}}\sinh\alpha$$
$$j^x = j^{\bar{x}}$$
$$j^y = j^{\bar{y}}$$
$$j^z = \bar{\rho}\sinh\alpha + j^{\bar{z}}\cosh\alpha$$

角度の変換，入射光子

$$\sin\theta = \frac{-p_\perp}{E} = \frac{(1-\beta^2)^{1/2}\sin\bar{\theta}}{1-\beta\cos\bar{\theta}}, \quad \sin\bar{\theta} = \frac{-\bar{p}_\perp}{\bar{E}} = \frac{(1-\beta^2)^{1/2}\sin\theta}{1+\beta\cos\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{-p^z}{E} = \frac{\cos\bar{\theta}-\beta}{1-\beta\cos\bar{\theta}}, \qquad \cos\bar{\theta} = \frac{-\bar{p}^{\bar{z}}}{E} = \frac{\cos\theta+\beta}{1+\beta\cos\theta}$$
$$\tan(\theta/2) = e^{\alpha}\tan(\theta/2), \qquad \tan(\bar{\theta}/2) = e^{-\alpha}\tan(\theta/2)$$

同方向をもつ 2 つの推進の結合

$$\beta = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \qquad \text{あるいは} \qquad \alpha = \alpha_1+\alpha_2.$$

推進と回転の一般的な結合

41 章のスピノール形式

Poincaré 変換

$$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}x^{\alpha'} + a^{\mu}$$

この変換の Lorentz 部分に関する条件

$$ds'^2 = \eta_{\alpha'\beta'}dx^{\alpha'}dx^{\beta'} = ds^2 = \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}dx^{\alpha'}dx^{\beta'}$$

あるいは $\Lambda^T\eta\Lambda = \eta$（行列方程式，$T$ は "逆", あるいは行と列が交換されることを意味している）.

変換の他の量に対する影響：

$u^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}u^{\alpha'}$	(4–速度)	$u_{\alpha'} = u_{\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}$
$p^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}p^{\alpha'}$	(4–運動量)	$p_{\alpha'} = p_{\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}$
$F^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}F^{\alpha'\beta'}$	(電磁場)	$F_{\alpha'\beta'} = F_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}$
$\boldsymbol{e}_{\alpha'} = \boldsymbol{e}_{\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}$	(基底ベクトル)	
$\boldsymbol{\omega}^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu}\boldsymbol{\omega}^{\mu}$	(基底 1–形式)	
$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_{\alpha'}u^{\alpha'} = \boldsymbol{e}_{\mu}u^{\mu} = \boldsymbol{u}$	(4–速度ベクトル)	

*28 Lorentz 変換の重要な本質は行列 $\|\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\|$ と $\|\Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\|$ である．最初の行列は座標をダッシュのついていない系からダッシュのついている系へ変換し，2 番目の行列は座標をダッシュのついている系からダッシュのついていない系へ変換する．

$$x^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}x^{\beta}, \qquad x^{\beta} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}x^{\alpha'} \tag{2.38}$$

2 つの変換は逆方向に行われるから，2 つの行列のおのおのは他の逆でなければならない．

$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\Lambda^{\beta}{}_{\gamma'} = \delta^{\alpha'}{}_{\gamma'}, \qquad \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\Lambda^{\alpha'}{}_{\gamma} = \delta^{\beta}{}_{\gamma} \tag{2.39}$$

*28 座標の Lorentz 変換

4–速度，$\boldsymbol{u} = (dx^\alpha/d\tau)\boldsymbol{e}_\alpha$ の座標に無関係な性質から，1 つの系の基底ベクトルに対して他の系の基底ベクトルによる次の表現が容易に導かれる．

*29
$$\boldsymbol{e}_{\alpha'} = \boldsymbol{e}_\beta \Lambda^\beta{}_{\alpha'}, \qquad \boldsymbol{e}_\beta = \boldsymbol{e}_{\alpha'} \Lambda^{\alpha'}{}_\beta \tag{2.40}$$

そして以下のような別な幾何学的な方程式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{e}_\alpha v^\alpha = \boldsymbol{e}_{\beta'} v^{\beta'}, \\ \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v} \rangle &= \sigma_\alpha v^\alpha = \sigma_{\beta'} v^{\beta'}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \sigma_\alpha \boldsymbol{\omega}^\alpha = \sigma_{\beta'} \boldsymbol{\omega}^{\beta'} \end{aligned}$$

から，変換則

*30
$$\boldsymbol{\omega}^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_\beta \boldsymbol{\omega}^\beta, \qquad \boldsymbol{\omega}^\beta = \Lambda^\beta{}_{\alpha'} \boldsymbol{\omega}^{\alpha'} \tag{2.41}$$

*31
$$v^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_\beta v^\beta, \qquad v^\beta = \Lambda^\beta{}_{\alpha'} v^{\alpha'} \tag{2.42}$$

$$\sigma_{\alpha'} = \sigma_\beta \Lambda^\beta{}_{\alpha'}, \qquad \sigma_\beta = \sigma_{\alpha'} \Lambda^{\alpha'}{}_\beta \tag{2.43}$$

が導かれる．

これらの変換則では添字の位置を記憶する必要はけっしてない．添字の高さを揃えさえすればよい．したがって (1) 自由な添字は式の各辺で同じ位置に存在する，(2) 和をとる添字は一度は上に，一度は下に現れる．そうすればすべて正しくなるだろう！（**注意**：Λ の添字はつねに “北西から南東” に並ぶ.）

[**練習問題**]

2.7　任意方向の推進

とくに有用な Lorentz 変換は次の行列成分をもつ．

$$\begin{aligned} &\Lambda^{0'}{}_0 = \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ &\Lambda^{0'}{}_j = \Lambda^{j'}{}_0 = -\beta\gamma n^j, \\ &\Lambda^{j'}{}_k = \Lambda^{k'}{}_j = (\gamma - 1) n^j n^k + \delta^{jk}, \\ &\Lambda^\mu{}_{\nu'} = (\Lambda^{\nu'}{}_\mu \text{と同じである．しかし,}\beta\text{は}-\beta\text{で置き換えられる}) \end{aligned} \tag{2.44}$$

ここで β, n^1, n^2 と n^3 はパラメータであり，$\boldsymbol{n}^2 \equiv (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1$．以下のことを示せ．(a) 式 (2.44) は Lorentz 変換に対して要求される条件，$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ を満たす（コラム 2.4 をみよ），(b) ダッシュ記号の系は，ダッシュ記号のない系からみれば通常

*29　基底ベクトルの Lorentz 変換
*30　基底 1–形式の Lorentz 変換
*31　成分の Lorentz 変換

の速度 $\beta\boldsymbol{n}$ で動いている，(c) ダッシュ記号のない系は，ダッシュ記号のある系からみれば通常の速度 $-\beta\boldsymbol{n}$（すなわち，$v^{1'}=-\beta n^1, v^{2'}=-\beta n^2, v^{3'}=-\beta n^3$）で動いている．そして (d) z 方向の運動に対しては，変換行列はよく知られた形になる．

$$\|\Lambda^{\nu'}{}_{\mu}\| = \begin{Vmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{Vmatrix}, \quad \|\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}\| = \begin{Vmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{Vmatrix} \tag{2.45}$$

2.10 衝　　突

物理学的実体が何であるにせよ，それが運動している個々の質量，あるいは流体の流れ，あるいは力の場，あるいは空間自身の幾何学であろうと，古典的な一般相対論ではそれ自身の特徴をもつ幾何学的対象として記述される．おのおののこのような対象は，直接あるいは抽象により確認可能な点からつくられ，その表示に座標を必要としない．この座標に無関係な記述がいかに座標と成分という言葉に翻訳され，また逆に座標と成分という言葉から翻訳されうるか，そして局所 Lorentz 系での成分が Lorentz 変換のもとでいかに変換するかをみてきた．さて，この数学的な仕組みの，運動している質量への 2 つの基本的な応用を考えてみよう．1 つは短距離力（本節での衝突）に関係している．他は長距離電磁気力（次章の Lorentz 力）に関係している．

*32 衝突では，運動量のすべての変化は観測時間に比べて短い時間内に集中している．さらに，対象は極端に小さく，量子力学が非常に支配的であるので，確率的な記述が正しい．量

$$d\sigma = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta d\Omega \tag{2.46}$$

は散乱角 θ 方向における立体角 $d\Omega$ の要素への散乱に対する断面積（cm^2）を与える．より複雑な表現は，入射粒子が与えられた天頂角 θ と方位角 ϕ における立体角 $d\Omega$ に E と $E+dE$ 間のエネルギーで入り，同時に反応の産物がまた指定されたエネルギー幅をもち，指定された立体角に出てくる確率を与える．それは原子物理学の魅惑的な分野であるけれども，このような断面積の計算に入ることはここでは不適当であろう．断面積とは入射粒子の進行方向に垂直な面積であると指摘すれば十分である．したがって，断面積は入射粒子の進行方向に観測者をいかに推進させても変わらない．ただし，もちろん粒子が出てくるときのエネルギーと角度はその推進の大きさに従って変換される（“同じ事象を変更された基準系でみる”）．

*33 局所的な力学的解析から出てくる，以下のような衝突のどのように詳細な記述があっても，さらにそれに加えてエネルギーと運動量の保存則が成り立つ．

*32　粒子の散乱
*33　衝突におけるエネルギーと運動量の保存

$$\sum_{\text{元の粒子}, J} \boldsymbol{p}_J = \sum_{\text{最後の粒子}, K} \boldsymbol{p}_K \tag{2.47}$$

この関係から，さらに解析することなく次のような単純な結果を得る．(1) 平面波として真空中を進む光子は分解することはできない（1 点に向かう光子に対しては真実でない !）．(2) 高エネルギー電子が静止している電子と弾性衝突して，2 つの電子がたまたま等しいエネルギーをもつときは，それらの進行方向の間の角度は 90° の Newton 的値よりも小さい．その不足分は入射粒子のエネルギーの単純な測定を与える．(3) 電子が陽子と弾性的な正面衝突するときは，移行される運動エネルギーの割合に対する公式は，電子のエネルギーが非相対論的であるか，相対論的であるか，あるいは超相対論的であるかに応じて，3 つの異なる制限的な形をもつ．(4) 重い核の力場で光子による (e^+, e^-) の対生成に対する閾値は $2m_e$ である．(5) 静止している電子との衝突で光子による (e^+, e^-) の対生成に対する閾値は $4m_e$ である（あるいは非常に軽い "分子" をつくっている $e^+e^-e^-$ 系の結合を考慮すれば，$4m_e - \epsilon$）．すべてのこれらの結果（独立な研究計画に対するテーマ !）およびさらに多くのことがエネルギーと運動量の保存則から読み取れる．このテーマに関するさらに多くのことについては，Blaton (1950)，Hagedorn (1964)，および Sard (1970) の 4 章と 5 章の最後の部分をみよ．

3章
電　磁　場

この電気の時代にあっては，あらゆる発電機とモーターの回転する電機子が，聞く耳をもつすべての人に絶え間なく，相対性理論は真であると宣告し続けている．

LEIGH PAGE (1941)

3.1 Lorentz 力と電磁場のテンソル

衝突での運動量の衝撃的な変化（2 章の最後の題目）と正反対の位置に，電気力と磁気力の作用のもとでの荷電粒子の運動量の緩やかな変化（ここで取り扱われる題目）がある．

[*1] 電場と磁場が荷電粒子系に作用しているとする．粒子の加速度は電場と磁場の強さを明らかにする．言い換えれば，Lorentz 力の法則プラス試験粒子の加速度の成分の測定は，電場と磁場の成分を定義するとみなしてよい．場の成分が若干の試験粒子の加速度からわかれば，場の成分は他の試験粒子の加速度を予言するのに用いることができる（コラム 3.1）．こうして Lorentz 力の法則は (1) 場を定義するものとして，(2) 運動を予言するものとして，二重の役割をしている．

この場合，また科学では他のどんな場合も，とりわけ Henri Poincaré が強調したように，よく言われてきた“先へ進む前に術語を定義せよ”という言い古された観点は時代遅れである．Lorentz 力の法則を含め物理学のすべての法則と理論は，それらが用いる概念（ここでは *B* と *E*）を定義するとともにこれらの概念について言明するという，深くて微妙な特徴をもっている．逆に，理論，法則，そして原理のある部分が欠如していれば，概念を正しく定義し，さらには正しく用いる手段が奪われる．この意味で，人類の知識の前進はどれも真に創造的である．あの理論，概念，法則，そして測定方法—永久に分離できない—は一体となって世界に生まれ出るのである．

コラム 3.1　場を定義するもの，そして，運動を予言するものとしての Lorentz 力の法則

加速度の測定から場の成分をどのようにして決めるかは，電磁気でも重力でも原理的に変わらない．2 つの場合の方程式を比較してみよう．

[*1] 場を定義するもの，そして運動を予言するものとしての Lorentz 力

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{e}{m}F^\alpha{}_\beta u^\beta \quad \text{Lorentz 系で} \tag{1}$$

そして

$$\frac{D^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = -R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}u^\beta\xi^\gamma u^\delta \quad \text{任意の座標系で} \tag{2}$$

電磁気に対するさらにシンプルな手続きを明らかにすれば，重力について $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ のすべての成分を同様に定める方法の概略が示されるだろう．考察している近傍での $\boldsymbol{B}$ の 3 成分と $\boldsymbol{E}$ の 3 成分を定めるのに何個の試験粒子が必要かを問うことから始めよう．1 個の粒子に対して，加速度の 3 成分は測定可能である，第 2 の粒子に対しては，さらに 3 個．これで十分であるか？　イイエ！　第 1 の粒子からの情報は第 2 の粒子からの情報をある程度まで 2 倍にする．証明？　第 1 の試験粒子の運動状態が何であれ，この粒子と同じように動いている Lorentz 系を選ぶ．この系ではゼロ速度をもつから，粒子は磁場に反応しない．電場のみが粒子に作用する．加速度の 3 成分は直接，電場の 3 成分 E_x，E_y，E_z を与える．第 2 の試験粒子が第 1 の試験粒子によって与えられる情報の 2 倍以上を与えるとすれば，この粒子は静止できない．この第 2 の粒子の運動方向に平行に，基準系の x 軸を選べば，この粒子は磁場の成分 B_y と B_z に反応し，これらを測定するだろう．B_x に対してはそうでない！　x 方向の加速度は，すでに一度測定された E_x を再度測定するだけである．B_x を求めるためには，第 3 の試験粒子が要求されるが，それは他の場の成分についての情報を 2 倍にする．他にとるべき方法はあるか？　6 個の $F_{\alpha\beta}$ の評価についても，また，Lorentz 力のテストについても，最小 2 乗法を適用して，すべての N 個の粒子を同時に，そして平等の立場で用いよ．こうして，K 番目の粒子の予言された加速度と観測された加速度との差を次の形に書け．

$$\dot{u}_\alpha{}^K - \frac{e}{m}F_{\alpha\beta}u^{\beta,K} = \delta a_\alpha{}^K \tag{3}$$

この差の 2 乗をとり，すべての粒子についての和をとれ．

$$S = \sum_K \eta^{\alpha\beta}\delta a_\alpha{}^K \delta a^K{}\beta \tag{4}$$

この表現では，6 個の $F_{\alpha\beta}$ を除いてすべて既知とみなされている．これら 6 個の未知量について最小をとれ．このようにして，$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{E}$ の成分に対する 6 個の方程式に達する．これらの方程式を解いて，Lorentz 力の法則を試すために (3) に戻る．

$F_{\alpha\beta}$ に対する方程式についての係数からなる 6×6 行列式は，ただ 2 個の試験粒子が存在するときには自動的にゼロになる．同様の推論から Riemann 曲率テンソルのすべての成分を定めるために必要な試験粒子の最小数が定まる．

*2 Lorentz 力の法則は，よく知られた 3 次元の記号で書くと，$\boldsymbol{E}$ = 電場，$\boldsymbol{B}$ = 磁場，$\boldsymbol{v}$ = 粒子の通常の速度，$\boldsymbol{p}$ = 粒子の運動量，e = 粒子の電荷を用いて，

$$(d\boldsymbol{p}/dt) = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{3.1}$$

方程式のこのバージョンは有用ではあっても，Einstein の幾何学的精神とは遠くかけ離れている．完全に幾何学的な方程式は，特別な Lorentz 系で測定された空間部分 $\boldsymbol{p}$ だけでなく，試験粒子のエネルギー–運動量 4–ベクトル，$\boldsymbol{p}$ を含んでいる．それは運動量の変化率に対して，特別な Lorentz 観測者によって測定されたもの (d/dt) でなく，問題にアプリオリに存在する唯一の時計，試験粒子自身の時計によって測定された $(d/d\tau)$ を要求するだろう．こうして，完全に幾何学的な方程式の左辺は次のようになる．

$$d\boldsymbol{p}/d\tau =$$

右辺，Lorentz 4–力は，系に依拠しない対象でなければならない．それは粒子の 4–速度 $\boldsymbol{u}$ について線形であるだろう，なぜなら系に依拠する表現

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{e}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) = e(u^0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) \tag{3.2a}$$

*3 は $\boldsymbol{u}$ の成分について線形であるからである．したがって，試験粒子の 4–速度を挿入する投入口をもつ ***Faraday***，あるいは $\boldsymbol{F}$，あるいは “電磁場のテンソル” とよばれる線形機械

*4 が存在しなければならない．この機械の出力に粒子の電荷を掛けたものは，粒子の感じる電磁気的な 4–力でなければならない．

$$d\boldsymbol{p}/d\tau = e\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) \tag{3.3}$$

この幾何学的な方程式を，元の Lorentz 力の法則 (3.2a) と仲間のエネルギー変化の法則

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v} = e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{u} \tag{3.2b}$$

と比較することによって，特別な Lorentz 系での $\boldsymbol{F}$ の成分を読むことができる．$d\boldsymbol{p}/d\tau$ の成分は $dp^\alpha/d\tau$ であり，$e\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ の成分は $eF^\alpha{}_\beta u^\beta$ と書ける（$F^\alpha{}_\beta$の定義!)．したがって

$$dp^\alpha/d\tau = eF^\alpha{}_\beta u^\beta \tag{3.4}$$

は式 (3.2a) と (3.2b) に帰着しなければならない．実際，次のように書けばそのようになる．

*5

$$\|F^\alpha{}_\beta\| = \begin{matrix} & \beta=0 & \beta=1 & \beta=2 & \beta=3 \\ \alpha=0 & 0 & E_x & E_y & E_z \\ \alpha=1 & E_x & 0 & B_z & -B_y \\ \alpha=2 & E_y & -B_z & 0 & B_x \\ \alpha=3 & E_z & B_y & -B_x & 0 \end{matrix} \tag{3.5}$$

---

*2 Lorentz 力の法則の 3 次元的なバージョン

*3 電磁場のテンソルの定義

*4 Lorentz 力の法則の幾何学的なバージョン

*5 電磁場のテンソルの成分

文献にはしばしば，計量成分で添字を下げて得られる“共変成分”がみられることが多い．

$$F_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\gamma} F^{\gamma}{}_{\beta} \tag{3.6}$$

$$\|F_{\alpha\beta}\| = \left\| \begin{matrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{matrix} \right\| \tag{3.7}$$

この行列式は電場と磁場の統合を証明している．いずれか1つ，$\boldsymbol{E}$ あるいは $\boldsymbol{B}$ だけでは，座標に依拠しない幾何学的実体ではない．しかし，1つの実体，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Faraday}$ に合併すると，それらは座標と基準系を超越する意味と重要性を得る．

[**練習問題**]

3.1

式 (3.4) を式 (3.2a) と (3.2b) と比較し，定義 (3.6) を用いて $\boldsymbol{Faraday}$ の成分に対する式 (3.5) と (3.7) を導け．

3.2　あらゆる一般性をもつテンソル

*6　ここで話は少し脇道へそれる．今やいくつかの異なるテンソルが存在する．計量テンソル $\boldsymbol{g}$ (2.4節)，Riemann 曲率テンソル $\boldsymbol{Riemann}$ (1.6節)，電磁場のテンソル $\boldsymbol{Faraday}$ (3.1節)，それぞれは，ベクトルに対する入力投入口と，実数の出力をもつ線形機械，たとえば，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$，あるいはベクトルの出力をもつ線形機械，たとえば，$\boldsymbol{Riemann}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ および $\boldsymbol{Faraday}(\boldsymbol{u})$ として定義されている．

出力がスカラーであるテンソルと，出力がベクトルであるテンソルとを区別すべきか？イイエ！ 出力がベクトルであるテンソルは，出力がスカラーであるテンソルとして簡単に解釈し直すことができる．たとえば，$\boldsymbol{Faraday} = \boldsymbol{F}$ をとれ．任意の1–形式 $\boldsymbol{\sigma}$ の挿入に対する新しい投入口と，ギヤ (gear) および歯車を加えよ．そうすれば出力

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) \rangle = \text{実数} \tag{3.8}$$

が保証される．それから利用者に，ベクトルだけを挿入して，ベクトル $\boldsymbol{F}(\cdots, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ を得るか，あるいは形式とベクトルを挿入して，数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u})$ を得るかを許可せよ．同じ機械は両方の仕事をするだろう．さらに，与えられた Lorentz 系の成分によって，両方の仕事がきわめて簡単に達せられる．

*6　テンソルの例

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}(\cdots,\boldsymbol{u})\ \text{は成分}\ F^{\alpha}{}_{\beta}u^{\beta}\ \text{をもつベクトルである,}\\ &\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u})\ \text{は数}\ \langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{F}(\cdots,\boldsymbol{u})\rangle=\sigma_{\alpha}F^{\alpha}{}_{\beta}u^{\beta}\ \text{である} \end{aligned} \tag{3.9}$$

*7 アナロジーによって，もっとも一般的なテンソル $\boldsymbol{H}$ とその階数 $\binom{n}{m}$ を以下のように定義する．$\boldsymbol{H}$ は n 個の 1–形式に対する n 個の入力投入口と，m 個のベクトルに対する m 個の入力投入口をもつ線形機械である．要求される入力が与えられると，それは実数を提供する．これを次のように表す．

$$\boldsymbol{H}(\underbrace{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\lambda},\cdots,\boldsymbol{\beta}}_{n\ \text{個の 1–形式}},\underbrace{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\cdots,\boldsymbol{w}}_{m\ \text{個のベクトル}}) \tag{3.10}$$

たいていのテンソルに対しては，2 個の入力ベクトルが交換されると出力は変化する．

$$\boldsymbol{Riemann}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\neq\boldsymbol{Riemann}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \tag{3.11}$$

あるいは，2 個の入力 1–形式が交換されるとき，出力は変化する．

明確にするために，階数 $\binom{2}{1}$ の特別なテンソル $\boldsymbol{S}$ を選べ．$\boldsymbol{S}$ の投入口に特別な Lorentz 座標系の基底ベクトルと 1–形式を挿入せよ．出力は "その系での $\boldsymbol{S}$ の成分" である．

*8

$$S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\equiv\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}^{\alpha},\boldsymbol{\omega}^{\beta},\boldsymbol{e}_{\gamma}) \tag{3.12}$$

これは成分を定義する．特別な系での成分を知ると，任意の入力形式と入力ベクトルから生み出される出力を容易に計算できる．

*9

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{v})&=\boldsymbol{S}(\sigma_{\alpha}\boldsymbol{\omega}^{\alpha},\rho_{\beta}\boldsymbol{\omega}^{\beta},v^{\gamma}\boldsymbol{e}_{\gamma})=\sigma_{\alpha}\rho_{\beta}v^{\gamma}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}^{\alpha},\boldsymbol{\omega}^{\beta},\boldsymbol{e}_{\gamma})\\ &=S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\sigma_{\alpha}\rho_{\beta}v^{\gamma} \end{aligned} \tag{3.13}$$

そして，1 つの Lorentz 系（ダッシュがついていない）での $\boldsymbol{S}$ の成分，そしてその系を他の系（ダッシュがついている）とつなぐ Lorentz 変換行列 $\|\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\|$ と $\|\Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\|$ を知ると，新しい（ダッシュがついている）系での成分を計算できる．練習問題 3.2 に示されているように，行列の添字を論理的な方法で整列させて $\boldsymbol{S}$ のおのおのの添字に行列を適用しさえすればよい．

*10

$$S^{\mu'\nu'}{}_{\lambda'}=S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\Lambda^{\mu'}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\Lambda^{\gamma}{}_{\lambda'} \tag{3.14}$$

テンソル内部のギヤと歯車とをわずかに変えるだけで，1 個の 1–形式の投入口がベクトルを受け入れるようにすることができる．必要なすべてのことは，入力ベクトル $\boldsymbol{n}$ を対応する 1–形式 $\tilde{\boldsymbol{n}}$ に転換して，その 1–形式を元の機械に入れる機構である．こうして，修正されたテンソルを元のテンソルに対して用いられたのと同じ記号 $\boldsymbol{S}$ で表すと，次式が要求される．

---

*7 ベクトルと 1–形式を数に変換する線形機械としてのテンソルの定義
*8 テンソルの成分
*9 テンソル機械の働きを成分で表す
*10 成分の Lorentz 変換

*11
$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{n},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\sigma},\tilde{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{v}) \tag{3.15}$$

あるいは，成分の記号で書くと

$$S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\sigma_\alpha n^\beta v^\gamma = S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\sigma_\alpha n_\beta v^\gamma \tag{3.15$'$}$$

が要求される．これは計量の成分を用いて $\boldsymbol{S}$ の添字を上げ下げすれば達せられる．

*12
$$S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=\eta_{\beta\mu}S^{\alpha\mu}{}_{\gamma}, \qquad S^{\alpha\mu}{}_{\gamma}=\eta^{\mu\beta}S^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \tag{3.16}$$

(以下の練習問題 3.3 をみよ.) 元のテンソルと修正されたテンソルに対して同じ記号 $\boldsymbol{S}$ を用いることにより，おのおのの投入口が 1–形式でもベクトルでも受け入れられるようにできる．したがって，$\boldsymbol{S}$ は $\binom{2}{1}$ テンソルであるか，$\binom{1}{2}$ テンソルであるか，$\binom{3}{0}$ テンソルであるか，$\binom{0}{3}$ テンソルであるかを見失う．全階数，3 を見分けるだけである．**術語:** “上段の添字” は “反変” とよばれる．“下段の添字” は “共変” とよばれる．こうして $S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ では “α” は反変添字であるのに対して，“β” と “γ” は共変添字である．

テンソルは関数以外の何物でもないから，それらは（もしそれらが同じ階数をもつならば!）加えられ，そして通常の方法で数で掛けることができる．階数 3 テンソル $a\boldsymbol{S}+b\boldsymbol{Q}$ の出力は，ベクトル $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ が挿入されるときには，

$$(a\boldsymbol{S}+b\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\equiv a\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})+b\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \tag{3.17}$$

である．テンソルに関する若干の別な重要な操作は以下の練習問題で探究される．それらと練習問題の結果は後に続く題材で自由に用いられるだろう．

[練習問題]

3.2　テンソルの成分に対する変換則

ベクトルおよび 1–形式に対する変換則から変換則 (3.14) を導け．

3.3　添字を上げ下げする

式 (3.15$'$) と，1–形式 $\tilde{\boldsymbol{n}}$ の成分をそれに対応するベクトル $\boldsymbol{n}$ の成分から得る法則 $n_\alpha=\eta_{\alpha\beta}n^\beta$ から式 (3.16) を導け．

3.4　テンソル積

2 個のベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が与えられると，2 階のテンソル $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$（“$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ とのテンソル積”）は，2 個の投入口をもち，1–形式 $\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{\lambda}$ が挿入されると，出力が数

$$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\lambda})=\langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{v}\rangle \tag{3.18}$$

であるような機械であると定義する．$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$ の成分は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の成分の積であることを示せ．

*11　テンソルを修正して，おのおのの投入口へベクトルかまたは 1–形式を受け入れるようにする
*12　添字を上げ下げする

$$T^{\alpha\beta} = u^\alpha v^\beta, \qquad T_\alpha{}^\beta = u_\alpha v^\beta, \qquad T_{\alpha\beta} = u_\alpha v_\beta \tag{3.19}$$

定義を若干のベクトルと形式に拡張し，

$$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{w})(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\zeta}) = \langle\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{v}\rangle\langle\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{n}\rangle\langle\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{w}\rangle \tag{3.20}$$

そして，成分に対する積の法則が依然成り立つことを示せ．

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{S} = \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{w} \text{ は成分} \\ &S^{\mu\nu}{}_\lambda{}^\zeta = u^\mu v^\nu \beta_\lambda w^\zeta \text{ をもつ} \end{aligned} \tag{3.21}$$

3.5　基底テンソル

与えられた Lorentz 系で成分 $M^{\alpha\beta}{}_\gamma{}^\delta$ をもつテンソル $\boldsymbol{M}$ は，その成分とその系の基底 1–形式およびベクトルから次のように再構成されることを示せ．

$$\boldsymbol{M} = M^{\alpha\beta}{}_\gamma{}^\delta \boldsymbol{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{e}_\beta\otimes\boldsymbol{\omega}^\gamma\otimes\boldsymbol{e}_\delta \tag{3.22}$$

(この特別な例に対しては，コラム 3.2 をみよ．)

3.6　*Faraday* 機械の働き

4–速度 $\boldsymbol{u}$ をもつ観測者が時空に 3 方向を選ぶ．それらは直交しており，観測者の系で完全に空間部分である (時間成分をもたない)．$\boldsymbol{e}_{\hat{1}}$，$\boldsymbol{e}_{\hat{2}}$，$\boldsymbol{e}_{\hat{3}}$ をそれらの方向の単位ベクトルとし，右手系をつくるように位置づける [3 次元の言葉で，($\boldsymbol{e}_{\hat{1}}\cdot\boldsymbol{e}_{\hat{2}}\times\boldsymbol{e}_{\hat{3}} = +1$)]．なぜ次の関係が成り立つか？

$$\boldsymbol{e}_{\hat{j}}\cdot\boldsymbol{u} = 0, \qquad \boldsymbol{e}_{\hat{j}}\cdot\boldsymbol{e}_{\hat{k}} = \delta_{jk}$$

どのようなベクトルを電磁場のテンソル ***Faraday*** の 2 個の投入口に挿入すれば，この観測者によって測定されるとき $\boldsymbol{e}_{\hat{j}}$ に沿う電場が得られるか？　観測者が $\boldsymbol{e}_{\hat{j}}$ に沿う磁場を測定するには，どのようなベクトルが挿入されなければならないか？

コラム 3.2　異なる言葉で表した計量

A. 幾何学的な言葉

$\boldsymbol{g}$ はベクトルの挿入に対して 2 個の投入口をもつ，線形で対称的な機械である．ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が挿入されると，$\boldsymbol{g}$ の出力はそれらのスカラー積である．

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$$

B. 成分の言葉

$\eta_{\mu\nu}$ は計量の成分である．それらは2個のベクトルのスカラー積を特別な Lorentz 系での成分から計算するのに使われる．

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \eta_{\mu\nu}u^\mu v^\nu$$

C. 座標に基づいた幾何学的な言葉

計量 $\boldsymbol{g}$ は特別な Lorentz 系の基底 1–形式で書ける．

$$\boldsymbol{g} = \eta_{\mu\nu}\boldsymbol{\omega}^\mu\otimes\boldsymbol{\omega}^\nu = \eta_{\mu\nu}\boldsymbol{d}x^\mu\otimes\,\boldsymbol{d}x^\nu$$

[式 (2.18) と (3.22) をみよ．]

D. 線要素の基本概念との関係

コラム 2.3 は関数の勾配 $\boldsymbol{d}f$ と，f のある指定されていない方向での微分変化の基本概念 df との間の対応を証明した．$\eta_{\mu\nu}\boldsymbol{d}x^\mu\otimes\boldsymbol{d}x^\nu$ と書かれた計量と，$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ と書かれた"線要素"の基本概念との間にも似た対応がある．この基本的な線要素は，多くの特殊相対論の教科書で説明されているように，指定されていない方向での変位"dx^μ"の2乗された長さを表している．計量 $\eta_{\mu\nu}\boldsymbol{d}x^\mu\otimes\boldsymbol{d}x^\nu$ も同じことをする．特別な無限小変位ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ を選び，それを $\eta_{\mu\nu}\boldsymbol{d}x^\mu\otimes\boldsymbol{d}x^\nu$ の投入口に挿入せよ．出力は $\boldsymbol{\xi}^2 = \eta_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu$ で，変位の2乗された長さとなるだろう．$\boldsymbol{\xi}$ が挿入される前は，$\eta_{\mu\nu}\boldsymbol{d}x^\mu\otimes\boldsymbol{d}x^\nu$ は任意のベクトルの2乗された長さを告げるポテンシャルをもっている．$\boldsymbol{\xi}$ の挿入はポテンシャルを現実 $\boldsymbol{\xi}^2$ の数値に変換する．

計量 $\eta_{\mu\nu}\boldsymbol{d}x^\mu\otimes\boldsymbol{d}x^\nu$ と線要素 $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ は，指定されていない無限小変位の2乗された長さを表すというこの同じ機能を果たしているから，それらの間に概念的な区別はない．ときには計量を示すのに記号 $\boldsymbol{ds}^2$，ときには圧縮して，"$\otimes$"を省略して，計量を $\boldsymbol{ds}^2 = \eta_{\mu\nu}\boldsymbol{d}x^\mu\boldsymbol{d}x^\nu$ と書く．そしてときには，さらに圧縮して太字でない文字を用いるから，計量と基本的な線要素との間に記号の区別はない．

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{ds}^2 = ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

3.3　3 + 1観点 対 幾何学的観点

*13　偉大な計算的な力，そして概念的な力が，物理学に対する Einstein の幾何学的観点に内在している．日常の"空間＋時間"あるいは"3 + 1"の仕方でみると複雑にみえる考えが，

*13　物理学の幾何学的観点の力

4 次元時空の幾何学的対象間の関係としてみれば優雅で単純になる．

*14 電磁場はよい例である．幾何学的な言葉で，それは定義に座標を必要としない 2 階の反対称テンソル（“2–形式”）$\boldsymbol{F}$ で記述される．このテンソルは任意の荷電粒子に次式で与えられる 4–力を与える．

$$d\boldsymbol{p}/d\tau = e\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$$

それはまったく単純である！

対照的に，“3 + 1” 観点を考えよう．与えられた Lorentz 系で，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ がある．それらは次式に従って粒子を押す．

$$d\boldsymbol{p}/dt = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

しかし，$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{v}$，および $\boldsymbol{B}$ の値はすべて，与えられた Lorentz 系から新しい Lorentz

*15 系へ移ると変化する．たとえば，ロケット船（“棒のついた” 系）から眺めたときの電場と磁場は，実験室（“棒のついていない” 系）から眺めたときの電場と磁場に次式で関係づけられる．

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{E}}_{\|} &= \boldsymbol{E}_{\|}, \qquad & \bar{\boldsymbol{E}}_{\perp} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\boldsymbol{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}_{\perp}) \\ \bar{\boldsymbol{B}}_{\|} &= \boldsymbol{B}_{\|}, \qquad & \bar{\boldsymbol{B}}_{\perp} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\boldsymbol{B}_{\perp} - \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}_{\perp}) \end{aligned} \tag{3.23}$$

（ここで “$\|$” はロケットの運動方向に沿う成分を意味しており，“$\perp$” は垂直成分を意味している．そして $\beta^j = dx^j_{\text{ロケット}}/dt$ はロケットの通常の速度である．）粒子の運動量 $\boldsymbol{p}$ と通常の速度 $\boldsymbol{v}$ と，そして座標時間 t に対する同様の変換則が，すべて―手品によるかのように 3 + 1 観点から―重なり合って，すべての系で Lorentz 力の法則の妥当性が維持されるようにみえる．

幾何学的観点は 3 + 1 観点よりもはるかに単純であるばかりでなく，それは 3 + 1 観点自身よりも著しく容易に 3 + 1 方程式を導くことすらできる．たとえば，電場と磁場に対する変換則 (3.23) を考えよ．幾何学的観点はそれを以下のように導く．(1) 2 つの系の軸をそれらの相対運動が z 方向に沿っているように位置づけよ．(2) 電磁場のテンソルの成分に単純な Lorentz 変換 (2.45) を遂行せよ．

$$\begin{aligned} \bar{E}_{\|} = \bar{E}_z = F_{\overline{30}} &= \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{3}}\Lambda^{\beta}{}_{\bar{0}}F_{\alpha\beta} = \gamma^2 F_{30} + \beta^2\gamma^2 F_{03} \\ &= (1-\beta^2)\gamma^2 F_{30} = F_{30} = E_z = E_{\|}, \\ \bar{E}_x = F_{\overline{10}} &= \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{1}}\Lambda^{\beta}{}_{\bar{0}}F_{\alpha\beta} = \gamma F_{10} + \beta\gamma F_{13} = \gamma(E_x - \beta B_y), \text{ 他} \end{aligned} \tag{3.24}$$

対照的に，3 + 1 観点ははるかに多くの労力を示す．標準的な方法は，わずかに変えられた形で書かれた，Lorentz 力の法則とエネルギー変化の法則 [式 (3.2a) と (3.2b)] に基づいている．

*14 電磁気の例
*15 電場と磁場の変換則

$$m\frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2} = e\left(\bar{E}_x\frac{d\bar{t}}{d\tau} + 0\frac{d\bar{x}}{d\tau} + \bar{B}_z\frac{d\bar{y}}{d\tau} - \bar{B}_y\frac{d\bar{z}}{d\tau}\right), \tag{3.25}$$

$\cdots$(3 個の付加的な方程式)$\cdots$

以下のように進む（詳細はその大きい長さのために省略される!).

(1) $d^2\bar{x}/d\tau^2$ などに対して，$d^2x/d\tau^2, \cdots$ によるこれらの量に対する表現を代入せよ (Lorentz 変換).

(2) $d^2x/d\tau^2, \cdots$ に対して，実験室系での $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ によるこれらの加速度に対する表現を代入せよ（Lorentz 力の法則).

(3) これらの表現で，実験室系の 4–速度の成分 $dx/d\tau$ が現れる場合には，ロケット系での 4–速度による表現を代入せよ（逆 Lorentz 変換).

(4) このように変換された式 (3.25) で，$d\bar{x}/d\tau$ などのすべての値に対して，左辺と右辺が等しくなることを要求せよ（すべての試験粒子に対して有効であること).

(5) このようにして，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ による $\bar{\boldsymbol{E}}$ と $\bar{\boldsymbol{B}}$ に対する表現 (3.23) に到達する．困難さの対照は明白である!

3.4 Maxwellの方程式

さて，場の電荷に対する作用から転じて，電荷の場に対する作用について問うことにしよう．あるいは，さらに一般的に，電荷が存在するときと存在しないときの，電磁場の力学について問うことにしよう．特別な Lorentz 系での Maxwell の方程式のもっとも単純なもの，すなわち自由な磁極が存在しない場合から始めよう．*16

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} \equiv \mathrm{div}\boldsymbol{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \tag{3.26}$$

この陳述はすべての Lorentz 系で真実でなければならない．したがってロケット系で真実である．

$$\frac{\partial \bar{B}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{3.27}$$

x 方向の無限小 Lorentz 変換（非相対論的な速度 β）に対して，次式を得る [コラム 2.4 と式 (3.23) をみよ].

$$\bar{B}_x = B_x, \qquad \bar{B}_y = B_y + \beta E_z, \qquad \bar{B}_z = B_z - \beta E_y \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} \tag{3.29}$$

ロケット系でのゼロ発散の条件に代入せよ．実験室系でのゼロ発散の元の条件を取り戻すと，以下の付加的な情報（任意の小さい速度 β の係数がゼロである要求）を得る．

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \tag{3.30}$$

*16　磁気静力学から導かれた磁気力学

変換の速度が y 方向あるいは z 方向に向けられていたら，同様の方程式が $\partial B_y/\partial t$ あるいは $\partial B_z/\partial t$ に対して得られたであろう．3 次元ベクトルの言葉で，これら 3 個の方程式は 1 個の方程式に帰着する．

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla\times\mathbf{E} \equiv \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathrm{curl}\ \mathbf{E} = 0 \tag{3.31}$$

(1) 共変性の原理（物理法則はどの Lorentz 基準系でも同じであり，これは物理学の幾何学的観点と同等である）と (2) 磁力管は終点をもたないという原理が，(3) 磁場の時間変化率に対する Maxwell の力学法則を与えるというのはなんとも美しい．これは，磁気
*17 静力学の法則，$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ と磁気力学の法則，$\partial\mathbf{B}/\partial t + \nabla\times\mathbf{E} = 0$ が，系に無関係な単一の幾何学的法則に要約されねばならないことを示唆している．場のテンソル $\boldsymbol{F}$ の成分を用いて，その幾何学的法則は以下のようでなければならない．

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0 \tag{3.32}$$

なぜならこれは，$\alpha = 1$，$\beta = 2$，$\gamma = 3$ であるとき $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ に帰着する．そして任意の添字，たとえば α がゼロに等しいとき，$\partial\mathbf{B}/\partial t + \nabla\times\mathbf{E} = 0$ に帰着する（以下の練習問題 3.7 をみよ）．系に無関係な幾何学的言葉で，この法則は書かれる（記号に対しては，3.5 節，練習問題 3.14，と 4 章をみよ）．

$$\boldsymbol{dF} = 0, \qquad \text{あるいは,} \qquad \text{同等に,}\ \boldsymbol{\nabla}\cdot{}^*\boldsymbol{F} = 0 \tag{3.33}$$

そして，それは，“電磁気学的 2–形式 $\boldsymbol{F}$（座標が存在しない場合にも定義される幾何学的対象）をとれ．それから新しい幾何学的対象 $\boldsymbol{dF}$（“$\boldsymbol{F}$ の外微分とよばれる”）をつくれ，$\boldsymbol{dF}$ はゼロでなければならない” と述べている．この座標に無関係な操作の詳細は練習問題 3.15 および 4.5 節（トラック–2）で詳しく説明されるだろう．

Maxwell の方程式の 2 つが残っている．電気静力学の方程式

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{3.34}$$

と電気力学の方程式

$$\partial\mathbf{E}/\partial t - \nabla\times\mathbf{B} = -4\pi\mathbf{J} \tag{3.35}$$

*18 これら 2 つの式は，磁気静力学の方程式と磁気力学の方程式のように，実際，1 つの幾何学的法則の 2 つの異なる部分である．場の成分の言葉で書くと，その法則は次のようになる．

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 4\pi J^{\alpha} \tag{3.36}$$

ここに “4–流れ” $\boldsymbol{J}$ の成分は以下のようである．

---

*17 磁気力学と磁気静力学は 1 つの幾何学的法則に統一される
*18 電気力学と電気静力学は 1 つの幾何学的法則に統一される

$$J^0 = \rho = \text{電荷密度},$$
$$(J^1, J^2, J^3) = \text{電流密度の成分} \qquad (3.37)$$

座標に無関係な幾何学的言葉で書くと，この電気力学の法則は次のようになる．

$$\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F} = 4\pi^*\boldsymbol{J}, \qquad \text{あるいは,} \qquad \text{同等に,}\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} = 4\pi\boldsymbol{J} \qquad (3.38)$$

（完全な議論については，トラック–2 にある練習問題 3.15 および 4.5 節をみよ．）

[練習問題]

3.7　Maxwell の方程式

成分を明確に吟味して，幾何学的法則

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0, \qquad F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 4\pi J^\alpha$$

が，すでに主張されているように，Maxwell の方程式 (3.26)，(3.31)，(3.34)，(3.35) に帰着することを示せ．

3.5　テンソル算法

*19　もう 1 つ数学的余談が必要である．任意の階数（具体的にするために 階数 = 3 を選ぶ）の任意のテンソル場 $\boldsymbol{S}$ が与えられると，種々の操作で新しいテンソル場をつくることができる．

*20　1 つの操作は勾配 $\boldsymbol{\nabla}$ である（記号 $\boldsymbol{d}$ はスカラーの勾配のためにとっておく．この場合には $\boldsymbol{\nabla} f \equiv \boldsymbol{d}f$，また，“微分形式の外微分” のためにとっておく．これはトラック–2 で述べられる概念であり，4.5 節をみよ）．$\boldsymbol{S}$ のように，$\boldsymbol{\nabla S}$ は機械である．$\boldsymbol{S}$ は 3 個の投入口をもっているが，それは 4 個の投入口をもっている．それは $\boldsymbol{S}$ が点から点へどう変化するかを記述する．とくに，特定の $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ に対する数 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ が変位 $\boldsymbol{\xi}$ のもとでどう変化するかを知りたいならば，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{\xi}$ を $\boldsymbol{\nabla S}$ の 4 個の投入口に挿入する．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{\xi}) &\equiv \partial_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) : \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\ \text{は固定されている} \\ &\simeq +[\boldsymbol{\xi}\ \text{の先端における}\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\ \text{の値}] \\ &\quad -[\boldsymbol{\xi}\ \text{の後部における}\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\ \text{の値}]\end{aligned} \qquad (3.39)$$

Lorentz 系での成分の記号を用いると，これは以下のようになる．

*19　新しいテンソルを古いテンソルからつくる方法
*20　勾配

$$\nabla \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\xi}) \equiv \partial_{\boldsymbol{\xi}}(S_{\alpha\beta\gamma} u^\alpha v^\beta w^\gamma) = \left(\frac{\partial S_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^\delta} \xi^\delta\right) u^\alpha v^\beta w^\gamma$$
$$= S_{\alpha\beta\gamma,\delta} u^\alpha v^\beta w^\gamma \xi^\delta$$

こうして，$\nabla \boldsymbol{S}$ の Lorentz 系の成分は $\boldsymbol{S}$ の成分の偏微分にほかならない．勾配はテンソルの階数を 1 だけ（$\boldsymbol{S}$ に対しては 3 から 4 へ）上げることに注意せよ．

*21 **縮約**は新しいテンソルを古いテンソルからつくる別な過程である．それは古いテンソルの 2 個の投入口を封鎖し（“縮約し”），階数を 2 だけ減らす．とくに，$\boldsymbol{R}$ が階数 4 のテンソルで $\boldsymbol{M}$ が $\boldsymbol{R}$ の 1 番目と 3 番目の投入口を縮約して得られるとすると，$\boldsymbol{M}$ の出力は次式で与えられる（定義!）．

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{\alpha=0}^{3} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{v}) \tag{3.40}$$

ここに，$\boldsymbol{e}^\alpha$ と $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ は任意の Lorentz 座標系の基底ベクトルと 1–形式である．どの系が選ばれようと差異はない．結果はつねに同じである（練習問題 3.8）．任意の Lorentz 系での成分の言葉で，式 (3.40) は以下のようになる（練習問題 3.8）．

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = M_{\mu\nu} u^\mu v^\nu = R_{\alpha\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu} u^\mu v^\nu$$

したがって

$$M_{\mu\nu} = R_{\alpha\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu} \tag{3.41}$$

こうして，成分の言葉で，縮約は 1 つの添字を上に他の添字を下に置き，それらについて和をとるのと同じである．

*22 **発散**は，新しいテンソルを古いテンソルからつくる 3 番目の過程である．それは勾配をとり，勾配の投入口を元の 1 つの投入口で縮約することによって達成される．

($\boldsymbol{S}$の第 1 の投入口についての発散) $\equiv \nabla\cdot\boldsymbol{S}$ 　は次のような機械である

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \nabla \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_\alpha) = S^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\alpha} u^\beta v^\gamma \tag{3.42}$$

すなわち，$\nabla\cdot\boldsymbol{S}$ は成分 $S^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\alpha}$ をもっている．

*23 **置換**は新しいテンソルをつくる第 4 の些細な過程である．それはたんに 2 つ投入口を交換する．

$\boldsymbol{S}$の 2 番目と 3 番目の投入口を置換して得られる$\boldsymbol{N} \Longrightarrow$

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \tag{3.43}$$

*24 **対称化と反対称化**は，新しいテンソルを古いテンソルからつくる 5 番目と 6 番目の過程である．もしテンソルの出力が 2 つの入力ベクトル，あるいは 1–形式の交換によって影響

*21 縮約
*22 発散
*23 置換
*24 対称化と反対称化

を受けないならば，そのテンソルは完全に対称である．

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{u})=\cdots \tag{3.44a}$$

もしテンソルが入力の交換ごとに符号を変えるならば，そのテンソルは完全に反対称である．

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=-\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})=+\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{u})=\cdots \tag{3.44b}$$

任意のテンソルは，それとそれの置換との適当な線形結合をつくって，対称化あるいは反対称化することができる（練習問題 3.12 をみよ）．

*25 **くさび積**は，新しいテンソルを古いテンソルからつくる 7 番目の過程である．それはたんに反対称化されたテンソル積である．2 つのベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が与えられると，それらの
*26 くさび積，“**二重ベクトル**（バイベクトル）”$\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$ は，

$$\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\equiv\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u} \tag{3.45a}$$

*27 によって定義される．同様に，“**2–形式**”$\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}$ は 2 つの 1–形式からつくられる．

$$\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}\equiv\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{\alpha} \tag{3.45b}$$

*28 3 つのベクトル $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ から “**三重ベクトル**” をつくる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}&\equiv(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})\wedge\boldsymbol{w}\equiv\boldsymbol{u}\wedge(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w})\\&=\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}+\text{完全な反対称性を保証する項}\\&=\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\\&\quad-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{3.45c}$$

1–形式 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ から，同様に 3–形式 “$\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\gamma}$” をつくる．くさび積はベクトルの共面（線形依存）を調べる単純な方法を与える．もし $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が同一線上にある，したがって $\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{v}$ であるならば，

$$\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{v}=0 \qquad (\text{“}\wedge\text{” の反対称性により})$$

もし $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ と同一平面上にある，したがって $\boldsymbol{w}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}$（“つぶれた箱”）であるならば，

$$\boldsymbol{w}\wedge\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}=0$$

記号 “∧” は “ハット” あるいは “くさび” あるいは “外積記号” とよばれる．その性質は 4 章で調べられる．

*29 **双対をとること**は新しいテンソルをつくる 8 番目の過程である．それは本書のトラック–2 で基本的な役割を演ずるが，トラック–1 には必要でないから，その定義と性質は練

*25　くさび積
*26　二重ベクトル
*27　2–形式
*28　三重ベクトル
*29　双対

習問題 [式 (3.14) および (3.15)] でのみ取り扱われる．

系に無関係な幾何学的記号はやや不明確である（どの投入口が縮約されるか？ どの投入口について発散がとられるか？ どの投入口が置換されるか?）から，幾何学的な対象間の座標に無関係な幾何学的な関係式を表すのに，しばしば成分の記号を用いる．たとえば，

$$J_{\beta\gamma} = S^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\alpha}$$

は，"$\boldsymbol{J}$ はテンソル $\boldsymbol{S}$ の 1 番目の投入口について発散をとって得られるテンソルである" ことを意味する．また，

$$v^{\gamma} = (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^{,\gamma} \equiv (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})_{,\beta}\eta^{\beta\gamma}$$

は，"$\boldsymbol{v}$ は (1) $\boldsymbol{F}$ と自身とのテンソル積 $\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{F}$ をつくり，(2) $\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{F}$ を，その 1 番目と 3 番目および，2 番目と 4 番目の投入口について縮約し，(3) 生ずるスカラー関数の勾配をとり，(4) 1–形式であるその勾配を対応するベクトルに変換する，ことにより得られるベクトルである"．

*30 "添字の体操" は，成分の記号で作業し，添字を要求どおりに並べ替えて，幾何学的な方程式から内容を引き出す技術であり，特殊相対論あるいは一般相対論で難しい計算をしたければ精通しておかなければならない．コラム 3.3 は添字の体操の若干の近道を詳述し，練習問題 3.8–3.18 は実習を提供する．

コラム 3.3 添字の体操のテクニック

式	名称と議論
$S^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = S(\boldsymbol{\omega}^{\alpha}, \boldsymbol{e}_{\beta}, \boldsymbol{e}_{\gamma})$	成分を計算する．
$S^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = S(\boldsymbol{\omega}^{\alpha}, \boldsymbol{\omega}^{\beta}, \boldsymbol{e}_{\gamma})$	他の成分を計算する．
$\boldsymbol{S} = S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\boldsymbol{e}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\gamma}$	$\boldsymbol{S}$ の階数 $\binom{1}{2}$ バージョンを再構成する．
$\boldsymbol{S} = S^{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{e}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{e}_{\beta}\otimes\boldsymbol{e}_{\gamma}$	$\boldsymbol{S}$ の階数 $\binom{3}{0}$ バージョンを再構成する．[思い出せ：通常，種々のバージョンを区別しない．式 (3.15) およびそれに付随した議論をみよ．]
$S^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = \eta^{\beta\mu}S^{\alpha}{}_{\mu\gamma}$	添字を上げる．
$S^{\alpha}{}_{\mu\gamma} = \eta_{\mu\beta}S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}$	添字を下げる．
$M_{\mu} = S^{\alpha}{}_{\mu\alpha}$	$\boldsymbol{S}$ を縮約して新しいテンソル $\boldsymbol{M}$ をつくる．
$T^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = S^{\alpha\beta}{}_{\mu}M_{\nu}$	$\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{M}$ のテンソル積は新しいテンソル $\boldsymbol{T}$ をつくる．
$\boldsymbol{A}^2 = A^{\alpha}A_{\alpha}$	ベクトル $\boldsymbol{A}$ の 2 乗された長さはテンソル積 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{A}$ をつくり，縮約して得られる，それ

*30 添字の体操

	は，対応する 1–形式 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ をつくり，そして貫通するのと同じである．$\boldsymbol{A}^2 = \langle \tilde{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{A} \rangle = A^\alpha A_\alpha$.
$\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\gamma$	計量の "共変成分" からつくられる行列，$\|\eta_{\alpha\beta}\|$ は "反変成分" からつくられる行列，$\|\eta^{\alpha\beta}\|$ の逆である．同等なことであるが，計量 $\eta_{\alpha\beta}$ の 1 つの添字を上げると Kronecker のデルタがつくられる．
$S^\alpha{}_{\beta\gamma} = N^\alpha{}_{\beta,\gamma}$	$\boldsymbol{N}$ の勾配は新しいテンソル $\boldsymbol{S}$ をつくる．
$R_\beta = N^\alpha{}_{\beta,\alpha}$	$\boldsymbol{N}$ の発散は新しいテンソル $\boldsymbol{R}$ をつくる．
$N^\alpha{}_{\beta,\gamma} = (\eta_{\beta\mu}N^{\alpha\mu})_{,\gamma} = \eta_{\beta\mu}N^{\alpha\mu}{}_{,\gamma}$	勾配をとることと添字を上げ下げすることとは，交換可能な操作である．
$N^\alpha{}_\beta{}^{,\gamma} \equiv N^\alpha{}_{\beta,\mu}\eta^{\mu\gamma}$	勾配の反変添字は共変添字を上げることによって得られる．
$(R_\alpha M_\beta)_{,\gamma} = R_{\alpha,\gamma}M_\beta + R_\alpha M_{\beta,\gamma}$	テンソル積の勾配：$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{M})$ = 置換 $\boldsymbol{\nabla R}\otimes\boldsymbol{M} + \boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{\nabla M}$.
$G_{\alpha\beta} = F_{[\alpha\beta]} \equiv \frac{1}{2}(F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha})$	テンソル $\boldsymbol{F}$ を反対称化して新しいテンソル $\boldsymbol{G}$ を得る．
$H_{\alpha\beta} = F_{(\alpha\beta)} \equiv \frac{1}{2}(F_{\alpha\beta} + F_{\beta\alpha})$	テンソル $\boldsymbol{F}$ を対称化して新しいテンソル $\boldsymbol{H}$ を得る．
${}^*J_{\alpha\beta\gamma} = J^\mu \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$	ベクトルに双対な階数 3 のテンソルをつくる（練習問題 3.14）.
${}^*F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$	与えられた反対称の階数 2 のテンソルに双対な，反対称の階数 2 のテンソルをつくる（練習問題 3.14）.
${}^*B_\alpha = \frac{1}{6}B^{\lambda\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}$	反対称の階数 3 のテンソルに双対な 1–形式をつくる（練習問題 3.14）.

[練習問題]

3.8　縮約は系に無関係

縮約は，式 (3.40) で定義されているように，$\boldsymbol{e}_\alpha$ および $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ がどのような Lorentz 系でとられているかに依存しないことを示せ．また，式 (3.40) は

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = R_{\alpha\mu}{}^\alpha{}_\nu u^\mu v^\nu$$

を意味していることを示せ．

3.9　微　分

(a) 公式

$$d(u_\mu v^\nu)/d\tau = (du_\mu/d\tau)v^\nu + u_\mu(dv^\nu/d\tau)$$

を特別な場合 $\mu=0$，$\nu=1$ を考えて，証明せよ．

(b) なぜ

$$(T^{\alpha\beta}v_\beta)_{,\mu} = T^{\alpha\beta}{}_{,\mu}v_\beta + T^{\alpha\beta}v_{\beta,\mu}$$

が成り立つかを説明せよ．

3.10　微分の追加

(a) 公式

$$d(u^\mu u_\mu)/d\tau = 2u_\mu(du^\mu/d\tau)$$

を，和 $u^\mu u_\mu \equiv \eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ を明確に書いて証明せよ．

(b) δ を変分，あるいは小さい変化を示すものとして，公式

$$\delta(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) = 2F_{\alpha\beta}\delta F^{\alpha\beta}$$

を証明せよ．

(c) $(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})_{,\mu}$ を計算せよ．

3.11　対称性

$A_{\mu\nu}$ を反対称テンソルとすると $A_{\mu\nu}=-A_{\nu\mu}$，そして $S^{\mu\nu}$ を対称テンソルとすると $S^{\mu\nu}=S^{\nu\mu}$．

(a) 式 $A_{\mu\nu}S^{\mu\nu}=0$ を 2 つの方法で証明せよ．第 1 に，和を明確に書き出し（すべての 16 項），そして和の中の項が対ごとにどう相殺するかを示すことにより，第 2 に，以下の列でおのおのが等しい符号をもつことを証明する議論を与えることにより，

$$A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}S^{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}S^{\nu\mu} = -A_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta} = -A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 0$$

(b) 任意のテンソル $V_{\mu\nu}$ に対して以下の 2 つの恒等式を確立せよ．

$$V^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(V^{\mu\nu} - V^{\nu\mu})A_{\mu\nu}, \qquad V^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(V^{\mu\nu} + V^{\nu\mu})S_{\mu\nu}$$

3.12　対称化と反対称化

テンソルを “対称化する” には，テンソルをすべての置換で平均する．新しい，対称化されたテンソルの成分は丸い括弧 (　) で区別される．

$$\begin{aligned} V_{(\mu\nu)} &\equiv \frac{1}{2}(V_{\mu\nu} + V_{\nu\mu}), \\ V_{(\mu\nu\lambda)} &\equiv \frac{1}{3!}(V_{\mu\nu\lambda} + V_{\nu\lambda\mu} + V_{\lambda\mu\nu} + V_{\nu\mu\lambda} + V_{\mu\lambda\nu} + V_{\lambda\nu\mu}) \end{aligned} \tag{3.46}$$

テンソルを同様に “反対称化する”（角張った括弧 [　] で表す）．

$$V_{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2}(V_{\mu\nu} - V_{\nu\mu}),$$
$$V_{[\mu\nu\lambda]} \equiv \frac{1}{3!}(V_{\mu\nu\lambda} + V_{\nu\lambda\mu} + V_{\lambda\mu\nu} - V_{\nu\mu\lambda} - V_{\mu\lambda\nu} - V_{\lambda\nu\mu}) \tag{3.47}$$

(a) このような対称化されたテンソルおよび反対称化されたテンソルは，実際，それらの投入口に挿入されたベクトルの交換のもとで対称であり，また反対称であることを示せ．

$$V_{(\alpha\beta\gamma)}u^\alpha v^\beta w^\gamma = +V_{(\alpha\beta\gamma)}v^\alpha u^\beta w^\gamma = \cdots,$$
$$V_{[\alpha\beta\gamma]}u^\alpha v^\beta w^\gamma = -V_{[\alpha\beta\gamma]}v^\alpha u^\beta w^\gamma = \cdots$$

(b) 2 階のテンソルはその対称部分および反対称部分から再構成される．

$$V_{\mu\nu} = V_{(\mu\nu)} + V_{[\mu\nu]} \tag{3.48}$$

しかし 3 階のテンソルはこのような再構成はできない．$V_{(\alpha\beta\gamma)}$ および $V_{[\alpha\beta\gamma]}$ は，両方を合わせても，$V_{\alpha\beta\gamma}$ よりも "少ない情報" を含んでいることを示せ．"Young 図"（たとえば，Messiah[1961]，付録 D をみよ）は，これら 2 つよりもさらに微妙な別の対称性を記述するが，それは不十分な情報を含んでいる．

(c) 電磁場のテンソルは次式を満たすことを示せ．

$$F_{(\alpha\beta)} = 0, \qquad F_{\alpha\beta} = F_{[\alpha\beta]} \tag{3.49a}$$

(d) Maxwell の "磁気" の方程式

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0$$

は形式

$$F_{[\alpha\beta,\gamma]} = 0 \tag{3.49b}$$

に書き直せることを示せ．

3.13 LEVI–CIVITA テンソル

時空における "Levi–Civita テンソル" $\boldsymbol{\varepsilon}$ は 4 階の，完全に反対称テンソルである．

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \text{ は任意の 2 つのベクトルが交換されると符号を変える．} \tag{3.50a}$$

$\boldsymbol{e}_0$ は未来を指し，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ は空間の基底ベクトルの右手系をつくる任意の Lorentz 系を選べ．この系での $\boldsymbol{\varepsilon}$ の共変成分は

$$\varepsilon_{0123} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = +1 \tag{3.50b}$$

である．

[注意：n 次元空間では，$\boldsymbol{\varepsilon}$ は類似の完全に反対称な階数 n のテンソルである．その成分は，"正の向きに位置づけられた，" 直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ に基づいて計算すると，

$$\varepsilon_{12\cdots n} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = +1 \tag{3.50c}$$

(a) 反対称性を用いて

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{がすべて異なる場合を除いて} \tag{3.50d}$$

$$\varepsilon_{\pi_0\pi_1\pi_2\pi_3} = \begin{cases} +1 & (0,1,2,3\text{ の偶置換に対して}) \\ -1 & (0,1,2,3\text{ の奇置換に対して}) \end{cases} \tag{3.50e}$$

を示せ.

(b) 次式を示せ.

$$\varepsilon^{\pi_0\pi_1\pi_2\pi_3} = -\varepsilon_{\pi_0\pi_1\pi_2\pi_3} \tag{3.50f}$$

(c) Lorentz 変換によって，$\varepsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}}$ と $\varepsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}}$ は，$\boldsymbol{e}_{\bar{0}}$ が未来を指し，$\boldsymbol{e}_{\bar{1}}$，$\boldsymbol{e}_{\bar{2}}$, $\boldsymbol{e}_{\bar{3}}$ が右手系をつくる任意の別な Lorentz 系で同じ値をもつことを示せ．**ヒント**：次式を示せ.

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \Lambda^{\bar{0}}{}_{\alpha} \Lambda^{\bar{1}}{}_{\beta} \Lambda^{\bar{2}}{}_{\gamma} \Lambda^{\bar{3}}{}_{\delta} = -\det|\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\nu}| \tag{3.50g}$$

$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ から $\det|\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\nu}| = \pm 1$ を示せ．そして，行列式は，$\boldsymbol{e}_0$ と $\boldsymbol{e}_{\bar{0}}$ が未来を指し，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ および $\boldsymbol{e}_{\bar{1}}$，$\boldsymbol{e}_{\bar{2}}$，$\boldsymbol{e}_{\bar{3}}$ が右手系をつくる系の間の変換に対して $+1$ であることを証明せよ.

(d) 過去を指す $\boldsymbol{e}_{\bar{0}}$ をもち，左手系をつくる $\boldsymbol{e}_{\bar{1}}$，$\boldsymbol{e}_{\bar{2}}$，$\boldsymbol{e}_{\bar{3}}$ をもつ Lorentz 系で，$\boldsymbol{\varepsilon}$ の成分は何か？

(e) Levi–Civita テンソルから，種々の“置換テンソル”をつくることができる．添字の記号で

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}{}_{\mu\nu\lambda} \equiv -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\rho}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \tag{3.50h}$$

$$\delta^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta\lambda}{}_{\mu\nu\lambda} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \tag{3.50i}$$

$$\delta^{\alpha}{}_{\mu} \equiv \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}{}_{\mu\beta} = \frac{1}{6}\delta^{\alpha\beta\lambda}{}_{\mu\beta\lambda} = -\frac{1}{6}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\beta\lambda\rho} \tag{3.50j}$$

以下のことを示せ.

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}{}_{\mu\nu\lambda} = \begin{cases} +1 & (\text{もし } \alpha\beta\gamma \text{ が } \mu\nu\lambda \text{ の偶置換であるならば}) \\ -1 & (\text{もし } \alpha\beta\gamma \text{ が } \mu\nu\lambda \text{ の奇置換であるならば}) \\ 0 & (\text{それ以外であるならば}) \end{cases} \tag{3.50k}$$

$$\delta^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = \delta^{\alpha}{}_{\mu}\delta^{\beta}{}_{\nu} - \delta^{\alpha}{}_{\nu}\delta^{\beta}{}_{\mu} = \begin{cases} +1 & (\text{もし } \alpha\beta \text{ が } \mu\nu \text{ の偶置換であるならば}) \\ -1 & (\text{もし } \alpha\beta \text{ が } \mu\nu \text{ の奇置換であるならば}) \\ 0 & (\text{それ以外であるならば}) \end{cases} \tag{3.50l}$$

$$\delta^{\alpha}{}_{\mu} = \begin{cases} +1 & (\text{もし } \alpha = \mu \text{ であるならば}) \\ 0 & (\text{それ以外であるならば}) \end{cases} \tag{3.50m}$$

3.14 双 対

任意のベクトル $\boldsymbol{J}$，任意の2階の反対称テンソル $\boldsymbol{F}$ ($F_{\alpha\beta} = F_{[\alpha\beta]}$)，と任意の3階の反対称テンソル $\boldsymbol{B}(B_{\alpha\beta\gamma} = B_{[\alpha\beta\gamma]})$ から次式で定義される新しいテンソルをつくることができる．

$$^*J_{\alpha\beta\gamma} = J^{\mu}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}, \qquad ^*F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}, \qquad ^*B_{\alpha} = \frac{1}{3!}B^{\lambda\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \tag{3.51}$$

$^*\boldsymbol{J}$ を $\boldsymbol{J}$ の "双対", $^*\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{F}$ の "双対", $^*\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{B}$ の "双対" という．["双対" という言葉の先のまったく異なる使い方 (2.7 節) は，もし $\langle\boldsymbol{\omega}^{\alpha}, \boldsymbol{e}_{\beta}\rangle = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$ ならば，1組の基底1–形式 $\{\boldsymbol{\omega}^{\alpha}\}$ を1組の基底ベクトル $\{\boldsymbol{e}_{\alpha}\}$ に双対であるとよんだ．幸いに2つの型の双対性の間に混乱の原因はない．1つはベクトルの**集合**を1–形式の**集合**に関係づける．他方は階数 p の反対称テンソルを階数 $4-p$ の反対称テンソルに関係づける．]

(a) 次式を示せ．

$$^{**}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}, \qquad ^{**}\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}, \qquad ^{**}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \tag{3.52}$$

したがって（符号を除いて）任意の完全に反対称のテンソル $\boldsymbol{H}$ をその双対 $^*\boldsymbol{H}$ から，さらにもう一度その双対 $^{**}\boldsymbol{H}$ をとることによって回復することができる．これは $\boldsymbol{H}$ と $^*\boldsymbol{H}$ が正確に同じ情報を含んでいることを示している．

(b) 同じ情報の内容というこの事実を，成分 $^*A^{\alpha\beta\gamma}$ を A^{α} で，また成分 $^*F^{\alpha\beta}$ を $F^{\alpha\beta}$ で，また成分 $^*B^{\alpha}$ を $B^{\alpha\beta\gamma}$ で書くことによって，明確にせよ．

3.15 Maxwell の方程式の幾何学的なバージョン

もし $\boldsymbol{F}$ が電磁場のテンソルであるならば，$\boldsymbol{\nabla}\cdot{}^*\boldsymbol{F} = 0$ は Maxwell の方程式の幾何学的な系に無関係なバージョンであることを示せ．

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0$$

同様に，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} = 4\pi\boldsymbol{J}$（$\boldsymbol{F}$ の2番目の投入口についての発散）は $F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 4\pi J^{\alpha}$ の幾何学的なバージョンである．

3.16 電荷保存

Maxwell の方程式 $F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 4\pi J^{\alpha}$ から，"電荷保存の方程式"

$$J^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \tag{3.53}$$

を導け．この式は，実際，電荷の保存に対応していることを示せ．それはさらに5章で調べられるだろう．

3.17 ベクトルポテンシャル

電磁気論のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は電磁場のテンソルを幾何学的な方程式で生み出す．

$$\boldsymbol{F} = -(\boldsymbol{\nabla A}\text{ の反対称の部分}) \tag{3.54}$$

すなわち,

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \tag{3.54$'$}$$

(a) 電場と磁場は特別な Lorentz 系で次式で与えられることを示せ.

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{A}/\partial t - \boldsymbol{\nabla}A^0 \tag{3.55}$$

(b) $\boldsymbol{A}$ が

$$A^{\alpha,\mu}{}_{,\mu} - A^{\mu}{}_{,\mu}{}^{,\alpha} = -4\pi J^{\alpha} \tag{3.56}$$

を満たす場合に限り $\boldsymbol{F}$ は Maxwell の方程式を満たすことを示せ.

(c) “ゲージ変換”

$$\boldsymbol{A}_{新} = \boldsymbol{A}_{旧} + \boldsymbol{d}\phi \qquad (\phi = 任意の関数) \tag{3.57}$$

は $\boldsymbol{F}$ に影響を及ぼさないことを示せ.

(d) ゲージを以下のように調整できることを示せ.

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0 \qquad (\text{“Lorentz ゲージ”}) \tag{3.58a}$$

$$\Box\boldsymbol{A} = -4\pi\boldsymbol{J} \tag{3.58b}$$

ここに □ は波動演算子（“d'Alembertian”）

$$\Box\boldsymbol{A} = A^{\alpha,\mu}{}_{,\mu}\boldsymbol{e}_{\alpha} \tag{3.59}$$

である.

3.18 電磁気的ストレス–エネルギーテンソルの発散

電磁場のテンソル $\boldsymbol{F}$ から, 2 階, 対称テンソル $\boldsymbol{T}$（5 章で学ぶ “ストレス–エネルギーテンソル”）を以下のようにつくる.

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{3.60}$$

添字の体操の練習問題として

(a) $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}$ は成分

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu\alpha}{}_{,\nu}F^{\nu}{}_{\alpha} + F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha,\nu} - \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}{}^{,\mu}F^{\alpha\beta}\right] \tag{3.61}$$

をもつことを示せ.

(b) この表現を操作して次の形に変えよ.

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = \frac{1}{4\pi}\left[-F_{\mu\alpha}F^{\alpha\nu}{}_{,\nu} - \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}(F_{\alpha\beta,\mu} + F_{\mu\alpha,\beta} + F_{\beta\mu,\alpha})\right] \tag{3.62}$$

式 (3.62) の第 1 項は式 (3.61) の第 2 項から直接出ることに注意せよ.

(c) Maxwell の方程式を用いて次式を結論せよ.

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -F^{\mu\alpha} J_\alpha \tag{3.63}$$

4章
電磁気と微分形式

彼の気持ちの乱れでエーテルが震えた，Clerk Maxwell の 6 つの方程式に従って，ただこう言えばわかるあのお馴染みの震え方，それは人々の目をはるか遠くに向けさせた．そのとおりに感じればそれでいい．その方程式をたどっていけばいい——$\mathbf{d}\gamma/\mathbf{dy} - \mathbf{d}\beta/\mathbf{dz}$ は $\mathbf{KdX/dt}$ に等しい……（X, Y, Z）の回転はベクトル（a, b, c）の $-\mathbf{d/dt}$ なのに．

古き数学の日々に Cavendish 研究所の研究生のディナーのために（The Interfering Parrot の調べに乗せて）A.A.Robb が書いた「微粒子の回転」から．

[本章はすべてトラック–2 である．それは，14.5 節および 14.6 節（微分形式を用いて曲率を計算する）と 15 章（Bianchi 恒等式と境界の境界）の準備として必要である．しかし本書の他の部分には必要でない．]

4.1 外計算法

個々にあるいは相交わって“蜂の巣”，“卵の木枠”，そして他のこのような構造（“微分形式”）をつくっているたくさんの面は，電磁気および重力の幾何学への独特の洞察を与える．しかし，このような洞察を生むには少し時間がかかる．したがって読者の多くは，本書を初めて読むときには，本章と本章に従属する後の材料をとばすべきである．

解析的に言えば，微分形式は完全に反対称テンソルである．絵で言えば，微分形式は交錯するたくさんの面である．微分形式を楽に取り扱う“外計算法”とよばれる数学形式は，コラム 4.1 に簡潔にまとめられている．その基本的な特徴は，電磁気論を「外計算法」* の言葉で書き直して本章の残りの部分で例示される．本章に取り組む有効な方法は (1) コラム 4.1 をさっとみてその数学形式の特質を理解する，(2) 本章の残りの部分を詳細に読む，(3) コラム 4.1 を注意深く再読する，(4) 練習問題を解いて数学形式を巧みに取り扱う習慣を身につける，ということである．

* 外計算法は，ここでよりも以下の人たちによってより詳しく取り扱われている．É. Cartan (1945), de Rham (1955), Nickerson, Spencer, and Steenrod (1959), Hauser (1970), Israel (1970), とくに Flanders (1963, 比較的容易で，たくさんの応用がある)，Spivak (1965, 2, 3 年生のレベル，しかし現代数学と完全に調和している)，H. Cartan (1970), そして Choquet-Bruhat (1968a).

コラム 4.1　微分形式と外計算法の要約

外計算法の基本的な定義と公式は，参照を容易にするためにここにまとめておく．各項は一般的な陳述と主な応用からなる．この公式は時空だけでなく，より一般的な幾何学的な系（各節の表題をみよ）にも当てはまる．公式の内部的一貫性を証明したり，公式を一連の定義と公理から導く試みはここではしない．そのような系統立った取り扱いについては，たとえば，Spivak (1965)，あるいは Misner and Wheeler (1957) をみよ．

A. 代数 1（任意のベクトル空間に当てはまる）

1. 基底 1–形式

a. 座標基底 $\boldsymbol{\omega}^j = \boldsymbol{d}x^j$（$j$ はどの 1–形式であるかを示し，どの成分であるかを示さない）.

b. 一般的な基底 $\boldsymbol{\omega}^j = L^j{}_{k'}\boldsymbol{d}x^{k'}$

応　用

静的で球対称な引力の中心周りの Schwarzschild 幾何学を解析するための簡単な基底 1–形式.

$$\boldsymbol{\omega}^0 = (1 - 2m/r)^{1/2}\boldsymbol{d}t,$$
$$\boldsymbol{\omega}^1 = (1 - 2m/r)^{-1/2}\boldsymbol{d}r,$$
$$\boldsymbol{\omega}^2 = r\boldsymbol{d}\theta,$$
$$\boldsymbol{\omega}^3 = r\sin\theta\boldsymbol{d}\phi$$

2. 一般的な $\boldsymbol{p}$–形式（あるいは $\boldsymbol{p}$–ベクトル）

階数 $\binom{0}{p}$[あるいは $\binom{p}{0}$] の完全に反対称のテンソルである．それはくさび積で展開できる（3.5 節と練習問題 4.12 をみよ）.

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{p!}\alpha_{i_1 i_2\cdots i_p}\boldsymbol{\omega}^{i_1}\wedge\boldsymbol{\omega}^{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\omega}^{i_p}$$
$$\equiv \alpha_{|i_1 i_2\cdots i_p|}\boldsymbol{\omega}^{i_1}\wedge\boldsymbol{\omega}^{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\omega}^{i_p}$$

（**注意**：添字を囲む縦棒は，$i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ の場合についてのみ和をとることを意味する.）

2 つの応用

エネルギー–運動量 1–形式は $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i\boldsymbol{\omega}^i$ の型である．あるいは

$$\boldsymbol{p} = -E\,\boldsymbol{d}t + p_x\boldsymbol{d}x + p_y\boldsymbol{d}y + p_z\boldsymbol{d}z$$

Faradayは $\boldsymbol{\beta} = \beta_{|\mu\nu|}\boldsymbol{\omega}^\mu\wedge\boldsymbol{\omega}^\nu$ 型の 2–形式である．あるいは平坦な時空で

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} = &-E_x\boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}x - E_y\boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}y - E_z\boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}z\\ &+ B_x\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z + B_y\boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}x + B_z\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y\end{aligned}$$

3. くさび積

和および掛算のすべてのよく知られた規則は以下のように成り立つ．

$$(a\boldsymbol{\alpha} + b\boldsymbol{\beta})\wedge\boldsymbol{\gamma} = a\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\gamma} + b\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\gamma},$$
$$(\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta})\wedge\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}\wedge(\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\gamma}) \equiv \boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\gamma}$$

ただし，p–形式 $\boldsymbol{\alpha}$ および q–形式 $\boldsymbol{\beta}$ 間の修正された交換則に対しては，

$$\underset{p}{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \underset{q}{\boldsymbol{\beta}} = (-1)^{pq}\,\underset{q}{\boldsymbol{\beta}} \wedge \underset{p}{\boldsymbol{\alpha}}$$

1–形式 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ への応用

$$\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\alpha}, \qquad \boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\alpha} = 0$$
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta} &= (\alpha_j\boldsymbol{\omega}^j)\wedge(\beta_k\boldsymbol{\omega}^k) = \alpha_j\beta_k\boldsymbol{\omega}^j\wedge\boldsymbol{\omega}^k\\ &= \frac{1}{2}(\alpha_j\beta_k - \beta_j\alpha_k)\boldsymbol{\omega}^j\wedge\boldsymbol{\omega}^k\end{aligned}$$

4. $\boldsymbol{p}$–形式の $\boldsymbol{p}$–ベクトル上への縮約

$$\begin{aligned}\langle\underset{p}{\boldsymbol{\sigma}}, \underset{p}{\boldsymbol{A}}\rangle &= \alpha_{|i_1\cdots i_p|}A^{|j_1\cdots j_p|}\,\underbrace{\langle\boldsymbol{\omega}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\omega}^{i_p}, \boldsymbol{e}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{j_p}\rangle}\\ &\qquad\qquad\qquad [\equiv \delta^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}(\text{練習問題 3.13 と 4.12 をみよ})]\\ &= \alpha_{|i_1\cdots i_p|}A^{|i_1\cdots i_p|}\end{aligned}$$

4 つの応用

a. 粒子のエネルギー–運動量 1–形式 $\boldsymbol{p} = p_\alpha\boldsymbol{\omega}^\alpha$ を観測者の 4–速度 $\boldsymbol{u} = u^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha$（1–ベクトル）で縮約する．

$$-\langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}\rangle = -p_\alpha u^\alpha = \text{粒子の質量}$$

b. ***Faraday*** 2–形式 $\boldsymbol{F}$ の，二重ベクトル $\delta\mathcal{P}\wedge\Delta\mathcal{P}$ [ここに，$\delta\mathcal{P} = (d\mathcal{P}/d\lambda_1)\Delta\lambda_1$ および $\Delta\mathcal{P} = (d\mathcal{P}/d\lambda_2)\Delta\lambda_2$ は，2–面 $\mathcal{P}(\lambda_1, \lambda_2)$ 内の 2 つの無限小ベクトルであり，二重ベクトルはそれらが張る面要素を表している] による縮約は，この面要素を貫く磁束 $\Phi = \langle\boldsymbol{F}, \delta\mathcal{P}\wedge\Delta\mathcal{P}\rangle$ である．

c. もっと一般的に，ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p$ を辺とする p 次元の平行多面体

は，**“単純な”**p–ベクトル $\boldsymbol{a}_1\wedge\boldsymbol{a}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{a}_p$ で記述される方向づけの体積をもっている（方向づけは，2つの辺を交換すると符号が変わることからわかる）．p 個の異なる1–形式 $\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2,\cdots,\boldsymbol{\sigma}^p$ の超平面でつくられた壁をもつ，卵の木枠型の構造は，**“単純な”**p–形式 $\boldsymbol{\sigma}^1\wedge\boldsymbol{\sigma}^2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\sigma}^p$ で記述される．無限小 p–体積 $\boldsymbol{a}_1\wedge\boldsymbol{a}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{a}_p$ で切り裂かれる，$\boldsymbol{\sigma}^1\wedge\boldsymbol{\sigma}^2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\sigma}^p$ のセルの数は，

$$\langle\boldsymbol{\sigma}^1\wedge\boldsymbol{\sigma}^2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\sigma}^p,\boldsymbol{a}_1\wedge\boldsymbol{a}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{a}_p\rangle$$

である．

d. p 個の関数 $f^k(x^1,\cdots,x^n)$ の集合の，p 個の独立変数についての Jacobi 行列式は，

$$\left\langle \boldsymbol{d}f^1\wedge\boldsymbol{d}f^2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{d}f^p,\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x^1}\wedge\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x^2}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x^p}\right\rangle$$

$$=\det\left\|\left(\frac{\partial f^k}{\partial x^j}\right)\right\|\equiv\frac{\partial(f^1,f^2,\cdots,f^p)}{\partial(x^1,x^2,\cdots,x^p)}$$

である．

5. 単純な形式

a. 単純な p–形式は p 個の1–形式のくさび積として書ける．

$$\underset{p}{\boldsymbol{\sigma}}=\underbrace{\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\gamma}}_{p\text{ 因子}}$$

b. 単純な p–形式 $\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\gamma}$ は $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\cdots,\boldsymbol{\gamma}$ の面の交錯する群（卵の木枠の構造），および循環の向き（方向づけ）で表される．

応　用

a. 4次元（たとえば，時空）では0–形式，1–形式，3–形式，4–形式はすべて単純である．2–形式 $\boldsymbol{F}$ は一般的に2つの単純な形式の和である，たとえば，

$$\boldsymbol{F}=-e\boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}x+h\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z,\ \text{それは}\ \boldsymbol{F}\wedge\boldsymbol{F}=0$$

である場合に限り単純である．

b. 1–形式 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\cdots,\boldsymbol{\gamma}$ の集合は，$\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\gamma}=0$（卵の木枠がつぶれる）である場合に限り一次従属である（1つは他の一次結合である）．

B. 外微分（計量をもつ，あるいはもたない任意の“微分可能な多様体”に適用できる）

1. $\boldsymbol{d}$ は p–形式 $\boldsymbol{\sigma}$ から $(p+1)$–形式 $\boldsymbol{d\sigma}$ をつくる

2. $\boldsymbol{d}$ の効果は，$\boldsymbol{d}f$ の定義（2章）と f，関数（0–形式）と以下の公式を用いて帰納法で定義される．

$$d(\underset{p}{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \underset{q}{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{d\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta} + (-1)^p \boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{d\beta},$$
$$\boldsymbol{d}^2 = \boldsymbol{dd} = 0$$

2 つの応用

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{d\beta}) = \boldsymbol{d\alpha}\wedge\boldsymbol{d\beta}$$

p–形式 $\boldsymbol{\phi}$,

$$\boldsymbol{\phi} = \phi_{|i_1\cdots i_p|}\boldsymbol{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{d}x^{i_p}$$

に対して次式（$\boldsymbol{d\phi}$ の択一的な，そして同等な定義）を得る．

$$\boldsymbol{d\phi} = \boldsymbol{d}\phi_{|i_1\cdots i_p|}\wedge\boldsymbol{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{d}x^{i_p}$$

C. 積分（計量をもつ，あるいはもたない任意の“微分可能な多様体”に適用できる）

1. 絵で表した解釈

本文および 4 章の図は $\int\boldsymbol{\alpha}$（指定された 1–形式 $\boldsymbol{\alpha}$ の，指定された曲線に沿って，指定された始点から指定された終点までの積分）を，“その経路上で貫かれた $\boldsymbol{\alpha}$–面の数”と解釈する．同様に，$\int\boldsymbol{\phi}$（指定された 2–形式 $\boldsymbol{\phi}$ の，指定された循環の向き，あるいは“方向づけ”のある指定された小さい面上での積分）を，“蜂の巣のような構造 $\boldsymbol{\phi}$ の，その面で切り取られたセルの数”と解釈する．同様に，卵の木枠のような構造に対しては，それは 3–形式を表す等．

2. 積分に対する計算則

p–形式,

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_{|i_1\cdots i_p|}(x^1,\cdots,x^n)\boldsymbol{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{d}x^{i_p}$$

の積分 $\int\boldsymbol{\alpha}$ を p–次元の面について求めるには，2 段階で進む．

a. 面のパラメータ表示

$$x^k(\lambda^1,\cdots,\lambda^p)$$

を $\boldsymbol{\alpha}$ に代入して,

$$\boldsymbol{\alpha} = a(\lambda^j)\boldsymbol{d}\lambda^1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{d}\lambda^p$$

の形の項（これは p–次元の面での p–形式としてみられた $\boldsymbol{\alpha}$ である）を集める．

b.

$$\int\boldsymbol{\alpha} = \int a(\lambda^j)d\lambda^1 d\lambda^2\cdots d\lambda^2\cdots d\lambda^p$$

を積分の基本的な定義を用いて積分する．

例：式 (4.12) から (4.14) までをみよ．

3. 積分の微分幾何学.

p–形式 $\boldsymbol{\alpha}$ に対する $\int \boldsymbol{\alpha}$ を以下のように計算せよ.

a. p 次元の面 S を選び，その面について積分する.

b. 面の一般的な点をパラメータの関数，$\mathcal{P}(\lambda^1, \lambda^2, \cdots, \lambda^p)$ として与え，S をパラメータ化して表す．同じ関数で λ^1 と λ^2 とを入れ替えた $\mathcal{P}(\lambda^2, \lambda^1, \cdots, \lambda^p)$ は，異なる（すなわち，逆向きの）面，$-S$ を記述する.

c. 無限小平行多面体

$$\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda^1} \Delta\lambda^1\right) \wedge \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda^2} \Delta\lambda^2\right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda^p} \Delta\lambda^p\right)$$

は面に接している．それが切り取る $\boldsymbol{\alpha}$ のセルの数は

$$\left\langle \boldsymbol{\alpha}, \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda^p} \right\rangle \Delta\lambda^1 \cdots \Delta\lambda^p$$

である．この数は，2つのベクトル $\partial\mathcal{P}/\partial\lambda^k$ が交換されると，逆向きの面に対するように符号を変える.

d. 以上は定義

$$\int \boldsymbol{\alpha} \equiv \int\int \cdots \int \left\langle \boldsymbol{\alpha}, \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda^1} \wedge \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda^2} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda^p} \right\rangle d\lambda^1\, d\lambda^2 \cdots d\lambda^p$$

を動機づける解釈を与える．この定義は練習問題 4.9 での前節 (C.2) の計算則と同一視される.

応　用

勾配 $\boldsymbol{d}f$ を曲線，$\mathcal{P}(\lambda)$ に沿って $\mathcal{P}(0)$ から $\mathcal{P}(1)$ まで積分せよ.

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{d}f &= \int_0^1 \langle \boldsymbol{d}f, d\mathcal{P}/d\lambda \rangle d\lambda = \int_0^1 (df/d\lambda) d\lambda \\ &= f[\mathcal{P}(1)] - f[\mathcal{P}(0)]\end{aligned}$$

e. 記号 “d” に対する3つの異なる使用法：**第1**，d/da，あるいは df/da，あるいは $d\mathcal{P}/da$ のような明確な微分表現での（細活字の）d．分子あるいは分母だけでは意味をもたない，記号全体が意味をもつ．**第2**，積分記号内の（細活字の）d，たとえば，$\int f da$．これは積分を遂行する指示であり，積分記号なしにはまったく意味をもたない．“$\int \cdots d \cdots$” は分割できない単位として生きる．**第3**，（太活字の）$\boldsymbol{d}$．たとえば，$\boldsymbol{d}$ のみ，あるいは $\boldsymbol{d}f$, あるいは $\boldsymbol{d\alpha}$．これは p–形式を $(p+1)$–形式に変換する外微分である．ときどき，（細活字の）d が同じ目的のために用いられる．したがって，d のみ，あるいは df，あるいは dx は，$\int$ 記号に結合したり (**第2**の使用)，/記号に結合 (**第1**の使用) したりしなければ，つねに外微分である.

4. 一般化された Stokes の定理（コラム 4.6 をみよ）

a. $\partial\mathcal{V}$ を $(p+1)$–次元の面 $\mathcal{V}$ の閉じた p 次元の境界とする．$\boldsymbol{\sigma}$ を $\mathcal{V}$ で定義された p–形式とする．そうすると

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{d\sigma} = \int_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma}}$$

[p–形式 $\boldsymbol{\sigma}$ の境界 $\partial\mathcal{V}$ についての積分は $(p+1)$–形式 $\boldsymbol{d\sigma}$ の $\mathcal{V}$ 内での積分に等しい]．

b. 符号が正しくあるためには，$\mathcal{V}$ と $\partial\mathcal{V}$ の方向づけは次の意味で一致しなければならない．$\mathcal{V}$ 内で $y^0 \leq 0$，境界 $\partial\mathcal{V}$ で $y^0 = 0$ となる座標 $y^0, y^1, \cdots, y^p$ を，$\mathcal{V}$ の一部分に選べ．そうすると $\mathcal{V}$ に対する方向づけ，

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial y^0} \wedge \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial y^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial y^p}$$

は $\partial\mathcal{V}$ に対する方向づけ

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial y^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial y^p}$$

を要求する．

c. **注意**：矛盾がなく連続な方向づけの選択が不可能である，Möbius（メビウス）の帯のような方向づけのできない面に対して，Stokes の定理が成り立つ “∂” の定義を与えるためには，より複雑な数学が要求される．

応　用

Stokes および Gauss の定理のすべてのバージョンを拡張して，計量をもつ，あるいはもたない任意次元の空間で任意次元の面に対して，すべての積分定理を特別な場合として含む．

例

a. $\mathcal{V}$ を曲線，$\partial\mathcal{V}$ をその両端，$\boldsymbol{\sigma} = f$ を 0–形式（関数）とする．

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{d}f = \int_0^1 (df/d\lambda)d\lambda = \int_{\partial\mathcal{V}} f = f(1) - f(0)$$

b. $\mathcal{V}$ を 3–空間の 2–面，$\partial\mathcal{V}$ を閉じた曲線からなる境界，$\boldsymbol{v}$ を 1–形式とする．Euclid 的ベクトルの記号に翻訳すると，2 つの積分は

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{dv} = \int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{dS}, \quad \int_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{v} = \int_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{dl}$$

である．

c. 他の応用は，5.8，20.2，20.3，20.5 節と，練習問題 4.10，4.11，5.2，および

以下にある．

D. 代数 II（計量をもつ任意のベクトル空間に適用できる）

1. $\boldsymbol{p}$**–形式のノルム**

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|^2 \equiv \alpha_{|i_1\cdots i_p|}\alpha^{i_1\cdots i_p}$$

2 つの応用

1–形式のノルムは長さの 2 乗に等しい，$\|\boldsymbol{\alpha}\|^2 = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}$．***Faraday*** の電磁気的な 2–形式のノルム，$\|\boldsymbol{F}\|^2 = \boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2$．

2. $\boldsymbol{p}$**–形式の双対**

a. n–次元空間で，p–形式 $\boldsymbol{\alpha}$ の双対は $(n-p)$–形式 $^*\boldsymbol{\alpha}$ であり，その成分は

$$({}^*\alpha)_{k_1\cdots k_{n-p}} = \alpha^{|i_1\cdots i_p|}\epsilon_{i_1\cdots i_p k_1\cdots k_{n-p}}$$

である．

b. 双対の性質

$$^{**}\boldsymbol{\alpha} = (-1)^{p-1}\boldsymbol{\alpha} \quad \text{時空内で，}$$
$$\boldsymbol{\alpha}\wedge{}^*\boldsymbol{\alpha} = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{一般に}$$

c. **注意**：$\boldsymbol{\varepsilon}$ の定義（練習問題 3.13）は空間の方向づけの選択を含んでいる，すなわち，どの直交基底が (1) “右手系” であり，したがって (2) $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n) = +1$ であるかを定める．

応　用

a. 0–形式 f に対して，$^*f = f\boldsymbol{\varepsilon}$，そして $\int f d(\text{体積}) = \int {}^* f$．

b. 電荷–電流 1–形式 $\boldsymbol{J}$ の双対は電荷–電流 3–形式 $^*\boldsymbol{J}$ である．3 次元超面の領域 $\mathcal{S}$ 内の全電荷 Q は

$$Q(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} {}^*\boldsymbol{J}$$

である．電荷の保存は局所的に $\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{J} = 0$ で述べられる．Stokes の定理はこの微分形の保存則から積分形の保存則

$$0 = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{d}^*\boldsymbol{J} = \int_{\partial\mathcal{V}} {}^*\boldsymbol{J}$$

になる．この法則は $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1$ が時空領域の未来 $\mathcal{S}_2$ と過去 $\mathcal{S}_1$ の境界からなるときにもっとも興味がある．その場合にはこれは $Q(\mathcal{S}_2) = Q(\mathcal{S}_1)$ を述べている．練習問題 5.2 をみよ．

c. 電磁場のテンソル $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Faraday}$ の双対は $^*\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Maxwell}$ である．$\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F} = 4\pi^*\boldsymbol{J}$ から Maxwell の方程式は，$4\pi Q = 4\pi\int_{\mathcal{S}} {}^*\boldsymbol{J} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F} = \int_{\partial\mathcal{S}} {}^*\boldsymbol{F}$ と

なる.

3. 単純な形式の再考

a. 単純な形式の双対は単純である.

b. $^*\boldsymbol{\sigma}$ の卵の木枠は $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\mu}$ の卵の木枠に次の意味で垂直である.

(1) $\boldsymbol{\sigma}$ の面の交わりにある任意のベクトル $\boldsymbol{V}$ を選ぶ.

$$(\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{V}\rangle = \langle\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{V}\rangle = \cdots = \langle\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{V}\rangle = 0)$$

(2) $^*\boldsymbol{\sigma}$ の面の交わりにある任意のベクトル $\boldsymbol{W}$ を選ぶ.

(3) そうすると $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{W}$ は必然的に直交する. $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{W} = 0$.

例：$\boldsymbol{\sigma} = 3\boldsymbol{d}t$ は時空内の単純な 1–形式である.

a. $^*\boldsymbol{\sigma} = -3\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z$ は単純な 3–形式である.

b. $\boldsymbol{\sigma}$ の面内の一般的なベクトルは

$$\boldsymbol{V} = V^x\boldsymbol{e}_x + V^y\boldsymbol{e}_y + V^z\boldsymbol{e}_z$$

である.

c. $^*\boldsymbol{\sigma}$ の面の交わりにある一般的なベクトルは

$$\boldsymbol{W} = W^t\boldsymbol{e}_t$$

である.

d. $\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{V} = 0$.

4.2 電磁気的な 2–形式と Lorentz 力

電磁場のテンソル, ***Faraday*** $= \boldsymbol{F}$ は, 反対称 2–階のテンソル (すなわち, 2–形式) である. それを基底 1–形式のテンソル積

$$\boldsymbol{F} = F_{\alpha\beta}\boldsymbol{d}x^\alpha\otimes\boldsymbol{d}x^\beta$$

*1 で展開せずに, 外計算は, 反対称化されたテンソル積で展開する方を選ぶ (“外積”, 練習問題 4.1).

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{d}x^\alpha\wedge\boldsymbol{d}x^\beta \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{d}x^\alpha\wedge\boldsymbol{d}x^\beta \equiv \boldsymbol{d}x^\alpha\otimes\boldsymbol{d}x^\beta - \boldsymbol{d}x^\beta\otimes\boldsymbol{d}x^\alpha \tag{4.2}$$

任意の 2–形式 (反対称 2–階のテンソル) はこのように展開できる. 記号 “∧” はいろいろ

*1 外積で表された電磁気的な 2–形式

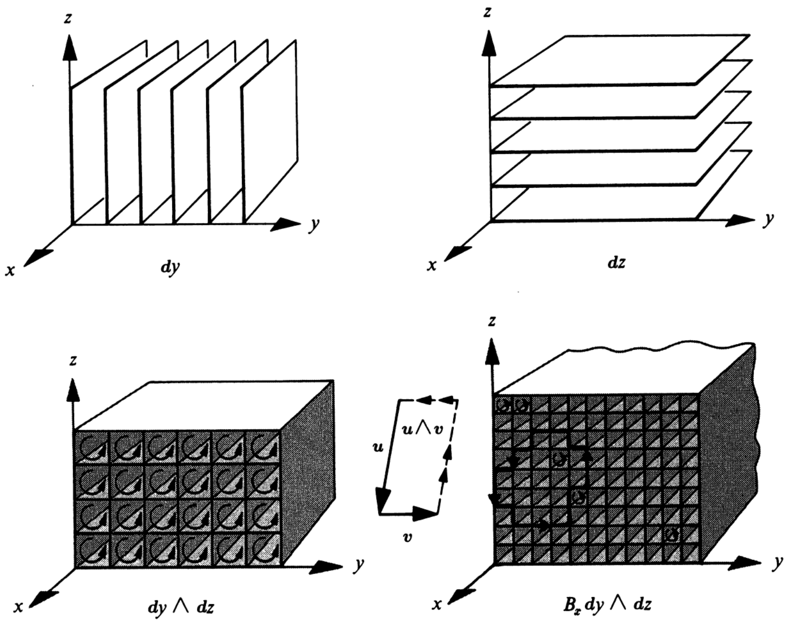


図 **4.1**　電磁場 $\boldsymbol{F} = B_z \boldsymbol{dy}\wedge\boldsymbol{dz}$ に対する 2–形式を 1–形式 $\boldsymbol{dy}$ および $\boldsymbol{dz}$ から “くさび積” (矢印によって示されている循環の向きをもつ蜂の巣のような構造の形成) によって構成する．2–形式は “方向づけられた面から数を構成する機械” である (下方の右側で矢印によって取り囲まれた見本の面によって例示されている．この面によって交差されている管の数は

$$\int_{(\text{この面})} \boldsymbol{F} = 18$$

Faraday の “磁束” の概念)．2–形式機構のこのアイデアは 3 章の “機械としてのテンソル” のアイデアに以下のように結びつけられうる．小さい面に対しては面上にわたって $\boldsymbol{F}$ を積分する方向づけられた面の形は重要でない．$\int \boldsymbol{F}$ に影響するすべては面の領域と，その方向づけである．面内に存在する 2 個のベクトル，$\boldsymbol{u}$および$\boldsymbol{v}$を選ぶ．それらは平行四辺形の 2 個の辺を形づくり，その方向づけ ($\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{v}$ によって続けられる) および面積は外積 $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$ に包含される．$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ の長さを調整して，それらの平行四辺形，$\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$ が積分の面と同じ面積をもつようにする．そうすると

$$\underbrace{\int_{\text{面}} \boldsymbol{F} = \int_{\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}} \boldsymbol{F}}_{\uparrow} = \underbrace{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}_{\uparrow}$$

[本章の機構のアイデア]　　[3 章の機構のアイデア]

練習問題：この結果を無限小面 $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$ および一般的な $\boldsymbol{F}$ に対して，コラム 4.1 の形式を用いて導け．

と，“くさび”，“ハット”，あるいは “外積記号” とよばれる．そして “$\boldsymbol{d}x^{\alpha}\wedge\boldsymbol{d}x^{\beta}$” は与えられた Lorentz 系の “基底 2–形式” である (3.5 節，練習問題 3.12 とコラム 4.1 をみよ)．

電磁場のこの 2–形式表示を例示するには，x–方向の磁場を考えるのがもっとも単純な方法である．

$$\begin{aligned} F_{yz} = -F_{zy} = B_x, \\ \boldsymbol{F} = B_x \boldsymbol{dy}\wedge\boldsymbol{dz} \end{aligned} \tag{4.3}$$

1–形式 $\boldsymbol{dy} = \text{grad}\, y$ は面 (実際には超面) $y = 18$ (すべての t, x, z)，$y = 19$ (すべての t, x, z)，$y = 20$ (すべての t, x, z)，などの集合である．そして面と面の間は一様に内挿されている．1–形式 $\boldsymbol{dz}$ に対しても同様である．これら 2 組の面の交わりは蜂の巣のような構造を生み出す．その構造は，蜂の巣のおのおのの管に “循環の向き” (式 (4.2) の “く

*2 さび積" の因子の順序 $\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z = -\boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}y$）を与える指示で補足されると（図 4.1 の矢印をみよ）"2–形式" となる．例示された 2–形式 $\boldsymbol{F}$ は，この "基底 2–形式" $\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z$ が 1 個の管をもつのに対して，B_x 個の管をもつという点でのみ異なる．

時空内でねじれたり回転したりする管からなる構造を考えるときには，それを記述するためにより多くの成分をもたねばならない．一般的な電磁場に対する 2–形式は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} = E_x\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}t + E_y\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}t + E_z\boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}t + B_x\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z \\ + B_y\boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}x + B_z\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y\end{aligned} \tag{4.4}$$

と書ける（6 個の成分，6 個の基底 2–形式）．

1–形式はベクトルから数を生み出す機械である（ベクトルが相次ぐ面を貫くときゴーンと鳴らす音）．*3 2–形式は方向づきの面（面上に循環の向きが示されている．図 4.1，右下）から数を生み出す機械である．ここでの意味は基本的な磁場の場合と同じく明瞭である．面によって切断された Faraday 管の数．このような "管状構造"（適切に抽象化されている，コラム 4.2）で記述される電磁気的な 2–形式 $\boldsymbol{F}$ あるいは ***Faraday*** は，すべての座標系と，"電場" と "磁場" との間のすべての人為的な区別に依拠しない，実在性と空間内の位置をもつ．さらに，これらの管は電磁場が荷電粒子に作用する仕組みに対し，今までに与えることができたもっとも直接的な幾何学的表示を与える．電荷 e と 4–速度

$$\boldsymbol{u} = \frac{dx^\alpha}{d\tau}\boldsymbol{e}_\alpha \tag{4.5}$$

の粒子をとる．この粒子を，電磁場が図 4.1 の 2–形式

$$\boldsymbol{F} = B_x\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z \tag{4.6}$$

*4 で記述される領域を通過させる．そうすると，粒子に及ぼされる力（1–形式とみなされる）は，この 2–形式と 4–速度（および電荷）の縮約である．

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{p}/d\tau = e\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) \equiv e\langle\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}\rangle \tag{4.7}$$

これは，2–形式の 2 つの因子を交互に接線ベクトル $\boldsymbol{u}$ に作用させて，直接計算によってわかる．

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{p}} &= eB_x\langle\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z, \boldsymbol{u}\rangle \\ &= eB_x\{\boldsymbol{d}y\langle\boldsymbol{d}z, \boldsymbol{u}\rangle - \boldsymbol{d}z\langle\boldsymbol{d}y, \boldsymbol{u}\rangle\} \\ &= eB_x\{\boldsymbol{d}y\langle\boldsymbol{d}z, u^z\boldsymbol{e}_z\rangle - \boldsymbol{d}z\langle\boldsymbol{d}y, u^y\boldsymbol{e}_y\rangle\}\end{aligned}$$

あるいは

$$\dot{p}_\alpha\boldsymbol{d}x^\alpha = eB_xu^z\boldsymbol{d}y - eB_xu^y\boldsymbol{d}z \tag{4.8}$$

*2 循環の向きをもった管の蜂の巣としての 2–形式
*3 方向づきの面から数を生み出す機械としての 2–形式
*4 粒子の 4–速度をもつ電磁気的な 2–形式の縮約としての Lorentz 力

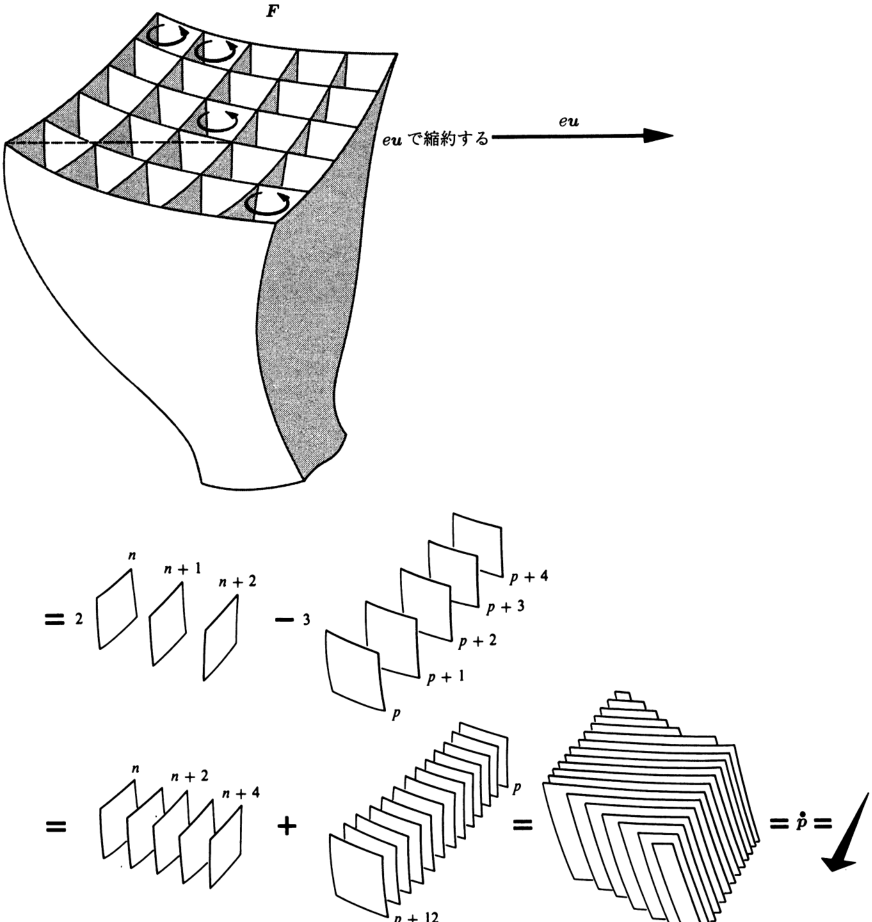


図 4.2 ***Faraday*** あるいは電磁場の 2–形式 $\boldsymbol{F}$ は，1–形式（荷電粒子の運動量の時間変化率 $\dot{\boldsymbol{p}}$）を接線ベクトル（粒子の電荷 e とその 4–速度 $\boldsymbol{u}$ との積）から生み出す機械である．時空内で一般的な 2–形式は，この図の上端に示されている構造のような 2 個の構造の "重ね合せ" である（コラム 4.2 をみよ），第 1 の構造の管は示されているように傾けられそして束ねられている，第 2 の構造の管は別方向に傾けられそして異なる束密度をもつ．

この式の両辺の基底 1–形式の係数をそれぞれ比較すると，磁場 B_x によって及ぼされる Lorentz 力のすべての詳細が再現されることがわかる．

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_y &= \frac{dp_y}{d\tau} = eB_x\frac{dz}{d\tau}, \\
\dot{p}_z &= \frac{dp_z}{d\tau} = -eB_x\frac{dy}{d\tau}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

このような論法を一般的な電磁場に単純に拡張することによって，**運動量の時間変化率（1–形式）は *Faraday* の 4–速度による縮約を電荷に掛けたものに等しい**と結論される．図 4.2 は 2–形式 $\boldsymbol{F}$ が，接線ベクトル $e\boldsymbol{u}$ から 1–形式 $\dot{\boldsymbol{p}}$ をつくる機械としていかに役立つかを図で示している．

コラム 4.2　3–空間および時空における“蜂の巣状構造”の概念から 2–形式を抽象する

1 ダースのビンが入っているボール紙の箱を開けて，ビンを分けている南北と東西に交錯するボール紙の蜂の巣構造を観察せよ．“管”（“ビンを入れる溝”）のあの蜂の巣構造は，ありふれた 3–空間においては 2–形式のかなり適切な例示である．3 次元構造を切り進む 2–面の平らな要素をどのように選んでも，そこから数（切った管の数）が出てくる．ところが，交差するボール紙の仕切りは少し特殊すぎる．真の 2–形式が与えることができるのは，切り分けられた管の数だけで，管の“形”ではない．箱を床に置いて 45° 回す．すると，仕切りの半分は北西から南東に，残る半分は北東から南西に走ることになるが，3–空間に固定されている 2–面の与えられた切片ではどこでも，管の数は変わらない．したがって十分注意して，心の眼にある管の概念をその方向（この例では垂直）と密度がみえるところまで抽象しなければならないが，管の壁の明確な位置や向きまでみえる必要はない．こうして，以下の表現はすべて，1 つのしかも同じ 2–形式 $\boldsymbol{\sigma}$ を与えることになる．

$$\boldsymbol{\sigma} = B\,\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = B(2\boldsymbol{d}x)\wedge\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{d}y\right)$$

（南北のボール紙は前より 2 倍狭い間隔に置かれ，東西のボール紙は前より 2 倍広い間隔に置かれている.）

$$\boldsymbol{\sigma} = B\boldsymbol{d}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)\wedge\boldsymbol{d}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$$

（ボール紙は 45° 回転している）

$$\boldsymbol{\sigma} = B\frac{\alpha\,\boldsymbol{d}x + \beta\,\boldsymbol{d}y}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^{1/2}}\wedge\frac{\gamma\,\boldsymbol{d}x + \delta\,\boldsymbol{d}y}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^{1/2}}$$

（位置に依存する 4 つの関数，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ によって，“ボール紙”の向きと間隔はともに，点ごとに変化する.）

物理的な実体をもち，現実の幾何学的対象を構成しているものは，つい今しがた個別に出会った 1–形式のどれか 1 つでなく，2–形式 $\boldsymbol{\sigma}$ そのものである．この事情は，物理学の文献でときには“力管”に言及し，またときには“力線”に言及する理由を説明する助けになる．同じ構造に対する 2 つの術語は，微小な面で薄切りすると，どちらも数を与えるという点が共通している．力線の描像は“ボール紙”によるいかなる特定の構造も，すなわち，2–形式を 1–形式の積にするいかなる特定の分解も心に強要しない利点をもっている．しかし，その特徴はまた不利な点でもある．なぜなら，1–形式のくさび積としての 2–形式の明確な表示は計算のときにしばしば有用だからであ

る．さらに，管の描像も，そのとおりになるように考えれば抽象的にならざるをえないけれども，要素的な管の方向づけ（循環の向きは，たとえば，図 4.1 および 4.5 の矢印で示されている）が容易に視覚化されるという利点をもっている．管の "壁" は，したがって，本書に描かれているすべての図で，2–形式は 1–形式からつくられることを思い出させるものとして残そう．しかし，ここでもまた以後も，多様体は個々の 1–形式に対する選択の方法であることを理解させよう！

さて，3 次元から 4 次元に転じて，"蜂の巣構造" の概念はより一層抽象的になされねばならないことをみよう．3 次元では，"ボール紙" の傾きと詰まり具合に示されている 2–形式の 1–形式への分解の任意性は，しかし，"瓶の方向"（"Faraday の力線あるいは力管の方向"）の垂直性に何の影響もなかった．4 次元ではそうでない，あるいは少なくとも 4 次元の一般的な場合にはそうでない．

特殊な場合には，事情は 4 次元の場合も 3 次元の場合とほとんど同じくらい単純である．特殊な場合の一例は前述の 2–形式 $\boldsymbol{\sigma} = B\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y$ で，それには前述した 1–形式への分解のすべての選択肢があるが，選択肢はどれも管に同一の "方向" を与える．もし "方向" という言葉が，"増大する z 方向の運動によって貫かれない管の壁" から，"増大する z 方向の運動によってもあるいは増大する t 方向の運動によっても，あるいはこのような運動のいかなる線形結合によっても貫かれない管の壁" へと変化する状況の中で使われたとしても，それは新しい次元を加えることによるきわめて自然な結果である．さらに，同じ単純さは電磁気的な平面波に対して成り立つ．たとえば，波が z 方向へ進んでいるとする，そして電気的偏りが x 方向を示しているとする．そうすると単色光の波に対して，

$$E_x = B_y = E_0 \cos\omega(z-t) = -F_{01} = F_{31}$$

が成り立ち，これらと異なる成分はすべて 0 に等しい．***Faraday*** は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= F_{01}\,\boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}x + F_{31}\,\boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}x\\ &= E_0\cos\omega(z-t)\,\boldsymbol{d}(z-t)\wedge\boldsymbol{d}x\end{aligned}$$

であり，再び 2 つの 1–形式の 1 つのくさび積として表される．

一般的にはそうでない！ 4 次元での一般的な 2–形式は 6 つの異なるくさび積からなる．

$$\boldsymbol{F} = F_{01}\,\boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}x + F_{02}\,\boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}y + \cdots + F_{23}\,\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z$$

この表現が，一般的な場合に，2 つの 1–形式のただ 1 つのくさび積（"単純な"2–形式）に帰着するだろうとの希望は望みすぎである．それは真実ですらない．6 つの外積から 2 つの外積に帰着される（詳細は練習問題 4.1 にある）ことは実に注目すべきである．こうして，

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{n}^1\wedge\boldsymbol{\xi}^1 + \boldsymbol{n}^2\wedge\boldsymbol{\xi}^2$$

おのおのの積 $\boldsymbol{n}^i \wedge \boldsymbol{\xi}^i$ はそれぞれ，図 4.1，4.2，4.4，および 4.5 に描かれているもののような蜂の巣構造として視覚化される．おのおののこのような構造は，それぞれ，横切る層（1–形式）からつくられるものと想像されるが，これらの 1–形式の傾きと束ねのような詳細については抽象的なものになってしまう．おのおののこのような構造は，それぞれ面要素で薄切りされるときには数を与える．しかし，2–形式 $\boldsymbol{F}$ に対して勘定されるものは，面によって切断される $\boldsymbol{n}^1 \wedge \boldsymbol{\xi}^1$ の管の数でもなく，また，面によって切断される $\boldsymbol{n}^2 \wedge \boldsymbol{\xi}^2$ の数でもなく，両者の和である．この和は面によって切断される "$\boldsymbol{F}$ の管の数" として本書で参照されている．いずれのくさび積の寄与も，それぞれ単純な理由のために正確に定義されていない．6 つのくさび積からなる対象を 2 つのくさび積に分解することは，奇跡のようにみえるけれども，実際まったく一義的でない（詳細は練習問題 4.2 にある）．

1–形式の 2 つの積で一般的な 2–形式を表そうという必要を保持する際に，$\boldsymbol{dF}$ がゼロになる（"磁荷が存在しない"）ことは，自動的に，$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{n}^1 \wedge \boldsymbol{\xi}^1)$ あるいは $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{n}^2 \wedge \boldsymbol{\xi}^2)$ が別々にゼロになることを意味しないことに注意せよ．また，一般的な 2–形式 $\boldsymbol{F}$ をどのように空間的に薄く切断しても（4 次元から 3 次元への転換），つねに蜂の巣構造（3 次元での "単純な" 2–形式，磁力管の Faraday の描像）で表される．

2–形式とは何かをあらゆる一般性においてみていく上での抽象にもかかわらず，"蜂の巣構造" という言葉を，より広い意味でこの対象を記述するのに使い続けることに何の障壁もない．そしてそれがこれ以後の習慣である．

4.3　形式は電磁気を明らかにし，そして電磁気は形式を明らかにする

すべての電磁気は，時空が曲がっているときも平坦であるときと同じように，すべての時空を満たす管の蜂の巣 "構造"（再びコラム 4.2 の "構造" という抽象的な意味で）2–形式の言葉で要約される．約言すれば，2 つのこのような構造があり，1 つは $\boldsymbol{Faraday} = \boldsymbol{F}$，他は $\boldsymbol{Maxwell} = {}^*\boldsymbol{F}$ と互いに他に対して双対（唯一 "垂直であるときにだけ"，計量の必要が議論に入ってくる）であって，おのおの基本的な式を満たす．

$$\boldsymbol{dF} = 0 \tag{4.10}$$

（"$\boldsymbol{Faraday}$ の管は終点をもたない".）そして，

$$\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F} = 4\pi\,{}^*\boldsymbol{J} \tag{4.11}$$

（"体積要素内に終わる $\boldsymbol{Maxwell}$ の管の数はその体積内の電荷の量に等しい".）この仕組みがどのように現れるかをより詳しくみるために，代わりに以下のものをみよう．(1) 2–形式の定義，(2) 与えられた電磁場が $\boldsymbol{Faraday}$ として，また $\boldsymbol{Maxwell}$ として現れること，

*5

*5　電磁気の重要な点の予告

(3) 静止している点電荷に対する ***Maxwell*** の構造，(4) 運動している点電荷に対する同じ問題，(5) 短い加速の瞬間を除いて一様に運動している電荷の場の性質，(6) 振動している電気双極子の場に対する ***Faraday*** の構造，(7) 外微分の概念，(8) 形式の言葉で書かれた Maxwell の方程式，そして (9) 1–形式 $\boldsymbol{A}$（これから Liénard–Wiechert の 2–形式 $\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{dA}$ によって計算できる）を用いた，平坦な時空での Maxwell の方程式の解.

*6 2–形式は，図 4.1 に示されているように，任意の "方向づきの 2–面"（"循環の向き" が記されている 2–面）から数（"切断された管の正味の数"）をつくる機械である.

$$(\text{切断された管の数}) = \int_{\text{面}} \boldsymbol{F} \tag{4.12}$$

*7 たとえば，2–形式が図 4.1 に示されているものとする.

$$\boldsymbol{F} = B_x \boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}z$$

そして積分面を 2–球の面上，$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，$t =$ 一定 で，$\theta = 70°$ と $\theta = 110°$ の間，そして $\varphi = 0°$ と $\varphi = 90°$ の間（"回帰線の大西洋の領域"）の部分とする．次のように書く.

$$\begin{aligned}
&y = a \sin\theta \sin\varphi, \\
&z = a\cos\theta, \\
&\boldsymbol{d}y = a(\cos\theta \sin\varphi\, \boldsymbol{d}\,\theta + \sin\theta\ \cos\varphi\, \boldsymbol{d}\,\varphi), \\
&\boldsymbol{d}z = -a\sin\theta \boldsymbol{d}\,\theta, \\
&\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z = a^2 \sin^2\theta \cos\varphi\ \boldsymbol{d}\,\theta \wedge \boldsymbol{d}\,\varphi
\end{aligned} \tag{4.13}$$

構造 $\boldsymbol{d}\theta\wedge\boldsymbol{d}\theta$ は "潰れた卵の木枠"（図 1.4，上の右）のようにみえ，そして中身はゼロである．$\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\alpha}$ が，$\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ が同じときはゼロであることから，形式的に明白な事実である．積分の結果は，一定の B_x を仮定して

$$\int_{\text{面}} \boldsymbol{F} = a^2 B_x \int_{70°}^{110°} \sin^2\theta\, d\theta \int_{0°}^{90°} \cos\varphi\, d\varphi \tag{4.14}$$

である.

電場だけをその 2–形式 $\boldsymbol{F}$（図 4.4，左）で視覚化することは，磁場だけをその 2–形式 $\boldsymbol{F}$（図 4.1，4.2，4.3）で視覚化するほど容易でない．2 つの場をもっとほとんど同じ資格で取り扱う方法はないだろうか？ ある $\boldsymbol{F}$ に双対な（"垂直な"，コラム 4.3，練習問題 3.14）2–形式 $^*\boldsymbol{F}$（図 4.4，右）をつくれ.

原点に静止している強さ e の点電荷の場を幾何学的な形式で表せ．極座標をもつ平坦な空間で作業せよ.

$$\begin{aligned}
ds^2 = -d\tau^2 &= g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \\
&= -dt^2 + dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2
\end{aligned} \tag{4.15}$$

*6 切断された管の数を生み出す機械としての 2–形式

*7 切断された管の数を 1 例で計算する

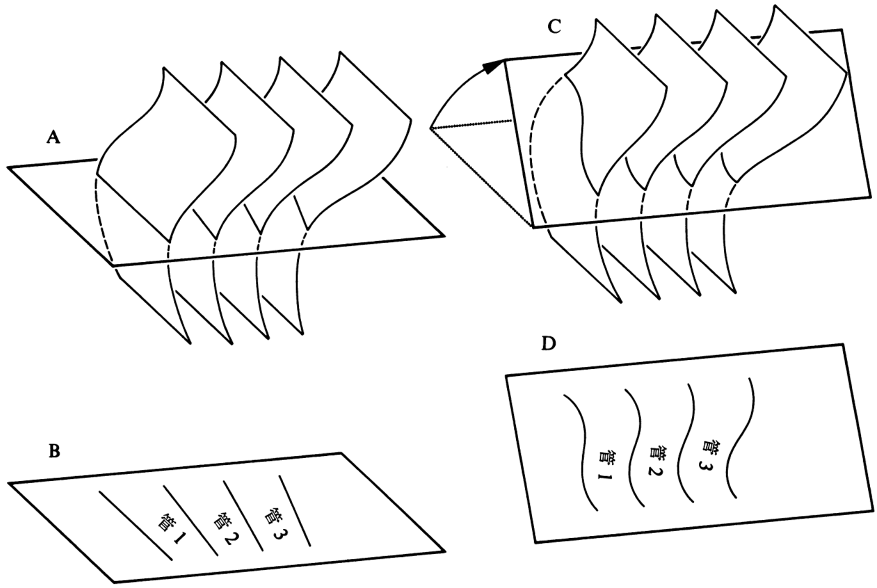


図 **4.3** ***Faraday***，電磁気の 2–形式，幾何学の対象，すべての時空に広く行きわたる管の蜂の巣（"蜂の巣"は抽象的な意味でコラム 4.2 でより正確に詳しく説明されている）を貫通する空間的な薄片群．製図における面は 2–形式（蜂の巣）のようにみえない，なぜなら蜂の巣をつくり上げる 2 番目の面の群は製図から削除されている空間方向に伸びているからである．図 A は 2–形式を貫通する 1 個の空間的な薄片を示している（時間は図で上方に増大する）．図 B では，2–形式のこの空間的な超曲面への射影がこの 3 次元幾何学における磁気力の Faraday 管を与える（もし削除された次元が復活されたならば，管は線と線との間の溝でない，管であるだろう）．図 C は別な空間的な薄片（異なる Lorentz 系の観測者に対して同時の超曲面）を示している．図 D はこの基準系における磁力管の非常に異なるパターンを示している．磁力管は終わってはいけないという要求（$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$）は，***Faraday*** を貫通するすべての空間的な薄片に対して何度も繰り返されており，いたるところで結果 $\partial\boldsymbol{B}/\partial t=-\nabla\times\boldsymbol{E}$ を与える．こうして (静磁気学) + (共変性)⟶(磁気力学)．同様に—17 および 21 章をみよ—(静幾何学) + (共変性)⟶(幾何力学)．

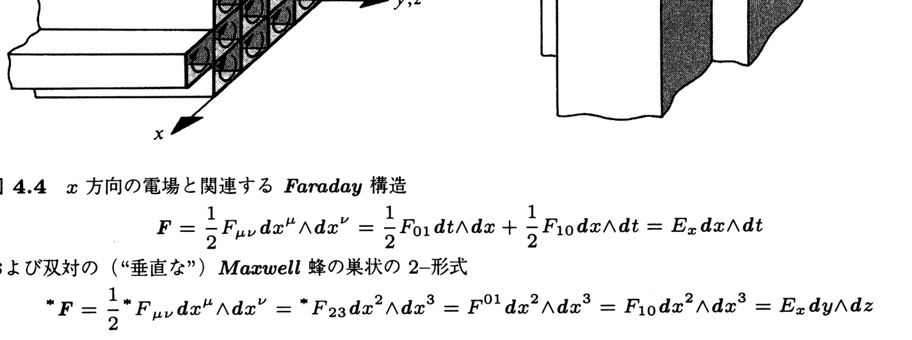


図 **4.4** x 方向の電場と関連する ***Faraday*** 構造

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\boldsymbol{dx}^{\mu}\wedge\boldsymbol{dx}^{\nu}=\frac{1}{2}F_{01}\boldsymbol{dt}\wedge\boldsymbol{dx}+\frac{1}{2}F_{10}\boldsymbol{dx}\wedge\boldsymbol{dt}=E_x\boldsymbol{dx}\wedge\boldsymbol{dt}$$

および双対の（"垂直な"）***Maxwell*** 蜂の巣状の 2–形式

$$^{*}\boldsymbol{F}=\frac{1}{2}{}^{*}F_{\mu\nu}\boldsymbol{dx}^{\mu}\wedge\boldsymbol{dx}^{\nu}={}^{*}F_{23}\boldsymbol{dx}^{2}\wedge\boldsymbol{dx}^{3}=F^{01}\boldsymbol{dx}^{2}\wedge\boldsymbol{dx}^{3}=F_{10}\boldsymbol{dx}^{2}\wedge\boldsymbol{dx}^{3}=E_x\boldsymbol{dy}\wedge\boldsymbol{dz}$$

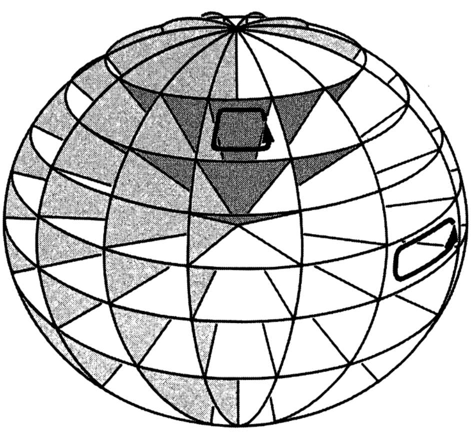


図 **4.5**　原点に静止している電荷 e の電磁場を記述する 2–形式 $\boldsymbol{Maxwell} = {}^*\boldsymbol{F} = e\sin\theta\,\boldsymbol{d}\theta\wedge\boldsymbol{d}\phi$ の場．この図は実際，${}^*\boldsymbol{F}$ と一定時間 t の 3–面，すなわち，時間方向は図から削除されている，との交わりである．

r 方向の電場は $E_r = e/r^2$ であるから，2–形式 $\boldsymbol{F}$ あるいは $\boldsymbol{Faraday}$ は

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\,\boldsymbol{d}x^\mu\wedge\boldsymbol{d}x^\nu = -E_r\,\boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}r = -\frac{e}{r^2}\boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}r \tag{4.16}$$

*8　である．その双対は，練習問題 3.14 の処方に従って，図 4.5 に示されているように，$\boldsymbol{Maxwell}$ である．

$$\boldsymbol{Maxwell} = {}^*\boldsymbol{F} = e\sin\theta\,\boldsymbol{d}\theta\wedge\boldsymbol{d}\varphi \tag{4.17}$$

図 4.5 に示されている球面上の領域の周りを正の向きに 1 周せよ．経路に取り囲まれた ${}^*\boldsymbol{F}$ の管の数は正確に

$$(\text{管の数}) = e(\text{立体角})$$

全球面に現れる ${}^*\boldsymbol{F}$ の管の総数は，力管の Faraday 描像と一致して，$4\pi e$ となるだろう．

*9　一様な速度で運動している荷電粒子に関係する管の構造はどのように決めることができるか？　まず，${}^*\boldsymbol{F}$ を粒子とともに動いている直交座標（この共運動している“ロケット”基準系でのバーつきの座標，バーのついていない座標は後で実験室系に対して使われる）で表せ．相当する段階のリストをつくることができる．

(a)　$${}^*\boldsymbol{F} = e\sin\bar\theta\,\boldsymbol{d}\bar\theta\wedge\boldsymbol{d}\bar\varphi = -e(\boldsymbol{d}\cos\bar\theta)\wedge\boldsymbol{d}\bar\varphi$$

(b)　$$\bar\varphi = \arctan\frac{\bar y}{\bar x}, \qquad \boldsymbol{d}\bar\varphi = \frac{\bar x\,\boldsymbol{d}\bar y - \bar y\,\boldsymbol{d}\bar x}{\bar x^2 + \bar y^2}$$

(c)　$$\cos\bar\theta = \frac{\bar z}{\bar r}, \qquad -\boldsymbol{d}(\cos\bar\theta) = \frac{-\boldsymbol{d}\bar z}{\bar r} + \frac{\bar z}{\bar r^3}(\bar x\,\boldsymbol{d}\bar x + \bar y\,\boldsymbol{d}\bar y + \bar z\,\boldsymbol{d}\bar z)$$

(d) 以上を結合して次式が見出される．

$${}^*\boldsymbol{F} = (e/\bar r^3)(\bar x\,\boldsymbol{d}\bar y\wedge\boldsymbol{d}\bar z + \bar y\,\boldsymbol{d}\bar z\wedge\boldsymbol{d}\bar x + \bar z\,\boldsymbol{d}\bar x\wedge\boldsymbol{d}\bar y) \tag{4.18}$$

---

*8　静止している点電荷に対する双対構造 $\boldsymbol{Maxwell}$ での管のパターン

*9　運動している点電荷の場

コラム 4.3　時空での 2–形式の双対

一般的な 2–形式（6 個の外積あるいはくさび積を含む）が与えられている．

$$\boldsymbol{F} = E_x\, \boldsymbol{dx}\wedge\boldsymbol{dt} + E_y\, \boldsymbol{dy}\wedge\boldsymbol{dt} + \cdots + B_z\, \boldsymbol{dx}\wedge\boldsymbol{dy}$$

その双対（“垂直な”）は，次の処方で得られる．

$$^{*}\boldsymbol{F} = -B_x\, \boldsymbol{dx}\wedge\boldsymbol{dt} - \cdots + E_y\, \boldsymbol{dz}\wedge\boldsymbol{dx} + E_z\, \boldsymbol{dx}\wedge\boldsymbol{dy}$$

双対回転

双対の双対は元の 2–形式の負の値であることに注意せよ．こうして

$$^{**}\boldsymbol{F} = -E_x\, \boldsymbol{dx}\wedge\boldsymbol{dt} - \cdots - B_z\, \boldsymbol{dx}\wedge\boldsymbol{dy} = -\boldsymbol{F}$$

この意味で * は虚数 i と同じ性質（$** = ii = -1$）をもっている．こうしてわれわれは次のように書くことができる．

$$e^{*\alpha} = \cos\alpha + {}^{*}\sin\alpha$$

この操作は，$\boldsymbol{F}$ に適用すると，そのもっとも単純な表示（練習問題 4.1 をみよ）での本来の 2–形式

$$\boldsymbol{F} = E_x\, \boldsymbol{dx}\wedge\boldsymbol{dt} + B_x\, \boldsymbol{dy}\wedge\boldsymbol{dz}$$

から他の “双対回転された電磁場”

$$e^{*\alpha}\boldsymbol{F} = (E_x\cos\alpha - B_x\sin\alpha)\boldsymbol{dx}\wedge\boldsymbol{dt} + (B_x\cos\alpha + E_x\sin\alpha)\boldsymbol{dy}\wedge\boldsymbol{dz}$$

へ注意を向ける．もし元の場が Maxwell の空の空間の場の方程式を満たすならば，新しい場も同じ方程式を満たす．“コンプレクション（complexion）” α を適当に選べば，時空の任意点での 2 つのくさび積の 1 つをなくして他のくさび積に対して

$$({B_x}^2 + {E_x}^2)^{1/2}\boldsymbol{dy}\wedge\boldsymbol{dz}$$

をもつことができる．

(共運動している直交座標系での点電荷の電磁場，球対称である.) さて実験室系の座標に変換する．

$$\text{速度パラメータ } \alpha$$

$$\text{速度} \beta = \tanh\alpha$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cosh\alpha, \qquad \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sinh\alpha$$

(a)
$$\begin{cases} \bar{t} = t\cosh\alpha - x\sinh\alpha, \\ \bar{x} = -t\sinh\alpha + x\cosh\alpha, \\ \bar{y} = y, \qquad \bar{z} = z \end{cases}$$

(b)
$$\bar{r} = [(x\cosh\alpha - t\sinh\alpha)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$$

(c)
$$\begin{aligned} {}^*\boldsymbol{F} = (e/\bar{r}^3)[&(x\cosh\alpha - t\sinh\alpha)\boldsymbol{dy}\wedge\boldsymbol{dz} + y\,\boldsymbol{dz}\wedge \\ &(\cosh\alpha\, dx - \sinh\alpha\,\boldsymbol{dt}) + z(\cosh\alpha\,\boldsymbol{dx} - \sinh\alpha\,\boldsymbol{dt})\wedge\boldsymbol{dy}] \end{aligned} \tag{4.19}$$

(d) 一般的な双対 2–形式と比較する．

$$\begin{aligned} {}^*\boldsymbol{F} = E_x\,\boldsymbol{dy}\wedge\boldsymbol{dz} + E_y\,\boldsymbol{dz}\wedge\boldsymbol{dx} + E_z\,\boldsymbol{dx}\wedge\boldsymbol{dy} \\ + B_x\,\boldsymbol{dt}\wedge\boldsymbol{dx} + B_y\,\boldsymbol{dt}\wedge\boldsymbol{dy} + B_z\,\boldsymbol{dt}\wedge\boldsymbol{dz} \end{aligned}$$

そして求めるべきそれぞれの場の成分を得る．

(e)
$$\begin{cases} E_x = (e/\bar{r}^3)(x\cosh\alpha - t\sinh\alpha), & B_x = 0, \\ E_y = (e/\bar{r}^3)y\cosh\alpha, & B_y = -(e/\bar{r}^3)z\sinh\alpha, \\ E_z = (e/\bar{r}^3)z\ cosh\alpha, & B_z = (e/\bar{r}^3)y\sinh\alpha \end{cases} \tag{4.20}$$

不変量

$$\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2 = \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \tag{4.21}$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}{}^*F^{\alpha\beta} \tag{4.22}$$

は実験室系で，当然のことであるが，ロケット系での値と同じ値をもつことを証明できる．微分形式の蜂の巣構造はロケット系から実験室系へ移っても変わらないことに注意せよ．変わるのは不変量を記述する数学公式だけである．

4.4　放　射　場

一様運動している電荷に関連する管の ***Maxwell*** 構造は，一見して考えられる以上に注目すべきであり，それは運動方向に管が Lorentz 収縮するだけでない．管はそれが集中している電荷と軍隊なみに歩調を合わせて任意に遠くまで動き，これは “今現在” の電荷から “放射された” 情報が “今現在” の遠くの管に達する時間がないという事実にかかわらず行われる．したがって，遠くの管の “今現在” の構造は，直線軌道上を一様運動している過去の瞬間の電荷に由来しなければならない．この事情は，電荷が短い時間 $\Delta\tau$ の間に，1つの一様な速度から他の一様な速度へ急に変化した結果，場に生ずるものほど明瞭に示さ

*10

*10　加速度はいかに放射を引き起こすか

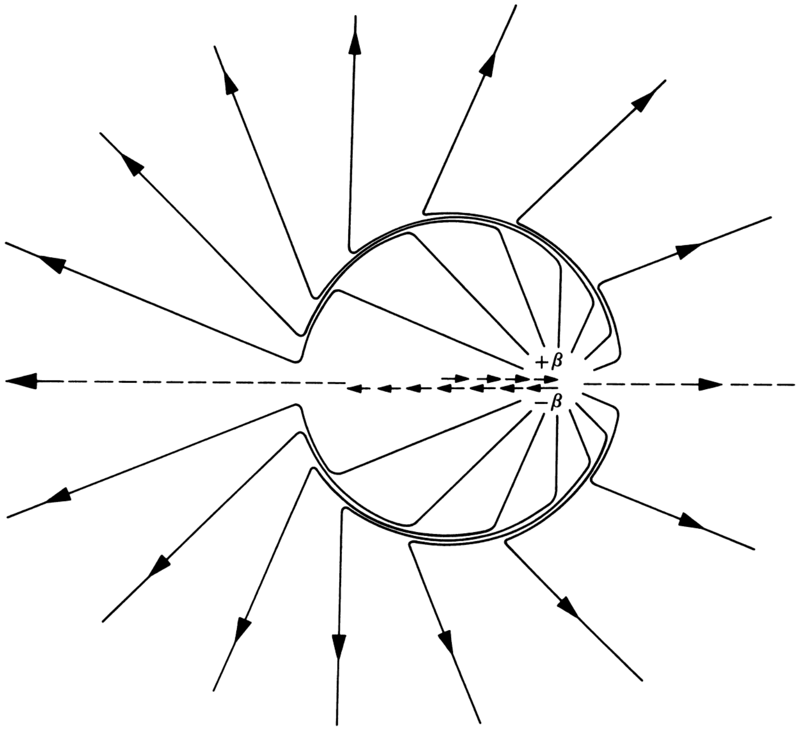


図 4.6 放射の構成. 電磁波の強さはなぜ距離 r の 1 次の逆べきとしてのみ落下するか，そして波の振幅はなぜ（低い速度に対して）$\sin\theta$（加速度の線に垂直な平面内で最大）のように変化するかを理解する J.J. Thomson の方法．電荷は一様な速度で左に動いていた．電荷からはるかに離れたところでは，力線はあたかもこの一様な速度が永久に続いていくようであったかのように動き続ける（遅い運動をしている点電荷の Coulomb 場）．しかし，より接近したところに近づくと場は一様な速度で右に動いている点電荷の場である（強さの距離への $1/r^2$ 依存性）．1 つの場のパターンから別な場のパターンへの変化は，加速度の点からの距離 r に位置する厚さ $\Delta\tau$ の殻に閉じ込められている（“伸張因子” $r\sin\theta\ \Delta\beta/\Delta\tau$ による場の拡大，本文をみよ）．われわれはこの図の構成に対して C. Teitelboim に感謝する．

れるものはない（図 4.6）．管は 2 つの運動状態に対して標準的なパターン半径 r の球内の 1 つのパターンと球外の他のパターンをもっている．ここに r は加速度が生じてからの時間の経過（“光の進行時間に相当する距離 cm”）に等しい．この 2 つのパターンが，厚さ $\Delta r = \Delta\tau$ の干渉領域で合致しなければならないことから，場には r に比例する “伸び幅の因子” を掛けなければならなくなる．この因子が，放射力が距離の 1 次に逆比例して減少する（図 4.6）というよく知られた事実の原因となっている．

電荷が絶えず運動状態を変えるときには，電磁場の構造は図 4.6 に示されたものと同じ
*11 単純な原理に基づくけれども，より複雑にみえる．以下は z 軸に平行に上下に振動する大きさ p_1 の電気双極子の場に対する ***Faraday*** 2–形式である．

$$\boldsymbol{F} = E_x\,\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}t + \cdots + B_x\,\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z + \cdots = \{p_1 e^{i\omega r - i\omega t}$$
$$\underbrace{[2\cos\theta\left(\frac{1}{r^3} - \frac{i\omega}{r^2}\right)\boldsymbol{d}r\wedge\boldsymbol{d}t}_{E_r\text{を与える}} + \underbrace{\sin\theta\left(\frac{1}{r^3} - \frac{i\omega}{r^2} - \frac{\omega^2}{r}\right)r\,\boldsymbol{d}\theta\wedge\boldsymbol{d}t}_{E_\theta\text{を与える}}$$

*11 振動する双極子の場

$$+\underbrace{\sin\theta\left(\frac{-i\omega}{r^2}-\frac{\omega^2}{r}\right)}_{B_\varphi\text{を与える}}\boldsymbol{d}r\wedge r\,\boldsymbol{d}\theta]\}\text{ の実数部分} \tag{4.23}$$

そして双対 2–形式 $\boldsymbol{Maxwell} = {}^*\boldsymbol{F}$ は

$$\begin{aligned}{}^*\boldsymbol{F} &= -B_x\,\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}t - \cdots + E_x\,\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z + \cdots = \{p_1 e^{i\omega r - i\omega t} \\ &\underbrace{[\sin\theta\left(\frac{-i\omega}{r^2}-\frac{\omega^2}{r}\right)}_{B_\varphi\text{を与える}}\boldsymbol{d}t\wedge r\;\sin\theta\,\boldsymbol{d}\varphi \\ &\underbrace{+2\cos\theta\left(\frac{1}{r^3}-\frac{i\omega}{r^2}\right)}_{E_r\text{を与える}}r\,\boldsymbol{d}\theta\wedge r\sin\theta\,\boldsymbol{d}\varphi \\ &\underbrace{+\sin\theta\left(\frac{1}{r^3}-\frac{i\omega}{r^2}-\frac{\omega^2}{r}\right)}_{E_\theta\text{を与える}}r\;\sin\theta\,\boldsymbol{d}\varphi\wedge\boldsymbol{d}r]\}\text{ の実数部分}\end{aligned} \tag{4.24}$$

4.5 Maxwell の方程式

一般的な 2–形式 $\boldsymbol{F}$ は因子 1/2 をもつくさび積の重ね合せとして記述される.

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\,\boldsymbol{d}x^\mu\wedge\boldsymbol{d}x^\nu \tag{4.25}$$

なぜなら典型的な項は 2 度現れるからである，1 度は $F_{xy}\,\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y$ として，そして 2 度目は $F_{yx}\,\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}x$ として，ここに $F_{yx} = -F_{xy}$，$\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}x = -\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y$.

もし微分（“勾配をとる”，演算子 $\boldsymbol{d}$）がスカラーから 1–形式をつくったとしたら，微分（再び演算子 $\boldsymbol{d}$，しかし今度は一般的に，Cartan の “外微分” という名で知られている）が一般的な 1–形式から 2–形式をつくり，そして 2–形式に適用されると 3–形式をつくり，そして 3–形式に適用されると 4–形式をつくり，時空が収容できる最高次の形式をつくる．一般的な f–形式を

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{1}{f\,!}\phi_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_f}\,\boldsymbol{d}x^{\alpha_1}\wedge\boldsymbol{d}x^{\alpha_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{d}x^{\alpha_f} \tag{4.26}$$

と書く．ここに係数 $\phi_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_f}$ は，後に続くくさび積と同じく，任意の 2 つの添字の交換に対して反対称である．そうすると，$\boldsymbol{\phi}$ の外微分は [*12]

$$\boldsymbol{d\phi} \equiv \frac{1}{f\,!}\frac{\partial\phi_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_f}}{\partial x^0}\boldsymbol{d}x^{\alpha_0}\wedge\boldsymbol{d}x^{\alpha_1}\wedge\boldsymbol{d}x^{\alpha_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{d}x^{\alpha_f} \tag{4.27}$$

である．

Faraday の外微分をこの規則に従ってとり，双極子振動子の特別な場合だけでなく一般的な電磁場に対しても，それがゼロになることを見出せ．こうして，局所 Lorentz 系に適切な座標で，

*12　外微分をとる

$$\begin{aligned}\boldsymbol{dF} &= \boldsymbol{d}(E_x\,\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}t + \cdots + B_x\,\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z + \cdots)\\ &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\boldsymbol{d}t + \frac{\partial E_x}{\partial x}\boldsymbol{d}x + \frac{\partial E_x}{\partial y}\boldsymbol{d}y + \frac{\partial E_x}{\partial z}\boldsymbol{d}z\right)\wedge\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}t\\ &\quad + \cdots(\text{さらに 5 個の, それぞれ 4 項からなるこのような集合})\cdots \end{aligned} \tag{4.28}$$

$\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z$ のような項は自動的にゼロになる（"卵の木枠のセルは踏みつけられるとつぶれる"）．ゼロにならない項を集めて

$$\begin{aligned}\boldsymbol{dF} = &\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z\\ &+ \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z\\ &+ \left(\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}x\\ &+ \left(\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y \end{aligned} \tag{4.29}$$

を見出せ．この表現の各項は Maxwell の方程式

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

および

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{E} = \nabla\times\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}}$$

からよく知られている．各項はゼロになる，そしてこのことから ***Faraday*** 自身ゼロ外微分をもつことがわかる．

$$\boldsymbol{dF} = 0 \tag{4.30}$$

*13 言い換えれば，"***Faraday***は閉じた 2–形式である"，"$\boldsymbol{F}$の管はどこにも終点をもたない"．

同様の計算は双対の 2–形式 ***Maxwell*** の外微分に対して次の結果を与える．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}{}^*\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{d}(-B_x\,\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}t - \cdots + E_x\,\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z + \cdots)\\ &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z\\ &\quad + \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z\\ &\quad + \cdots\\ &= 4\pi(\rho\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z\\ &\quad - J_x\boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z\\ &\quad - J_y\boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}x\\ &\quad - J_z\boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y) = 4\pi\,{}^*\boldsymbol{J},\end{aligned}$$

*14 $$\boldsymbol{d}{}^*\boldsymbol{F} = 4\pi\,{}^*\boldsymbol{J} \tag{4.31}$$

*13 ***Faraday***の構造：管はどこにも終点をもたない

*14 ***Maxwell*** の構造：電荷–電流 3–形式で与えられる管密度の終点

空っぽの空間ではこの外微分もまた，ゼロである．そこでは ***Maxwell*** は閉じた 2–形式である．$^*\boldsymbol{F}$ の管は，$\boldsymbol{F}$ の管と同じく，どこにも終点をもたない．

電荷が存在する領域では，事情は変わる．***Maxwell*** の管はこのような領域ではその起源をもつ．終わりの部分の密度は，3–形式 $^*\boldsymbol{J}$ = **電荷**，世界線の束に沿って集められた "卵の木枠のセルの集合" で記述される．

2つの式

$$\boldsymbol{dF} = 0$$

および

$$\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F} = 4\pi\, ^*\boldsymbol{J}$$

は Maxwell の方程式の全内容を幾何学的な言葉で要約する．形式 $\boldsymbol{F}$ = ***Faraday***，および $^*\boldsymbol{F}$ = ***Maxwell*** は，希望する任意の座標で—あるいは座標を含む任意の基準によらない言葉（蜂の巣および卵の木枠構造）で記述できる．驚くべきは，いずれの式もどのような文字にも関係しない．Hermann Weyl はもっともはっきりと強調した一人であるが，形式と外微分の概念は計量に関係しない（8章と9章をもみよ）．計量は1つの場所，$\boldsymbol{F}$ から双対構造 $^*\boldsymbol{F}$ へ注意を移した双対（"直交"）の概念においてのみ現れた．

4.6　外微分と閉じた形式

"蜂の巣" と "卵の木枠" という言葉は，電気力学に付随する幾何学に対して何らかの感触を与えたであろう．さて，これらの概念をより明瞭に説明し，そして電気力学を主題として，"外微分" という意味を幾何学的な言葉で例示する．境界の周りを進もう．よろしい．しかし，どのように，そしてなぜ，そしてどんな結果がもたらされるか？　関数および1–形式に戻り，それらおよび2–形式 ***Faraday*** と ***Maxwell*** および3–形式 **電荷** を秩序のある連鎖の部分とみることは役に立つ（コラム 4.4 をみよ）．2つの形式はこのコラムでは2種類のものと考えられている．(1) "閉じた" 2–形式として知られる特別な2–形式は次の性質をもっている．閉じた2–面に入る管の数だけそこから現れる（2–形式の外微分はゼロである．それから導かれる3–形式はとるに足らないゼロ3–形式にほかならない!）．そして (2) 閉じた2–面を横切ってゼロでない正味の数の管を送り，したがって意味のある3–形式（"2–形式の外微分"）の定義を可能にする一般的な2–形式，それはどの閉じた2–面でも，同じ閉じた2–面から生まれる2–形式の管の正味の数と正確に同数の卵の木枠のセルをもつ（Faraday の力管の概念の，平坦と同じく曲がった時空世界への拡張）．

*15　双対：電磁気学で計量が入らなければならない唯一の場所

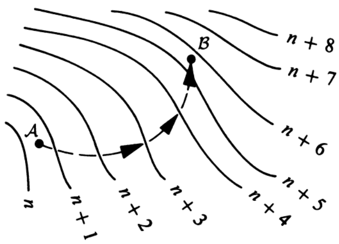
*16　閉じた 2–形式と一般的な 2–形式との対照

コラム 4.4　形式と外微分の連鎖

0–形式あるいはスカラー，f

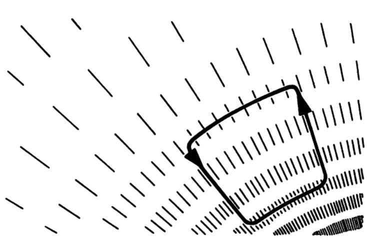
3–空間で Newton 物理学の状況での一例は温度，$T(x,y,z)$ であり，時空の状況での一例はスカラーポテンシャル，$\phi(t,x,y,z)$ である．

スカラーから 1–形式へ



スカラー f の勾配あるいは "外微分" をとり，特別な 1–形式，$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{d}f$ を得る．成分：(a) f に含まれる任意の付加定数は微分の過程で消される．上図の量 n は未知であり，そして無関係である．(b) 1–形式 $\boldsymbol{\gamma}$ は，1 つの領域の面が近傍の領域の面と "調和する" という意味で特別である（"閉じた 1–形式"）．(c) 線積分 $\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \boldsymbol{d}f$ は，連続的な変形のもとで同等な経路の任意の組に対して，経路に無関係である．(d) 1–形式は変位（接線ベクトルという概念への近似）から数（おのおのの整数の面が貫かれるとき "ベルがゴーンと鳴る音の数"）をつくる機械である．

一般的な 1–形式 $\boldsymbol{\beta} = \beta_\alpha \boldsymbol{d}x^\alpha$

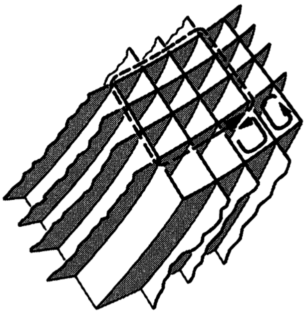


これは上図に示されているように，面のパターンである．つまり，ベクトルから数（"ベルがゴーンと鳴る音" $\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{u} \rangle$）をつくる機械である．1–形式は座標のあらゆる選択に無関係に空間内で実在性と位置をもつ．面は通常はかみ合わない．示されている閉じたループに沿う積分 $\int \boldsymbol{\beta}$ はゼロを与えない（"ゴーンという音の数がその反音の数よりも多い"）．

1–形式から 2–形式 $\xi = \boldsymbol{d\beta} = \frac{\partial \beta_\alpha}{\partial x^\mu} \boldsymbol{d}x^\mu \wedge \boldsymbol{d}x^\alpha$ へ

$\boldsymbol{\xi}$ は蜂の巣状セルのパターンで，各セルはその上に記しつけられた循環の方向をもっている．点線の閉じた経路で取り囲まれたセルの数が上の $\boldsymbol{\beta}$ の図の同じ経路に対する正味の寄与（反音の数を超えた音の数）に同じになるように配置されている．"外微分" はこれがそうなるように**定義されている**．一般化された Stokes の定理はこれを体系化している．"外" という言葉は，経路が解析している領域の周囲を回るということから生じている．こうして 2–形式はその上に循環の向きが記しつけられた少量の

面（$u \wedge v$）から数（管の数 $\langle \xi, u \wedge v \rangle$）を得る機械である．このように定義された 2–形式は次の意味で特別である．点線の曲線あるいは任意の他の閉じた曲線で “縁の周りを支えられた” ゴムの面は，(a) それが中央でふくらんでいる，(b) それが中央でへこんでいる，(c) それが他の別な連続的な変形をしているとき，同じ数の管で貫かれている．***Faraday*** あるいは電磁気学の 2–形式 $\boldsymbol{F}$ はつねに $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{dA}$（$\boldsymbol{A} = 4$–ポテンシャル，1–形式）として表され，つねにこの特別な性質（“管の保存”）をもっている．

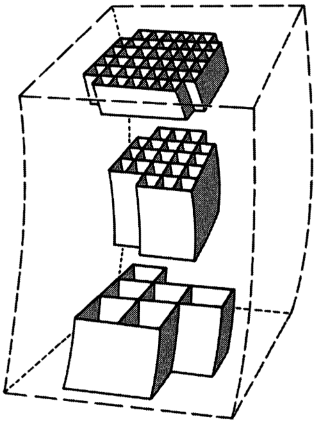


0–形式から 1–形式へ，さらに 2–形式へ？　否！

スカラー f から 1–形式 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{d}f$ へ行く．2–形式 $\boldsymbol{\alpha}$ への次の段階は内容が乏しい．点線の閉じた経路に沿う線積分 $\int \boldsymbol{\gamma}$ の正味の寄与は自動的にゼロである．そのゼロの結果を再現するにはゼロの 2–形式が要求される．こうして $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{d\gamma} = \boldsymbol{dd}f$ はゼロの 2–形式でなければならない．この結果は一般的な結果 $\boldsymbol{dd} = 0$ の特殊な例である．

一般的な 2–形式 $\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\boldsymbol{d}x^{\alpha} \wedge \boldsymbol{d}x^{\beta}$，ここに $\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}$

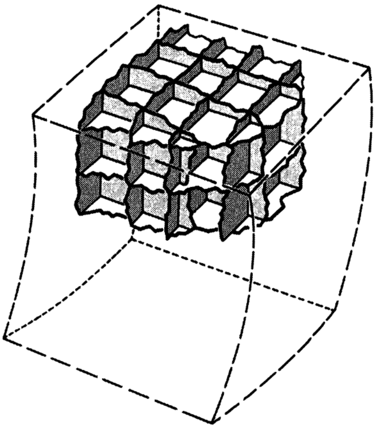
再び，これは蜂の巣状構造であり，そして，その上に記された循環の向きをもつ面（$u \wedge v$）から数（管の数，$\langle \boldsymbol{\sigma}, u \wedge v \rangle$）を得る機械である．それは，1 つの領域の蜂の巣構造は近傍の領域の蜂の巣構造と通常かみ合わないという意味で一般的である．したがって，上図の点線で示されている箱状の面のような閉じた 2–面は，通常ゼロでない正味の数の管で横切られる．しかし，このような閉じた面から現れる管の正味の数は，2–形式が 1–形式の外微分であるときには正確にゼロである．



2–形式から 3–形式 $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{d\sigma} = \frac{\partial \sigma_{|\alpha\beta|}}{\partial x^{\gamma}} \boldsymbol{d}x^{\gamma} \wedge \boldsymbol{d}x^{\alpha} \wedge \boldsymbol{d}x^{\beta}$ へ，ここに $\boldsymbol{d}x^{\gamma} \wedge \boldsymbol{d}x^{\alpha} \wedge \boldsymbol{d}x^{\beta} \equiv 3!\boldsymbol{d}x^{[\gamma} \otimes \boldsymbol{d}x^{\alpha} \otimes \boldsymbol{d}x^{\beta]}$

この卵の木枠型の構造は体積（体積 $u \wedge v \wedge w$ 内でセルを数える）から数（セルの数 $\langle \boldsymbol{\mu}, u \wedge v \wedge w \rangle$）を得る機械である．より完全な図は各セルと方向づけの指針（2–形式のセルに対して示された循環の矢印に類似した）をもつ積分の体積を与えるだろう．セルの勘定に対する，与えられたセルの寄与は方向づけの指針が同じ向きをもつか反対の向きをもつかに従って+1 あるいは −1 である．任意の与えられた体積（点線で

示された体積のような）内の $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{d\sigma}$ の卵の木枠のセルの数は，その体積から現れる 2–形式 $\boldsymbol{\sigma}$（前ページの図）の管の正味の数と正確に同じ数を与えるように適応している（一般化された Stokes の定理）．電磁気学に対しては，***Faraday*** あるいは 2–形式 $\boldsymbol{F}$ の外微分はゼロの 3–形式を与える，しかし，***Maxwell*** あるいは 2–形式 $^*\boldsymbol{F}$ の外微分は電荷の 3–形式 $^*\boldsymbol{J}$ の 4π 倍を与える．



$$
\begin{aligned}
^*\boldsymbol{J} = \rho\, \boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z - J_x\, \boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z \\
-J_y\, \boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}x - J_z\, \boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y
\end{aligned}
$$

1–形式から 2–形式へ，さらに 3–形式へ？　否！

1–形式（電磁気的な 4–ポテンシャル）から出発して，その外微分，2–形式 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{A}$(***Faraday***) をつくる．この蜂の巣状構造内の管は決して終わりをもたない．したがって任意の体積要素内で終わる管の数，そしてそれとともに 3–形式 $\boldsymbol{dF} = \boldsymbol{ddA}$ は，自動的にゼロである．これは $\boldsymbol{dd} = 0$ という一般的な結果の別な例である．

2–形式から 3–形式へ，さらに 4–形式へ？　否！

2–形式 $^*\boldsymbol{F}$(***Maxwell***) から出発して，その外微分，3–形式 $4\pi\, ^*\boldsymbol{J}$ をつくる．この卵の木枠型の構造でのセルは 4 番目の次元（“超管”）に延びる．任意の 4–体積要素に終わるこれらの超管の数と，4–形式

$$\boldsymbol{d}(4\pi\, ^*\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{dd}^*\boldsymbol{F}$$

は自動的にゼロであり，$\boldsymbol{dd} = 0$ という一般的な結果のさらに別な例である．この結果は次のことを述べている．

$$\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{J} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right) \boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z = 0$$

（“電荷の保存則”．）

$$\boldsymbol{d}x^\alpha\wedge\boldsymbol{d}x^\beta\wedge\boldsymbol{d}x^\gamma\wedge\boldsymbol{d}x^\delta \equiv 4!\, \boldsymbol{d}x^{[\alpha}\otimes\boldsymbol{d}x^\beta\otimes\boldsymbol{d}x^\gamma\otimes\boldsymbol{d}x^{\delta]}$$

に注意．これは $\boldsymbol{d}t\wedge\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z = \boldsymbol{\varepsilon}$ を意味する．

3–形式から 4–形式 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{d\nu} = \frac{\partial \nu_{|\alpha\beta\gamma|}}{\partial x^\delta} \boldsymbol{dx}^\delta \wedge \boldsymbol{dx}^\alpha \wedge \boldsymbol{dx}^\beta \wedge \boldsymbol{dx}^\gamma$ へ

この 4 次元の "超卵の木枠" 型の構造は 4–体積 $\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}$ から数（セルの数 $\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}\rangle$）を得る機械である．

4–形式から 5–形式へ？　否！

時空は，4 次元であるから，5 次元の卵の木枠構造を収容できない．少なくとも

$$\boldsymbol{dx}^\alpha \wedge \boldsymbol{dx}^\beta \wedge \boldsymbol{dx}^\gamma \wedge \boldsymbol{dx}^\delta \wedge \boldsymbol{dx}^\varepsilon$$

における 2 つの $\boldsymbol{dx}^\mu$ は同じでなければならない．したがって，"$\wedge$" の反対称により，この "基底 5–形式" はゼロにならなければならない．

外微分の結果，要約

0–形式	f				
1–形式	$\boldsymbol{d}f$	$\boldsymbol{A}$			
2–形式	$\boldsymbol{dd}f \equiv 0$	$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{dA}$	$^*\boldsymbol{F}$		
3–形式		$\boldsymbol{dF} = \boldsymbol{ddA} \equiv 0$	$4\pi\,^*\boldsymbol{J} = \boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{\nu}$	
4–形式			$\boldsymbol{d}(4\pi\,^*\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{dd}^*\boldsymbol{F} \equiv 0$	$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{d\nu}$	$\boldsymbol{\mu}$
5–形式?	否！			$\boldsymbol{dT} \equiv 0$	$\boldsymbol{d\mu} \equiv 0$

双対をとることにより古い形式から新しい形式を得る（練習問題 3.14 をみよ）

スカラー f の双対は 4–形式である：$^*f = f\boldsymbol{dx}^0\wedge\boldsymbol{dx}^1\wedge\boldsymbol{dx}^2\wedge\boldsymbol{dx}^3 = f\boldsymbol{\varepsilon}$

1–形式 $\boldsymbol{J}$ の双対は 3–形式である：

$$^*\boldsymbol{J} = J^0\boldsymbol{dx}^1\wedge\boldsymbol{dx}^2\wedge\boldsymbol{dx}^3 - J^1\boldsymbol{dx}^2\wedge\boldsymbol{dx}^3\wedge\boldsymbol{dx}^0 + J^2\boldsymbol{dx}^3\wedge\boldsymbol{dx}^0\wedge\boldsymbol{dx}^1 - J^3\boldsymbol{dx}^0\wedge\boldsymbol{dx}^1\wedge\boldsymbol{dx}^2$$

2–形式 $\boldsymbol{F}$ の双対は 2–形式である：$^*\boldsymbol{F} = F^{|\alpha\beta|}\varepsilon_{\alpha\beta|\mu\nu|}\boldsymbol{dx}^\mu\wedge\boldsymbol{dx}^\nu$，ここに

$$F^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\lambda}\eta^{\beta\delta}F_{\lambda\delta}$$

3–形式 $\boldsymbol{K}$ の双対は 1–形式である：

$$^*\boldsymbol{K} = K^{012}\boldsymbol{dx}^3 - K^{123}\boldsymbol{dx}^0 + K^{230}\boldsymbol{dx}^1 - K^{301}\boldsymbol{dx}^2$$

ここに　$K^{\alpha\beta\gamma} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\eta^{\gamma\lambda}K_{\mu\nu\lambda}$

4–形式 $\boldsymbol{L}$ の双対はスカラーである：$\boldsymbol{L} = L_{0123}\boldsymbol{dx}^0\wedge\boldsymbol{dx}^1\wedge\boldsymbol{dx}^2\wedge\boldsymbol{dx}^3$,

$$^*\boldsymbol{L} = L^{0123} = -L_{0123}$$

**注意 1：1 つの形式と別な形式間のこの双対の概念は与えられた座標系のベクトル基

底 $\boldsymbol{e}_\alpha$ と **1–形式基底** $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ 間の双対の概念と区別されるべきである．2 つの型の双対は何の関係ももたない！

注意 2： 時空で，双対をとる操作は，2 度適用されると，奇数次の形式に対しては元の形式に戻り，偶数次の形式に対してはその負数に戻る．Euclid 3–空間ではこの操作は次数に関係なく元の形式を再現する．

双対プラス外微分

スカラー ϕ **で始めよ．** その勾配 $\boldsymbol{d}\phi$ は 1–形式である．3–形式 $^*\boldsymbol{d}\phi$ を得るために，その双対をとれ．4–形式 $\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{d}\phi$ を得るために，その外微分をとれ．スカラー $\Box\phi \equiv -^*\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{d}\phi$ を得るために，その双対をとれ．添字の操作により $\Box$ は，ここで定義されているように，波動演算子であることを確かめよ．すなわち，任意の Lorentz 系で，$\Box\phi = \phi_{,\alpha}{}^{,\alpha} = -(\partial^2\phi/\partial t^2) + \nabla^2\phi$.

1–形式 $\boldsymbol{A}$ **で始めよ．** 2–形式 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{A}$ を得よ．その双対 $^*\boldsymbol{F} = {}^*\boldsymbol{d}\boldsymbol{A}$，また 2–形式をとれ．その外微分をとると，3–形式 $\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F}$（電磁気学で $4\pi{}^*\boldsymbol{J}$ の値をもつ）を得る．その双対をとれ，1–形式 $^*\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F} = {}^*\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{d}\boldsymbol{A} = 4\pi\boldsymbol{J}$（“電磁気的な 4–ポテンシャルに対する波動方程式”）を得る．添字の記号を用いると次式に帰着する．

$$F_{\mu\nu}{}^{,\nu} = A_{\nu,\mu}{}^{,\nu} - A_{\mu,\nu}{}^{,\nu} = 4\pi J_\mu$$

[さらに詳しくは Flanders (1963) あるいは Misner and Wheeler (1957)，また練習問題 3.17 をみよ．]

4.7 局所的な法則から遠隔作用

微分形式は電磁気論で有力な道具である，しかし完全な力を得るには他の道具も同様に修得することが要求される．遠隔作用の技術（“Green 関数”，“伝播関数”）はとくに重要である．さらに，Maxwell の場の方程式から電磁気的な遠隔作用への移行は，Einstein の局所的な方程式がいかに Newton の $1/r^2$ 法則を（近似的に）再現するかの予告を与える．

平坦な時空でそして Lorentz 座標系で，粒子 A の座標をその固有時 α の関数として表せ．こうして，

$$a^\mu = a^\mu(\alpha), \qquad \frac{da^\mu}{d\alpha} = \dot{a}^\mu(\alpha), \qquad \frac{d^2a^\mu}{d\alpha^2} = \ddot{a}^\mu(\alpha) \tag{4.32}$$

Dirac は，瞬間的にパッと現れパッと消える電荷の重ね合せのような運動に従う電荷 e の
*17 粒子に対する，電荷と電流の分布を表すことは有用であることを発見した．任意のこのような閃きは時空で局所性をもち，それは 4 つの Dirac デルタ関数の積として書ける [たとえば，Schwartz (1950–1951)，Lighthill (1958) をみよ]

*17 パッと現れパッと消える電荷の連続とみなされる電荷の世界線

$$\delta^4(x^\mu - a^\mu) = \delta[x^0 - a^0(\alpha)]\delta[x^1 - a^1(\alpha)]\delta[x^2 - a^2(\alpha)]\delta[x^3 - a^3(\alpha)] \quad (4.33)$$

ここに任意の 1 つの Dirac 関数 $\delta(x)$（幅が無限に狭くなりピークが無限に高くなるときの "記号関数"，"分布"，"Gauss の誤差関数の極限" で，積分値がつねに 1 である）は，(1) $x \neq 0$ に対してゼロ，そして (2) 積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$ をもつ．このような言葉で記述すると，粒子に対する電荷密度–電流のベクトルは値（"閃きの重ね合せ"）

$$J^\mu = e\int \delta^4[x^\nu - a^\nu(\alpha)]\dot{a}^\mu(\alpha)d\alpha \quad (4.34)$$

をもつ．

電荷密度–電流 (4.34) は電磁場，$\boldsymbol{F}$ を与える．$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{dA}$ と書くと，Maxwell の方程式の半分（$\boldsymbol{dF} = \boldsymbol{ddA} \equiv 0$）は自動的に満たされる．

$$F_{\mu\alpha} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} \quad (4.35)$$

平坦な空間では，Maxwell の方程式の残り（$\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F} = 4\pi\, {}^*\boldsymbol{J}$）は

$$\frac{\partial F_\mu{}^\nu}{\partial x^\nu} = 4\pi J_\mu$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} - \eta^{\nu\alpha}\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\nu\, \partial x^\alpha} = 4\pi J_\mu \quad (4.36)$$

となる．4–ポテンシャル A^ν の選択に存在する自由度を用いて

$$\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} = 0 \quad (4.37)$$

(Lorentz ゲージ条件，練習問題 3.17 をみよ)．こうして

*18
$$\Box A_\mu = -4\pi J_\mu \quad (4.38)$$

を得る．

電荷密度–電流は "閃き" の重ね合せであるから，この電荷密度–電流の効果（$\boldsymbol{A}$）は要素的な閃きの効果 E の重ね合せとして表せる．こうして

*19
$$A^\mu(x) = \int E[x - a(\alpha)]\dot{a}^\mu(\alpha)d\alpha \quad (4.39)$$

ここに "要素的な効果" E（"核"，"Green 関数"）は次式を満たす．

$$\Box E(x) = -4\pi\, \delta^4(x) \quad (4.40)$$

1 つの解は "半分前進プラス半分遅延ポテンシャル"，

$$E(x) = \delta(\eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta) \quad (4.41)$$

*18　電磁気的な波動方程式
*19　波動方程式の解

である．それは後方光円錐と前方光円錐上で同じ強さをもち，それ以外のいたるところでゼロである．通常，遅延解がより有用である．

$$R(x) = \begin{cases} 2E(x) & (x^0 > 0 \text{ ならば}) \\ 0 & (x^0 < 0 \text{ ならば}) \end{cases} \tag{4.42}$$

これは，前方光円錐の領域で式（4.41）を 2 倍し，後方光円錐の領域でそれをゼロにすることによって得られる．すべての電気力学（Coulomb 力，Ampère の法則，電磁誘導，放射）はベクトルポテンシャルに対する単純な表現式（4.39）から出る [たとえば，Wheeler and Feynman (1945) と (1949)，また Rohrlich (1965) をみよ].

[練習問題]

4.1　もっとも単純な形式で表された一般的な局所的な電磁場

実験室の Lorentz 系で，電場は $\boldsymbol{E}$ であり，磁場は $\boldsymbol{B}$ である．特別な場合は，(1) 電場のみ（$\boldsymbol{B} = 0$），(2) 磁場のみ（$\boldsymbol{E} = 0$），そして (3) “放射場” あるいは “ヌル場”（$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は大きさが等しく方向が直角である）．(1)，(2)，および (3) 以外のすべての場合は “一般的” である．一般的な場合に，エネルギーの流れの Poynting 密度 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/4\pi$ とエネルギーの密度 $(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2)/8\pi$ を計算せよ．単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向と速度パラメータ α の大きさを，エネルギーの流れのエネルギー密度に対する比で定義せよ．

$$\boldsymbol{n} \tanh 2\alpha = \frac{2\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2}$$

同じ電磁場を $\boldsymbol{n}$ の方向に速度パラメータ α（2α でない．因子 2 は，エネルギーの流れとエネルギー密度がベクトルの成分でなくテンソルの成分であることから生ずる）で動いているロケット系で眺めよ．Lorentz 変換に対する公式（3.23）を用いて，あるいは他の方法で，エネルギー束はロケット系でゼロになる，したがって $\bar{\boldsymbol{E}}$ および $\bar{\boldsymbol{B}}$ は平行であることを示せ．$\bar{\boldsymbol{E}}$ と $\bar{\boldsymbol{B}}$ に共通の方向に $\bar{z}$ 軸をとることを誰も妨げることはできない．このように方向を選ぶと，***Faraday*** は

$$\boldsymbol{F} = \bar{E}_z \boldsymbol{d}\bar{z}\wedge\boldsymbol{d}\bar{t} + \bar{B}_z \boldsymbol{d}\bar{x}\wedge\boldsymbol{d}\bar{y}$$

となる（2 つのくさび積のみが一般的な局所場を表すのに必要である．“正準表示”，1 つの系で成り立てば，任意の系で成り立つ）．

4.2　一般的な局所場の正準表示での 1–形式の選択の自由度

位置ごとの場の変化が無視できるほど小さい領域を取り扱う．正準表示での ***Faraday*** を次の形

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{d}p_I\wedge\boldsymbol{d}q^I + \boldsymbol{d}p_{II}\wedge\boldsymbol{d}q^{II}$$

で書け．ここに p_A（$A = I$ あるいは II）および q^A は時空での位置の関数である．新しい位置のスカラー関数 $p_{\bar{A}}$ および $q^{\bar{A}}$ への “正準変換” を “変換式”

$$p_A\,\boldsymbol{d}q^A = \boldsymbol{d}S + p_{\bar{A}}\,\boldsymbol{d}q^{\bar{A}}$$

によって定義せよ．ここに変換の“生成関数” S は q^A および $q^{\bar{A}}$ の任意の関数である．

$$\boldsymbol{d}S = (\partial S/\partial q^A)\boldsymbol{d}q^A + (\partial S/\partial q^{\bar{A}})\boldsymbol{d}q^{\bar{A}}$$

(a) 2つの p_A および2つの $p_{\bar{A}}$ の S を用いた表現を，変換式の両辺で $dq^I, dq^{II}, dq^{\bar{I}}, dq^{\bar{I}\bar{I}}$ の係数をそれぞれ等しく置くことによって導け．

(b) p_A および $p_{\bar{A}}$ に対するこれらの表現を用いて，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{d}p_A \wedge \boldsymbol{d}q^A$ および $\bar{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{d}p_{\bar{A}} \wedge \boldsymbol{d}q^{\bar{A}}$ は表面上異なっているけれども，実際は1–形式の択一的な集合による1つのしかも同じ2–形式の表現であることを示せ．

4.3　閉じたあるいはカール–フリーの1–形式は勾配である

$\boldsymbol{d\sigma} = 0$ を満たす1–形式 $\boldsymbol{\sigma}$ が与えられているとき，$\boldsymbol{\sigma}$ は $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{d}f$ の形に表されうることを示せ．ここに f はあるスカラーである．この1–形式 $\boldsymbol{\sigma}$ は“カール–フリー”，次の練習問題の“回転フリー”の1–形式（$\boldsymbol{\sigma} = h\,\boldsymbol{d}f$ と表される）よりも1–形式の狭い範疇であると言われ，“回転フリー”の1–形式は今度は“回転をもつ1–形式”（$\boldsymbol{\sigma} = h\,\boldsymbol{d}f$ の形に表されない）の範疇よりも狭い（図4.7をみよ）．1–形式 $\boldsymbol{\sigma}$ が基底1–形式 $\boldsymbol{d}x^\alpha$ で表されるとき，対応する成分 σ_α を掛けると，“カール–フリー”は $\sigma_{[\alpha,\beta]} = 0$ を意味することを示せ．

4.4　回転フリーの1–形式に対する正準表現

3次元で z 軸周りに角速度 ω で回転している剛体は速度成分 $v_y = \omega x$，および $v_x = -\omega y$ をもつ．量，$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v} = \nabla\times\boldsymbol{v}$ は 2ω に等しい z 成分をもち，そしてすべての他の成分はゼロに等しい．こうして $\boldsymbol{v}$ と $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v}$ のスカラー積はゼロである．

$$v_{[i,j}v_{k]} = 0$$

同じ概念は4次元に拡張される．

$$v_{[\alpha,\beta}v_{\gamma]} = 0$$

そして，ある3–形式はゼロにならなければならないという要求

$$\boldsymbol{dv}\wedge\boldsymbol{v} = 0$$

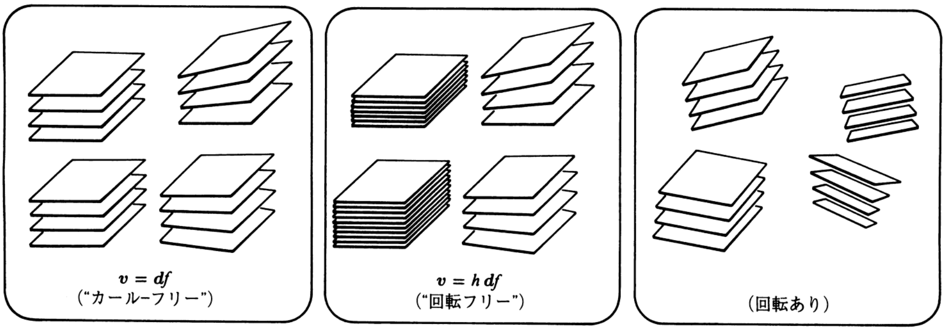


図 4.7　1–形式の若干の単純な型が比較され対照される．

として座標によらない言葉での表現になる．この条件を満たす任意の 1–形式 $\boldsymbol{v}$ は“回転フリー”であると言われる．1–形式は

$$\boldsymbol{v} = h\,\boldsymbol{d}f$$

の形と書けるときに限り回転フリーであることを示せ．ここに h および f は位置のスカラー関数である（“Frobenius の定理”）．

4.5 極の特異性をもつ形式

このような形式はいかに表現されうるかについての主要な結果，たとえば

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \frac{\boldsymbol{d}S}{S}\wedge\boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\theta}_1$$

およびそのおのおのが妥当するための条件をリストにせよ（この練習問題の意味と答えに対しては Lascoux (1968) をみよ）．

4.6 振動している電気双極子の場

振動している電気双極子の電磁場に対して，式 (4.23) および (4.24) に与えられている表現は，いたるところで $\boldsymbol{dF} = 0$ および，原点を除くいたるところで $\boldsymbol{d}^{*}\boldsymbol{F} = 0$ を満たすことを確かめよ．

4.7 2–形式の仕組みがテンソルの仕組みに移される

この練習問題は図 4.1 の説明文の終わりに述べられている．

4.8 Coulomb 場をパンケーキのように表す

図 4.5 は，静止している点電荷の ***Maxwell*** を空間的な薄片，$t =$ 一定 で切った断面を示している．以下の図示ステップによって，電気力線は，動いている Lorentz 系からみると水平方向に圧縮されていることを確かめよ．(1) $\boldsymbol{Maxwell} = {}^{*}\boldsymbol{F}$ を赤道面の薄片 ($\theta = \pi/2$. t, r, φ が変数である）で切った断面図を描け．(2) ***Maxwell*** の全体的な幾何学構造を，種々の Lorentz 系での一定時間に対応するいろいろな空間的な薄片で切った断面図を描け．(3) $\boldsymbol{Maxwell} = {}^{*}\boldsymbol{F}$ とおのおのの Lorentz 系での薄片との交わりを図 4.3 のやり方で解釈せよ．

4.9 面積分の計算

コラム 4.1 で定義

$$\int \boldsymbol{\alpha} = \int \cdots \int \left\langle \boldsymbol{\alpha}, \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda^1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda^p} \right\rangle d\lambda^1 \cdots d\lambda^p$$

が，n 次元空間で p–形式 $\boldsymbol{\alpha}$ の p–面 $\mathcal{P}(\lambda^1, \cdots, \lambda^p)$ 上の積分に対して与えられている．これから，以下の計算法則（コラム 4.1 にも与えられている）が成り立つことを示せ．(1) 面に対する式

$$x^k = x^k(\lambda^1, \cdots, \lambda^p)$$

を $\boldsymbol{\alpha}$ に代入し形式

$$\boldsymbol{\alpha} = a(\lambda^1, \cdots, \lambda^p)\boldsymbol{d}\lambda^1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{d}\lambda^p$$

の項を集めよ．(2) 基本的な積分の定義を用いて

$$\int \boldsymbol{\alpha} = \int \cdots \int a(\lambda^1, \cdots, \lambda^p) d\lambda^1 \cdots d\lambda^p$$

を積分せよ.

4.10　Whitaker のキャルモイド (calumoido), あるいは, ループの存続期間

2次元面 S を取り巻く閉じたループをとれ. それは ***Faraday*** のある束, $\Phi_F = \int_S \boldsymbol{F}$ (“磁力管”) および, ***Maxwell*** のある流れ, $\Phi_M = \int_S {}^*\boldsymbol{F}$ (“電気力管”) をとらえる.

(a) 束, Φ_F および Φ_M は, $\boldsymbol{dF} = \boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F} = 0$ (磁荷が存在しない, 電荷が存在しない) である場合に限り, ループの選択のみに依存し, ループによって取り巻かれる面 S の選択に依存しないことを示せ. ヒント: 一般化された Stokes の定理を用いよ. コラム 4.1 および 4.6.

(b) ループを空間と時間について動かして同じ2つの束をとらえ続けよ. ループをあちらこちらに動かして同じ2つの束をとらえ続けよ. このようにして2次元面 (キャルモイド, E. T. Whitaker 1904) $\mathcal{P} = \mathcal{P}(a, b), x^\mu = x^\mu(a, b)$ を追跡せよ. この面の基本的な倍ベクトル, $\boldsymbol{\Sigma} = \partial\mathcal{P}/\partial a \wedge \partial\mathcal{P}/\partial b$ は, $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\Sigma} \rangle = 0$ および $\langle {}^*\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\Sigma} = 0 \rangle$ を満たすことを示せ.

(c) $x^\mu(a, b)$ に対するこれらの微分方程式は, もし $\boldsymbol{dF} = 0$ および $\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F} = 0$ (磁荷が存在しない, 電荷が存在しない) ならば, ループの最初の位置に対する与えられた初期条件 $x^\mu = x^\mu(a, 0)$ のもとで, 解をもちうることを示せ.

(d) 一様な静電場 $\boldsymbol{F} = -E_x\, \boldsymbol{dt} \wedge \boldsymbol{dx}$ を考えよ. 方程式, $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\Sigma} \rangle = 0$ および $\langle {}^*\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\Sigma} \rangle = 0$ を解いて, もっとも一般的なキャルモイドに対する式 $\mathcal{P}(a, b)$ を見出せ. [答え: $y = y(a), z = z(a), x = x(b), t = t(b)$]. 2つの特別な場合を示せ. (i) 一定時間の超面内に完全に存在するキャルモイド [ループは無限大の速度で動く. はさみの2つの刃の交点の超光速度に似ている]. (ii) ループが t, x, y, z Lorentz 系で永久に静止しているキャルモイド.

4.11　微分形式と Hamilton 力学

2つの自由度を与えられた力学系を考えよ. この系の Hamilton 系 (特別な例: ここでは Hamiltonian が時間によらない) としての定義に対しては, (1) 正準変数 (コラム 4.5 をみよ) の定義と (2) 座標 q^1, q^2 および正準共役な運動量 p_1, p_2 の関数としての Hamiltonian H の知識が必要である. 力学の法則を導くために, p_1, p_2, q^1, q^2, および t の5次元空間と, 5つの座標の最初の値 (記号 A) から最後の値 (記号 B) に通ずるこの空間内の曲線と, この経路に沿ってとられる積分 I

$$I = \int_A^B p_1 \boldsymbol{dq}^1 + p_2 \boldsymbol{dq}^2 - H(p, q) \boldsymbol{dt} = \int_A^B \boldsymbol{\omega}$$

の値を考えよ. 2次元の領域 S を取り囲む2つの “近傍” の経路に対する積分の差は, Stokes の定理 (コラム 4.1 および 4.2) によって,

$$\delta I = \oint \boldsymbol{\omega} = \int_S \boldsymbol{d\omega}$$

である. 最小作用の原理 (“極値の履歴” の原理) は, 系の代表点は5次元多様体内のルート (接線ベクトル $d\mathcal{P}/dt$ をもつルート) で, この経路に対する変分がゼロになるようなも

の，すなわち，

$$\boldsymbol{d\omega}(\cdots, d\mathcal{P}/dt) = 0$$

（ただ 1 つのベクトル変数をもつ 2–形式 $\boldsymbol{d\omega}$ が与えられ，他の投入口は満たされていない．5–空間内の 1–形式を与え，それはゼロにならねばならない）を満たすルートに沿って動かなければならないことを述べている．これは $d\mathcal{P}/dt$ の方向のみを定める．その大きさは $\langle \boldsymbol{dt}, d\mathcal{P}/dt\rangle = 1$ を要求することによって規格化されうる．

(a) 表現 $\boldsymbol{\omega} = p_j \boldsymbol{dq}^j - H\boldsymbol{dt}$ から $\boldsymbol{d\omega}$ を求めよ．

(b) $d\mathcal{P}/dt = \dot{q}^j(\partial\mathcal{P}/\partial q^j) + \dot{p}_j(\partial\mathcal{P}/\partial p_j) + \dot{t}(\partial\mathcal{P}/\partial t)$ とおき，$\boldsymbol{d\omega}(\cdots, d\mathcal{P}/dt) = 0$ を基底 $\{\boldsymbol{dp}_j, \boldsymbol{dq}^k, \boldsymbol{dt}\}$ によって展開せよ．

(c) この 5 次元の方程式は $\{q^j, p_k\}$ の 4 次元の位相空間で

$$\boldsymbol{\theta}(\cdots, d\mathcal{P}/dt) = \boldsymbol{d}H$$

と書けることを示せ．ここに $\boldsymbol{\theta}$ はコラム 4.5 で定義された 2–形式である．

(d) $\{q^j, p_k\}$ 座標系での $\boldsymbol{\theta}(\cdots, d\mathcal{P}/dt) = \boldsymbol{d}H$ の成分はよく知られた Hamilton 方程式である．この結論は $\boldsymbol{\theta}$ に対して仮定された形式のみによるから，任意の他の位相空間の座標 $\{\bar{q}^j, \bar{p}_k\}$（“正準変数”）での標準的な Hamilton 方程式も得られることに注意せよ．

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{d}\bar{p}_1\wedge\boldsymbol{d}\bar{q}^1 + \boldsymbol{d}\bar{p}_2\wedge\boldsymbol{d}\bar{q}^2$$

コラム 4.5　計量構造と Hamiltonian あるいは “シンプレクティック構造” の比較対照

	計量構造	シンプレクティック構造
1. 物理学的応用	時空の幾何学	Hamilton 力学
2. 正準構造	$(\cdots\cdot\cdots) = “\boldsymbol{ds}^2” = -\boldsymbol{dt}\otimes\boldsymbol{dt} + \boldsymbol{dx}\otimes\boldsymbol{dx} + \boldsymbol{dy}\otimes\boldsymbol{dy} + \boldsymbol{dz}\otimes\boldsymbol{dz}$	$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{d}p_1\wedge\boldsymbol{d}q^1 + \boldsymbol{d}p_2\wedge\boldsymbol{d}q^2$
3. “計量” の性質	対称	反対称
4. 与えられた座標系および同じ形をもつ計量の任意の他の 4 個の座標の組に対する名称	Lorentz 座標系	“正準”（あるいは “力学的に”）共役な座標の系
5. この計量に対する場の方程式	$\boldsymbol{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$（ゼロ Riemann 曲率, 平坦な時空）	$\boldsymbol{d\theta} = 0$（“閉じた 2 形式”, 上の表現によって自動的に満たされる条件）
6. 4 次元多様体	時空	位相空間
7. この多様体の構造の座標によらない記述	$\boldsymbol{Riemann} = 0$	$\boldsymbol{d\theta} = 0$

8. 正準座標は他の座標と区別される（可能であるがより単純でない）	計量に上の形をとらせよ（2 項）	計量に上の形をとらせよ（2 項）

4.12　対称化への操作でテンソルを得る

添字の集合を囲む角括弧および丸括弧を次のように定義する．

$$V_{(\alpha_1\cdots\alpha_p)} \equiv \frac{1}{p!}\Sigma V_{\alpha_{\pi_1}\cdots\alpha_{\pi_p}}, \qquad V_{[\alpha_1\cdots\alpha_p]} \equiv \frac{1}{p!}\Sigma(-1)^{\pi} V_{\alpha_{\pi_1}\cdots\alpha_{\pi_p}}$$

ここに，和は数 $1,2,\cdots,p$ のすべての置換 π についてとられる，そして $(-1)^{\pi}$ は置換が偶か奇に応じて $+1$ あるいは -1 である．量 V は p 個の添字 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ の集合の他に，ここに示されていない他の添字をもってもよい，しかしこの添字の集合はここに記述されている操作によって影響を受ける場合に限る．数 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_p$ は置換 π に従って配列し直された数 $1,\ 2,\cdots,p$ である（$p=2,3$ の例は練習問題 3.12 で取り扱われている）．したがって成分 $V_{\alpha_1\cdots\alpha_p}$ をもつ任意の階数 p のテンソルを成分

$$[\boldsymbol{Alt}(\boldsymbol{V})]_{\mu_1\cdots\mu_p} = V_{[\mu_1\cdots\mu_p]}$$

をもつ新しいテンソルに転換する仕組みをもつ．この仕組み $\boldsymbol{Alt}$ は線形であるから，それは適当な独立変数 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\cdots,\boldsymbol{w},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\cdots,\boldsymbol{\gamma}$ が与えられたとき，数

$$u^{\mu}v^{\nu}\cdots w^{\lambda}\alpha_{[\mu}\beta_{\nu}\cdots\gamma_{\lambda]}$$

をつくるテンソルとみることができる．

(a) このテンソルの成分は

$$(\boldsymbol{Alt})_{\beta_1\cdots\beta_p}{}^{\alpha_1\cdots\alpha_p} = (p!)^{-1}\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_p}$$

であることを示せ（**注意**：δ の添字はほとんど上げたり下げたりしないから，この記号は混乱をもたらさない）．

ここに

$$\delta^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_p} = \begin{cases} +1 & (\alpha_1,\cdots,\alpha_p)\text{ が }(\beta_1,\cdots\beta_p)\text{ の偶置換} \\ -1 & (\alpha_1,\cdots,\alpha_p)\text{ が }(\beta_1,\cdots\beta_p)\text{ の奇置換} \\ 0 & \text{(i) }\alpha\text{ の任意の 2 つが同じ} \\ 0 & \text{(ii) }\beta\text{ の任意の 2 つが同じ} \\ 0 & \text{(iii) }\alpha\text{ と }\beta\text{ が整数の異なる集合} \end{cases}$$

証明と，したがってこれらの成分の値は，任意の系で正しいことに注意せよ．

(b) 任意の“交替”（すなわち，“**完全に反対称な**”）テンソル $A_{\alpha_1\cdots\alpha_p} = A_{[\alpha_1\cdots\alpha_p]}$ に対しては

$$\frac{1}{p!}A_{\alpha_1\cdots\alpha_p}\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p\beta_1\cdots\beta_q}_{\gamma_1\cdots\gamma_p\gamma_{p+1}\cdots\gamma_{p+q}}$$
$$= \sum_{\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_p} A_{\alpha_1\cdots\alpha_p}\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p\beta_1\cdots\beta_q}_{\gamma_1\cdots\cdots\cdots\cdots\gamma_{p+q}}$$
$$\equiv A_{|\alpha_1\cdots\alpha_p|}\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p\beta_1\cdots\beta_q}_{\gamma_1\cdots\cdots\cdots\cdots\gamma_{p+q}}$$

最後の行は，ここでは垂直な棒にはさまれた添字についての和は増大する順序にある添字をもつ項のみを含むという慣習を導入している．結果として，あるいは同様に

$$\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p\beta_1\cdots\beta q}_{\gamma_1\cdots\cdots\cdots\cdots\gamma_{p+q}}\delta^{\mu_1\cdots\mu_q}_{|\beta_1\cdots\beta_q|} = \delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p\mu_1\cdots\mu_q}_{\gamma_1\cdots\cdots\cdots\cdots\gamma_{p+q}}$$

を示せ．

(c) 任意の 2 つの交替テンソルの外（“くさび”）積を

$$(\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta})_{\lambda_1\cdots\lambda_{p+q}} = \delta^{\mu_1\cdots\mu_p\,\nu_1\cdots\nu_q}_{\lambda_1\cdots\lambda_p\lambda_{p+1}\cdots\lambda_{p+q}}\alpha_{|\mu_1\cdots\mu_p|}\beta_{|\nu_1\cdots\nu_q|}$$

そして同様に

$$(\boldsymbol{U}\wedge\boldsymbol{V})^{\lambda_1\cdots\lambda_{p+q}} = \delta^{\lambda_1\cdots\lambda_p\lambda_{p+1}\cdots\lambda_{p+q}}_{\mu_1\cdots\mu_p\nu_1\cdots\nu_q}U^{|\mu_1\cdots\mu_p|}V^{|\nu_1\cdots\nu_q|}$$

で**定義せよ**．これは式 (3.45b) を意味することを示せ．この積の法則に対して結合則を

$$[(\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta})\wedge\boldsymbol{\gamma}]_{\sigma_1\cdots\sigma_{p+q+r}}$$
$$= \delta^{\lambda_1\cdots\lambda_p\mu_1\cdots\mu_q\nu_1\cdots\nu_r}_{\sigma_1\cdots\sigma_{p+q+r}}\alpha_{|\lambda_1\cdots\lambda_p|}\beta_{|\mu_1\cdots\mu_q|}\gamma_{|\nu_1\cdots\nu_r|}$$
$$= [\boldsymbol{\alpha}\wedge(\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\gamma})]_{\sigma_1\cdots\sigma_{p+q+r}}$$

が成り立つことを示すことにより立証せよ．そして $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, および $\boldsymbol{\gamma}$ がすべて 1–形式であるときには，これは式 (3.45c) の 3–形式のバージョンに帰着することを示せ．

(d) p 個のベクトルの外積の成分に対する次の公式を導け．

$$(\boldsymbol{u}_1\wedge\boldsymbol{u}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_p)^{\alpha_1\cdots\alpha_p} = \delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\mu\cdots\nu}(u_1)^\mu\cdots(u_p)^\nu$$
$$= p!\,{u_1}^{[\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\cdots u_p^{\alpha_p]}$$
$$= \delta^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{12\cdots p}\det[(u_\mu)^\lambda]$$

コラム 4.6　Stokes の定理の誕生

電磁気学の数学的な定式化にとって，Gauss（5 章で取り上げられる）および Stokes の定理は中心的である．両方は，今日，形式の言葉で表されるときには一緒になって単一のものとして現れる．以前には単一であるということは明白でなかった．Everitt

(1970) は Stokes の定理の歴史を思い起こさせる．“[G. C.] Stokes[Cambridge 大学数学科 Lucas 数授職] が創設し，Maxwell が 1854 年（2 月）に獲得した Smith 賞論文 · · ·

5. 楕円の中心と 2 点，および主軸の長さが与えられているとき，主軸の方向を幾何学的な作図によって見出せ．
6. 微分方程式
$$(a^2 - x^2)dy^2 + 2xydydx + (a^2 - y^2)dx^2 = 0$$
を積分せよ．それは特異解をもつか？
7. 二重曲率をもつ二重の曲線系で，接線はつねに変数点 P で描かれる．P が任意の固定点 Q から動くとき，連続した接線が最後に交わるかもしれないが，問題の条件が不可能であるかもしれないようにするためには，P は Q を頂点にもつ楕円錐体を生成する線に沿って動き始めねばならない．
8. もし X, Y, Z が直交座標 x, y, z の関数であり，dS は任意の狭い面要素であり，l, m, n は dS での法線の軸に対する方向余弦であり，この面要素を取り巻く線要素を ds とすれば，
$$\int\int\left\{l\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)+m\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)+n\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)\right\}dS$$
$$=\int\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds$$
が成り立つことを示せ．ここに X, Y, Z の微分係数は偏微分，また線積分は面の周辺全体についてなされるものとする．

は，現在 Stokes の定理として知られている，線積分と面積分を結びつける公式の最初の印刷物を示している．これは Maxwell の電磁気論の展開にとってきわめて重要であった．この定理のもっとも早い明確な証明は Thomson から Stokes への 1850 年 7 月 2 日づけの手紙に示されているものであるようである” [Campbell and Garnett (1882), pp. 186–187 に引用].

5章
ストレス–エネルギーテンソルおよび保存則

5.1 トラック–1 概観

“幾何学は物体にどう動くかを教え，物体は幾何学にどう曲がるかを教える.” しかし，単位体積内にどれだけの質量–エネルギーが存在するかを決める道具が見出せるまでは，曲率（パート III）および質量–エネルギーによる曲率の産出に対する Einstein の法則（パート IV）を検討するのはよくないだろう．その道具はストレス–エネルギーテンソルで，これが本章の関心の焦点になる．

ストレス–エネルギーテンソルの本質的な特徴は，できるだけ速く重力物理学に突き進みたい読者のために，コラム 5.1 で要約されている．そのような読者はコラム 5.1 から 6 章へ直接進むことができる—そうすることによって，彼らは本章で取り扱われる教材に深く依存する，後で出てくるトラック–2 の若干の部分への道を閉じてしまうことになるけれども．

[本章のここから先はトラック–2 である．これはすでに述べたトラック–2 のどの教材にも関連せず，20 章（質量と角運動量に対する保存則）に対する準備として必要なものである．また，重力理論のすべての応用（18–40 章）にきわめて有用であろう.]

5.2 3 次元の体積とストレス–エネルギーテンソルの定義

時空には 4–運動量が流れる “川” がある．各粒子はその世界線に沿ってその 4–運動量ベクトルを自らとともに運ぶ．数多くの世界線上の数多くの粒子を不鮮明にして（連続体近似）みると，連続体の流れ，4–運動量の川ができる．電磁場，ニュートリノ場，中間子場，それらもまた川の一因となる．

川の流れはどのようにして定量化されるだろうか？ 線形機械，すなわちストレス–エネルギーテンソル $\boldsymbol{T}$ によって．

稜としてベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ をもつ小さい 3 次元の平行六面体を時空内に選べ (図 5.1)．どれだけの 4–運動量がその体積を正の向きに（すなわち，“負の側” から “正の側” に）横切るかを問え．答えを計算するために，(1) **“体積 1–形式”**

*1
$$\Sigma_\mu = +\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}A^\alpha B^\beta C^\gamma \tag{5.1}$$

*1 3–体積の数学的表示

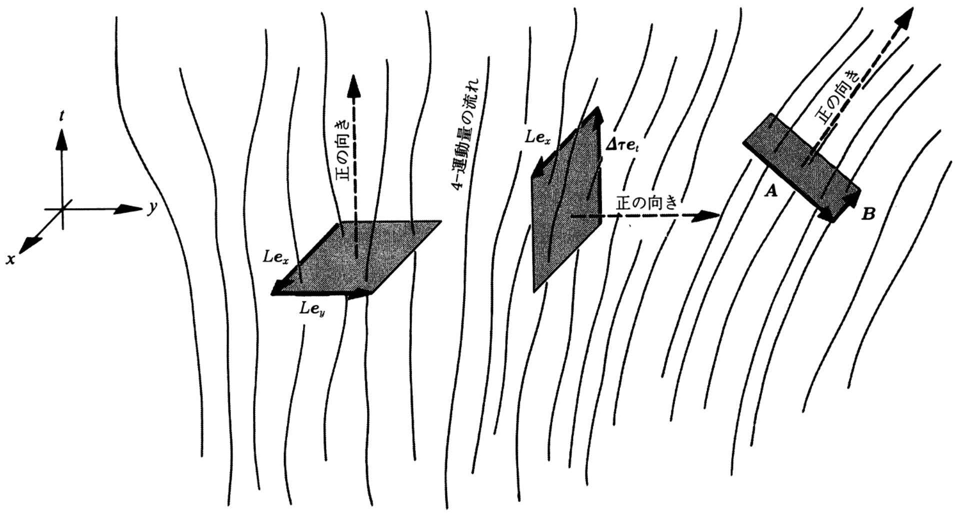


図 **5.1**　時空を通して流れる 4–運動量の "川", および 3 個の異なる 3–体積, それらを横切って川が流れる (1 つの次元は図から削除されている. したがって 3–体積は 2–体積のようにみえる). 第 1 の 3–体積は描かれている Lorentz 系で瞬間的に静止している立方体の石けん箱の内部である. その稜は Le_x, Le_y, Le_z である. そしてその体積 1–形式は未来に向かって "正の" 向きをもち ("標準的な方向づけ"), $\boldsymbol{\Sigma} = L^3\boldsymbol{dt} = -V\boldsymbol{u}$ ($V = L^3$ = 静止系で測定されたときの体積, $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{dt}$ = 箱の 4–速度) である. 第 2 の 3–体積は 2 番目の立方体の箱の頂上によって時間 $\Delta\tau$ 内に掃過される "世界面" である. 箱の頂上の稜は Le_xと Le_z である. そしてその体積 1–形式は箱の内部から増大する y の方向に, "正の" 向きをもち, $\boldsymbol{\Sigma} = L^2\Delta\tau\boldsymbol{dy} = \mathcal{A}\Delta\tau\boldsymbol{\sigma}$ ($\mathcal{A} = L^2$ = 箱の頂上の面積, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{dy}$ = 世界管を含む単位 1–形式) である. 第 3 の 3–体積は任意の体積であり, 稜 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ をもち, 体積 1–形式 $\Sigma_\mu = \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}A^\alpha B^\beta C^\gamma$ である.

を構成せよ. 平行六面体は 1–形式の面の 1 つに存在し, 平行六面体を横切る正の向きは
*2 1–形式 $\boldsymbol{\Sigma}$ の正の向きであると定義される. (2) この体積 1–形式をストレス–エネルギーテンソル $\boldsymbol{T}$ の 2 番目の投入口に挿入せよ. 結果は

$$\boldsymbol{T}(\cdots, \boldsymbol{\Sigma}) = \boldsymbol{p} = (\text{負の側から正の側へ横切る運動量}) \tag{5.2}$$

空の投入口 ↑

である. (3) 4–運動量の, ベクトル $\boldsymbol{w}$ あるいは 1–形式 $\boldsymbol{\alpha}$ に沿う射影を得るには, 体積 1–形式 $\boldsymbol{\Sigma}$ を 2 番目の投入口に, そして $\boldsymbol{w}$ あるいは $\boldsymbol{\alpha}$ を 1 番目の投入口に挿入せよ.

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\Sigma}) = \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Sigma}) = \langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{p}\rangle \tag{5.3}$$

これがストレス–エネルギーテンソルを定義する.

3–体積の主要な特徴とストレス–エネルギーテンソルは上述の 3 段階の手続きで要約される. しかし要約は十分でなく, 深い理解も要求される. それを得るには特別な例, 3–体積とストレス–エネルギー機械の働きの両方を調べねばならない.

---

*2　3–体積を横切る運動量は, ストレス–エネルギーテンソルを用いて計算される

コラム 5.1　5 章の要約

A. 機械としてのストレス–エネルギーテンソル

時空での各事象には，ストレス–エネルギーテンソルが存在する．それは事象について，任意のそしてすべての観測者によって測定されるエネルギー密度，運動量密度，およびストレスの知識を含んでいる．すべての形の物質およびすべての非重力場に関与するエネルギー，運動量，およびストレスが含まれる．

ストレス–エネルギーテンソルは，2 つのベクトルの挿入に対する 2 つの投入口をもつ，線形で対称的な機械，$\boldsymbol{T}(\cdots,\cdots)$ である．その出力は，与えられた入力に対して以下のように要約できる．

(1) 観測者の 4–速度 $\boldsymbol{u}$ を投入口の 1 つに挿入せよ，他の投入口は空のままにせよ．出力は

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\cdots)=\boldsymbol{T}(\cdots,\boldsymbol{u})=-\begin{pmatrix}\text{4–運動量の密度, “}\boldsymbol{dp}/dV\text{”, すなわち, }\boldsymbol{T}\text{が選ばれ}\\ \text{る事象について観測者の Lorentz 系で測定された}\\ \text{3 次元の体積の単位あたりの 4–運動量}\end{pmatrix}$$

である．すなわち，4–速度 u^α をもつ観測者に対して，$T^\alpha{}_\beta u^\beta = T_\beta{}^\alpha u^\beta = -(dp^\alpha/dV)$．

(2) 観測者の 4–速度を 1 つの投入口に挿入し，任意の単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を他の投入口に挿入せよ．出力は

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{u})=-\begin{pmatrix}\text{観測者の Lorentz 系で測定したときの, 4–運動量}\\ \text{密度の}\boldsymbol{n}\text{方向に沿う成分, “}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{dp}/dV\text{”}\end{pmatrix}$$

である．すなわち，$T_{\alpha,\beta}u^\alpha n^\beta = T_{\alpha\beta}n^\alpha\beta u^\beta = -n_\mu dp^\mu/dV$ である．

(3) 観測者の 4–速度を両方の投入口に挿入せよ．出力は観測者の Lorentz 系で測定される質量–エネルギーの密度である．

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=(\text{4–速度}\boldsymbol{u}\text{をもつ系で測定された，単位体積あたりの質量–エネルギー})$$

(4) ある観測者をとり，彼の Lorentz 系の 2 つの空間的な基底ベクトル，$\boldsymbol{e}_j$ および $\boldsymbol{e}_k$ を選べ．$\boldsymbol{e}_j$ および $\boldsymbol{e}_k$ を $\boldsymbol{T}$ の投入口に挿入せよ．出力はその観測者によって測定されるストレスの j,k 成分である．

$$\begin{aligned}T_{jk}&=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)=\boldsymbol{T}_{kj}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_j)\\ &=\begin{pmatrix}\text{垂直方向}\boldsymbol{e}_k\text{をもつ単位面積を横切って}x^k-\varepsilon\text{ 側から}\\ x^k+\varepsilon\text{ 側へ作用する力の } j \text{ 成分}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{垂直方向}\boldsymbol{e}_j\text{をもつ単位面積を横切って}x^j-\varepsilon\text{ 側から} \\ x^j+\varepsilon\text{ 側へ作用する力の }k\text{ 成分} \end{pmatrix}$$

B. 完全流体に対するストレス–エネルギーテンソル

本書でのちに詳しく考察される問題の 1 種が "**完全流体**" である．完全流体とは (1) 事象から事象へ変化してもよい 4–速度 $\boldsymbol{u}$ で時空内を動き，(2) 各流体要素の静止系で，質量–エネルギーの密度 ρ および等方性の圧力 p を示す，液体あるいは気体である．ひずみ応力，非等方性の圧力，および粘性は存在してはならない．さもないと流体は完全にならない．与えられた事象について完全流体に対するストレス–エネルギーテンソルは計量テンソル $\boldsymbol{g}$，4–速度 $\boldsymbol{u}$，および静止系での密度および圧力 ρ と p からつくられうる．

$$\boldsymbol{T}=(\rho+p)\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}+p\boldsymbol{g}, \qquad \text{あるいは} \quad T_{\alpha\beta}=(\rho+p)u_\alpha u_\beta+pg_{\alpha\beta}$$

流体の静止系で，このストレス–エネルギーテンソルの成分は予期された形をもつ（$\boldsymbol{T}$ の投入口に，観測者の 4–速度として，流体の 4–速度そのものを挿入せよ）．

$$T^\alpha{}_\beta u^\beta=[(\rho+p)u^\alpha u_\beta+p\delta^\alpha{}_\beta]u^\beta=-(\rho+p)u^\alpha+pu^\alpha=-\rho u^\alpha$$

すなわち，

$$T^0{}_\beta u^\beta=-\rho=-(\text{質量–エネルギーの密度}),$$

$$T^j{}_\beta u^\beta=0=-(\text{運動量の密度})$$

また，

$$T_{jk}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)=p\delta_{jk}=\text{ストレス–テンソルの成分}$$

C. エネルギー–運動量の保存

電気力学では電荷の保存は微分方程式

$$\partial(\text{電荷密度})/\partial t+\nabla\cdot(\text{電流密度})=0$$

すなわち，$J^0{}_{,0}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$，すなわち，$J^\alpha{}_{,\alpha}=0$ すなわち，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}=0$ で表されうる．同様に，エネルギー–運動量の保存は基本的な幾何学的法則

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}=0$$

で表されうる（$\boldsymbol{T}$ は対称的であるから，どの投入口で発散がとられるかは問題でない）．この法則は重力理論で重要な役割を演ずる．

特別な例

*3 石けん箱が時空内を動く．箱の世界線上の事象 $\mathcal{P}_0$ で，1 人の人間が箱の内部をのぞき込んでおり，石けん，空気，箱に含まれる電磁場のすべてを吟味する．彼はそれらすべての 4–運動量を加え合わせて全体の $\boldsymbol{p}_{\mathcal{P}_0\text{での箱}}$ をうる．この全体はどれくらいであろうか？ $\mathcal{P}_0$ における箱の内部の 4–運動量は，そこで過去から未来へ箱を横切る 4–運動量（図 5.1）に正確に等しいことを示すことによってこの全体を計算することができる．したがって人間が測定する 4–運動量は

$$\boldsymbol{p}_{\mathcal{P}_0\text{での箱}} = \boldsymbol{T}(\cdots, \boldsymbol{\Sigma}) \tag{5.4}$$

*4 である．ここに $\boldsymbol{\Sigma}$ は $\mathcal{P}_0$ での箱の体積 1–形式である．しかしこのような石けん箱に対して，$\boldsymbol{\Sigma}$ は箱の瞬間的な静止系で人間によって測定された箱の体積 V に等しい大きさをもち，箱そのものは $\boldsymbol{\Sigma}$ の超平面の 1 つに存在する．換言すれば，

$$\boldsymbol{\Sigma} = -V\boldsymbol{u} \tag{5.5}$$

ここに $\boldsymbol{u}$ は $\mathcal{P}_0$ での石けん箱の 4–速度である（負の記号は，$\boldsymbol{u}$ は 1–形式とみなすと，過去 $u_0 < 0$ に向かって正の向きをもつからである）．コラム 5.2 をみよ．したがって，箱内

*5 の全 4–運動量は

$$\boldsymbol{p}_{\mathcal{P}_0\text{での箱}} = \boldsymbol{T}(\cdots, -V\boldsymbol{u}) = -V\boldsymbol{T}(\cdots, \boldsymbol{u}) \tag{5.6}$$

である．あるいは，成分の記号で書くと，

$$(p^\alpha)_{\mathcal{P}_0\text{での箱}} = -VT^{\alpha\beta}u_\beta \tag{5.6$'$}$$

箱内のエネルギーは，箱の静止系で測定すると，4–運動量の箱の 4–速度への射影の負数に等しい．

$$E = -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}_{\mathcal{P}_0\text{での箱}} = +VT^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = V\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$$

したがって

*6
$$\begin{pmatrix}\text{箱の静止系で測定さ}\\ \text{れたエネルギー密度}\end{pmatrix} = \frac{E}{V} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \tag{5.7}$$

もう 1 つの特別な例

同じ石けん箱の世界線上にいる人間が箱の上部を開け，若干の石けんをこぼす．非常に

*7 小さい時間間隔 $\Delta\tau$ 内に，どれだけの 4–運動量が箱から流れ出るか？ この質問に答える

---

*3　石けん箱の内部
*4　箱の体積 1–形式
*5　箱の 4–運動量の内容
*6　箱のエネルギー密度
*7　石けん箱の上部

ために，箱の開かれた2次元の上部（“上部の世界面”）によって $\Delta\tau$ の間に掃過される3次元の体積を考えよ．求められている4–運動量はこの世界面を正の向きに横切る4–運動量である（図5.1をみよ）．したがって，それは

$$\boldsymbol{p}_{\text{流れ出る}} = \boldsymbol{T}(\cdots, \boldsymbol{\Sigma}) \tag{5.8}$$

*8 である，ここに $\boldsymbol{\Sigma}$ は世界面の体積1–形式である．$\mathcal{A}$ を箱の上部の面積とし，$\boldsymbol{\sigma}$ を外向きの単位1–形式とする，その面は世界面を含んでいる（すなわち，箱の上部とその瞬間的な4–速度ベクトルを含んでいる）．そうすると

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathcal{A}\,\Delta\tau\,\boldsymbol{\sigma} \tag{5.9}$$

*9 （コラム5.2をみよ）．したがって $\Delta\tau$ の間に流れ出る4–運動量は

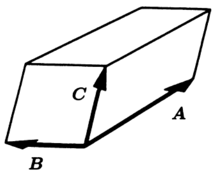
$$\boldsymbol{p}_{\text{流れ出る}} = \mathcal{A}\,\Delta\tau\,\boldsymbol{T}(\cdots, \boldsymbol{\sigma}) \tag{5.10}$$

である．

コラム5.2　3次元の体積

A．一般的な平行六面体

1．平行六面体の**稜**は3個のベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ である．稜を順序づけねばならない．たとえば，“$\boldsymbol{A}$ の後に $\boldsymbol{B}$ が，その後に $\boldsymbol{C}$ が続く”．

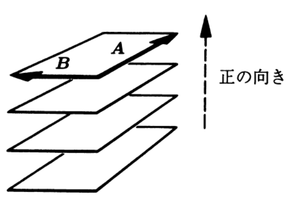


（平行六面体に直交する1つの次元は，ここでは削除されている．）

2．**体積三重ベクトルは** $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{C}$ と定義される．それは体積の複雑な理論に入ってくる（4章）が，基本的な理論にはあまり用いられない．

3．**体積1–形式は** $\Sigma_\mu = \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}A^\alpha B^\beta C^\gamma$ で定義される（$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ はここでは段階1で選ばれたように標準的な順序に現れねばならない）．$\boldsymbol{\Sigma}$ に“対応する”ベクトルと体積三重ベクトルは $\boldsymbol{\Sigma} = -{}^*(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{C})$ で関係づけられていることに注意せよ．

4．体積の**方向づけ**はその1–形式 $\boldsymbol{\Sigma}$ の方向づけと一致するように定義される．より明確に，稜 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{\Sigma}$ の超平面内に存在しなければならない（$\langle\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{A}\rangle = \langle\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{B}\rangle = \langle\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{C}\rangle = 0$, “ベルが鳴らすゴーンという音”がない）．こうして，**体積そのものが $\boldsymbol{\Sigma}$ の超平面の一つである！**　体積から離れていく正の向きは，$\boldsymbol{\Sigma}$ の正の向きであると定義される．**注意**：$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ の順序



$\boldsymbol{C}$ と同じ方向に伸びている1つの次元は，ここでは削除されている．

---

*8　世界面の体積1–形式

*9　世界面を横切って流れる4–運動量

を逆転すれば正の向きが逆転する！

5. 空間的な 3–体積に対する "**標準的な方向づけ**" は，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ がベクトルの右手系の三つ組をつくることに対応して，1–形式 $\boldsymbol{\Sigma}$ の未来に向かう正の向きをもつ．

B. 任意の形の 3–体積

平行六面体の組合せに分解して解析できる．

C. 石けん箱の内部（例）

1. **石けん箱の静止系での解析**：箱の世界線上の事象をとれ．箱の 3 つの稜はそこでは 3 つの特別なベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ である．箱の静止系ではそれらは純粋に空間的である．$A^0 = B^0 = C^0 = 0$．したがって，体積 1–形式は次の成分をもつ．$\Sigma_j = 0$，そして

$$
\begin{aligned}
\Sigma_0 = \epsilon_{0ijk}A^iB^jC^k &= \det\begin{Vmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ C^1 & C^2 & C^3 \end{Vmatrix} \\
&= \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \qquad \text{3 次元ベクトル解析の標準的な記号で} \\
&= \begin{pmatrix} +V(V = \text{箱の体積}),\ \text{もし}\ (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})\ \text{が右手系に順序づけられて} \\ \text{いるならば (未来に向かう}\ \boldsymbol{\Sigma}\ \text{の正の向き，標準の方向づけ)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -V(V = \text{箱の体積}),\ \text{もし}\ (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})\ \text{が左手系に順序づけられて} \\ \text{いるならば (過去に向かう}\ \boldsymbol{\Sigma}\ \text{の正の向き)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

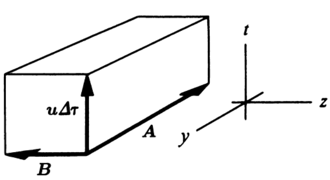
2. **この結果は幾何学的な言葉で再表現される**：$\boldsymbol{u}$ を箱の 4–速度，V を箱の静止系で測定したときの箱の体積とする．そうすると

$\boldsymbol{\Sigma} = -V\boldsymbol{u}$，この場合には箱の 3–面の "正の側" は未来の側であり，箱の稜は右手系の仕方で順序づけられている（標準的な方向づけ）．

あるいは

$\boldsymbol{\Sigma} = +V\boldsymbol{u}$，この場合には "正の側" は過去の側であり，左手系の仕方で順序づけられている．

D. 2 次元である石けん箱の上部によって $\Delta\tau$ 時間内に掃過される 3–体積（例）



1. **箱の静止系での解析**：箱の世界線上の事象をとれ．そこでは箱の上部の 2 つの稜はベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ である．箱の静止系で，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が $y-z$ 面内に存在するように空間軸の方向を定めよ．固有時間 $\Delta\tau$ の経過の間に，箱の上部は第 3 の稜が $\boldsymbol{u}\Delta\tau$（$\boldsymbol{u}$ = 箱の 4–速度）である 3–体積を掃過する．箱の静止系で，"$\boldsymbol{A}$の後に $\boldsymbol{B}$ がその後に $\boldsymbol{u}\Delta\tau$"

が続く順序で，体積 1–形式は以下の成分をもつ．

$$\Sigma_0 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = 0,\ \text{そして}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \epsilon_{1jk0} A^j B^k \Delta\tau u^0 = -\epsilon_{01jk} A^j B^k \Delta\tau \\ &= -\mathcal{A}\Delta\tau\ (\mathcal{A}=\text{箱の上部の面積}), \\ &\quad \text{もし}\ (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\ \text{が右手系に順序づけられているならば} \\ &= +\mathcal{A}\Delta\tau\ (\mathcal{A}=\text{箱の上部の面積}), \\ &\quad \text{もし}\ (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\ \text{が左手系に順序づけられているならば}\end{aligned}$$

(**注意**：標準的な方向づけはこの場合には定義できない．なぜなら $\boldsymbol{\Sigma}$ は純粋に空間の回転で $-\boldsymbol{\Sigma}$ に連続的に移されうるからである．)

2. **この結果は幾何学的な言葉で再表現される**：$\mathcal{A}$ を箱の静止系で測定された箱の上部の面積とする．そして $\boldsymbol{\sigma}$ を単位 1–形式とし，その 1 つの面が箱の上部と箱の 4–速度を含んでいる（すなわち，箱の上部の “世界面” を含んでいる）．$\boldsymbol{\sigma}$ の正の向きを箱の上部の 3–体積の（任意に選ばれた）正の向きをもつように方向づける．そうすると

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathcal{A}\Delta\tau\boldsymbol{\sigma}$$

5.3　ストレス–エネルギーテンソルの成分

すべての他のテンソルと同じく，ストレス–エネルギーテンソルは，その定義と意味が座標系と基準系を超越する機械である．しかしどんな観測者でも，彼がある 1 つの Lorentz 系に閉じ込められているときには，$\boldsymbol{T}$ そのものよりも $\boldsymbol{T}$ の成分により注意を払う．彼は特別な物理的意味を各成分に帰する．おそらく最も関心を寄せるのは “時間–時間” 成分であろう．それは観測者の Lorentz 系で測定された質量–エネルギーの全密度である．

*10

*11

$$T_{00} = -T_0{}^0 = T^{00} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_0) = \text{質量–エネルギーの密度} \tag{5.11}$$

（観測者の 4–速度 $\boldsymbol{u}$ を基底ベクトル $\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{u}$ で置き換えたもの，式 (5.7) 参照）．

“時空” 成分 T^{j0} は，観測者の系に静止している石けん箱の内部を考えることによって解釈できる．もしその体積が V であれば，その体積 1–形式は $\boldsymbol{\Sigma} = -V\boldsymbol{u} = +V\boldsymbol{d}t$ である．そして箱の内部の 4–運動量の μ 成分は

$$p^\mu = \langle \boldsymbol{d}x^\mu, \boldsymbol{p}\rangle = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{d}x^\mu, \boldsymbol{\Sigma}) = V\boldsymbol{T}(\boldsymbol{d}x^\mu, \boldsymbol{d}t) = VT^{\mu 0}$$

である．こうして，単位体積あたりの 4–運動量は

*10　ストレス–エネルギーテンソルの成分の物理学的解釈

*11　T^{00}：エネルギー密度

$$p^\mu/V = T^{\mu 0} \tag{5.12a}$$

である．あるいは，同じことであるが，

$$T^{00} = \text{質量–エネルギーの密度 (単位 : g/cm}^3\text{, あるいは erg/cm}^3\text{, あるいは cm}^{-2}) \tag{5.13a}$$

*12
$$T^{j0} = \text{運動量の } j \text{ 成分の密度 (単位 : g(cm/sec)cm}^{-3}\text{, あるいは cm}^{-2}) \tag{5.13b}$$

成分 $T^{\mu k}$ は，観測者の系に静止していて，k–方向を示す正の法線をもつ面積 $\mathcal{A}$ の 2 次元の面を用いて説明できる．時間 Δt の経過の間に，この 2–面は体積 1–形式 $\boldsymbol{\Sigma} = \mathcal{A}\Delta t\, \boldsymbol{dx}^k$ をもつ 3–体積を掃過する（コラム 5.2 をみよ）．時間 Δt の間に 2–面を横切る 4–運動量の μ 成分は

$$p^\mu = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{dx}^\mu, \boldsymbol{\Sigma}) = \mathcal{A}\,\Delta t\, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{dx}^\mu, \boldsymbol{dx}^k) = \mathcal{A}\,\Delta t\, T^{\mu k}.$$

こうして，4–運動量（単位時間に，$\boldsymbol{e}_k$ に垂直に方向づけられた単位面を横切る 4–運動量）の束は

$$(p^\mu/\mathcal{A}\,\Delta t)_{\boldsymbol{e}_k\text{に垂直に交差する面}} = T^{\mu k} \tag{5.12b}$$

あるいは，同じことであるが

*13
$$T^{0k} = \text{エネルギーの束の } k \text{ 成分 (単位 : erg/cm}^2\text{sec, あるいは cm}^{-2}) \tag{5.13c}$$

*14
$$\begin{aligned} T^{jk} &= \text{“ストレス” の } j,k \text{ 成分} \\ &\equiv \text{運動量の } j \text{ 成分の束の } k \text{ 成分} \\ &\equiv \boldsymbol{e}_k\text{に垂直な単位面を横切って } x^k+\epsilon\text{での場と物質に働く，} x^k-\epsilon\text{での場と} \\ &\quad\ \text{物質から生まれる力の } j \text{ 成分 (単位 : dyne/cm}^2\text{, あるいは cm}^{-2}) \end{aligned} \tag{5.13d}$$

（“1 秒間あたりの運動量の転移” は “力” と同じであることを思い出せ.）

ストレス–エネルギーテンソルは必然的に対称である，$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$．しかしこの証明は若干の実例を吟味し終わるまで延期しよう．

5.4 粒子の集団に対するストレス–エネルギーテンソル

粒子の集団を考えよ．集団内のある事象 $\mathcal{P}$ を選べ．$\mathcal{P}$ 近傍の粒子を範疇，$A = 1, 2, \cdots$，に分け，同じ範疇に属するすべての粒子は同じ性質

$m_{(A)}$,	静止質量
$\boldsymbol{u}_{(A)}$,	4–速度
$\boldsymbol{p}_{(A)} = m_{(A)}\boldsymbol{u}_{(A)}$,	4–運動量

*12 T^{j0} : 運動量密度
*13 T^{0k} : エネルギーの束
*14 T^{jk} : ストレス

をもつようにせよ．

$N_{(A)}$ を，粒子自身の静止系で測定された，単位体積あたりの範疇 A の粒子の個数とする．そうすると"数–束のベクトル" $\boldsymbol{S}_{(A)}$ は
*15

$$\boldsymbol{S}_{(A)} \equiv N_{(A)}\boldsymbol{u}_{(A)} \tag{5.14}$$

で定義され，単純な物理的意味を有する成分をもつ．範疇 A の粒子が通常の速度 $\boldsymbol{v}_{(A)}$ をもつ系で，上式の意味は以下のとおりである．

$$S^0_{(A)} = N_{(A)}u^0_{(A)} = N_{(A)}\underbrace{[1-\boldsymbol{v}_{(A)}{}^2]^{-1/2}} = \text{数密度} \tag{5.15a}$$

↑ 粒子の静止系での数密度（$N_{(A)}$）

↑ 体積に対する Lorentz 収縮因子（$[1-\boldsymbol{v}_{(A)}{}^2]^{-1/2}$）

$$\boldsymbol{S}_{(A)} = N_{(A)}\boldsymbol{u}_{(A)} = S^0{}_{(A)}\boldsymbol{v}_{(A)} = \text{粒子の束} \tag{5.15b}$$

したがって，4–運動量密度は成分

$$\begin{aligned} T^{\mu 0}_{(A)} &= p^{\mu}_{(A)}S^0_{(A)} = m_{(A)}u^{\mu}_{(A)}N_{(A)}u^0_{(A)} \\ &= m_{(A)}N_{(A)}u^{\mu}_{(A)}u^0_{(A)} \end{aligned}$$

をもつ．そして垂直方向 $\boldsymbol{e}_j$ をもつ面を横切る運動量の μ 成分の束は

$$\begin{aligned} T^{\mu j}_{(A)} &= p^{\mu}_{(A)}S^j_{(A)} = m_{(A)}u^{\mu}_{(A)}N_{(A)}u^j_{(A)} \\ &= m_{(A)}N_{(A)}u^{\mu}_{(A)}u^j_{(A)} \end{aligned}$$

である．これらの式は正確に幾何学的な，系によらない式

*16
$$\boldsymbol{T}_{(A)} = m_{(A)}N_{(A)}\boldsymbol{u}_{(A)}\otimes\boldsymbol{u}_{(A)} = \boldsymbol{p}_{(A)}\otimes\boldsymbol{S}_{(A)} \tag{5.16}$$

の $\mu, 0$ 成分および μ, j 成分である．$\mathcal{P}$ 近傍の集団内の全粒子に対する，全体の，数–束およびストレス–エネルギーテンソルはすべての範疇についての和をとって得られる．

$$\boldsymbol{S} = \sum_A N_{(A)}\boldsymbol{u}_{(A)} \tag{5.17}$$

$$\boldsymbol{T} = \sum_A m_{(A)}N_{(A)}\boldsymbol{u}_{(A)}\otimes\boldsymbol{u}_{(A)} = \sum_A \boldsymbol{p}_{(A)}\otimes\boldsymbol{S}_{(A)} \tag{5.18}$$

5.5　完全流体に対するストレス–エネルギーテンソル

*17
粒子の速度が等方的に分布していて，粒子が相互作用をしない気体（"理想気体"）ほど単

---

*15　粒子の集団に対する数–束ベクトルの定義

*16　粒子の集団に対するストレス–エネルギーテンソル

*17　理想気体の定義

純な流体の例はない．等方性が成立している Lorentz 系では，対称性によりストレス–エネルギーテンソルの空間–空間の対角成分は等しく，

$$T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} = \sum_{A} \frac{m_{(A)} v_{x(A)}}{(1 - \boldsymbol{v}_{(A)}{}^2)^{1/2}} \frac{N_{(A)} v_{x(A)}}{(1 - \boldsymbol{v}_{(A)}{}^2)^{1/2}} \tag{5.19}$$

そしてすべての非対角成分は消えることが示される．さらに，式 (5.19) は 1 つの結果を提供する．単位体積あたりの粒子の数に，x 方向の速度を掛け（x 方向の束を与える），そして x 方向の運動量を掛けると，圧力 p に対する標準の運動論的な表現を与える．したがって，ストレス–エネルギーテンソルは，この特別な Lorentz 系，すなわち "気体の静止系" で

$$T_{\alpha\beta} = \left\| \begin{matrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{matrix} \right\| \tag{5.20}$$

という形をとる．ここに，量 ρ は構成粒子の静止質量と直接には関係しない．それは，これらの粒子の静止＋運動エネルギーの密度の大きさをとる．

式 (5.20) を気体の静止系での流体の 4–速度 $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ で書き直すと，

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \left\| \begin{matrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{matrix} \right\| \\ &= \rho u_\alpha u_\beta + p(\eta_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta) \end{aligned}$$

あるいは，系によらない幾何学的な言葉で，

*18

$$T = p\boldsymbol{g} + (\rho + p)\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} \tag{5.21}$$

となる．表現（式 5.21）は一般的な応用をもっている．それはまさに考察されている "理
*19 想気体" に対して正確である．それは "完全" などんな流体に対しても正確である．"完全" という意味は，その流体が熱伝導や粘性のような輸送過程によらない．したがって（静止系で）ひずみの応力をもたない（対角のストレステンソル．対角成分は同等である．なぜなら，もしそれらが同等でなかったら，基準系の回転はひずみの応力の存在を暴露するだろう）．しかし，一般的な完全流体に対しては，流体の静止系で測定された質量–エネルギーの密度 ρ は粒子の静止質量＋運動量エネルギーだけでなく，圧縮のエネルギー，核力による結合エネルギーおよびすべての他の質量–エネルギーの源を含んでいる [たとえば図 1.12 に描かれているような，球の中心にサンプル質量をもち，試験粒子がその周りを $\omega^2 = (4\pi/3)\rho$ で小さい振幅の振動をしている理想化された実験で決定されるかもしれない質量–エネルギーの総密度].

*18 理想気体あるいは完全流体に対するストレス–エネルギーテンソル

*19 完全流体の定義

5.6　電磁気的なストレス–エネルギー

Faraday は，電気力線に沿う張力，電気力線に垂直な圧力（図 5.2）という描像で，電磁気学の新しい特徴への洞察を得た．電気力線に沿う張力 $\boldsymbol{E}^2/8\pi$（あるいは $\boldsymbol{B}^2/8\pi$），そして直角に同じ大きさの圧力の他に，Poynting 束 $(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})/4\pi$ およびエネルギー密度に対する Maxwell の表現，$(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)/8\pi$ がある．これらの量はすべて

*20
$$4\pi T^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \tag{5.22}$$

で定義される Maxwell のストレス–エネルギーテンソルに現れる．

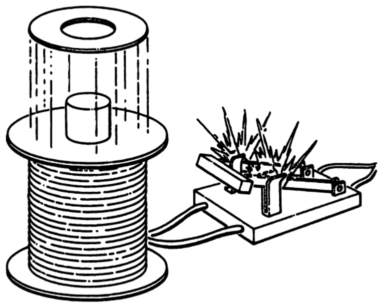


図 5.2　作動中の Faraday 応力．電磁石が交流に結ばれるときには，アルミニウム環は空中に飛び出す．

[練習問題]

5.1

表現（5.22）は，Lorentz 座標系で求めると，次式を与えることを示せ．

$$T^{00} = (\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)/8\pi, \qquad T^{0j} = T^{j0} = (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})^j/4\pi,$$
$$T^{jk} = \frac{1}{4\pi}\left[-(E^jE^k + B^jB^k) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)\delta^{jk}\right] \tag{5.23}$$

ストレス–テンソルは，上述のように，電気力線に沿う張力 $(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)/8\pi$ および電気力線に垂直な圧力 $(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)/8\pi$ を記述することを示せ．

---

*20　電磁場に対するストレス–エネルギーテンソル

5.7 ストレス–エネルギーテンソルの対称性

すでに調べられたすべてのストレス–エネルギーテンソルは対称的であった．それらが対称的以外でありえなかったことは，以下のようにしてわかる．

*21 特別な Lorentz 系で計算せよ．まず運動量密度 (成分 T^{j0}) とエネルギーの束 (成分 T^{0j}) を考えよ．エネルギー = 質量（“$E = Mc^2 = M$”）であるから両者は等しくなければならない．

$$\begin{aligned} T^{0j} &= (\text{エネルギーの束}) \\ &= (\text{エネルギー密度})\times(\text{エネルギーの束の平均速度})^j \\ &= (\text{質量密度})\times(\text{質量の束の平均速度})^j \\ &= (\text{運動量密度}) = T^{j0} \end{aligned} \tag{5.24}$$

ストレステンソル T^{jk} だけが残っている．それには，Newton 理論の場合と同じ標準的な議論を用いる．辺 L，質量–エネルギー $T^{00}L^3$，そして慣性モーメント $\sim T^{00}L^5$ の非常に小さい立方体を考えよ．立方体を中心とする空間座標で，この立方体に周囲から及ぼされるモーメントの z 成分に対する表現は

$$\begin{aligned} \tau^z = {} & \underbrace{(-T^{yx}L^2)}_{\begin{pmatrix}+x\text{ 面に作用す}\\ \text{る力の }y\text{ 成分}\end{pmatrix}} \underbrace{(L/2)}_{\begin{pmatrix}+x\text{ 面への}\\ \text{てこの腕}\end{pmatrix}} + \underbrace{(T^{yx}L^2)}_{\begin{pmatrix}-x\text{ 面に作用す}\\ \text{る力の }y\text{ 成分}\end{pmatrix}} \underbrace{(-L/2)}_{\begin{pmatrix}-x\text{ 面への}\\ \text{てこの腕}\end{pmatrix}} \\ & - \underbrace{(-T^{xy}L^2)}_{\begin{pmatrix}+y\text{ 面に作用す}\\ \text{る力の }x\text{ 成分}\end{pmatrix}} \underbrace{(L/2)}_{\begin{pmatrix}+y\text{ 面への}\\ \text{てこの腕}\end{pmatrix}} - \underbrace{(T^{xy}L^2)}_{\begin{pmatrix}-y\text{ 面に作用す}\\ \text{る力の }x\text{ 成分}\end{pmatrix}} \underbrace{(-L/2)}_{\begin{pmatrix}-y\text{ 面への}\\ \text{てこの腕}\end{pmatrix}} \\ = {} & (T^{xy} - T^{yx})L^3 \end{aligned}$$

である．モーメントは減少する L に対して L^3 のようにしか減少しないのに，慣性能率は L^5 のように減少するから，モーメントは任意に小さい立方体を任意に大きい角加速度にするだろう—これは馬鹿げたことである．これを避けるには，ストレスはモーメントがゼロになるように分布している．すなわち

$$T^{yx} = T^{xy}$$

別な言葉で述べれば，もしストレスがそのように分布していないならば，生ずる無限大の角加速度は瞬時に，ストレスを再分布させて平衡に戻るようにするだろう．モーメント平

*21 ストレス–エネルギーテンソルが対称的であることの証明

衡のこの条件は，他のすべての方向の対に対して繰り返されると，ストレスの対称性に同等である．

$$T^{jk} = T^{kj} \tag{5.25}$$

5.8　4–運動量の保存：積分形式

エネルギー–運動量の保存は1世紀以上にわたり物理学の基礎であった．Einstein による幾何学的な定式化［図 5.3(a)］におけるほど明確に，その本質が光り輝くところはない．そこでは，閉じた3次元の面 $\partial\mathcal{V}$ の境界をもつ時空 $\mathcal{V}$ の4次元の領域が吟味される．粒子と場が $\mathcal{V}$ に流れ込み，その後流れ出るとき，それらは4–運動量を運ぶ．$\mathcal{V}$ 内で粒子は衝突し，分解し，放射する．放射は伝播し，粒子を揺すり，対粒子をつくる．しかしこの複雑な物理的過程の迷路での各段階で，全エネルギー–運動量は保存される．粒子の失うエネルギー–運動量は場に移行する，場の失うエネルギー–運動量は粒子に移行する．したがって最終的に，4–運動量の"川"が $\mathcal{V}$ から去るときは，川は $\mathcal{V}$ に運び込まれたのと正確に同じエネルギー–運動量を運び出す．

*22 この等式を，$\partial\mathcal{V}$ を外に向かって横切る4–運動量全体の束を求めることによって言い直そう．流れ込む4–運動量は負として扱う．そうすると，"入る束は出る束に等しい"ということは，"出る束の全体はゼロである"ことを意味する．

閉じた3次元の表面を横切って外向きに流れ出る
4–運動量の束全体はゼロにならねばならない　(5.26)

全体の外向きの束をもっとも基本的な方法で計算するには，閉じた3–面 $\partial\mathcal{V}$ を大きい数の平坦な3–体積（"ボイラー板"（ボイラー用の鋼板））で，正の方向を外向き（$\mathcal{V}$ から離れる向き）に位置づけて近似せよ．そうすると

$$\boldsymbol{p}_{\text{外向きの全体}} = \sum_{\text{ボイラー板 } A} \boldsymbol{T}(\cdots, \boldsymbol{\Sigma}_{(A)}) = 0 \tag{5.27}$$

ここに $\boldsymbol{\Sigma}_{(A)}$ はボイラー板 A の体積1–形式である．同じことであるが，成分の記号で

$$p^{\mu}{}_{\text{外向きの全体}} = \sum_{A} T^{\mu\alpha} \boldsymbol{\Sigma}_{(A)\alpha} \tag{5.27$'$}$$

計算をほんのわずかだけ精妙にするために，ボイラー板の数を無限大にし，その大きさをゼロにする極限をとれ．結果は積分，

$$p^{\mu}{}_{\text{外向きの全体}} = \oint_{\partial\mathcal{V}} T^{\mu\alpha} d^3\Sigma_{\alpha} = 0 \tag{5.28}$$

である（この節の終わりにある，コラム5.3）．これを（すべての成分の式と同じく）座標によらない次のような表現をする便利な方法と考えよ．

---

*22　4–運動量の保存則の積分形：$\oint_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{T}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} = 0$

$$\boldsymbol{p}_{\text{外向きの全体}} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{T}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} = 0 \tag{5.29}$$

さらにより精妙にして（本書を初めて読む者には勧められない），しかも実際の計算を単純にするには，被積分関数を外微分形式（この節の終わりにある，コラム 5.4）と解釈せよ．

しかし，どのようにそれを計算しようと，またどのように被積分関数を解釈しようと，結果の陳述は単純である．閉じた 3–面を外向きに横切る 4–運動量の全体の束はゼロでなければならない．

*23 図 5.3 に示されている，この“保存則の積分形”のいくつかの特別な例は有益である．一般的な例 (a) の他に示されているのは，次のようなものである．

例 (b)

閉じた 3–面 $\partial\mathcal{V}$ は，特定の Lorentz 系での一定の時刻 t にとられた 2 個の薄片と，これらの 2 個の薄片を連結している“無限遠”での時間的な面とでつくられている．無限遠での面は，もしストレス–エネルギーテンソルがそこで十分に早くゼロになるならば，$\oint_{\partial\mathcal{V}} T^{\mu\alpha} d^3\Sigma_\alpha$ に寄与しない．標準的に方向づけられた 4–体積 $\mathcal{V}$ の境界 $\partial\mathcal{V}$ は，定義により，$\mathcal{V}$ から離れる方向に正の向きをもつ．これは，$\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1$ と書くことによって示されているように，$\mathcal{S}_1$ の非標準的な方向づけ（過去に向かう正の向き）を要求する．それは超曲面積分の値に符号の反転を生み出す．

$$0 = \oint_{\partial\mathcal{V}} T^{\alpha\mu}\, d^3\Sigma_\mu = -\int_{\mathcal{S}_1} T^{\alpha 0}\, dx\, dy\, dz + \int_{\mathcal{S}_2} T^{\alpha 0}\, dx\, dy\, dz$$

$T^{\alpha 0}$ は 4–運動量の密度であるから，この式は

*24

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \text{時刻 } t_1 \text{での全空間に} \\ \text{おける全 4–運動量} \end{pmatrix} &= \int_{\mathcal{S}_1} T^{\alpha 0} dx\, dy\, dz \\ = \begin{pmatrix} \text{時刻 } t_2 \text{での全空間に} \\ \text{おける全 4–運動量} \end{pmatrix} &= \int_{\mathcal{S}_2} T^{\alpha 0} dx\, dy\, dz \end{aligned} \tag{5.30}$$

例 (c)

ここで，2 つの異なる Lorentz 系での $t =$ 一定および $\bar{t} =$ 一定 の，一定時間の薄片である $\mathcal{S}$ および $\bar{\mathcal{S}}$ についての超曲面積分を比較したい．閉じた面をつくるためには，無限遠での時間的な超曲面を加え，それらが積分に寄与しないと仮定する．方向づけは滑らかに合致して，$\mathcal{V} = \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1$, すなわち，$\mathcal{V}_1$ で非標準的な 4–体積の方向づけを用いる限り，閉じた面

$$\partial\mathcal{V} = \bar{\mathcal{S}} - \mathcal{S} + (\text{無限遠での面})$$

---

*23　保存則の積分形の特別な例

*24　全 4–運動量は時間について保存される

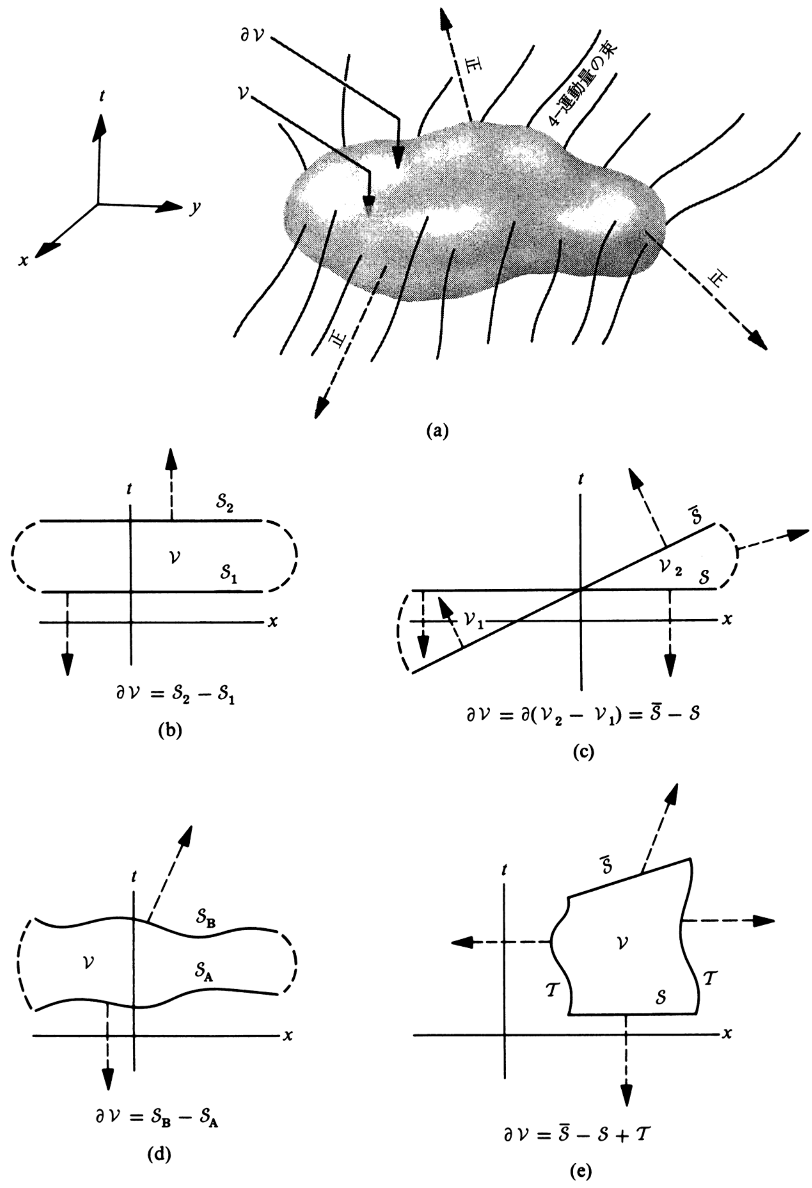


図 5.3　(a) 閉じた 3 次元面 $\partial\mathcal{V}$ によって境界づけられている時空の 4 次元領域 $\mathcal{V}$. $\partial\mathcal{V}$ の正の向きはいたるところ外向き（$\mathcal{V}$ から離れて）であるように定義されている．エネルギー–運動量の保存は，$\partial\mathcal{V}$ を通して $\mathcal{V}$ に流れ込む 4–運動量のすべての断片はどこかで逆に流れ出なければならないことを要求する，何物も内部で失われえない，内部は“流し口”（sink）を含まない．同等に，$\partial\mathcal{V}$ を正の向きに（外側へ向かう）横切る 4–運動量のすべての束はゼロでなければならない．

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} T^{\mu\alpha} d^3\Sigma_\alpha = 0$$

図 (b)，(c)，(d) および (e) は本文が 4–運動量のこの保存則を適用する例を描いている．これらの図におけるすべての記号 $\mathcal{V}$（あるいは $\mathcal{S}$）は標準的な方向づけをもつ時空体積（あるいは空間的な 3–体積）を意味する．点線の矢印は 4–運動量保存の本文の議論で用いられている閉じた面 $\partial\mathcal{V}$ の正の向きを指す．$\partial\mathcal{V}$ がいかにして面 $\mathcal{S}$ および $\mathcal{T}$ から構成されるかは図の下の公式によって指摘されている．たとえば，事例 (b) では，$\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1$ は，$\partial\mathcal{V}$ が標準的な方向づけをもつ $\mathcal{S}_2$ と逆の方向づけをもつ $\mathcal{S}_1$ を結びつけることによってつくられることを意味する．

を与える（“標準的” 対 “非標準的” な方向づけについては，コラム 5.3 の A.1 項をみよ）．そうすると保存則の積分形は

$$0 = \int_{\bar{\mathcal{S}}} \boldsymbol{T} \cdot d^3 \boldsymbol{\Sigma} - \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{T} \cdot d^3 \boldsymbol{\Sigma}$$

*25 を与える．あるいは，同じことであるが，

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\mathcal{S}}} \boldsymbol{T} \cdot d^3 \boldsymbol{\Sigma} &= (\bar{\mathcal{S}}\text{上での全 4–運動量 } \boldsymbol{p}) \\ &= \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{T} \cdot d^3 \boldsymbol{\Sigma} = (\mathcal{S}\text{ 上での全 4–運動量 } \boldsymbol{p}) \end{aligned} \tag{5.31}$$

これは異なる Lorentz 系での観測者は同じ全 4–運動量 $\boldsymbol{p}$ を測定することを述べている．それは観測者が同じ成分を測定することを意味しない（$p^\alpha \neq p^{\bar{\alpha}}$）．むしろ，観測者は同じ幾何学的なベクトル，

$$\boldsymbol{p}_{\mathcal{S}\text{ 上}} = p^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha = \boldsymbol{p}_{\bar{\mathcal{S}}\text{上}} = p^{\bar{\alpha}} \boldsymbol{e}_{\bar{\alpha}}$$

すなわち，成分が通常の Lorentz 変換則でつながるベクトル，

$$p^\alpha = \Lambda^\alpha{}_{\bar{\beta}} p^{\bar{\beta}} \tag{5.32}$$

を測定することを意味する．

例 (d)

ここでは積分への寄与はすべて，時空を完全に横切る 2 つの任意の空間的超曲面，$\mathcal{S}_A$ と $\mathcal{S}_B$ から生ずる．例 (a) および (b) の場合のように，保存則の積分形は

*26
$$\boldsymbol{p}_{\mathcal{S}_A\text{上}} = \boldsymbol{p}_{\mathcal{S}_B\text{上}} \tag{5.33}$$

である．すなわち，**時空を貫く空間的な薄片上の全 4–運動量は選ばれる特別な薄片によらない**－ $\mathcal{S}_A$および $\mathcal{S}_B$ をつなぐ “無限遠での超曲面” を横切るエネルギー運動量の束がゼロである限り．

例 (e)

この例は，時間の経過とともに壁が振動し加速するような箱に関係する．3 次元の境界 $\partial\mathcal{V}$ は，(1) 非標準的方向づけをもつ箱の最初の Lorentz 系における時間 $t =$ 一定 の最初の瞬間の箱の内部 $\mathcal{S}$，(2) 標準的な方向づけをもつ箱の最後の Lorentz 系における $\bar{t} =$ 一定 の箱の内部 $\bar{\mathcal{S}}$，(3) 最初と最後の状態間で，外向きに正の方向をもつ箱の 2 次元の面で
*27 掃過される 3–体積 $\mathcal{F}$ でつくられている．保存則の積分形 $\int_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{T} \cdot d^3 \boldsymbol{\Sigma} = 0$ は

$$\begin{aligned} &(\,\bar{\mathcal{S}}\text{での箱内の全 4–運動量}\,) - (\,\mathcal{S}\text{ での箱内の全 4–運動量}\,) \\ &\quad = (\,\text{状態 } \mathcal{S} \text{ と} \bar{\mathcal{S}}\text{間に箱の表面を通って箱に入る全 4–運動量}\,) \end{aligned} \tag{5.34}$$

---

*25 全 4–運動量はすべての Lorentz 系で同じである
*26 全 4–運動量は測定される超曲面によらない
*27 箱内の 4–運動量の時間的変化は箱の表面を横切る 4–運動量の束に等しい

コラム 5.3　体積分，面積分，そして成分の記号を用いて書かれた Gauss の定理

A. 時空での体積分

1. 3次元の空間との類似によって，ベクトルの稜 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ をもつ“超平行六面体”の体積は

$$4\text{–体積} \equiv \Omega \equiv \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta = \det\begin{Vmatrix} A^0 & A^1 & A^2 & A^3 \\ B^0 & B^1 & B^2 & B^3 \\ C^0 & C^1 & C^2 & C^3 \\ D^0 & D^1 & D^2 & D^3 \end{Vmatrix}$$

$$= {}^*(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{C}\wedge\boldsymbol{D})$$

である．ここでは，3–体積に対するのと同様に，方向づけが重要である．任意の 2 つの稜の交換は Ω の符号を逆にする．任意の 4–体積に対する**標準的な方向づけ**は Ω を正にするものである：こうして，$\boldsymbol{e}_0\wedge\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$ は，もし $\boldsymbol{e}_0$ が未来に向かう方向を示し，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が右手系の三つ組であるならば，標準的な方向づけをもつ．

2. 稜が，標準的な方向づけをもつ特定の Lorentz 系において

$$A^\alpha = (\Delta t, 0, 0, 0), B^\alpha = (0, \Delta x, 0, 0), C^\alpha = (0, 0, \Delta y, 0), D^\alpha = (0, 0, 0, \Delta z)$$

である“体積要素”は，上の定義に従って，次式で与えられる 4–体積をもつ．

$$\Delta^4\Omega = \epsilon_{0123}\Delta t\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = \Delta t\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

3. こうして，時空の 4 次元的な領域 $\mathcal{V}$ 上での，テンソル $\boldsymbol{S}$ の体積積分は

$$\boldsymbol{M} \equiv \lim_{\substack{\text{体積要素}\\ \text{の数}\to\infty}} \sum_{\substack{\mathcal{V}\text{内の体積}\\ \text{要素 }\mathcal{A}}} \boldsymbol{S}_{\mathcal{A}\text{ の中心で}}(\mathcal{A}\text{ の体積})$$

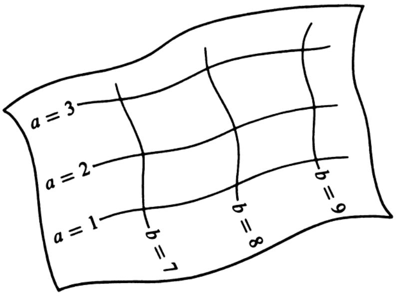
と定義され，Lorentz 系で

$$M^\alpha{}_{\beta\gamma} = \int_\mathcal{V} S^\alpha{}_{\beta\gamma} d^4\Omega = \int_\mathcal{V} S^\alpha{}_{\beta\gamma}\, dt\, dx\, dy\, dz$$

によって計算できる．

B. 時空内の 3–面上の積分

1. 3 次元の面上に任意の座標 a, b, c を導入せよ．座標面で境界づけられた体積要素



$$a_0 < a < a_0 + \Delta a,$$
$$b_0 < b < b_0 + \Delta b,$$
$$c_0 < c < c_0 + \Delta c$$

は，稜

$$A^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial a}\Delta a, \quad B^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial b}\Delta b, \quad C^\gamma = \frac{\partial x^\gamma}{\partial c}\Delta c$$

をもつ．したがってその体積 1–形式は

$$\Delta^3 \Sigma_\mu = \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial a}\frac{\partial x^\beta}{\partial b}\frac{\partial x^\gamma}{\partial c}\Delta a\, \Delta b\, \Delta c$$

である．

2. テンソル $\boldsymbol{S}$ の 3–面 $\mathcal{S}$ 上の積分はこうして成分

$$N^\alpha{}_\beta = \int_{\mathcal{S}} S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma = \int_{\mathcal{S}} S^\alpha{}_\beta{}^\gamma \epsilon_{\gamma\mu\nu\lambda}\frac{\partial x^\mu}{\partial a}\frac{\partial x^\nu}{\partial b}\frac{\partial x^\lambda}{\partial c} da\, db\, dc$$

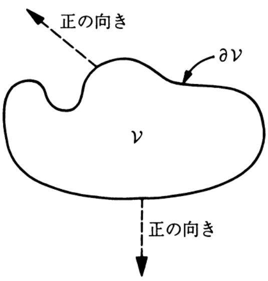
をもつ．Jacobian を含む同等の公式はしばしば用いられる（練習問題 5.5 をみよ）．

$$N^\alpha{}_\beta = \int_{\mathcal{S}} S^\alpha{}_\beta{}^\gamma \frac{1}{3!}\epsilon_{\gamma\mu\nu\lambda}\frac{\partial(x^\mu, x^\nu, x^\lambda)}{\partial(a, b, c)} da\, db\, dc$$

C. Gauss の定理を述べる

1. 閉じた境界 $\partial\mathcal{V}$ をもつ時空 $\mathcal{V}$ の，境界づけられた 4 次元の領域を考えよ．$\partial\mathcal{V}$ 上の体積 1–形式を方向づけて，“正の向き” が $\mathcal{V}$ から外を向くようにする．

2. テンソル場 $\boldsymbol{S}$ を選べ．$\mathcal{V}$ 上でその発散を積分し，$\partial\mathcal{V}$ 上で $\boldsymbol{S}$ そのものを積分せよ．結果は同じでなければならない（**Gauss の定理**）．



$$\int_{\mathcal{V}} S^\alpha{}_\beta{}^\gamma{}_{,\gamma} d^4\Omega = \oint_{\partial\mathcal{V}} S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma$$

D. Gauss の定理の証明

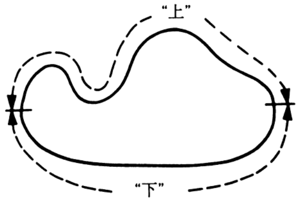
1. $S^\alpha{}_\beta{}^\gamma$ の添字 α および β は “ただついているだけ” であるから，それらを証明か

ら削除できる．そうすると導かれるべき式は

$$\int_{\mathcal{V}} S^{\gamma}{}_{,\gamma}\, dt\, dx\, dy\, dz = \oint_{\partial\mathcal{V}} S^{\gamma} d^3\Sigma_{\gamma}$$

である．

2. 微分の積分はまさに元の関数であるから，$S^0{}_{,0}$ の体積分は



$$\int_{\mathcal{V}} S^0{}_{,0}\, dt\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_{\text{“上”}} S^0 dx\, dy\, dz - \int_{\text{“下”}} S^0 dx\, dy\, dz$$

である．

3. 面積分 $\int_{\partial\mathcal{V}} S^0 d^3\Sigma_0$ は項の同じ集合に帰着できる．

a. $\partial\mathcal{V}$ 上に x, y, z を座標として用いよ．“上” の側では，“正” の向きを $\mathcal{V}$ から離れる方向を示させるために，$d^3\Sigma_0$ は，正でなければならない，したがって（上の B 項をみよ）

$$d^3\Sigma_0 = \epsilon_{0\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial y} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial z} dx\, dy\, dz = \epsilon_{0123} dx\, dy\, dz = dx\, dy\, dz$$

b. “下” の側では，$d^3\Sigma_0$ は負でなければならない，したがって

$$d^3\Sigma_0 = -dx\, dy\, dz$$

c. したがって，

$$\int_{\partial\mathcal{V}} S^0 d^3\Sigma_0 = \int_{\text{“上”}} S^0 dx\, dy\, dz - \int_{\text{“下”}} S^0 dx\, dy\, dz$$

4. 等式は他の成分に対しても同じように証明される．成分を加えると求める結果が得られる．

$$\int_{\mathcal{V}} S^{\gamma}{}_{,\gamma} d^4\Omega = \oint_{\partial\mathcal{V}} S^{\gamma} d^3\Sigma_{\gamma}$$

4 章を勉強した読者のために

コラム 5.4　I. どの積分も形式の積分である
II. Gauss の定理を形式の言葉で表す

I. 5 章に現れたどの積分も外微分形式の積分と解釈できる．この事情は，たとえば，四重および三重積分で，

$$d^4\Omega = \boldsymbol{\varepsilon} = {}^*\mathbf{1} = \varepsilon_{0123}\boldsymbol{dt}\wedge\boldsymbol{dx}\wedge\boldsymbol{dy}\wedge\boldsymbol{dz}$$

および

$$d^3\Sigma_\mu = \varepsilon_{\mu|\alpha\beta\gamma|}\boldsymbol{dx}^\alpha\wedge\boldsymbol{dx}^\beta\wedge\boldsymbol{dx}^\gamma$$

は基底 4–および 3–形式であることで示される（思い出せ：垂直棒の間の添字 $\alpha\beta\gamma$ は $0\leq\alpha<\beta<\gamma\leq 3$ の領域についてのみ和をとるべきである）．記号についてのさらに踏みこんだ解説は下の C にある．

II. 平坦な時空での**テンソルの積分に対する Gauss の定理**は，$\boldsymbol{S} = S^\alpha{}_\beta{}^\gamma\boldsymbol{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{\omega}^\beta\otimes\boldsymbol{e}_\gamma$（成分の形式に対してはコラム 5.3 をみよ）のような任意のテンソルに対して，

$$\int_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S})d^4\Omega = \oint_{\partial\mathcal{V}}\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{\Sigma}$$

となる．それは一般化された Stokes の定理（コラム 4.1）の応用であり，**全体的な Lorentz 系の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\alpha$ と $\boldsymbol{\omega}^\beta$ は定数である，すなわち，x によらないということに依存する**．定義は A で与え，証明は B にある．

A. **テンソルの値をもつ積分**は，平坦な空間では一定の基底ベクトルが使えるから，定義できる．こうして，指定された階数のテンソルに対して

$$\int\boldsymbol{S}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{\omega}^\beta\int S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma$$

が定義される．基底ベクトルと形式は一定で，時空内の位置によらないから，積分記号の外に引き出してよい．数値 $\int S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma$（$\alpha,\beta = 0,1,2,3$ に対して）のおのおのは，そうすると，超曲面に任意の正しい方向づけをもつパラメータ化を行って，これをコラム 4.1（“自由な添字” α および β を含まない計算の部分には任意の曲線的なパラメータ化を行ってよい）に記述されているような 3–形式 $S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma$ に代入してえられる．言い換えれば，$\boldsymbol{S}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{\omega}^\beta\otimes S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma$ は “テンソルの値をもつ 3–形式” と考えられる．積分記号のもとで，積分の 3–面 $\mathcal{P}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ に接する超曲面要素で縮約して積分

$$\int\boldsymbol{S}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} = \int\left\langle\boldsymbol{S}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma}, \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\lambda_1}\wedge\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\lambda_2}\wedge\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\lambda_3}\right\rangle d\lambda^1\,d\lambda^2\,d\lambda^3$$

$$= \boldsymbol{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{\omega}^\beta\int S^\alpha{}_\beta{}^\gamma\varepsilon_{\gamma|\lambda\mu\nu|}\underbrace{\frac{\partial(x^\lambda,x^\mu,x^\nu)}{\partial(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3)}}_{\text{Jacobian}}d\lambda^1\,d\lambda^2\,d\lambda^3$$

をつくる．直交座標から導かれた一定の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{\omega}^\beta$ はここでは本質的であるけれども，**超曲面の完全に一般的なパラメータ化も用いられる**．

B. **Gauss の定理の証明**は計算である．

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{S}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{\omega}^\beta \oint_{\partial\mathcal{V}} S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma \qquad (\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{\omega}^\beta \text{ は一定である})$$
$$= \boldsymbol{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{\omega}^\beta \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{d}(S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma) \qquad (\text{Stokes の定理})$$
$$= \boldsymbol{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{\omega}^\beta \int_{\mathcal{V}} S^\alpha{}_\beta{}^\gamma{}_{,\gamma}{}^*\boldsymbol{1} \qquad (\text{下記をみよ})$$
$$= \int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S})d^4\Omega \qquad (\text{単なる記号})$$

上の計算で欠けている段階は

$$\boldsymbol{d}(S^\alpha{}_\beta{}^\gamma d^3\Sigma_\gamma) = (\partial S^\alpha{}_\beta{}^\gamma/\partial x^\rho)\boldsymbol{d}x^\rho\wedge d^3\Sigma_\gamma$$
$$= (\partial S^\alpha{}_\beta{}^\gamma/\partial x^\gamma){}^*\boldsymbol{1}$$

である．ここで最初の段階では $\boldsymbol{d}(d^3\Sigma_\gamma) = 0$（これは平坦な時空では $\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} =$ 一定から出る）を用いる．次の段階は

$$\boldsymbol{d}x^\rho\wedge d^3\Sigma_\gamma = \delta^\rho_\gamma{}^*\boldsymbol{1}$$

を用いる．[この恒等式の左辺を $\varepsilon_{\gamma|\mu\nu\lambda|}\boldsymbol{d}x^\rho\wedge\boldsymbol{d}x^\mu\wedge\boldsymbol{d}x^\nu\wedge\boldsymbol{d}x^\lambda$ と書け．$\mu\nu\lambda$ についての和で唯一ゼロでない可能な項は，すべて ρ と異なる $\mu < \nu < \lambda$ をもつ項である．右辺はこの項の値である．]

C. **記号の解説**.

電荷密度の 3 形式：

$$^*\boldsymbol{J} = J^\mu d^3\Sigma_\mu = \boldsymbol{J}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma}$$
$$= \underbrace{J^\mu \overbrace{\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}}}_{(^*J)_{\alpha\beta\gamma}}\overbrace{\boldsymbol{d}x^\alpha\wedge\boldsymbol{d}x^\beta\wedge\boldsymbol{d}x^\gamma/3!}^{d^3\Sigma_\mu}$$

Maxwell および Faraday 2–形式：

$$^*\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}d^2S_{\mu\nu}$$
$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\boldsymbol{d}x^\mu\wedge\boldsymbol{d}x^\nu$$

基底 2–形式：

$$\boldsymbol{d}x^\alpha\wedge\boldsymbol{d}x^\beta \qquad (\text{ラベルをつける 1 つの方法})$$
$$d^2S_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu|\alpha\beta|}\boldsymbol{d}x^\alpha\wedge\boldsymbol{d}x^\beta \qquad (\text{ラベルをつける双対的な方法})$$

エネルギー–運動量密度 3–形式：

$$\boldsymbol{T}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} \equiv \underbrace{\boldsymbol{e}_\mu T^{\mu\nu} d^3\Sigma_\nu \equiv {}^*\boldsymbol{T}}$$

最後の添字について双対, $({}^*T)^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} = T^{\mu\nu}\varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma}$

角運動量密度 3–形式：

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma} \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_\mu\wedge\boldsymbol{e}_\nu \mathcal{J}^{\mu\nu\alpha} d^3\Sigma_\alpha \equiv {}^*\boldsymbol{\mathcal{J}}$$

$$({}^*\mathcal{J})^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta\gamma} = \mathcal{J}^{\mu\nu\lambda}\varepsilon_{\lambda\alpha\beta\gamma}$$

5.9 4–運動量の保存：微分形式

任意の“平坦な時空での保存則の積分形”に相補的なものは，“保存則の微分形”であり，同等の情報内容をもっている．両者間を行き来するには Gauss の定理を用いることができる．

4 次元での Gauss の定理は，4–運動量の保存則に適用すると，$T^{\mu\alpha}$ の面積分を $T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}$ の体積分に変換する．

$$0 = \oint_{\partial\mathcal{V}} T^{\mu\alpha} d^3\Sigma_\alpha = \int_{\mathcal{V}} T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}\, dt\, dx\, dy\, dz \qquad (5.35)$$

(基本的な議論についてはコラム 5.3 をみよ．高度の議論についてはコラム 5.4 をみよ.) もし $T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}$ の積分が，任意のそしてすべての 4–体積 $\mathcal{V}$ に対してゼロになるならば，$T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}$ 自身時空のいたるところでゼロにならなければならない．

*28

$$T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0,\ \text{すなわち，いたるところで}\ \nabla\cdot\boldsymbol{T} = 0 \qquad (5.36)$$

(系によらない式 $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$ で, $\boldsymbol{T}$ のどの投入口で発散をとるかは気にする必要はない．投入口は対称であり，どれでも用いることができる.)

式 $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$ は **4–運動量の保存則の微分形**である．それはまた，ストレス–エネルギーテンソルの力学的発展に束縛を課すために，**ストレス–エネルギーに対する運動方程式**とよばれる．単純な系に対するこれらの束縛を吟味することは，式 $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$ の美と力を理解することである．

5.10 $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$ の応用の見本

*29 運動方程式 $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$ は，ほとんど Newton 的な流体に適用されるとき，流体力学の古典的な（Newton 的な）方程式と関係する．このような流体は使用されている Lorentz 系

*28 4–運動量に対する保存則の微分形：$\nabla\cdot\boldsymbol{T}=0$

*29 $|v^j|\ll 1$, $p\ll\rho$ で特徴づけられた Newton 的な流体

に相対的に低い速度をもっている，$|v^j| \ll 1$．そして流体の静止系で，流体の圧力は流体の質量–エネルギー密度に比べて小さい，$p/\rho = p/\rho c^2 \ll 1$．たとえば，ハリケーン内の空気では

$$|v^j| \sim 100\,\mathrm{km/hour} \sim 3,000\,\mathrm{cm/sec} \sim 10^{-7}\,c = 10^{-7} \ll 1,$$

$$\frac{p}{\rho} \sim \frac{1\,\text{気圧}}{10^{-3}\,\mathrm{g/cm^3}} \sim \frac{10^6\,\mathrm{dyne/cm^2}}{10^{-3}\mathrm{g/cm^3}} = 10^9\,\frac{\mathrm{cm^2}}{\mathrm{sec^2}} \sim 10^{-12}\,c^2 = 10^{-12} \ll 1$$

*30　このような流体に対するストレス–エネルギーテンソルは成分

$$T^{00} = (\rho + p)u^0u^0 - p \approx \rho \tag{5.37a}$$

$$T^{0j} = T^{j0} = (\rho + p)u^0u^j \approx \rho v^j \tag{5.37b}$$

$$T^{jk} = (\rho + p)u^ju^k + p\,\delta^{jk} \approx \rho v^j v^k + p\,\delta^{jk} \tag{5.37c}$$

をもち，運動方程式 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 0$ は成分

$$T^{00}{}_{,0} + T^{0j}{}_{,j} = \partial\rho/\partial t + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \quad (\text{“連続方程式”}) \tag{5.38a}$$

そして

$$T^{j0}{}_{,0} + T^{jk}{}_{,k} = \partial(\rho v^j)/\partial t + \partial(\rho v^j v^k)/\partial x^k + \partial p/\partial x^j = 0$$

あるいは，同等な式として（連続方程式と結合して）

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p \quad (\text{“Euler の方程式”}) \tag{5.38b}$$

をもつ．コラム 5.5 は Newton 的な観点からこれらの結果を導き，そして議論する．

*31　$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 0$ の第 2 の適用として，複合系を考える．荷電したビーズを内包したゴムの塊が電磁場と相互作用している．ゴムの塊が振動して，加速したビーズが電磁波を放射する．同時に入射してくる電磁波がビーズを押し，ゴムの塊の振動のパターンを変える．相互作用は，ビーズをもつ塊と電磁場との間で，4–運動量を前後に押したり引いたりする．ブロックと場の 4–運動量はどちらも保存されない．$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}_{(\text{塊})}$ も $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}_{(\text{電磁場})}$ もゼロにならない．しかし全 4–運動量は保存されなければならない．したがって

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{T}_{(\text{塊})} + \boldsymbol{T}_{(\text{電磁場})})\ \text{はゼロにならなければならない} \tag{5.39}$$

任意の源と相互作用している一般的な電磁場に対しては，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}_{\text{電磁場}}$ は

$$T^{\mu\nu}_{(\text{電磁場}),\nu} = -F^{\mu\alpha}J_\alpha \tag{5.40}$$

なる形をもつ（これは $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ を，電磁気的なストレス–エネルギーテンソルに対する式 (5.22)，および Maxwell の方程式と結合して，練習問題 3.18 で導かれた）．われわれのビーズを内包する塊に対しては，$\boldsymbol{J}$ は振動する帯電したビーズと結合した 4–電流であり，$\boldsymbol{F}$ は電磁場のテンソルである．式 (5.40) の時間成分は

*30　Newton 的な流体に対するストレス–エネルギーテンソルと運動方程式
*31　$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 0$ を帯電した振動しているゴムの塊に適用する

$$
\begin{aligned}
T^{0\nu}_{(\text{電磁場}),\nu} &= -F^{0k}J_k = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} \\
&= -\begin{pmatrix}\text{帯電したビーズの単位体積に} \\ \text{電場}\boldsymbol{E}\text{が仕事をする割合}\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.41}
$$

である．比較として，$T^{00}_{(\text{塊}),0}$ は塊のエネルギー密度が時間とともに変化する割合であり，$-T^{0j}_{(\text{塊}),j}$ は，このエネルギー密度の変化の割合に対する塊のエネルギーの束の寄与である．したがって，それらの差 $T^{0\nu}_{(\text{塊}),\nu}$ は以下の意味をもつ．

$$
T^{0\nu}_{(\text{塊}),\nu} = \begin{pmatrix}\text{単位体積あたりの塊の質量–エネルギーが} \\ \text{塊の 1 部分と他の部分間の内部の力学的力} \\ \text{以外の作用によって増加する割合}\end{pmatrix} \tag{5.42}
$$

したがって，保存則

$$
(T^{0,\nu}_{(\text{電磁場})} + T^{0\nu}_{(\text{塊})})_{,\nu} = 0
$$

は，塊の質量–エネルギーは電場がビーズに仕事をするのと正確に同じ割合で増加することを述べている．同様の結果は運動量に対しても成り立つ．

$$
\begin{aligned}
T^{k\nu}_{(\text{電磁場}),\nu}\boldsymbol{e}_k &= -F^{k\nu}J_\nu\boldsymbol{e}_k = -(J^0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}) \\
&= -\begin{pmatrix}\text{ビーズに作用する単位体} \\ \text{積あたりの Lorentz 力}\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.43}
$$

$$
T^{k\nu}_{(\text{塊}),\nu}\boldsymbol{e}_k = \begin{pmatrix}\text{塊の単位体積あたりの運動量} \\ \text{が塊自身のストレス以外の作} \\ \text{用によって増加する割合}\end{pmatrix} \tag{5.44}
$$

したがって，保存則

$$
(T^{k\nu}_{(\text{電磁場})} + T^{k\nu}_{(\text{塊})})_{,\nu} = 0
$$

は，塊の運動量の変化の割合は塊のビーズに働く電磁場の力に等しいことを述べている．

コラム 5.5　Newton 的な流体力学の復習

古典的な，非相対論的な，完全流体を考えよ．Newton の法則 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ を “流体粒子”，すなわち，流体の空間内での進行に沿う小さい固定された質量に適用せよ．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\text{単位質量あたりの運動量}) &= (\text{単位質量あたりの力}) \\
&= \frac{(\text{単位体積あたりの力})}{(\text{密度})} = \frac{-(\text{圧力の勾配})}{(\text{密度})}
\end{aligned}
$$

あるいは

$$
\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p \tag{1}
$$

流体に沿う時間的変化率から，固定された位置で測定された時間的変化率へ翻訳すると，

$$\begin{pmatrix}\text{流体に沿う}\\\text{時間的変化率}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{固定された位置で}\\\text{の時間的変化率}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{流体の}\\\text{速度}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{位置的}\\\text{変化率}\end{pmatrix}$$

あるいは

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p \tag{2}$$

あるいは

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_{i,k}v_k=-\frac{1}{\rho}p_{,i}$$

(ラテン添字は1から3までわたる．和の慣習．上の添字と下の添字は平坦な時空内の空間の次元に対して区別なく用いられている!) これは完全流体の流体力学に対する **Euler の基本的な方程式**である．

完全流体の記述を完全にするために，さらに2つの式が必要である．1つは，比エントロピー（単位質量あたりのエントロピー）は各流体“粒子”に対して一定であることを要求することにより，熱の移動が存在しないことを述べている．

$$\frac{ds}{dt}=0, \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{\partial s}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})s=0 \tag{3}$$

最後の式は質量の保存を表している．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0 \tag{4}$$

あるいは

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+(\rho v_k)_{,k}=0$$

それは，電気力学での電荷の保存を表し，同じ名前“**連続方程式**”をもつ式にどの点でも類似している．

Newton 的なストレス–エネルギーテンソルは，相対論的な対照物のように，運動量と質量の保存につながっている．それゆえ，単位体積内に含まれている，流体の運動量密度，ρv_i の時間変化率を考察する．こうして，

$$\partial(\rho v_i)/\partial t=-(\rho v_i v_k)_{,k}-p_{,i} \tag{5}$$

運動量が，左側で小さい体積要素に流れ込み（“力は運動量の時間変化率に等しい”），そして右側で流れ出す．他の面でも同じである．それゆえ (5) の右辺はこの運動量の束の発散を表さねばならない．

$$\partial(\rho v_i)/\partial t=-T_{ik,k} \tag{6}$$

したがって，運動量の束そのものに対して

$$T^{ik} = T_{ik} = \underbrace{\rho v_i v_k}_{\text{“対流”}} + \underbrace{\delta_{ik} p}_{\text{“推進力”}} \tag{7}$$

をとる．運動量密度に対して，Newton 的な値は

$$T^{0i} = T^{i0} = \rho v_i \tag{8}$$

この記号を用いて，運動量の時間変化率に対する式は

$$\partial T^{i\mu}/\partial x^\mu = 0 \tag{9}$$

となり，$T^{00} = \rho$ を用いて，連続方程式は

$$\partial T^{0\mu}/\partial x^\mu = 0 \tag{10}$$

となる．結論として，これらの Newton 的な考察は相対論的なストレス–エネルギーテンソルに対する適正な近似を与える．

$$\left\| \begin{array}{c|c} \rho & \rho v^j \\ \hline \rho v^i & \rho v^i v^j + \delta^{ij} p \end{array} \right\| \simeq \left\| \begin{array}{c|c} (p+\rho)u^0 u^0 - p & (p+\rho)u^0 u^j \\ \hline (p+\rho)u^0 u^i & (p+\rho)u^i u^j + \delta^{ij} p \end{array} \right\| \tag{11}$$

5.11 角運動量

*32 ストレス–エネルギーテンソルの対称性，$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ により，保存される角運動量 $J^{\alpha\beta}$ を，線形運動量 p^α に類比して定義できる．角運動量は特定の，しかし任意の原点，すなわち特定の Lorentz 系で座標をもつ事象 $\mathcal{A}$ に相対的に定義される．

$$x^\alpha(\mathcal{A}) = a^\alpha \tag{5.45}$$

$\mathcal{A}$ に関する角運動量はテンソル

$$\mathcal{J}^{\alpha\beta\gamma} = (x^\alpha - a^\alpha)T^{\beta\gamma} - (x^\beta - a^\beta)T^{\alpha\gamma} \tag{5.46}$$

を用いて定義される（$x^\alpha - a^\alpha$ は “場の点” x^α の “原点” $\mathcal{A}$ からの間隔を表すベクトルであることに注意せよ．$T^{\alpha\gamma}$ はここでは “場の点” で求められている）．$\boldsymbol{T}$ の対称性により，$\mathcal{J}^{\alpha\beta\gamma}$ はゼロ発散をもつ．

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} &= \delta^\alpha{}_\gamma T^{\beta\gamma} + (x^\alpha - a^\alpha)\underbrace{T^{\beta\gamma}{}_{,\gamma}}_{0} - \delta^\beta{}_\gamma T^{\alpha\gamma} - (x^\beta - a^\beta)\underbrace{T^{\alpha\gamma}{}_{,\gamma}}_{0} \\ &= T^{\beta\alpha} - T^{\alpha\beta} = 0 \end{aligned} \tag{5.47}$$

したがって，角運動量の任意の閉じた 3–面についての積分はゼロになる．

*32 角運動量の定義とその保存則の積分形の導出

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \mathcal{J}^{\alpha\beta\gamma} d^3\Sigma_\gamma = 0 \tag{5.48}$$

（"**角運動量の保存則の積分形**".）

一定の時間 t の空間的な面についての積分は

$$J^{\alpha\beta} = \int \mathcal{J}^{\alpha\beta 0} dx\,dy\,dz = \int [(x^\alpha - a^\alpha)T^{\beta 0} - (x^\beta - a^\beta)T^{\alpha 0}] dx\,dy\,dz \tag{5.49}$$

である．$T^{\beta 0}$ は 4–運動量密度であることを思い出すと，式 (5.49) は Newton 的な理論の式 "$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$" と同じ形をもつことがわかる．したがって，$J^{\alpha\beta}$ に対して "全角運動量" という名前がついている．この保存される角運動量のいろいろな様相は，Newton 的な類似物を含めて，コラム 5.6 で研究される．

［**練習問題**］

5.2　電荷の保存

練習問題 3.16 は，電荷–電流 4–ベクトル $\boldsymbol{J}$ が保存則の微分形 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}$ を満たすことを明らかにした．対応する保存則の積分形を書き，図 5.3 の 4 つの閉曲面に対して説明せよ．

5.3　粒子の生成

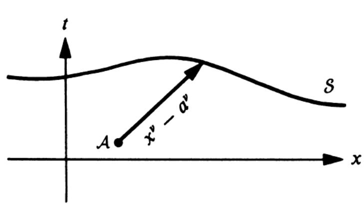
高度に進化した重い星の内部では，温度は非常に高く，電子–陽電子対が絶えずつくられ，また破壊される．$\boldsymbol{S}$ を電子および陽電子に対する数の束のベクトルとして，その発散を

$$\epsilon \equiv \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S} \tag{5.50}$$

によって表せ．Gauss の定理を用いて，ϵ は時空の単位の 4 次元体積内でつくられる粒子の数（破壊される粒子の数）であることを示せ．

コラム 5.6　角運動量

A. 角運動量の定義



(a) 任意の空間的な超曲面 $\mathcal{S}$ と座標 $x^\alpha(\mathcal{A}) \equiv a^\alpha$ をもつ任意の事象 $\mathcal{A}$ をとれ（終始，全面的に慣性座標を用いよ）．

(b) "**$\mathcal{A}$ についての $\mathcal{S}$ 上の全角運動量**" を以下のように定義せよ．

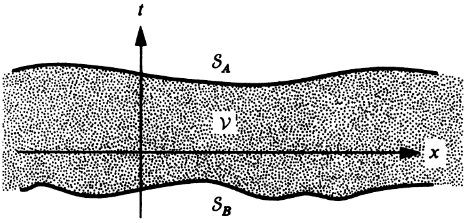
$$J^{\mu\nu} \equiv \int_{\mathcal{S}} \mathcal{J}^{\mu\nu\alpha} d^3\Sigma_\alpha,$$
$$\mathcal{J}^{\mu\nu\alpha} \equiv (x^\mu - a^\mu)T^{\nu\alpha} - (x^\nu - a^\nu)T^{\mu\alpha}$$

(c) もし $\mathcal{S}$ が一定の時間 t の超曲面であるならば，これは

$$J^{\mu\nu} = \int \mathcal{J}^{\mu\nu 0} dx\, dy\, dz$$

となる．

B. 角運動量の保存



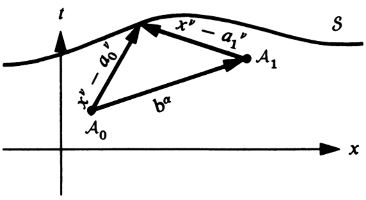
(a) $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ は $\mathcal{J}^{\mu\nu\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ を意味する．

(b) これは $J^{\mu\nu}$ が，**超曲面 $\mathcal{S}$ 上で計算されるとき，この超曲面によらな**いことを意味する（Gauss の定理）．

$$J^{\mu\nu}(\mathcal{S}_A) - J^{\mu\nu}(\mathcal{S}_B) = \int_{\partial\mathcal{V}} \mathcal{J}^{\mu\nu\alpha} d^3\Sigma_\alpha$$
$$= \int_{\mathcal{V}} \mathcal{J}^{\mu\nu\alpha}{}_{,\alpha} d^4x = 0$$

（注意：$\partial\mathcal{V} \equiv$ ($\mathcal{V}$ の境界) は，$\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B$ および空間的な無限遠での時間的な面を含む．後者の寄与は落とす－局所的な源.）

C. 角運動量の計算が準拠している点の変化



b^α を $\mathcal{A}_0$ から $\mathcal{A}_1$ へのベクトルとする，$b^\alpha = a_1{}^\alpha - a_0{}^\alpha$. そうすると

$$J^{\mu\nu}(\mathcal{A}_1\text{について}) - J^{\mu\nu}(\mathcal{A}_0\text{について})$$
$$= -b^\mu \int_{\mathcal{S}} T^{\nu\alpha} d^3\Sigma_\alpha + b^\nu \int_{\mathcal{S}} T^{\mu\alpha} d^3\Sigma_\alpha$$
$$= -b^\mu P^\nu + b^\nu P^\mu$$

ここに P^μ は全 4–運動量である．

D. 固有角運動量

(a) しばらく系の静止系で考える．ここに

$$P^0 = M, \quad P^j = 0, \quad x_{\text{質量中心}}{}^j = \frac{1}{M}\int x^j T^{00} d^3x = \text{質量中心の位置}$$

固有角運動量は，質量中心の世界線上の任意の事象 (a^0, a^j) についての角運動量として定義される．その成分は $S^{\mu\nu}$ と表され，以下のようになる．

$$S^{0j} = 0,\ S^{jk} = \epsilon^{jkl} S_l$$

ここに

$$\boldsymbol{S} \equiv \int (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{質量中心}) \times (\textbf{運動量密度}) d^3x$$
$$\equiv \text{“固有角運動量ベクトル”}$$

(b) “固有角運動量 4–ベクトル”S^μ を定義して，静止系での成分が $(0, \boldsymbol{S})$ であるような 4–ベクトルとする．そうすると上式は

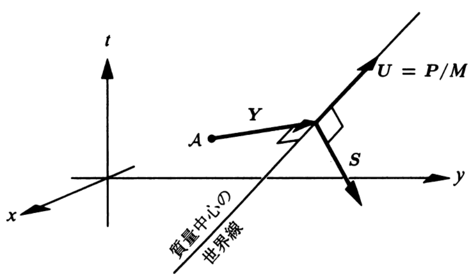
$$S^{\mu\nu} = U_\alpha S_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu},$$
$$U_\beta \equiv P_\beta / M = \text{質量中心の 4–速度},$$
$$U_\beta S^\beta = 0$$

となる．

E. 角運動量の本質的な部分と軌道的な部分への分解

(a) 任意の事象 $\mathcal{A}$ をとり，質量中心の世界線からの垂直な変位が $-Y^\alpha$ であるならば，

$$U_\beta Y^\beta = 0$$



(b) そうすると，C 項により，$\mathcal{A}$ についての角運動量は

$$J^{\mu\nu} = \underbrace{U_\alpha S_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}}_{S^{\mu\nu}(\text{固有})} + \underbrace{Y^\mu P^\nu - Y^\nu P^\mu}_{L^{\mu\nu}(\text{軌道的})}$$

(c) $\mathcal{A}$ についての角運動量，および 4–運動量（したがって 4–速度）を知って，$\mathcal{A}$ から質量中心の世界線へのベクトル，

$$Y^\mu = -J^{\mu\nu} P_\nu / M^2$$

と本質的角運動量，

$$S_\rho = \frac{1}{2} U^\sigma J^{\mu\nu} \epsilon_{\sigma\mu\nu\rho}$$

を計算できる．

[練習問題]

5.4 単位体積あたりの慣性質量

ストレスが作用している媒体が，特定の Lorentz 系に対して通常の速度 $|\boldsymbol{v}| \ll 1$ で運動している場合を考える．

(a) 運動量密度の空間成分は

$$T^{0j} = \sum_k m^{jk} v^k \tag{5.51}$$

であることを Lorentz 変換で示せ，ここに

$$m^{jk} = T^{\bar{0}\bar{0}} \delta^{jk} + T^{\bar{j}\bar{k}} \tag{5.52}$$

および $T^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ は媒体の静止系でのストレス–エネルギーテンソルの成分である．太陽系の中では，$T^{\bar{0}\bar{0}} \gg |T^{\bar{j}\bar{k}}|$（たとえば，5.10 節のハリケーンの議論をみよ)，したがって $T^{0j} = T^{\bar{0}\bar{0}} v^j$，すなわち，“(運動量密度)=(静止質量密度)×(速度)” と書くのが慣習である．しかし，中性子星の中では，$T^{\bar{0}\bar{0}}$ は $T^{\bar{j}\bar{k}}$ と同じ程度の大きさであるだろう．したがって “(運動量密度)=(静止質量密度)×(速度)” を，低速度で，式 (5.51) および (5.52) で置き換えねばならない．

(b) 式 (5.51) および (5.52) を Newton 的な考察と，質量とエネルギーの同等性から導け．(ヒント：体積 V の媒体によって観測者を越えて運ばれる全質量–エネルギーは，静止質量 $T^{\bar{0}\bar{0}} V$ と，体積の面のいたるところに作用する力が体積をある距離だけ “押す” ときにこの力によってなされる仕事との両方を含んでいる．)

(c) 関係式 (5.51) の結果として，ストレスが作用している媒体—それは力を加える人間について静止している—に加速度 dv^k/dt を生じさせるのに要求される単位体積あたりの力は

$$F^j = dT^{0j}/dt = \sum_k m^{jk} dv^k/dt \tag{5.53}$$

である．

この式は m^{jk} を，静止していて，ストレスが作用している媒体の “単位体積あたりの慣性質量” とよぶことを暗示している．一般に m^{jk} は対称な 3–テンソルである．それは完全流体の特別な場合に対してどうなるか？

(d) 実験室系で，静止し平衡している ($T^{\alpha\beta}{}_{,0} = 0$)，孤立した物体を考えよ．

$$M^{ij} = \int_{\substack{\text{ストレスが作用} \\ \text{している物体}}} m^{ij} \, dx \, dy \, dz \tag{5.54}$$

で定義される全慣性質量は等方的であり，物体の静止質量

$$M^{ij} = \delta^{ij} \int T^{00} dx\, dy\, dz \tag{5.55}$$

に等しいことを示せ.

5.5　行列式と Jacobian

(a)

$$d^2 S_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial a} \frac{\partial x^\beta}{\partial b} da\, db$$

における $d^2 S_{01}$ を定義する和を明確に書け. それによって公式

$$d^2 S_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu|\alpha\beta|} \frac{\partial(x^\alpha, x^\beta)}{\partial(a,b)} da\, db = \frac{1}{2!} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial(x^\alpha, x^\beta)}{\partial(a,b)} da\, db$$

を確立せよ（このような表現は積分記号のもとでのみ起こる. この練習問題では, 必要な場合には $\int \cdots$ を与えてもよいし, あるいはまた, 外計算法, $da\, db \to \boldsymbol{da} \wedge \boldsymbol{db}$ で微分を解釈してもよい. コラム 5.4 をみよ). Jacobian に対してここで用いられている記号は

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(a,b)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial a} & \dfrac{\partial f}{\partial b} \\ \dfrac{\partial g}{\partial a} & \dfrac{\partial g}{\partial b} \end{vmatrix}$$

である.

(b) 特別な場合について同様な計算をして,

$$d^3 \Sigma_\mu \equiv \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial a} \frac{\partial x^\beta}{\partial b} \frac{\partial x^\gamma}{\partial c} da\, db\, dc = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \frac{\partial(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma)}{\partial(a,b,c)} da\, db\, dc$$

を示せ.

(c) 行列式の, 各行から 1 つの因数, それと同時に各列から 1 つの因数を含む積である項（適当に交替する符号をもつ）の和としての値の明確な定義を引証せよ. この定義は（4×4 の場合で表すが, $p \times p$ の場合は明白に拡張される）

$$\det A \equiv \det \| A^\lambda{}_\rho \| = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} A^\alpha{}_0 A^\beta{}_1 A^\gamma{}_2 A^\delta{}_3$$

として述べられうることを示せ.

(d)

$$\det A = \frac{1}{4!} \delta^{\mu\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta} A^\alpha{}_\mu A^\beta{}_\nu A^\gamma{}_\rho A^\delta{}_\sigma$$

（$\delta^{\mu\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ の定義については練習問題 3.13 および 4.12 をみよ）を示せ.

(e) δ 記号の性質を用いて, A の逆行列 A^{-1} は要素 $(A^{-1})^\mu{}_\alpha$ をもち, これは

$$(A^{-1})^\mu{}_\alpha (\det A) = \frac{1}{3!} \delta^{\mu\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta} A^\beta{}_\nu A^\gamma{}_\rho A^\delta{}_\sigma$$

で与えられることを示せ.

(f) “添字力学” の計算によって, (d) における $\det A$ に対する公式から, 行列式の対数の微分に対する次の表現

$$\boldsymbol{d}\ln|\det A| = \text{トレース}\ (A^{-1}\boldsymbol{d}A)$$

を導け．ここに $\boldsymbol{d}A$ は行列 $\|\boldsymbol{d}A^\alpha{}_\mu\|$ であり，その要素は 1–形式である．

5.6 セントロイドと大きさ

ストレス–エネルギーテンソル $T^{\mu\nu}$, 全 4–運動量 P^α, 4–運動量の大きさ $M = (-\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P})^{1/2}$, 本質的な角運動量テンソル $S^{\alpha\beta}$，および本質的な角運動量ベクトル S^α をもつ孤立系を考える（コラム 5.6 をみよ）．4–速度 u^α をもつ観測者は，彼の Lorentz 時間 $x^0 = t$ および彼自身の Lorentz 系で，系の**セントロイド**を

$$X^j_{\boldsymbol{u}}(t) = (1/P^0)\int_{x^0=t} x^j T^{00} d^3x \qquad \boldsymbol{u} = \partial\mathcal{P}/\partial x^0 \text{の Lorentz 系} \tag{5.56}$$

で定義する．この中心軌跡は，(i) 特別な系が考慮されていること，(ii) 観測者の 4–速度 $\boldsymbol{u}$，そして (iii) 系が観測される時間 t に依存する．

(a) セントロイドは 4–速度

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{P}/M \tag{5.57}$$

に対応して一様な速度

$$dX^j_{\boldsymbol{u}}/dt = P^j/P^0 \tag{5.57$'$}$$

で動くことを示せ．この “セントロイドの 4–速度” は，セントロイドを定義するときに用いられた 4–速度 $\boldsymbol{u}$ によらないことに注意せよ．

(b) 系の静止系と関連したセントロイド（すなわち，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}$ で定義されたセントロイド）は**質量中心**とよばれる．コラム 5.6 をみよ．$\boldsymbol{\xi_u}$ を，質量中心の世界線上の任意の事象から 4–速度 $\boldsymbol{u}$ と関連したセントロイドの世界線上の任意の事象にいたるベクトルとし，こうして任意の座標系で $\boldsymbol{\xi_u}$ の成分は

$$\xi^\alpha_{\boldsymbol{u}} = X^\alpha_{\boldsymbol{u}} - X^\alpha_{\boldsymbol{U}} \tag{5.58}$$

である．$\boldsymbol{\xi_u}$ は式

$$[(\xi^\alpha_{\boldsymbol{u}} P^\beta - P^\alpha \xi^\beta_{\boldsymbol{u}}) - S^{\alpha\beta}]u_\beta = 0 \tag{5.59}$$

を満たすことを示せ．[ヒント：$\boldsymbol{u} = \partial\mathcal{P}/\partial x^0$ が成り立つ Lorentz 系で計算を遂行せよ．]

(c) 任意に与えられた時刻での系の静止系でみたとき，上式は 3 次元 Euclid 的な式

$$\boldsymbol{\xi_u} = -(\mathbf{v}\times\mathbf{S})/M \tag{5.59$'$}$$

に帰着することを示せ．ここに $\mathbf{v} = \boldsymbol{u}/u^0$ は中心軌跡と関連した系の通常の速度である．

(d) 任意の観測者が時空の任意の場所で測定するエネルギー密度は負でない（すべての時間的な $\boldsymbol{u}$ に対して $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}\geq 0$）と仮定せよ．系の静止系で，$\mathbf{S}$ に平行で系全体を含む最小の可能な円筒をつくれ（円筒の外部ではいたるところ $T_{\alpha\beta} = 0$）．この円筒の半径 r_0 は

$$r_0 \geq |\mathbf{S}|/M \tag{5.60}$$

で制限されることを示せ．こうして，与えられた本質的な角運動量 $\boldsymbol{S}$ と与えられた質量 M をもつ系は，その静止系で測定したとき極小の可能な大きさ $r_{0\,極小} = |\boldsymbol{S}|/M$ をもつ．

6章
加速された観測者

客観的世界はただそこにある．生じるのではない．この世界の一断面は，私の体の生命線（世界線）に沿ってゆっくり進んでいく意識の注視に対してのみ，時間の中で絶えず変化する空間内で過ぎ去っていくイメージとして，息づくのだ．

HERMANN WEYL (1949，p.116)

6.1 加速された観測者は特殊相対性理論を用いて解析されうる

重力を解析するには，重力が加速度によってあざむかれる事情を考えることが役に立つ．任意の引力を及ぼしている物質から非常に遠く離れた領域に注意を集中せよ．そうすれば乱されることがないので，（要求されるある精度までは）そこでの時空は平坦であり，Lorentz 幾何学をもつと考えられる．観測者が脚にジェットロケットをくくりつけられているか，あるいはロケットで推進されている宇宙船内にいるせいで，重力を受けていると感じるようにさせよ．物理現象は彼にどうみえるだろうか？

誰かこの問いに答えてみないか？ 実際は加速されている宇宙船内にいるのに，自分は重力場にいると思っている観測者によってどんな物理的効果が観測されるか，本書のこんなに早い段階で予言するには，重力物理学についてあまりに知らなさすぎではないだろう
*1 か？ いや，まるっきりその反対なのだ．特殊相対性理論はまさしく，たとえば加速されている電荷の放射など，加速されている物体の物理現象も予知するためにつくられたのである．原子核内に閉じ込められている中性子が受ける途方もない加速度

$$a_{核} \sim v^2/r \sim 10^{31}\,\mathrm{cm/sec^2} \sim 10^{28} \times \text{“地球の重力”}$$

さえも，そして高エネルギー粒子の散乱でお目にかかるさらに大きな加速度さえも，特殊相対性理論の枠組の中で，決まった手順で正確に扱われるのである．反陽子の消滅とか，ストレンジネスをもつ粒子の共鳴に自信をもって特殊相対性理論を適用する理論家であれば，“地球の重力はどこまでも”とうたい上げる旅行ガイドにだまされ信じ込んでいるロケットの乗客のたかが幻影など，怖れようはずがない．時空が平坦なときは，誰がどう動こうが，特殊相対性理論で扱うことができる（特殊相対性理論はもっと大きなものでも扱える．コラム 6.1 をみよ）．特殊相対性理論による扱い方の本質的な特徴を，本章の残りの部分はス

*1 加速された運動および加速された観測者は特殊相対性理論を用いて解析されうる

キップするトラック–1 読者のために，また本章の残りを読むうえでこれが役に立つ基礎知識となるであろうトラック–2 読者のために，コラム 6.2 に要約しておく．

コラム 6.1　一般相対性理論は特殊相対性理論に基づいている

動力を備えた惑星間旅行ロケット内の旅行者は “重力” を感じる．物理学者は局所的な作用によって，この “重力” はにせものであると旅行者を確信させることができるか？　けっして確信させることができない，と Einstein の重力と加速度の局所同等性の原理は言う．しかしそうすると，物理学者は真の重力を加速度によって引き起こされる局所的な幻影として取り扱うという思い違いをしても，誤りを犯していないことになるだろう．この思い違いのもとで，物理学者はしゃにむに突き進み，重力的な問題を特殊相対性理論を用いて解く．もし彼があらゆる問題を，そのような思い違いのもとでも解ける局所的な問題のネットワークに分割する賢明さをもち合わせていれば，彼は任意の重力場のすべての影響を解きうることになる．頼る基本的な原理は 3 つだけで，特殊相対性物理学，等価原理，そして物理現象の局所的性質である．それらは単純で明白である．しかし，それらを適用することは，二重の仕事を課する．(1) 時空を局所的に平坦な断片（そこでは局所同等性の原理が成り立っている）に分ける，そして (2) これらの断片を理解できる描像に再構成する．この解体と再構成に取り組むこと，曲がった力学的な時空が不可避的に形をなすこと，そして物理現象への帰結をみること，それが一般相対性理論である．

コラム 6.2　加速された観測者の要約

加速されている観測者は時計と物差しを携行でき，それらを用いて自らの近傍に基準系（座標系）を組み立てることができる．

彼の時計は，もし注意深く選ばれ，加速度によるその構造への影響が無視されるならば（たとえば，原子時計），一瞬の間彼とともに動く加速されていない時計と同じ割合で時を刻むだろう．

$$\Delta\tau \equiv \left(\begin{array}{l}\text{観測者が自らの世界線に沿って}\\ \text{変位ベクトル}\,\boldsymbol{\xi}\,\text{動くときに，彼}\\ \text{の時計が刻む時間間隔}\end{array}\right) = [-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})]^{1/2}$$

そして彼の物差しは，もし十分硬いものとされているならば，一瞬の間彼とともに動く，加速されていない物差しと同じ長さを測定するだろう（さらなる議論に対しては，16.4 節およびコラム 16.2 から 16.4 までをみよ）．

観測者の座標系を物差しと時計の直角格子細工とし，格子の原点がつねに彼の世界

線上にあるようにする．彼は格子細工を小さく保たねばならない．

$$l \equiv \begin{pmatrix} \text{格子の空} \\ \text{間の次元} \end{pmatrix} \ll \begin{pmatrix} \text{彼が携行する加速度計に} \\ \text{よって測定される加速度} \end{pmatrix}^{-1} \equiv \frac{1}{g}$$

彼の世界線から l 離れた距離で，次元をもたない大きさ gl の奇妙なことが彼の格子に起こる—たとえば，加速度計で測定された加速度が g とわずかな量 $\sim gl$ だけ異なる（練習問題 6.7）．また，初めに彼の世界線上の時計と合わせられた時計はわずかな量 $\sim gl$（練習問題 6.6）だけ歩調がずれる（異なる割合で時を刻む）．（"地球の重力" の加速度は

$$g^{-1} \sim 10^{-3}\,\mathrm{sec}^2/\mathrm{cm} \sim 10^{18}\mathrm{cm} \sim 1\ \text{光年}$$

に対応する．したがって制限 $l \ll 1/g$ は通常厳しくないことに注意せよ．）

加速される観測者によってなされる実験と観測の結果を導き出すために，それらを座標によらない幾何学的な表現で解析し，それから結果を加速された系の基底ベクトルに射影できる．または，実験と観測を Lorentz 系で解析し，それから加速された系に変換することができる．

このように導き出されると，加速された観測者によって局所的に（$l \ll 1/g$ で）なされた実験結果は Lorentz 系でなされた同じ実験の結果と 3 つの点でのみ異なる．

(1) 上に述べられた $gl \ll 1$ 程度の複雑でわずかな相違があり，それは加速される系を十分に小さくすることによって無視されうる．

(2) Newton 的理論に出てくる正確に同じ型の Coriolis の力（練習問題 6.8）がある．観測者が注意深く格子細工が回転するのを妨げることによって，たとえば，格子細工をジャイロスコープに結びつけ，その質量中心に加わる力によって観測者が加速されることにより，この力を除去できる（モーメントがない!）．このような非回転の格子細工は "Fermi–Walker 変換された" 基底ベクトルをもつ（6.5 節）．

$$\frac{d\boldsymbol{e}_{\alpha'}}{d\tau} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_{\alpha'}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_{\alpha'}) \tag{1}$$

ここに $\boldsymbol{u}$ = 4–速度，および $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{u}/d\tau$ = 4–加速度である．

(3) Newton 的理論に，正確に同じ型の慣性力が現れる（練習問題 6.8）．これは観測者の加速度によるものであり，自らの加速を止めることによる以外にこの力を除去できない．

[本章の以後はトラック–2 である．それは前述のトラック–2 の教材によらない．また，以下に対する準備として必要である．(1) 曲がった時空におけるジャイロスコープの数学的な解析（練習問題 19.2，40.7 節），および (2) 加速された観測者の固有の基準系の数学的な理論（13.6 節）．それは重力理論の多くの応用に有用であるだろう（18–40 章）．]

6.2　双曲線運動

平坦な時空内で加速されているために"重力"を感じるロケット旅行者を考える．慣性系に相対的な彼の運動を記述することから始めよう．彼の 4–速度は条件 $\boldsymbol{u}^2 = -1$ を満たす．その大きさが固定されているということは，4–加速度，

$$\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{u}/d\tau \tag{6.1}$$

が 4–速度に直交しているということである．

$$0 = (d/d\tau)(-1/2) = (d/d\tau)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\right) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u} \tag{6.2}$$

この式は，旅行者の静止系（問題の瞬間に，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_0$ である Lorentz 系）で $a^0 = 0$ を意味している．この系で，a^μ の空間成分は加速度の通常の定義，$a^i = d^2x^i/dt^2$ に帰着する．そうすると，静止系における成分 $a^\mu = (0; a^i)$ から，静止系での加速度の大きさは単純な不変量として計算されうる．

$$\boldsymbol{a}^2 = a^\mu a_\mu = (d^2\mathbf{x}/dt^2)^2_{\text{静止系で測定される}}$$

シンプルにするために，つねに一定の加速度 g を感じる観測者を考える．加速度をある慣性系の x^1 方向にとり，$x^2 = x^3 = 0$ をとる．その慣性系における観測者の運動に対する式は

$$\frac{dt}{d\tau} = u^0, \qquad \frac{dx}{d\tau} = u^1; \qquad \frac{du^0}{d\tau} = a^0, \qquad \frac{du^1}{d\tau} = a^1 \tag{6.3}$$

となる．3 つの代数方程式を

$$u^\mu u_\mu = -1,$$

$$u^\mu a_\mu = -u^0 a^0 + u^1 a^1 = 0$$

および

$$a^\mu a_\mu = g^2$$

と書く．加速度に対して解くと

$$a^0 = \frac{du^0}{d\tau} = gu^1, \qquad a^1 = \frac{du^1}{d\tau} = gu^0 \tag{6.4}$$

が得られる．これらの線形微分方程式はただちに解くことができる．解は，原点を適当に選んで，

$$t = g^{-1}\sinh g\tau, \qquad x = g^{-1}\cosh g\tau \tag{6.5}$$

[*2] となる．$x^2 - t^2 = g^{-2}$ に注意する．世界線は時空図で双曲線（"双曲線運動"，図 6.1）である．この運動の若干の面白い様相は練習問題で取り扱われる．一定の加速度 g の大きさを地球

[*2] 一様に加速される観測者は時空図で双曲線上を動く

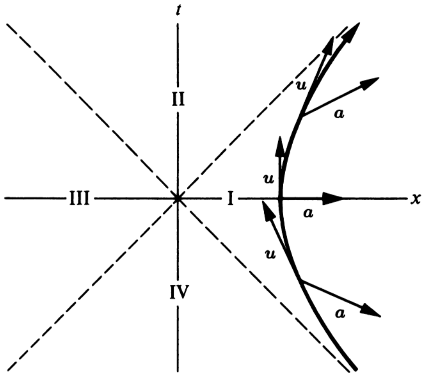


図 6.1 双曲線運動．瞬間的に共運動している慣性系（異なる瞬間には異なる慣性系！）についてつねに固定された加速度 g を体験する物体（あるいは観測者）の世界線．4–加速度 $\boldsymbol{a}$ はいたるところで 4–速度 $\boldsymbol{u}$ に直交する（Lorentz 幾何学！）．

上で経験される重力加速度 $g = 980\,\mathrm{cm/sec^2}$，$g \simeq (10^3\,\mathrm{cm/sec^2})/(3\times10^{10}\,\mathrm{cm/sec})^2 = (3\times10^7\,\mathrm{sec}\cdot3\times10^{10}\,\mathrm{cm/sec})^{-1} = (1\,光年)^{-1}$ とする．こうして観測者は，1 年くらいの彼自身の固有時の間この加速度を保った後，相対論的な速度に達するだろう．もし彼が 1 光年あるいはそれ以上光子に先行するならば，彼は光子を振り切ることができる．

［練習問題］

6.1 銀河系の中核への旅行

宇宙船に乗っている人が地球から銀河核までの $\sim 30{,}000$ 光年を旅行するのに要する固有時間を計算せよ．彼らは旅行の半分について“地球の重力”（$10^3\,\mathrm{cm/sec^2}$）と同じ加速度を保持し，それから残りの半分について“地球の重力”で速度を落とすと仮定せよ．

6.2 ロケットの有効搭載量

ロケットの初期質量の何割が練習問題 6.1 で考えられた旅行の有効搭載量になりうるか？静止質量を放射に転換し，すべての放射を 100%の効率で完全に平行にロケットの背後に吐き出す理想的なロケットを仮定せよ．

6.3 双子のパラドックス

(a) 2 つの事象 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ を結ぶすべての時間的な世界線の中で，固有時間がもっとも長く経過するものは加速を受けないものであることを示せ．（ヒント：加速を受けない世界線の慣性系で計算を遂行せよ．）

(b) 双子の 1 人は加速を受けない世界線に沿って $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ まで動くことを選ぶ．もう 1 人は加速度を適当に選んで，任意に小さい固有時間で $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ に到達できることを示せ．

(c) もし 2 番目の双子が，地球の重力 g をけっして越えないと感じる加速度で，快適に車に乗って行くことを選ぶならば，彼が $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の間で達成できる最小の固有時間の経過はどれほどか？ 答えを g と加速を受けない双子によって測定される固有時間の経過 $\Delta\tau$

で表せ．

(d) 若干の興味ある旅行について数値で答えを求めよ．

6.4　速度表示器としてのレーダー

レーダー装置は標準的な振動数で信号を発し，その振動数を他の対象によってはね返される信号の振動数と比較することによって，対象の速度を測定する．この赤方偏移の測定は，標準的な特殊相対性理論の公式を用いて，相当する速度に変換され，レーダーはこの速度を読み出す．このレーダーは一様に加速された観測者に対して速度の測定器具としてどれくらい有用であるか？

(a) この問題をまず，対象とレーダー装置が，レーダーパルスが反射される瞬間に互いに他に対して静止している特別な場合について考える．レーダー装置がこの場合に測定する赤方偏移 $1+z=\omega_e/\omega_0$ を求め，また，それにより暗示される対象の速度（不正確な）を計算せよ．状況の対称性を用いて単純化せよ．

(b) さて，対象がレーダーパルスを反射する時点での観測者の瞬間的な静止系で，対象がゼロでない速度をもっている状況を考える．レーダー装置によって読み取られる対象の速度に対する，実際の相対速度の比を求めよ．

6.5　距離表示器としてのレーダー

レーダーを，距離を測定する装置として用いる．レーダー装置は，パルスを放射する瞬間と反射されたパルスを後で受信する瞬間との間の固有時間 τ を測定する．そうすると，レーダー装置は $L_0=\tau/2$ という単純な計算をして，出力として "距離" L_0 を与える．レーダー装置の出力の読みは，一様に加速された観測者によってレーダー装置が用いられるとき，どれくらい正確に対象までの実際の距離 L を測定するか？（L はパルスが反射される瞬間の観測者の一瞬の静止系における距離として定義され，観測者の固有時間でパルスを放出し受信する間の中間である）．$L_0\equiv\tau/2$ を実際の距離 L に関係づける正しい公式を示せ．L が g^{-1} に近づくと読み L_0 が無限大になることを示せ．ここに，g は観測者が携行する加速度計で測定された観測者の加速度である．

6.3　加速される系のサイズに対する制約

*3　語をつなぎ合わせて "加速される観測者の座標系" というのはいとも簡単だが，この言葉が指している概念を突き止めるのはずっとずっと難しい．これらの言葉についてなしうるもっとも有用な意見は，もし真面目に受け取るならば，それらは自己矛盾であるということである．この文句に定冠詞 "the" がついているのは，当然，世界線が式 (6.5) で与えられるようなある特定の加速される観測者と結びつく唯一の座標系を考えていることを示唆する．もし座標系が実際正常であるならば，任意の事象の座標は十分気の利いた観測者

*3　"加速される観測者" の座標系作成の困難

[*4] により，光信号の送受信によって決められると期待するだろう．しかし，すべての時空の1/4 を構成する事象（領域 III）は，特定の観測者に光信号を送ることも，また，観測者から光信号を受けることもできないことは図 6.1 から明らかである．時空の他の半分はこの点についてより小さい制約を受ける．領域 II は観測者に光信号を送ることができず，領域 IV は観測者から光信号を受けることができない．観測者が，自分といかなる因果的な関係ももたず，自分がみることも自分をみられることもできない事象を覆う座標系を，どんな自然な方法でどのようにして定義できるかをみるのは難しい！

1 つの系での静止から始まって，しばらく加速された後は一定速度を保持し，別な慣性系からみれば静止しているような観測者を考えると，また困難が生ずる．彼の運動は何らかの自然な方法で 1 つの座標系を定義するだろうか？ もしそうだとするとこの座標系は (1) 彼が 0 よりも小さい時間 x^0 に対して静止していた慣性系 x^μ であるはずであり，そして (2) 彼が他の系で静止していた時間 $x^{0'} > T'$ に対して他の慣性系 $x^{\mu'}$ であるはずである．これら 2 つの条件で決まらない領域で座標をどう定義するかを決めるには，明らかに何かさらなる思索が要求されるだろう（図 6.2）．[*5] しかしこれら 2 つの条件は，同時に $x^0 < 0$ と $x^{0'} > T'$ を満たす時空の領域に対して矛盾を含んでいるという事実は，より深刻である．座標系を定義する上での深刻な困難が，加速される運動の両方の例（図 6.1 と図 6.2）で，加速される観測者の世界線から有限の距離 g^{-1} だけ離れた位置で初めて始まる．世界線から g^{-1} よりも大きい距離に対して，問題は明らかに，解をもたない．観測者のごく近傍では自然な解がある．この解は “Fermi–Walker 移動された直交テトラッド” という名で知られる．本質的なアイデアは以下のように，双曲線運動に対する単純な図解に適している．

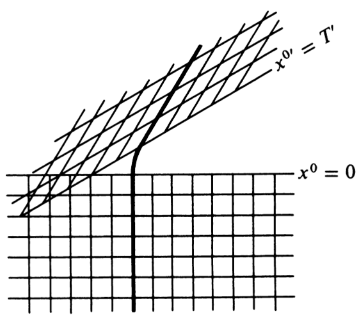


図 6.2 短い期間，加速度を経験した観測者の世界線．一定速度で運動しているおのおのの段階では，慣性系が設定されうる．しかし，重複する領域（加速度の領域の左方へ距離 g^{-1} で始まる）でこれらの一致しない座標を調和させる方法は存在しない．

6.4 一様に加速された観測者によって移動されるテトラッド

[*6] 座標系の無限小バージョンは “テトラッド” (tetrad, 四つ組)，あるいは “動く系” (Cartan

[*4] 観測者と距離 $l >$ (加速度)$^{-1}$ だけ離れた事象の間のコミュニケーションの断絶
[*5] 距離 $l >$ (加速度)$^{-1}$ だけ離れた位置で不整合な自然座標
[*6] 一様に加速される観測者によって移動される基底ベクトルの直交テトラッド

の“動く枠”)，あるいは基底ベクトルの組 $\boldsymbol{e}_{0'}$，$\boldsymbol{e}_{1'}$，$\boldsymbol{e}_{2'}$，$\boldsymbol{e}_{3'}$（下つき添字はどのベクトルかを表し，1 つのベクトルのどの成分かを表していない!）によって与えられる．時間軸は観測者がそこで一瞬静止している，共運動している慣性系の時間軸とする．こうしてゼロの基底ベクトルは観測者の 4–速度と同等である．$\boldsymbol{e}_{0'} = \boldsymbol{u}$．空間軸 $\boldsymbol{e}_2$ および $\boldsymbol{e}_3$ は 1–方向の Lorentz 変換によって影響を受けない．したがって $\boldsymbol{e}_{2'}$ と $\boldsymbol{e}_{3'}$ をすでに式 (6.5) で記述されている観測者の双曲線運動など，すべてを含む Lorentz 系の単位基底ベクトルとなるようにとる．$\boldsymbol{e}_{2'} = \boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_{3'} = \boldsymbol{e}_3$．残りの基底ベクトル $\boldsymbol{e}_{1'}$ は，他の 3 つに直交しており，加速度ベクトル，$\boldsymbol{e}_{1'} = g^{-1}\boldsymbol{a}$ に平行である [式 (6.4) をみよ]．この動いている系を特徴づける，より満足な方法がある．時間軸 $\boldsymbol{e}_{0'}$ は観測者の 4–速度であるから観測者はこの系でつねに静止している．そして他の 3 つのベクトル $\boldsymbol{e}_{i'}$ は (1) 直交し，(2) 非回転であるように選ばれる．これらの基底ベクトルは

$$\begin{aligned}(e_{0'})^\mu &= (\cosh g\tau; \sinh g\tau, 0, 0),\\ (e_{1'})^\mu &= (\sinh g\tau; \cosh g\tau, 0, 0),\\ (e_{2'})^\mu &= (0; 0, 1, 0),\\ (e_{3'})^\mu &= (0; 0, 0, 1)\end{aligned} \tag{6.6}$$

である．これら 4 つの基底ベクトルを得る簡単な処方箋がある．元の大域的な Lorentz 基準系の 4 つの基底ベクトル $\boldsymbol{e}_0$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ をとり，それらに 1–方向の簡単なブーストを適用し，その大きさを $\boldsymbol{e}_{0'}$ が観測者の 4–速度と一致するようにする．これらのベクトルはすべて互いに直交し，単位の大きさであるということは，形式的に式

$$\boldsymbol{e}_{\mu'} \cdot \boldsymbol{e}_{\nu'} = \eta_{\mu'\nu'} \tag{6.7}$$

によって述べられる．

6.5　任意の加速度をもつ観測者によって Fermi–Walker 移動されるテトラッド

さて双曲線運動をしている観測者，あるいは事象から，つねに有限で，任意に時間とともに変化する加速度をもつ観測者あるいは事象に移ろう．ここでもまた，われわれは動いている無限小の基準系，すなわちテトラッドに 3 つの基準を課する．(1) テトラッドの基底ベクトル $\boldsymbol{e}_{\mu'}$ は直交を保たなければならない [式 (6.7)]．(2) 基底ベクトルは各瞬間における観測者について静止系をつくらねばならない（$\boldsymbol{e}_{0'} = \boldsymbol{u}$）．そして (3) テトラッドは“非回転”でなければならない．[*7]

この最後の基準には議論を要する．任意の固有時間 τ でのテトラッドの基底ベクトルは，Lorentz 変換 $\boldsymbol{e}_{\mu'}(\tau) = \Lambda^{\nu}{}_{\mu'}(\tau)\boldsymbol{e}_{\nu}$ によって，与えられたある慣性系の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_0$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ に関係づけられなければならない．したがって，相次ぐ 2 つの瞬間での基底

*7　任意に加速される観測者の直交テトラッド：“非回転”でなければならない

ベクトルも，Lorentz 変換で互いに関係づけられなければならない．しかし Lorentz 変換は時空での“回転”と考えられる．つねに単位の大きさである 4–速度 $\boldsymbol{u}$ は方向を変える．したがって加速度の概念そのものが速度 4–ベクトルの“回転”を意味する．それでは“非
*8 回転”という要請はどう解釈されるべきか？ テトラッド $\boldsymbol{e}_{\mu'}(\tau)$ は各瞬間ごとに，まさに $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_{0'}$ の変化率と，それ以外の任意の回転がないことによって含まれる量だけ変わるものとせよ．言い換えれば，(1) 速度 4–ベクトルと加速度で定義される時間的な面内での不可避的な見せかけ回転を認め，しかし (2) 3 つの空間ベクトルの通常のいかなる回転をも除外せよ．

*9 非相対論物理学は，瞬間的な角速度ベクトル（成分 ω_i）によってベクトル（成分 v_i）の回転を記述する．この角速度は $\boldsymbol{v}$ の変化率に対する公式

$$(dv_i/dt) = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j v_k \tag{6.8}$$

に現れる．4 次元時空への拡張には，回転は角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ に垂直な平面内で起こると考えることが有用である．そこで式 (6.8) を

$$dv_i/dt = -\Omega_{ik}v_k \tag{6.9}$$

と書き直せ．ここに

$$\Omega_{jk} = -\Omega_{kj} = \omega_i\varepsilon_{ijk} \tag{6.10}$$

は回転面内でのみゼロでない成分をもつ．言い換えれば，“(1,2)–面内での回転”について
*10 言う方が 3–軸周りの回転について言うよりも有用である．“回転面”の概念は 4 次元に及ぶ．そこでは，(1,2)–面での回転は速度の v_3 成分だけでなく，v_0 成分をも一定にするだろう．回転の 4 次元での定義は

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} = -\Omega^{\mu\nu}v_\nu, \qquad \Omega^{\mu\nu} = -\Omega^{\nu\mu} \tag{6.11}$$

である．一般化された回転あるいは無限小 Lorentz 変換におけるこの定義の適切さを調べるために，この定義が 4–ベクトルの長さを不変にすることを確かめる．

$$d(v_\mu v^\mu)/d\tau = 2v_\mu(dv^\mu/d\tau) = -2\Omega^{\mu\nu}v_\mu v_\nu = 0 \tag{6.12}$$

$\Omega^{\mu\nu}$ は反対称であるのに $v_\mu v_\nu$ は対称であるから，最後の表現はゼロになる．また反対称テンソル $\Omega^{\mu\nu}$（“回転行列”，“無限小 Lorentz 変換”）は $4\times3/2 = 6$ 個の独立成分をもっていることに注意せよ．この数は有限の Lorentz 変換での成分の数（回転に対する 3 個のパラメータと，ブーストの成分に対する 3 個のパラメータの和）と一致する．“無限小 Lorentz 変換”はここでは，(1) 4–速度と 4–加速度で張られる時間的な面内での適当な

---

*8 “非回転”とは，4–速度および 4–加速度の時間的な面内でのみ回転することを意味する
*9 3–空間内での回転の数学
*10 時空内での回転の数学

Lorentz 変換を生成し，そして (2) 任意の他の面，とくに，任意の空間的な面内での回転を除外する．これらの要求に対する一義的な答えは

$$\Omega^{\mu\nu} = a^{\mu}u^{\nu} - a^{\nu}u^{\mu}, \qquad \text{すなわち}, \qquad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{u} \tag{6.13}$$

である．この回転を $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{a}$ に正規直交する空間的なベクトル $\boldsymbol{w}$ ($\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} = 0$ そして $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{w} = 0$) に適用せよ．すぐに $\Omega^{\mu\nu}w_{\nu} = 0$ を計算せよ．こうしてどんな空間回転も存在しないことを確かめよ．さて式 (6.13) における $\Omega^{\mu\nu}$ の包括的な規格化をチェックする．無限小 Lorentz 変換を観測者の速度 4–ベクトル $\boldsymbol{u}$ に適用せよ．そこで $v^{\mu} = u^{\mu}$ を式 (6.11) に挿入する．そうすると

$$du^{\mu}/d\tau \equiv a^{\mu} = u^{\mu}(a^{\nu}u_{\nu}) - a^{\mu}(u^{\nu}u_{\nu}) = a^{\mu}$$

となる．$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = -1$ そして $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a} = 0$ であるから，この結果は恒等式である．

指摘された無限小 Lorentz 変換を受けるベクトル $\boldsymbol{v}$ は，

*11
$$dv^{\mu}/d\tau = (u^{\mu}a^{\nu} - u^{\nu}a^{\mu})v_{\nu} \tag{6.14}$$

観測者の世界線に沿って "Fermi–Walker 移動" を経験すると言われる．**加速される観測者に関連し自然に動いている系は 4 個の直交ベクトルからなり，そのおのおのは世界線に沿って Fermi–Walker 移動され，その 1 つは $\boldsymbol{e}_{0'} = \boldsymbol{u}$（観測者の 4–速度）である．**空間基底ベクトル $\boldsymbol{e}_{j'}$ の Fermi–Walker 移動は，それらをジャイロスコープに結びつけることにより，実地に完遂されうる（コラム 6.2 および練習問題 6.9 をみよ）．

6.6　加速される観測者の局所座標系

この動いている系，あるいは "無限小座標系" を有限の領域を覆う "局所座標系" に拡張する．このような局所座標は，"双曲線運動"（図 6.1）および "短時間加速された運動"（図 6.2）で遭遇した問題を避けることができない．したがって局所座標系は，これらの問題が生じない，観測者からの距離 g^{-1} 以内の領域に限定されねばならない．図 6.3 は局所座標 $\xi^{\mu'}$ の構成を例示している．任意の与えられた固有時間 τ に，観測者は彼の世界線に沿って特定の事象 $\mathcal{P}(\tau)$ に位置している．元の慣性系の原点から彼の位置 $\mathcal{P}(\tau)$ までの変位ベクトルを $\boldsymbol{z}(\tau)$ とする．$\mathcal{P}(\tau)$ で観測者は 3 つの空間的基底ベクトル $\boldsymbol{e}_{1'}(\tau)$，$\boldsymbol{e}_{2'}(\tau)$，$\boldsymbol{e}_{3'}(\tau)$ をもつ．点 $\mathcal{P}(\tau)$ とこれらの基底ベクトルは空間的な超平面を定義する．この超平面の代表的な点は
*12

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \xi^{1'}\boldsymbol{e}_{1'}(\tau) + \xi^{2'}\boldsymbol{e}_{2'}(\tau) + \xi^{3'}\boldsymbol{e}_{3'}(\tau) + \boldsymbol{z}(\tau)\\ &= (\text{元の慣性系の原点からの間隔ベクトル})\end{aligned} \tag{6.15}$$

---

*11　加速される観測者によって運ばれる基底ベクトルの "非回転" のテトラッドに対する Fermi–Walker 移動法則

*12　"加速される観測者の局所座標系" をつくるために用いられるテトラッド

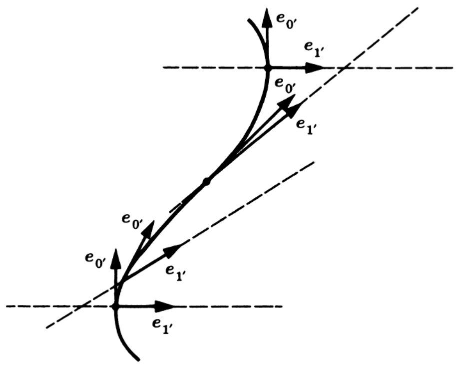


図 6.3 加速された粒子の世界線（濃い線）に沿う選ばれた瞬間で，その世界線に直交する空間的な超平面（破線）の構成．世界線から距離 $g^{-1}(\tau)$（時間に依存する加速度！）での超平面の交差に注意せよ．

という形で表されうる．ここで，3 つの数 $\xi^{k'}$ は超平面での Euclid 座標の役割をしている．この超平面は固有時間が広がるにつれて前進する．超平面はついに，座標を割り当てたい事象 $\mathcal{P}_0$ を突っ切る．**この事象に，式 (6.15) で与えられる数 $\xi^{0'} = \tau, \xi^{k'}$ を座標として当てる．これら 4 つの数を "加速される観測者に相対的な座標" とよべ．**詳しくは，これら 4 つの座標を決める処方は 4 つの式

$$x^\mu = \xi^{k'}[e_{k'}(\tau)]^\mu + z^\mu(\tau) \tag{6.16}$$

からなり，ここで x^μ は既知とみなされ，座標 $\tau, \xi^{k'}$ は未知とみなされる．

加速される世界線からある距離の位置で，相続く空間的な超平面は，τ を増大しつつ前進するのでなく，後退することになるだろう．この距離で，そしてさらにもっと離れた位置では，"加速される観測者に相対的な座標" という概念はあいまいになり，放棄されねばならない．この距離を求めるために，世界線の十分短い任意の部分は双曲線（"加速度 g" をもつ双曲線運動）で近似できることに注意せよ．ここに，時間に依存する加速度 $g(\tau)$ は式 $g^2 = a^\mu a_\mu$ で与えられる．

*13 双曲線運動に上の一般的な処方を適用すると，式

$$\begin{aligned} x^0 &= (g^{-1} + \xi^{1'})\sinh(g\xi^{0'}), \\ x^1 &= (g^{-1} + \xi^{1'})\cosh(g\xi^{0'}), \\ x^2 &= \xi^{2'}, \\ x^3 &= \xi^{3'} \end{aligned} \tag{6.17}$$

に達する．一定の $\xi^{0'}$ の面は図 6.4 にスケッチされた，$x^0/x^1 = \tanh g\,\xi^{0'}$ をもつ超平面である．表現式 (6.17) を線要素に対する Minkowski 公式に代入すると

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\ &= -(1 + g\xi^{1'})^2(d\xi^{0'})^2 + (d\xi^{1'})^2 + (d\xi^{2'})^2 + (d\xi^{3'})^2 \end{aligned} \tag{6.18}$$

*13 一様に加速される観測者に対する局所座標系

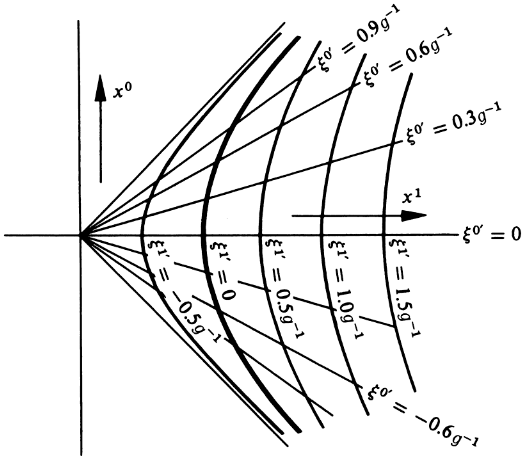


図 6.4　双曲線運動（濃い黒色の世界線）をしている観測者と関連した局所座標系．局所座標系は $-g^{-1}$ よりも小さい $\xi^{1'}$ に対しては失敗する．

が見出される．この展開での $d\xi^{\mu'}\ d\xi^{\nu'}$ の係数は標準的な Lorentz 計量の成分ではない．その理由は明白である．$\xi^{\mu'}$ は慣性座標系をつくらない．しかし，観測者の位置，$\xi^{1'}=0$ で，係数は標準的な形に帰着する．したがってこれらの“局所座標”は観測者の直接近傍で Lorentz 座標系を近似する．

[練習問題]

6.6　加速される座標での時計の進度と座標時間

加速される観測者の局所座標系の各格子点 $(\xi^{1'},\xi^{2'},\xi^{3'})=$ 一定に時計を結びつける．簡単のために，観測者は双曲線運動をしていると仮定せよ．式 (6.18) を用いて，格子の時計が測定する固有時間は格子点での座標時間と異なることを示せ．

$$d\tau/d\xi^{0'} = 1 + g\xi^{1'}$$

（もちろん，観測者のごく近くの，$\xi^{1'} \ll g^{-1}$ では，相違は無視できる．）

6.7　加速された座標での格子点の加速度

双曲線運動している観測者の局所座標の各格子点に加速度計が結びつけられているとする．加速度計が $(\xi^{1'},\xi^{2'},\xi^{3'})$ で測定する加速度の大きさを計算せよ．

6.8　回転しているテトラッドをもつ観測者

任意に加速される世界線に沿って動いている観測者が，彼の直交テトラッドを Fermi–Walker 移動しないように選ぶ．そうせずに，彼は直交テトラッドが回転するようにする．彼の移動法則

$$d\boldsymbol{e}_{\alpha'}/d\tau = -\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{e}_{\alpha'} \tag{6.19}$$

に入る反対称回転テンソル $\boldsymbol{\Omega}$ は Fermi–Walker 部分と空間の回転部分に分かれる．

$$\Omega^{\mu\nu} = \underbrace{a^\mu u^\nu - a^\nu u^\mu}_{\Omega^{\mu\nu}_{(FW)}} + \underbrace{u_\alpha \omega_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}}_{\Omega^{\mu\nu}_{(SR)}} \tag{6.20}$$

$$\boldsymbol{\omega} = 4\text{–速度 } \boldsymbol{u} \text{ に直交するベクトル}$$

(a) 観測者は彼の時間基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_{0'} = \boldsymbol{u}$ となるように選ぶ．この選択は彼の移動法則 [式 (6.19)，(6.20)] によって許されることを示せ．

(b) $\Omega^{\mu\nu}_{(SR)}$ は $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{\omega}$ に垂直な平面内での回転を生み出すこと，すなわち，

$$\boldsymbol{\Omega}_{(SR)}\cdot\boldsymbol{u} = 0, \qquad \boldsymbol{\Omega}_{(SR)}\cdot\boldsymbol{\omega} = 0 \tag{6.21}$$

を示せ．

(c) 加速される観測者が 2 番目の直交テトラッド $\boldsymbol{e}_{\alpha''}$ を Fermi–Walker 移動すると仮定せよ．彼の 1 番目のテトラッドの空間ベクトルは，$\boldsymbol{\omega}$ に等しい角速度ベクトルで，彼の 2 番目のテトラッドの空間ベクトルに対して，回転することを示せ．**ヒント**：2 つのテトラッドが一致する瞬間に（3 次元の記号で，観測者の世界線に直交する 3–空間について述べて）

$$d(\boldsymbol{e}_{j'} - \boldsymbol{e}_{j''})/d\tau = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_{j'} \tag{6.22}$$

を示せ．

(d) 観測者は，彼の Fermi–Walker テトラッドにしたのと同じ処方 (6.16) を用いて，彼の回転しているテトラッドに基づく局所座標を設ける．観測者の世界線上に事象 $\mathcal{Q}$ をとり，そこを $\tau = 0$ とし，そして処方 (6.16) の元の慣性系を選んで，(1) それが $\mathcal{Q}$ で加速される観測者とともに動き，(2) その原点が $\mathcal{Q}$ にあって，(3) その軸が $\mathcal{Q}$ で加速される軸と一致するようにせよ．これらの条件は

$$z^\mu(0) = 0, \qquad \boldsymbol{e}_{\alpha'}(0) = \boldsymbol{e}_\alpha \tag{6.23}$$

となることを示せ．

(e) $\mathcal{Q}$ の近くで回転している加速される座標に対する式 (6.16) は

$$\begin{aligned} x^0 &= \xi^{0'} + a_{k'}\xi^{k'}\xi^{0'} + O([\xi^{\alpha'}]^3), \\ x^j &= \xi^{j'} + \frac{1}{2}a^j \xi^{0'2} + \epsilon^{jk\ell'}\omega^k \xi^{\ell'}\xi^{0'} + O([\xi^{\alpha'}]^3) \end{aligned} \tag{6.24}$$

に帰着する．

(f) 自由に動いている粒子が，慣性系で測定された通常の速度 $\boldsymbol{v}$ で事象 $\mathcal{Q}$ を通過する．その直線的な世界線 $x^j = v^j x^0$ を，加速され回転している座標に変換して，そこでの座標速度と加速度は

$$\begin{aligned} (d\xi^{j'}/d\xi^{0'})_{\mathcal{Q}} &= v^j, \\ (d^2\xi^{j'}/d\xi^{0'2})_{\mathcal{Q}} &= \underbrace{-a^j}_{\substack{\uparrow \\ \text{慣性加速度}}} - \underbrace{2\epsilon^{jk\ell}\omega^k v^\ell}_{\substack{\uparrow \\ \text{Coriolis の加速度}}} + \underbrace{2v^j a^k v^k}_{\substack{\uparrow \\ \text{慣性加速度に対する相対論的な補正}}} \end{aligned} \tag{6.25}$$

であることを示せ．

6.9　Thomas 歳差運動

自転している物体（ジャイロスコープ，電子,$\cdots$）を考える．力がその質量中心に作用するから，これらの物体は加速度をもっている．このような力はモーメントを生じない．したがって物体の本質的な角運動量ベクトル $\boldsymbol{S}$ を不変に保つ，ただし $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{a}$ 平面内での唯一の回転であって，$\boldsymbol{S}$ がつねに 4–速度 $\boldsymbol{u}$ に直交することが要求されている．数学的に述べると，物体はその角運動量を Fermi–Walker 移動する（$\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{a}$ 以外の平面内での回転はない）．

$$d\boldsymbol{S}/d\tau = (\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{S} \tag{6.26}$$

この移動法則は，原子核の周りを半径 r の円軌道を描いて動き，自転している電子に当てはまる．実験室系でみると，電子は x, y 面内で一定の角速度，ω で動く．時間 $t=0$ に，電子は $x=r$，$y=0$ に存在する．そのスピンは（古典的に取り扱うと）成分

$$S^0 = 0, \qquad S^x = \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar, \qquad S^y = 0, \qquad S^z = \frac{1}{2}\hbar$$

をもつ．スピンのその後の振る舞いを実験室時間の関数，$S^\mu(t)$ として**計算せよ．答え：**

$$\begin{aligned}
S^x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar(\cos\omega t\cos\omega\gamma t + \gamma\sin\omega t\sin\omega\gamma t),\\
S^y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar(\sin\omega t\cos\omega\gamma t - \gamma\cos\omega t\sin\omega\gamma t),\\
S^z &= \frac{1}{2}\hbar, \qquad S^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\, v\gamma\sin\omega\gamma t,\\
v &= \omega r, \qquad \gamma = (1-v^2)^{-1/2}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

これの時間に依存する空間部分を

$$S^x + iS^y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}[e^{-i(\gamma-1)\omega t} + i(1-\gamma)\sin(\omega\gamma t)e^{i\omega t}] \tag{6.28}$$

と書き直す．第 1 項は逆方向に角速度

$$\begin{aligned}
\omega_{\text{Thomas}} &= (\gamma-1)\omega\\
&\approx \frac{1}{2}v^2\omega \ll \omega \qquad (\text{もし } v \ll 1 \text{ ならば})
\end{aligned} \tag{6.29}$$

で定常的に回転する．それは Thomas 歳差運動とよばれる．第 2 項は軌道の部分（$0 < \omega\gamma t < \pi$）に対して右回りの回転をし，残りの部分（$\pi < \omega\gamma t < 2\pi$）に対して左回りの回転をする．時間について平均すると，それは何の効果も生じない．さらに，原子内ではそれ（第 2 項）は非常に小さい（$\gamma - 1 \ll 1$）．それ（第 2 項）は

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u} - S^0u^0 = 0 \tag{6.30}$$

および

$$\boldsymbol{S}^2 = \boldsymbol{S}^2 - (S^0)^2 = 3\hbar^2/4 = 一定 \tag{6.31}$$

を保持するために，Thomas 歳差運動に重ねて，存在しなければならない．それは $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u}$ が負のときに右回りで回転を始め，$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u} = 0$ のとき回転を止める．そして $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u}$ が正に変わると左回りでまた回転し始める．

Thomas 歳差運動は，別な言葉で言えば，わずかに異なる方向への相次ぐブーストの結合から生ずる空間的な回転として理解されうる［たとえば，Taylor and Wheeler (1966) の練習問題 103 をみよ］．Thomas 歳差運動 (6.29) の "スピノール形式" からの別な導出に対しては，41.4 節をみよ．

7章
重力と特殊相対性理論は共存できない

[本章は完全にトラック–2である．それは前述のトラック–2の教材によらない．また，どの後述の章に対する準備として必要でないが，18章（弱い重力場），および38章と39章（実験的なテストと重力の別な理論）で役に立つだろう.]

7.1 重力を特殊相対性理論に取り入れる試み

特殊相対性理論の議論はこれまで一貫して重力場が存在しないことを仮定した．なぜ重力は特殊相対性理論で無視されねばならないか？ 本章は重力場が特殊相対性理論の基礎にもたらす困難を記述する．これらの困難に出会った後，Einsteinがそれらを克服するために導入した曲がった時空の方法を十分に理解できる．

そこで，重力についてすでに知っていること，重力の法則についてのNewtonの公式

$$d^2x^i/dt^2 = -\partial\Phi/\partial x^i \tag{7.1}$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \tag{7.2}$$

[*1] から始めよう．これらの式はこのままでは特殊相対性理論に取り入れることはできない．粒子に対する運動方程式(7.1)は4次元形式ではなく3次元形式である．それは$d^2x^\mu/d\tau^2$に対する4次元のベクトル式への修正を必要とする．同様に，場の式(7.2)はLorentz不変でない．なぜなら4次元のd'Alembertianの代わりに3次元のLaplacianが出現していることは，ポテンシャルΦが，任意に十分な距離離れたところでの密度ρの変化に瞬間的に反応することを意味している．要するに，Newton的な重力場は無限大の速度で伝わる．

これらの問題に対する最初の反応は，これらは比較的率直に訂正されるはずであると考え
[*2] ることであろう．本章の終わりの練習問題は，これらの式の若干の比較的率直な拡張を調べる．そこでは重力ポテンシャルΦはまずスカラー，次にベクトル，そして最後に対称なテンソル場であるとされる．これらの理論のおのおのは重要な欠点をもっており，すべて観測と一致しない．それらの最善はテンソル理論である（練習問題7.3，コラム7.1）が，し
[*3] かし，内部的に矛盾しており厳密な解を認めない．この困難は最近Gupta (1954, 1957,

[*1] Newtonの重力の法則は，4次元の幾何学的な形に修正されねばならない

[*2] すべての率直な修正は不満足である

[*3] 最善の修正（平坦な時空でのテンソル理論）は内部的に矛盾している．訂正すると，それは一般相対性理論となる

1962), Kraichnan (1955), Thirring (1961), Feynman (1963), Weinberg (1965), Deser (1970) によって調べられた．彼らはこれらの内部矛盾を克服するために，平坦な空間のテンソル理論が現在の相対論的な場の理論の精神の中でいかに修正されるかを示している．この場の理論のルートにより（コラム 17.2 の 5 項），彼らは一義的に標準的な 1915 年の一般相対性理論に到達する．

この最終点においてのみ，式の数学的な形から，表面的に重力の平坦な空間の理論として出発したものが実際 Einstein の理論であり，重力は時空の曲率の表れであることを最後に認識する．本書は Einstein の推論の線に従う．なぜならそれが物理学を前面に保つからである．

[練習問題]

重力の平坦な時空の理論に関する練習問題

次の 3 つの練習問題は確かな挑戦を与える．幸いに，3 つはすべて類似の方法を必要とする．そしてもっとも難しい方法（練習問題 7.3）への解はコラム 7.1 に与えられている．したがって，以下のように進むのが妥当である．

(a) 練習問題 7.1（重力のスカラー理論）か練習問題 7.2（重力のベクトル理論）を調べよ．困難が生じたときには，詳細にではなく，輪郭と方法に対して練習問題 7.3 とコラム 7.1（重力のテンソル理論）をざっと読め．

(b) 他の練習問題（7.2 あるいは 7.1）をすでに詳しく調べてある誰かと議論して，その結果に習熟せよ．

(c) コラム 7.1 に提示されているように練習問題 7.3 への解を詳細に読め，そして他の 2 つの理論に対して計算されてある結果と比較せよ．

(d) コラム 7.1 から若干の詳細な計算を検査して計算力を発展させよ．

7.1 スカラー重力場 Φ

A. 変分原理 $\delta I = 0$ を考える．ここに

$$I = -m\int e^{\Phi}\left(-\eta_{\alpha\beta}\frac{dz^\alpha}{d\lambda}\frac{dz^\beta}{d\lambda}\right)^{1/2} d\lambda \tag{7.3}$$

ここでスカラー重力場 Φ 内での試験粒子に対して，$m =$ (静止質量) そして $z^\alpha(\lambda) =$ (パラメータ化された世界線)．粒子の世界線を変えて，粒子の運動を支配する微分方程式を導け．粒子の固有時間を経路パラメータ，

$$d\tau = \left(-\eta_{\alpha\beta}\frac{dz^\alpha}{d\lambda}\frac{dz^\beta}{d\lambda}\right)^{1/2} d\lambda$$

として用いてこれを書け．したがって $u^\alpha = dz^\alpha/d\tau$ は $u^\alpha u^\beta \eta_{\alpha\beta} = -1$ を満たす．

B. 変分原理 $\delta I = 0$ に伴う $\Phi(\boldsymbol{x})$ に対する場の方程式を得よ，ここに $I = \int \mathcal{L} d^4x$，そして

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi G}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\beta} - \int me^{\Phi}\delta^4[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}(\tau)]d\tau \tag{7.4}$$

第 2 項はここでは A の式 (7.3) で調べられたのと同じ積分を与えることを示せ．

審議：得られた場の方程式は質量 m の 1 個の粒子がいかにスカラー場を生成するかを記述する．もしたくさんの粒子が存在するならば，$\mathcal{L}$ の中に各粒子に対して項 $-\int me^{\Phi}\delta^4[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}(\tau)]d\tau$ を含める．

C. 静止している 1 個の源粒子を仮定して，B の場の方程式を解け．また $e^{\Phi}=1$ は粒子の近傍で適当な近似であると仮定せよ．それからこの仮定をあなたの解から検査せよ．すなわち，地球表面でこの仮定から e^{Φ} にどんな値が当てられるか？（$c=1$ とする単位が終始用いられる．また希望するならば，$G=1$ とおいてもよい．）

D. さて静的で，球対称な場 Φ を C から，A の変分原理における与えられた外場として作用する太陽の場として取り扱え，そしてこの変分原理によって定まる惑星の運動を調べよ．運動定数は球対称と被積分関数の時間–非依存性から入手できる．極座標を用いそして平面内での運動を仮定せよ．惑星の近日点歳差運動に対する公式を導け．

E. A の運動方程式でゼロ静止質量の粒子の極限に移行せよ．$k^\mu = dx^\mu/d\lambda$ がエネルギー–運動量ベクトルとなるように選ばれた，固有時間と異なるパラメータ λ を用い，そして $k^0=\gamma m=E$ が有限に留まる（したがって $u^0=\gamma\to\infty$）ような極限 $m\to 0$ をとることにより，これを行え．これらの式を用いて量 $q^\mu = k^\mu e^{\Phi}$ は運動の定数であることを示し，そしてこれから，このスカラー理論では光線の湾曲がないことを導け．

7.2　ベクトル重力場 $\boldsymbol{\Phi_\mu}$

A. 変分原理 $\delta I=0$ は，A_μ を変化させることによって Maxwell の方程式を与え，そして $z^\mu(\tau)$ を変化させることによって Lorentz 力の法則を与えることを確かめよ．

$$I = \frac{-1}{16\pi}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d^4x + \frac{1}{2}m\int\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz_\mu}{d\tau}d\tau + e\int\frac{dz^\mu}{d\tau}A_\mu(z)d\tau \tag{7.5}$$

ここに $F_{\mu\nu}$ は $A_{\nu,\mu}-A_{\mu,\nu}$ の略語である．ヒント：$A_\mu(\boldsymbol{x})$ を変化させるには，最後の項を，練習問題 7.1, A および B におけるようにデルタ関数 $\delta^4[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}(\tau)]$ を導入して，時空積分として書き直せ．

B. 上述との類推で，ベクトル重力場 Φ_μ，$G_{\mu\nu}\equiv\Phi_{\nu,\mu}-\Phi_{\mu,\nu}$ を変分原理を用いて定義せよ．

$$I = +\frac{1}{16\pi G}\int G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}d^4x + \frac{1}{2}m\int\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz_\mu}{d\tau}d\tau + m\int\Phi_\mu\frac{dz^\mu}{d\tau}d\tau \tag{7.6}$$

（**注意**：もしたくさんの粒子が存在するならば，各粒子に対する項，$1/2m\int(dz^\mu/d\tau)(dz_\mu/d\tau)d\tau + m\int\Phi_\mu(dz^\mu/d\tau)d\tau$ で I を拡大せねばならない．）この理論で "Coulomb" の法則を見出し，そして変分原理における項の係数が適正に選ばれていることを確かめよ．

C. 近日点歳差運動をこの理論で計算せよ．

D. 光線が太陽のそばを通過するとき，太陽の Φ_μ 場のために，光線は湾曲することをこの理論で計算せよ（すなわち，高度に相対論的な粒子 $u^0=\gamma\to\infty$ の散乱）．

E. B に潜在している Lagrangian に相応するすべての場のエネルギーに対する公式を得よ．Hamiltonian の力学の標準的な方法を用いよ．

$$I_{\text{場}} = \frac{1}{16\pi G}\int G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}d^4x \equiv \int \mathcal{L}d^4x$$

$\mathcal{L}$ は Lagrangian の密度であり，そして $L \equiv \int \mathcal{L}d^3x$ は Lagrangian である．相応する Hamiltonian の密度（≡ エネルギー密度）は

$$\mathcal{H} = \sum_{\mu} \Phi_{\mu,0}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mu,0}} - \mathcal{L}$$

である．ベクトル重力波は負のエネルギーを運ぶことを示せ．

7.3　対称テンソル重力場 $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$

ここでは作用原理は，ベクトル場に対するのと同じく，$\delta I = 0$ であり，$I = I_{\text{場}} + I_{\text{粒子}} + I_{\text{相互作用}}$．$I_{\text{粒子}}$ はベクトル場に対するのと同じである．

$$I_{\text{粒子}} = \frac{1}{2}m\int \frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz_\mu}{d\tau}d\tau \tag{7.7}$$

しかし，$I_{\text{場}}$ および $I_{\text{相互作用}}$ は異なっている．

$$I_{\text{場}} = \int \mathcal{L}_f d^4x \tag{7.8a}$$

$$\mathcal{L}_f = \frac{-1}{32\pi G}\left(\frac{1}{2}h_{\nu\beta,\alpha}\bar{h}^{\nu\beta,\alpha} - \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}\bar{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}\right)\left[\begin{array}{l}\text{ここの 1 個の } h \text{ は } \bar{h} \text{ で}\\ \text{ないことに注意せよ}\end{array}\right] \tag{7.8b}$$

ここに

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\sigma{}_\sigma \tag{7.8c}$$

$$I_{\text{相互作用}} = \frac{1}{2}\int h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}d^4x \tag{7.9}$$

ここで $T^{\mu\nu}$ はすべての非重力場および存在する物質に対するストレス–エネルギーテンソルである．質点系（この練習問題を通して用いられる）に対しては，

$$T^{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) = \int m\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau}\delta^4[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}(\tau)]d\tau \tag{7.10}$$

A. $\delta(I_{\text{粒子}} + I_{\text{相互作用}}) = 0$ で $z^\mu(\tau)$ を変化させることによって，粒子の運動方程式を得よ．結果を，テンソル重力ポテンシャル $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ から導かれる“重力の場”,

$$\Gamma_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(h_{\nu\alpha,\beta} + h_{\nu\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}) \tag{7.11}$$

によって表せ．

B. $\delta(I_{\text{場}} + I_{\text{相互作用}} = 0)$ から場の方程式を得よ．それらを

$$-H^{\mu\alpha\nu\beta} \equiv \bar{h}^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \bar{h}^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} - \bar{h}^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta} - \bar{h}^{\mu\beta}\eta^{\alpha\nu} \tag{7.12}$$

によって表せ．ゲージ不変性と，条件 $\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ を議論せよ．

C. 太陽（質点として取り扱われる）によるテンソル重力ポテンシャル $h_{\mu\nu}$ を見出せ．

D. 近日点歳差運動を計算せよ．

E. 光線の湾曲を計算せよ．

F. 重力波，

$$\bar{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}\exp(ik_\alpha x^\alpha) \tag{7.13}$$

を考えよ．どんな条件が場の方程式によって課されるか？　ゲージ条件によって

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \tag{7.14}$$

となるか？　$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ の制限を保存する，さらなるゲージ変換

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow h_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} \tag{7.15}$$

によって，さらなる条件

$$u_\alpha \bar{h}^{\alpha\mu} = 0, \qquad \bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = 0 \tag{7.16}$$

が課されうることを示せ．ただし u^α は，固定された時間的なベクトルである．それは，$u^\alpha = (1;0,0,0)$ および $k^\alpha = (\omega;0,0,\omega)$ となる基準系を適当に選んで得られる場合を考えれば十分である．

G. 場に対する Hamiltonian の密度

$$\mathcal{H} \equiv \dot{h}_{\mu\nu}(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{h}_{\mu\nu}) - \mathcal{L} \tag{7.17}$$

から，F で考えられた波のエネルギー密度は正であることを示せ．

H. 作用積分 I に現れる粒子のストレス–エネルギーテンソル $T^{\mu\nu}$ に対して，$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ を求めよ．$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ はゼロになるか（たとえば，太陽の周りの軌道にある地球に対して）？　なぜ？　$\delta I = 0$ から得られる，場と粒子に対する結合方程式は解をもたないことを示せ．

コラム 7.1　重力を平坦な時空における対称テンソル場で記述する試み [練習問題 7.3 への解]

重力を特殊相対性理論の枠内で記述する試みは，当然，Newton 理論におけるように，重力場がスカラーである（練習問題 7.1），あるいは，電磁気学への類推でベクトルである（練習問題 7.2）と考えることから始まるだろう．これらが不十分であること

(たとえば，いずれの理論でも光線の湾曲がないこと，ベクトル理論での負のエネルギーをもつ波) が知られて初めて，より多くの添字をもつ，対称テンソルの重力ポテンシャル $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ の，計算上の複雑さと直面することになるだろう．

平坦な時空での重力のすべてのテンソル理論のもっとも満足な基礎は，練習問題 7.3 の初めに展開されている．そこでなされた Lagrangian の選択 (7.8) は，$h_{\mu\nu}$ は "Lorentz 共変で，質量をもたない，スピン 2 の場" であるという要求で定められている．この要求の意味，およびそれを一組の場の方程式に翻訳するために求められる特殊相対性理論の技術は，習慣的に素粒子物理学あるいは量子場の理論に関する本に見出される．たとえば，Wentzel (1949)，Feynman (1963)，あるいは Gasiorowicz (1966)．Fierz and Pauli (1939) はこの Lagrangian を書き下ろし，生ずる理論を調べた最初であった．理論の結論は練習問題 7.3 への解の形でここに詳しく説明される．

A. 試験粒子に対する運動方程式 (練習問題 7.3A)

式 (7.9) での積分を，式 (7.10) の粒子のストレス–エネルギーテンソルを用いて遂行すると，

$$I_{p+i} \equiv I_{\text{粒子}} + I_{\text{相互作用}} = \frac{1}{2}m\int(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})\dot{z}^{\mu}\dot{z}^{\nu}d\tau \tag{1}$$

となる．ここに

$$\dot{z}^{\mu} \equiv dz^{\mu}/d\tau$$

それから δI_{p+i} を計算して，経路での任意の変分 δz^{μ} の係数は

$$(d/d\tau)[(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})\dot{z}^{\nu}] - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta,\mu}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta} = 0$$

である場合に限りゼロになる．この運動方程式を形

$$(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})\ddot{z}^{\nu} + \Gamma_{\mu\alpha\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta} = 0 \tag{2}$$

に書き直す．ここに $\Gamma_{\mu\alpha\beta}$ は式 (7.11) で定義されている．

$\mathbf{B_1}$. 場の方程式 (練習問題 7.3B)

$I_{\text{場}}$ および $I_{\text{相互作用}}$ を式 (7.8) および (7.9) で与えられた形で用いよ．しかしもっとも速やかでもっとも簡明な導出のために，標準的な Euler–Lagrange 方程式を用いるな．代わりに，場の小さい変分 $\delta h_{\alpha\beta}$ によって生み出される一次の変化 $\delta\mathcal{L}_f$ を直接計算せよ．$\mathcal{L}_f$ の第 2 項に対しては，各項を変化させることが同じ結果を与えることは明白である (必要なときは見せかけの添字を付け替えることによって)．したがって積の法則から 2 項は結合する．

$$\delta(\bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}\bar{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}) = 2\bar{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}\delta\bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}$$

同様の結果は，式 (7.8) の "バー" 操作に対して成り立つ恒等式 $a_{\mu\nu}\bar{b}^{\mu\nu} = \bar{a}_{\mu\nu}b^{\mu\nu}$ を考慮して，$\mathcal{L}_f$ の第1項に対して成り立つ．ここでの各辺はちょうど $a_{\mu\nu}b^{\mu\nu} - \frac{1}{2}a^{\mu}{}_{\mu}b^{\nu}{}_{\nu}$ である．したがって，

$$-(32\pi G)\delta\mathcal{L}_f = \bar{h}^{\nu\beta,\alpha}\delta h_{\nu\beta,\alpha} - 2\bar{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}\delta\bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} \tag{3}$$

次にこの表現を $\delta I_{場}$ に用いる．そして，部分積分によって，$\delta h_{\mu\nu}$ から微分を除くと，

$$\delta I_{場} = (32\pi G)^{-1}\int[\bar{h}^{\nu\beta,\alpha}{}_{,\alpha}\delta h_{\nu\beta} - 2\bar{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}{}^{,\alpha}\delta\bar{h}_{\mu\alpha}]d^4x$$

が得られる．この表現で $\delta h_{\mu\nu}$ の係数を見つけるために，[式 (7.8c) から]

$$\delta\bar{h}_{\alpha\beta} = (\delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta_{\nu\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu})\delta h_{\mu\nu}$$

を書き，それから見せかけの添字（和）を付け替えると

$$\delta I_{場} = (32\pi G)^{-1}\int[\bar{h}^{\mu\beta,\alpha}{}_{,\alpha}\delta h_{\mu\beta} - 2\bar{h}^{\mu\beta}{}_{,\beta}{}^{,\alpha}\delta\bar{h}_{\mu\alpha}]d^4x$$

が得られる．これを $\delta I_{相互作用} = \frac{1}{2}T^{\mu\nu}\delta h_{\mu\nu}d^4x$ と結びつけ，そして対称性 $\delta h_{\mu\nu} = \delta h_{\nu\mu}$ を用いることにより，

$$-\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha}{}^{,\alpha} - \eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} + \bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}{}^{,\nu} + \bar{h}^{\nu\alpha}{}_{,\alpha}{}^{,\mu} = 16\pi G T^{\mu\nu} \tag{4}$$

を得る．式 (7.12) でなされた定義は，これが

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta} = 16\pi G T^{\mu\nu} \tag{4'}$$

と書き直されることを可能にする．

$\mathbf{B_2}$. ゲージ不変性（練習問題 7.3B, 続き）

$H^{\mu\alpha\nu\beta}$ の対称性，

$$H^{\mu\alpha\nu\beta} = H^{[\mu\alpha][\nu\beta]} = H^{\nu\beta\mu\alpha}$$

は電磁気学における $F^{\mu\nu}{}_{,\nu\mu} \equiv 0$ に類似した恒等式

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta\nu} = H^{\mu\alpha[\nu\beta]}{}_{,\alpha(\beta\nu)} \equiv 0$$

を暗示する．

こうして電磁気学での $J^{\mu}{}_{,\mu} = 0$（練習問題 3.16）とちょうど同じように，$T^{\mu\nu}{}_{,\nu\mu} \equiv 0$ が源について要求される．これらの恒等式だけでは場の方程式 (4′) が $h_{\mu\nu}$ を完全に定めるのに弱すぎる．とくに，式 (4) への直接の代入によって，任意の解にゲージ場

$$h_{\mu\nu}{}^{(ゲージ)} = \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu},$$

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}^{(ゲージ)} = \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - \eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\alpha} \tag{5}$$

を，$T^{\mu\nu}$ を変えずに，代入できることが確かめられる．

ξ_μ はある有限の時空領域の外でゼロであるが，それ以外は任意であるとする．そうすると $h_{\mu\nu}$ および $h_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}{}^{(ゲージ)}$ はともに同じ源 $T^{\mu\nu}$ に対して，源をもつ式 (4) および無限遠での同じ境界条件を満たす．したがって両者は物理学的に同等であると予想される．

電磁気学の "Lorentz" 特殊化 $A^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ に類似するゲージの特殊化［式 (3.58a)，練習問題 3.17］により，条件

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \tag{6}$$

を課する．これは場の方程式 (4) を単純な d'Alembert 形式

$$\Box\bar{h}^{\mu\nu} \equiv \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha}{}^{\alpha} = -16\pi T^{\mu\nu} \tag{7}$$

に帰着する（練習問題 18.2 をみよ）．ここでおよび以後 $G = 1$（"幾何学化された単位"）とおく．

C. 質点の場（練習問題 7.3C）

静的な源に対して，波動方程式 (7) は Laplace 方程式

$$\nabla^2\bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}$$

に帰着する．静的な質点に対するストレス–エネルギーテンソル (7.10) は $T^{00} = M\delta^3(x)$ および $T^{\mu k} = 0$ である．これを Laplace 方程式に代入し，$\bar{h}_{\mu\nu}$ に対して解き，そして式 (7.8c) を用いて $h_{\mu\nu}$ を得る．結果は

$$h_{00} = 2M/r, \qquad h_{0k} = 0, \qquad h_{ik} = \delta_{ik}(2M/r) \tag{8}$$

である［式 (18.15a) をみよ］．

D. 近日点の歳差運動（練習問題 7.3D）

ポテンシャル (8) の運動方程式 (2) への直接的な代入は退屈であり，あまり教育的でない．変分原理はこのような計算を単純化するために力学では広く好まれる．基礎的な変分原理 $\delta I_{p+i} = 0$［式 (1)］に戻り，そして太陽に対するポテンシャル (8) を挿入せよ．極座標に変換して，軌道が赤道（$\theta = \pi/2$）面内に存在するように位置づける．

$$I_{p+i} = \int L\,d\tau \tag{9}$$

$$L = \frac{1}{2}m[-(1-2Mr^{-1})\dot{t}^2 + (1+2Mr^{-1})(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)] \tag{10}$$

L 内に明白な t, ϕ, および τ 依存性が存在しないから，3 個の運動定数が推論される．正準運動量

$$P_t \equiv -m\gamma = \partial L/\partial \dot{t}$$

(これは γ を定義する)．そして

$$P_\phi \equiv m\alpha = \partial L/\partial \dot{\phi}$$

(これは α を定義する)．そして Hamiltonian

$$H = \dot{x}^\mu(\partial L/\partial \dot{x}^\mu) - L$$

これは経路パラメータ τ の適当な規格化によって $-1/2m$ に等しいとおくことができる．これらの運動定数から，軌道方程式を以下のように導く．(1) $H = -1/2m$ を $r, \dot{r}, \dot{\phi}$, および $\dot{t}$ で計算せよ．(2) 定数 γ および α を優先して，$\dot{t}$ および $\dot{\phi}$ を消去せよ．(3) Newton 的な軌道問題におけるように，$u = M/r$ を定義せよ．そして

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{\dot{u}}{\dot{\phi}} = -\frac{M\dot{r}}{r^2\dot{\phi}} = -\frac{M}{\alpha}(1+2u)\dot{r}$$

(4) H で，$du/d\phi$ を優先して $\dot{r}$ を上式によって消去せよ，そして u を優先して r を消去せよ．(5) $du/d\phi$ に対して解け．結果は

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = (\gamma^2 - 1 + 2u)\frac{M^2}{\alpha^2}\left[\frac{1+2u}{1-2u}\right] \tag{11}$$

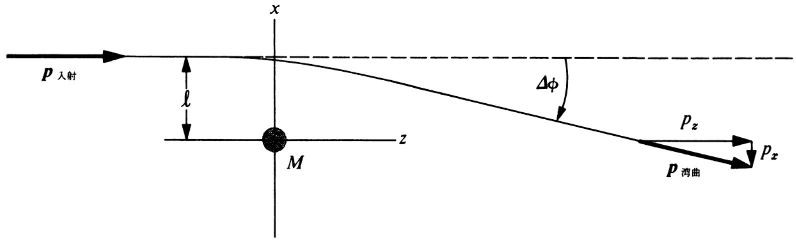
である．この式で $u = GM/c^2r \sim (1-\gamma^2)$ の 3 次およびさらに高次のべきを無視して，近日点移動を導け (方法の詳細に対しては，練習問題 40.4 をみよ．このコラムの γ および α は，この練習問題では $\tilde{E}$ および $\tilde{L}$ の名がつけられており，その練習問題の γ および β は 1 および 0 に等しくおかれている)．生ずる軌道あたりの移動は

$$\Delta\phi = 8\pi M/r_0 + O([M/r_0]^2) \tag{12}$$

である．これは一般相対性理論の予言の 4/3 倍である．そしてそれは水星についての観測と一致しない (コラム 40.3 をみよ)．

E. 光線の湾曲 (練習問題 7.3E)

太陽を通過する光線に対するずれの角度は，次元的な基礎に基づいて，小さい量，$\Delta\phi \sim M_\odot/R_\odot \sim 10^{-6}$，最初からこの小ささに基づいた近似を行う．$x, z$ 平面内に限定された光子の軌道図は，z 軸に平行な入射運動に対して，ずれの角度は最終の運



動量によって $\varDelta\phi = p_x/p_z$ と表されうる．最終の p_x を軌道に沿う積分，

$$p_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (dp_x/dz)dz$$

により，p_z を本質的に定数として取り扱って計算せよ．この計算は運動方程式 (2) のゼロ静止質量の場合への一般化を必要とする．極限 $m \to 0$ を取り扱うために，新しいパラメータ $\lambda = \tau/m$ を導入せよ．それから $p^\mu = m(dz^\mu/d\tau) = dz^\mu/d\lambda$．また $p_\mu = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})p^\nu$ を定義せよ．なぜならこの量は単純に式 (2) に現れ，求めねばならない，極限 $r \to \infty$ での p_μ と一致するからである．そうすると式 (2) は，$m = 0$ を含んだ任意の m に対して，

$$\frac{dP_\mu}{d\lambda} = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,\mu} p^\alpha p^\beta$$

となる．ここの右辺で，$h_{\alpha\beta,\mu}$ は小さいから，p^μ に対する大ざっぱな近似で十分である．$p^1 = p^2 = 0, p^0 = p^3 = dz/d\lambda = \omega =$ 一定．こうして

$$\frac{dP_1}{d\lambda} = \frac{1}{2}(h_{00} + 2h_{03} + h_{33})_{,1}\omega^2$$

および

$$\frac{1}{p_3}\frac{dP_1}{dz} = \frac{1}{2}(h_{00} + 2h_{03} + h_{33})_{,1}$$

太陽に対しては，$h_{00} = h_{33} = 2M/r$，そして $h_{03} = 0$ [式 (8)]，したがって

$$\begin{aligned} \varDelta\phi &= -\left(\frac{p_1}{p_3}\right)_{\text{終点}} = -\left(\frac{P_1}{p_3}\right)_{\text{終点}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2M\ell dz}{(\ell^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2M}{\ell}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^{3/2}} = \frac{4M}{\ell} \end{aligned} \tag{13}$$

太陽をかすめて通る光線，$\ell = R_\odot$ に対しては，$\varDelta\phi = 4M_\odot/R_\odot$ ラジアン$=1''.75$，これはまた一般相対性理論の予言であり，観測と一致している（コラム 40.1 をみよ）．

F. 重力波（練習問題 7.3F）

問題の平坦な時空の理論の場の方程式 (4) およびゲージの性質 (5) は，Einstein の “線形化された理論” が与えるものと同一である．こうして，18.2 節，35.3 節，および 35.4 節で述べられている，線形化された理論を用いた重力波の取り扱いは，ここで

も当てはまる．

G. 波の正エネルギー (練習問題 7.3G)

$\mathcal{H}$ に対する一般的な公式を式 (7.17) から求めることは退屈であるが，しかし平面波の特別な例 (7.13)，あるいはさらによいことには，$h_{12} = h_{21} = f(z - t)$ のみをもつ平面波だけを考えれば十分である．任意の重力波はこのような平面波の重ね合せとしてつくられうる．まずこの場合に対する Lagrangian を求める．式 (7.8) によれば，それは

$$\mathcal{L}_f = (32\pi)^{-1}[(h_{12,0})^2 - (h_{12,3})^2]$$

となる．さて $\mathcal{H}$ を定義する公式 (7.17) の全内容は，正確に次のとおりである．Lagrangian から始め，2 次の時間微分のすべての項を保ち，1 次の時間微分のすべての項を除去する．そして時間微分を含まない項の符号を逆にする．結果は

$$\mathcal{H} = (32\pi)^{-1}[(h_{12,0})^2 + (h_{12,3})^2] \tag{14}$$

であり，それは正である．

H. 理論の自己矛盾（練習問題 7.3H）

式 (7.10) から，

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = m\int \frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta^4[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}(\tau)]d\tau$$

を見出せ．しかし $\delta^4(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z})$ は差 $x^\mu - z^\mu$ にのみ依存する，したがって $-\partial/\partial z^\nu$ は δ–関数に作用するとき $\partial/\partial x^\nu$ にとって代わることができる．

$$\frac{dz^\nu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial z^\nu}\delta^4[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}(\tau)] = \frac{d}{d\tau}\delta^4[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}(\tau)]$$

に注意して，$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ を

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -m\int \dot{z}^\mu(d/d\tau)\delta^4[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}(\tau)]d\tau = +m\int \ddot{z}^\mu\delta^4[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}(\tau)]d\tau$$

と書き直す (最後の段階は部分積分によって得られる)．こうして $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ は $\ddot{z}^\mu = 0$ **なる場合に限り**成り立つ．しかし $\ddot{z}^\mu = 0$ は重力場が粒子の運動に対して影響をもたないことを意味する．しかしこれは理論の変分原理から出る運動方程式 (2) と矛盾する．こうして，重力のこのテンソル理論は内部矛盾である．[簡単に述べると，式 (4) は $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ を要求するが，式 (2) はそれを除外する．]

この理論では，重力を及ぼしている物体は重力によって影響を受けえないという事実は，また任意のストレス–エネルギーからつくられている物体（たとえばゴムの球あるいは地球）に対して成り立つ．すべての物体は重力を及ぼし，場の方程式は $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} =$

0 を意味し，そしてこの“ストレス–エネルギーに対する運動方程式”は物体の全 4–運動量 $P^\mu = \int T^{\mu 0} d^3x$ の保存を意味するから，物体は重力によって加速されえない．地球は太陽によって引きつけられえない．地球は星間空間へ飛び去らなければならない！

理論のこの内部矛盾を正す簡明な段階は容赦なく一般相対性理論に通じる（コラム 17.2 の 5 項をみよ）．一般相対性理論を重力の理論として採用したから，問題の平坦な時空の理論を一般相対性理論に対する近似として用いることができる（“線形化された一般相対性理論”，18 章，19 章，および 35 章で取り扱われている．とくに 18.3 節の終わりの議論をみよ）．

7.2　エネルギー保存から導かれた重力による赤方偏移

Einstein は Newton の理論で仮定されているような，いかなる理想的な，直線の基準系の存在にも反対する意見を述べた．彼は，自然な運動状態にあるいかなるものも，光子でさえも，このような理想的な直線の存在あるいは位置に対する証拠を与えることはできないと強調した．

*4 光子は重力場によって影響されねばならないことを，Einstein (1911) は Newton の重力理論の状況で適用される，エネルギーの保存則から示した．静止質量 m の粒子が重力場 g の中で，点 $\mathcal{A}$ での静止状態から点 $\mathcal{B}$ まで距離 h を，自由落下する．粒子は運動エネルギー mgh を得る．粒子の全エネルギーは，静止質量を含めて，

$$m + mgh \tag{7.18}$$

となる．さて粒子は $\mathcal{B}$ で消滅して，その全静止質量と運動エネルギーを同じ全エネルギーの光子に転換するものとする．この光子を重力場内で $\mathcal{A}$ まで上向きに進ませる．もし光子が重力と相互作用をしないならば，$\mathcal{A}$ に達したときに元のエネルギーを有するだろう．この点で光子は適当な装置によって静止質量 m と余分のエネルギー mgh の他の粒子に転換されるとする（そうするとこれは全過程を繰り返しうることになる），この転換には何の労力も要しない．エネルギー保存の原理についてのこの矛盾（それはまた純粋に古典的な言葉で述べることができる）を避けるために，Einstein は光子は赤方偏移を受けねばならないと考えた．光子のエネルギーは，粒子が重力場の外に上るときそのエネルギーが減少するのとまさに同じく，減少しなければならない．重力場内での経路の頂点と底点での光子のエネルギーは，したがって

$$E_{\text{底点}} = E_{\text{頂点}}(1 + gh) = E_{\text{頂点}}(1 + g_{\text{慣習}} h/c^2) \tag{7.19}$$

で関係づけられなければならない．重力に反してなされた仕事によるエネルギーの減少は振動数の減少そして波長の増大（赤方偏移，伝統的に赤方偏移パラメータ，$\Delta\lambda/\lambda$ で述べられる）を含む．こうして，

*4　エネルギーの考察から導かれた重力による赤方偏移

$$1+z=\frac{\lambda_{頂点}}{\lambda_{底点}}=\frac{h\nu_{底点}}{h\nu_{頂点}}=\frac{E_{底点}}{E_{頂点}}=1+gh \tag{7.20}$$

この式によって予言される赤方偏移は Pound and Snider (1964, 1965) によって 1% まで確かめられており，Pound and Rebka (1960) による実験を改善している．

7.3　重力による赤方偏移は時空が曲がっていることを意味する

Schild による議論 (1960, 1962, 1967) は重要な結論を与える．重力による赤方偏移の存在は，重力の矛盾のない理論は特殊相対性理論の枠内でつくられえないことを示している．

*5 Einstein の議論（前節）は Newton の理論の中で公式化されたのに対して，Schild の議論は特殊相対性理論の中で公式化されている．それは，地球の場の中での重力による赤方偏移の実験を，地球の中心に結びつけられた大域的な Lorentz 系を用いて，解析する．それは自由粒子が初めにこの大域的な Lorentz 系で静止し，さらに静止しつづける（地球から十分離れていて，そこでは重力は無視できる場合を除いて）ことを要求しない．逆に，自由粒子が地球の重力場によって Lorentz 系に相対的に加速されることを要求する．それは，重力場の数学的な性質（スカラー，ベクトル，テンソル，$\cdots$）に無関係であるが，重力的な加速度が実験と一致することを主張する．そして，もちろん，固有の長さと時間が特殊相対性理論の計量によって支配されることを要求する．

Schild の議論は以下のように進む．地表の高さ z_1 の位置に 1 人の観測者が，地表から高さ $z_2=z_1+h$ の位置に 2 番目の観測者が静止している（図 7.1）．観測者は，互いに，また地球の Lorentz 系に相対的に静止していることを，たとえば，地球の Lorentz 系で地球の重力場の外に離れて静止している自由粒子にまで及ぶレーダーによって確認できる．底点の実験者が定まった標準的な振動数 $\omega_{底点}$ の電磁気的な信号を発信し，それが頂点の観測者に受信される．明確さのために，信号は正確に N サイクルの長さをもつパルスとする．そうすると，パルスの発信のために必要な時間間隔* $\delta\tau_{底点}$ は，$2\pi N=\omega_{底点}\delta\tau_{底点}$ で与えられる．頂点の観測者は，そうすると，これらの同じ N サイクルの電磁波のパルスを受信し，必要な時間間隔 *$\delta\tau_{頂点}$ を測定するはずである．“振動数” の定義によりそれは $2\pi N=\omega_{頂点}\delta\tau_{頂点}$ を満たす．実験によって（われわれに対して）あるいはエネルギー保存則によって（Einstein に対して）確立された赤方偏移効果は，$\omega_{頂点}<\omega_{底点}$ を示している．したがって時間間隔は異なる，$\delta\tau_{頂点}>\delta\tau_{底点}$．この情報を実験の特殊相対性理論の時空図（図 7.1）にもち込む．波は光線である．したがってそれらを時空図（図 7.1A）で

*6 45° のヌル線に沿って進むとして示せるだろう．この単純化された，しかしわずかに不適当な議論の形では．ここでは Minkowski 時空で**平行四辺形**を描いたが，2 辺は等しくない，$\tau_{頂点}>\tau_{底点}$．しかるに平坦な Minkowski 時空での平行四辺形は等しくない向かい合った

* 固有時間は両方の観測者に対する Lorentz 座標時間に等しい，なぜなら両方の観測者は地球の Lorentz 系に静止しているからである．

*5 重力は平坦な時空内の（明記されていない）場によって記述されると**仮定せよ** $\cdots$

*6 この仮定は重力による赤方偏移と両立しない

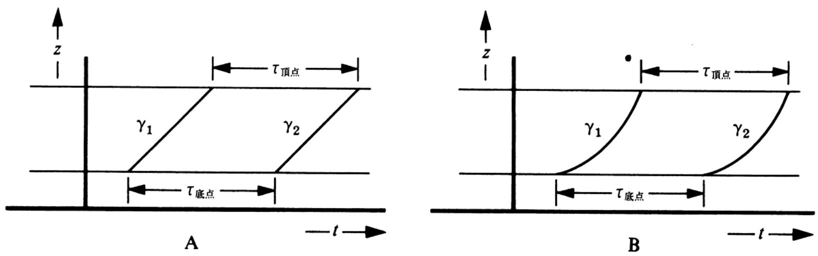


図 7.1　地球の重力場に反して高さ z_1 から，高さ $z_2 = z_1 + h$ まで昇る光の連続するパルス．経路 γ_1，および γ_2 は，45° の傾斜（左）をもとうがあるいは変化する傾斜（右）をもとうが，厳密に合同でなければならない．

2 辺をもちえないことを指摘することにより，矛盾に達する．任意の十分広がった領域上で**特殊相対性理論は成り立ちえない**と結論される．時空は光線および試験粒子の軌道によって調べると，Lorentz–Minkowski の平坦さが局所的に物理学に与えるすぐれた適合にもかかわらず，大域的には平坦さからそれる（“曲率”，本書のパート III およびパート IV）．

図 7.1B は，光の伝播が重力場の影響を受けることを認めることによって，この議論での過度の単純化を訂正している．したがって光子は図の直線に沿って行かないだろう．その結果，あい続くパルスの世界線 γ_1 および γ_2 は曲線である．しかし，重力場は静的であり，実験者は動かない．したがって実験的な設置の何ものも時間とともに変化しない．経路 γ_1, 経路γ_2 は何であれ，たんに時間的に移した，正確に同じ形の**合同**の経路でなければならない．この合同と，観測者は平行な世界線に沿って動いているということに基づいて，もし平坦な Minkowski 幾何学が成り立つならば，$\tau_{底点} = \tau_{頂点}$ となって，観測される赤方偏移の実験と矛盾すると再び結論するだろう．実験者は重力場内での光の伝播を理解する必要はない．彼らは自分たちが互いに，また重力場の源に相対的に静止していることを，彼らのレーダー装置を用いて確かめさえすればよい．彼らは，重力場が彼らのレーダー装置にどんな影響を及ぼそうと，それは時間に依存する影響でないだろうということを知っている．さらに，彼らは距離間隔が一定のままであることを確かめるために彼らの距離間隔を計算するすべを知らなくてよい．彼らはレーダーパルスが両者間を 1 周するに要する時間が測定するたびに同じであることを確かめさえすればよい．

Schild の赤方偏移の議論は，どんな種類の曲率が存在しなければならないか，あるいは曲率が観測装置の近傍あるいは若干離れて存在するかどうかを明らかにしない．しかし，そ
*7 れは，特殊相対性理論の平坦な時空は状況を記述するのに不適当であることをまったく明瞭に述べており，したがってパート III で曲率の数学的な解析を始めることを動機づける．

7.4　等価原理に対する証拠としての重力による赤方偏移

Einstein (1908, 1911) は重力的な相互作用の普遍性の理念を，**一様な重力場の効果は**
*8 **すべて座標系の一様な加速度の効果と同等である**という，基本的な**等価原理**の地位にまで

*7　結論：時空は曲がっている

*8　**等価原理**：一様な重力場は基準系の一様な加速度と区別できない

高めた．この原理は，式 (7.1) における座標系の一様な加速度は，補足的な，一様な重力場を生ずるという，Newton の重力理論の結果を一般化した．しかし，Newton の理論はただこの結果を粒子の力学に対して与える．Einstein の等価原理は，同様の対応は電磁場に対する Maxwell の方程式を含む，すべての物理法則に対して成り立つことを保証する．

ゲームの規則—“科学的方法”—は，どんな新しい理論あるいは原理に対しても実験的な支持が求められることを要求する．そして Einstein は重力による赤方偏移を彼の等価原理の実験的な確認に相当するものとして取り扱うことができた．このような確認には 2 段階がある．まず，理論あるいは原理は 1 つの効果を予言しなければならない (次の節はいかに等価原理が赤方偏移を意味するかを記述している)．次に，予言された効果は観測されなければならない．Pound–Rebka–Snider の実験で，この 2 番目の段階に対して，Einstein の時代よりも今日はるかによい状態にある．Einstein 自身は，直接的な実験的な確認に代わるものとして，エネルギー保存の一般的な概念を保証する実験と，赤方偏移がエネルギーを保存する必然性とに頼らねばならなかった．

*9 重力による赤方偏移の存在は，一定の加速度 g を保持するロケット船内での 2 人の実験者を考えることによって等価原理から導かれうる．2 人の観測者間の距離を加速度の方向に h とする．明確さのために，底点の観測者が光子を送ったときロケット船はある慣性座標系で静止していたと仮定する．光子が上の観測者に達するまでに時間 $t = h$ を要するだろう．その時間内に頂点の観測者は速度 $v = gt = gh$ を得る．したがって彼は光子を認め Doppler 赤方偏移 $z = v = gh$ を観測するだろう．結果はしたがって式 (7.20) と同等である．等価原理はもちろん，もしこの赤方偏移が重力場が存在せずに一様な加速度の条件のもとで遂行される実験で観測されるならば，同じ赤方偏移は，一様な重力場は存在するが加速度は存在しない条件のもとで遂行される実験で観測されねばならないことを要求する．したがって，等価原理によって，重力的な状況に適用されるとき式 (7.20) を導くことができる．

7.5　局所的な平坦さ，大域的な曲率

等価原理は，Schild の議論からその存在が推測された，時空の曲率の性質を認めるのに役立つ．物理学は，加速された系でも，地表に結びつけられた実験室内と同じである．こうして，地球に結びつけられた実験室は，その近傍*での Lorentz 系に相対的に，加速度 g で，上方に加速されているとみなされうる．同じことであるが，実験室および地表に相対的に，すべての Lorentz 系は下方に加速されなければならない．しかし下向きの方向 (半径方向) は緯度と経度で異なる．したがって，局所 Lorentz 系は，初めは互いに静止しているが地球の両側では，相次いで中心に向かって落下し互いを飛び抜ける．明らかにそれ
*10 (margin note beside the line beginning "で，上方に加速されているとみなされうる")

---

* 実験室のこの上方への加速度と，加速された座標系での線要素に対する式 (6.18) は，図 7.1 の平行四辺形の上下両辺の相違を説明する．

*9　等価原理から導かれる重力による赤方偏移

*10　等価原理は地球近くの局所 Lorentz 系が網の目状にならないことを意味する (時空の曲率)

らは，Schild の議論で仮定された，地球に結びついた，唯一つの大域的な Lorentz 系をつくるような網の目状になりえない．この局所 Lorentz 系が網の目状になりえないことは，曲がった 2–面上で局所的な直交座標が網の目状になりえないように，時空の曲率の明白な表示である．

地理学者は地球の表面の地図をつくるとき同様の問題をもっている．小さい領域，町や国上では，標準的な直交座標系を用いることは容易である．しかし，2 つのかなり大きい領域の地図がつくられるときには，おのおのが北を指す 1 つの座標軸をもち，わずかな角度で置かれたとしても地図の縁は互いに重なり合う（時空の類似物：地球の中心で出会う
*11 2 つの局所 Lorentz 系の相対速度）．1 つの球という状況から出発して，小さい平坦な地図がいかに球の部分に対するよい近似として用いられるかについて語る方が，小さい地図のたくさんの集合から出発してそれらをつなぎ合わせ球という状況をつくり上げるよりもはるかに容易である．本書での時空の幾何学の詳述はしたがって最初の方法をとるだろう．問題は物理学の局所的で，平坦な時空の記述を宇宙の大域的な観点へつなぎ合わせることであると認めたから，次章で幾何学の大域的な研究に飛躍するのは適切である．このより有利な観点から，わずかに異なる重力場をもつ 2 つの近傍の領域に適切な，局所的な慣性座標系間の関係を議論する問題に直面できる．

*12 幾何学が一般相対性理論に入るには実際，区別できる 2 つの方法がある．1 つは，特殊相対性理論の計量構造 ds^2 から受け継がれた，4 次元時空での長さと角度の幾何学である．Schild の議論はすでに（等価原理に直接訴えることなく），長さと角度の特殊相対性理論的な考えは修正されねばならないことを示している．計量構造の修正された考えは，8 章
*13 および 13 章で取り扱われる Riemann 幾何学に通ずる．しかし，幾何学はまた等価原理のゆえに一般相対性理論に入る．等価原理はすでに，**時空**の計量という概念が入らないで，3 次元**空間**の Euclid 的な計量構造だけが入る Newton の重力理論の中で述べられうる．Newton 理論での等価原理の考えは，再び局所的で標準的な系は自由落下粒子であることを主張する．この要求は自由落下粒子の曲がった世界線は局所的に真っ直ぐである，と定義される**時空の**幾何学の研究に通ずる．曲がった世界線は曲がった時空の幾何学で，直線
*14 が平坦な時空内で演ずる役割を演ずる．この "アフィン幾何学" は 10–12 章で調べられるだろう．それは "共変微分" と "曲率" そしてさらに "Newton 的な時空の曲率" という考えの定量的な公式化に通ずる！

---

*11 局所 Lorentz 系が網の目状にならないことは幾何学の研究を動機づける
*12 時空に関連した 2 つの型の幾何学
*13 Riemann 幾何学（長さと角度）
*14 アフィン幾何学（"直線" と曲率）

パート **III**

曲がった時空の数学

いかにして読者は新しい誘惑する女—現代微分幾何学—に魅了され，そして決断するか：8つの全章に対して彼女を抱きしめるべきか，あるいは，たらふく飲んで，1つ後ろに逃げるべきか．

8章
微分幾何学：概観

われわれの幾何学の必要性は，少なくとも，人間の知性によるものでないとか，人間の知性のためではないとかいうことは証明できないという確信に，私はますます近づきつつある…幾何学は純粋に先天的である算術とではなく，力学と同等であるべきである． (1817)

われわれは，数値はわれわれの心のみの産物であり，空間は心を越えた実在性をもっており，その法則をわれわれは完全には定めえないことを，まったく謙虚に認めなければならない． (1830)

CARL FRIEDRICH GAUSS

8.1 パートIIIの概観

重力は時空の曲率の表示であり，その曲率は1つの測地線の，近傍の測地線からの逸脱に現れる（“試験粒子の相対的な加速度”）．本書のこの部分の中心的な問題は明白である．**“曲がった時空”内での2つの“測地線”の“隔たり”，および“隔たり”の“変化率”をいかに定量化できるか？** 明白で，正確な答えは新しい概念を必要とする．[*1]

測地線間の“隔たり”は“ベクトル”を意味するだろう．しかし平坦なLorentz時空で使われるときのベクトルの概念（2局所的な対象：頭に対する点と尾に対する点）は，曲がった時空へ移行するとき，**接線ベクトル**という局所的な概念に水準を引き上げなければならない．9章でこれらの解説がなされる．それはまた，曲がった時空への移行は，いかに1–形式およびテンソルに影響を及ぼすかを明らかにする．[*2]

“隔たり”をベクトルとして明白に定義するために1つの道具（曲がった幾何学におけるベクトル，9章参照）を用いる．近傍点での隔たりのベクトルを比較し，“隔たりの変化率”を定義するために他の道具（曲がった時空での平行移動，10章参照）を用いる．移動がなければ，比較はない．比較がなければ“変化率”という術語は意味をもたない！ 平行移動という概念は“**測地線**”，自由落下粒子の世界線，という考えに見出される．測地線の特別な数学的な性質は10章で研究されるだろう．その章は平行移動を定義するために測地線を用い，**共変微分**を定義するために平行移動を用い，そして，循環を完成させて，測地線を記述するために共変微分を用いる．[*3] [*4]

---

*1 パートIIIで展開されるべき概念

*2 接線ベクトル

*3 測地線

*4 共変微分

*5 11 章では中心的な問題を扱う．**測地線の逸脱**（“2 つの測地線間の隔たりのベクトルの
*6 変化率”）と，時空の**曲率**を定義するときのその使用である．

しかし曲率を定義することは十分でない．重力を深く理解しようとする者はまた，Newton 的時空（12 章）での粒子の相対加速度を生み出している曲率の作用をみなければならない．Einstein の時空では，距離（計量）が曲率および平行移動の法則（13 章）をいかにして完全に定めるかを学ばなければならない．また，曲率を計算するための有力な道具（14 章）に精通しなければならない．そしてさらに，曲率の代数的および微分的対称性の幾何学的な意味（15 章）をつかまなければならない．

不幸にも，このような深い理解は，10 週あるいは 15 週のコースで与えうるよりもはるかに多い時間，すなわち一人の読者が初めてこの本を読み通すのに使いたいと考えるよりもはるかに多い時間を要するだろう．速く突き進まなければならない者のために，本章は
*7 重要な数学的道具についての “トラック–1” の概観（8.4–8.7 節）を含んでいる．この概観から時空の曲率，および潮汐の重力，また曲がった時空の数学の，適切であるが深くはない理解を得ることができる．またこの概観はトラック–2 の読者も対象としている．それは彼に次に来るべきものを少しだけ体験させるだろう．野心的な読者はまた微分幾何学への他の入門書（コラム 8.1 を参照）を学ぶことを考えてもよい．

コラム 8.1　微分幾何学に関する本

ここで用いられている道筋に沿った，現代微分幾何学のより詳細で広範囲の議論に対して，参考にするとよいいくつかの数学の教科書がある．Bishop and Goldberg (1968) は第 1 の文献である．Hicks (1965) も現在の標準的な大学院生レベルの教科書として選ばれるだろう．O'Neill (1966) は大学生レベルであり，純粋な数学者が考えそして書く現在的なスタイルを，読者が容易で明白と思うことを仮定せずに，多くの同じ題目について導入している．Auslander and Mackenzie (1963) は少し高等なレベルで，同型よりも微分方程式に慣れている読者にとって適切と考えられる．Wilmore (1959) は読みやすいが挑戦的なものではない，そして現在の数学のスタイルに適応する点についてほとんど進歩を与えない．Trautman (1965) および Misner (1964a, 1969a) は，図をあまり重んじないということを除いて，本書に少し似た入門書である．それらはわれわれの本のように，相対性理論の学生をねらっている．Flanders (1963) はやさしく，そして外微分形式への入門書として有用である．それはまた物理学と工学での広い種類の題目への応用例を与える．

---

*5 測地線の逸脱
*6 時空の曲率
*7 本章：微分幾何学のトラック–1 概観

8.2　トラック–1 対 トラック–2：展望と能力における相違

Einstein の重力理論と Newton の理論との関係について，Élie Cartan (1923, 1924) によって発見された以下のこと以上にすばらしいことは何もない．すなわち，2 つの理論は曲率による記述を与え，両者においてこの曲率は質量–エネルギー密度で支配され，そしてこの曲率は計量のいかなる使用にもいかなる概念にも関係なく定義され測定されうる．2 つの理論間の相違は次の点に現れている．Einstein の理論は，終わりに（あるいは提示の仕方に応じて，初めに!）すべての事象とすべての近傍の事象間の間隔を定義する．Newton の理論は，**時空**の間隔について語るいかなる試みも Newton の法則を破るとさえ言う．こ
*8 れは事実である，トラック–2 はしばらく（9–12 章），時空の計量（“Einstein の間隔”）をまったく用いずに済ませる．それは時空の曲率の計量によらない記述から，引き出せるものをすべて引き出すだろう（Newton の理論のすべて，Einstein の理論の重要な部分）．

測地線の逸脱は曲率の測定者でありまた定義者である．しかし傍観者は隔たりのベクトル記述を，距離の数値的な測定にまで帰着することを禁止されている（解析のこの段階では計量はない）．何という不可能な状況であろうか！ にもかかわらず，それはまさに 9–12 章が関係する状況である．計量なしにいかに幾何学をつくるべきか．物理学的に言えば，物理学的世界の幾何学はつねにそしていたるところで局所的に Lorentz であり，光円錐を与えられている．しかし Galileo–Einstein の等価原理が最大限利用されるであろうという事実が，この段階で見落とされているだろう．任意の与えられた局所内ですべての中性の試験粒子は，その速度が何であろうとも，加速度を受けない基準系が見出されうる．これら中性の試験粒子の軌道は幾何学の測地線を定義する．これらの測地線は多くをなしうる道具を提供する．平行移動を定義する（10 章），共変微分を定義する（10 章），測地線の逸脱を定量化する（11 章），時空の曲率を定義する（11 章），そして Newton 的な重力を探求する（12 章）．計量によらない測地線のこの完全な開拓の後に初めてトラック–2 は，Einstein の計量が舞台に戻るのを認めるだろう（13–15 章）．

しかし計量を使用せずに済ませることは，トラック–1 には，その余裕のないぜいたくであろう．あまりにわずかな時間しか，相対論的な星，宇宙論，ブラックホール，重力波，実験的なテスト，および幾何学の力学に対して残されていないだろう．したがって，本章の
*9 トラック–1 の概観は Einstein の計量を初めから終わりまで使用する．しかしそうするには，重い代価を支払う．(1) Newton 的な時空（12 章）で作用している曲率をみることはできない．(2) Newton 的な時空（12 章）と Einstein の時空（13 章）の幾何学的な構造を比較し対照することはできない．したがって Einstein の場の方程式に対する，Newton に基づいた動機づけを完全につかむことはできない（17 章）．(3)“測地線”，“平行移動”，“共変微分”，“曲率”，および “計量”（9，10，11，13 章）の数学的な相互関係を**完全**に理解することはできない．(4) 数学的な題目，**“微分トポロジー”**（計量あるいは共変微分を

*8　トラック–2 の予告　微分幾何学
*9　トラック–1 の読者がつかみ損なうもの

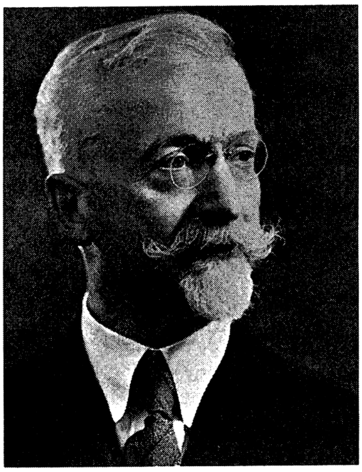
もたない幾何学，9 章）および“**アフィン幾何学**”（共変微分をもつが計量をもたない幾何学，10 および 11 章），現代の解析力学 [たとえば，Arnold and Avez (1968)，また本書の練習問題 4.11 をみよ] に，素粒子物理学に深いかかわりあいをもつ Lie 群論 [たとえば，Hermann (1966)，また本書の練習問題 9.12，9.13，10.16，および 11.12 をみよ] に，偏微分方程式の理論と解 [たとえば，Sternberg (1969) をみよ] に，そして，もちろん，重力理論に，主要な応用を見出す題目を導入する可能性をもたない．

8.3　幾何学の 3 つの様相：絵によるもの，抽象的なもの，成分によるもの

8.4 節および 9 章で，曲がった時空での接線ベクトル，1–形式，テンソルを議論するために力をつけよう．8.5 節および 10 章で，ベクトルを平行移動するため，ベクトルを微分するため，測地線を議論するために力をつけよう．8.7 節および 11 章で，測地線の逸脱を
*10 議論するため，曲率を定義するためにこの力を用いよ．しかしこの力は 3 つの方法，すなわち，絵で，抽象的な記号で，そして成分の記号で（コラム 8.3）行使される場合に限り完全な力となるだろう．Élie Cartan（コラム 8.2）は微分幾何学をつくる 3 つの方法をすべて完全に使ったから，Newton の重力（12 章）と Einstein の重力場の方程式（15 章）の中心的な幾何学的単純さの両方に新しい洞察を与えた．今日，題目について自ら 3 つの言葉すべてで表現できない他人と，意志を疎通する完全な力をもつ者はいない．したがって何事についても 3 つの表現形式間の相互作用が続く．

コラム 8.2　Élie Cartan, 1869–1951

Élie Cartan は最近の数学史の中でもっとも注目すべき人物である．彼の死亡記事 [Chern and Chevally (1952)] によると，彼はかじ屋の息子として南フランスに



*10　3 つの観点からの幾何学：絵によるもの，抽象的なもの，成分によるもの

生まれ，1912年，43歳でSorbonneの教授職にまで上りつめたことにより政府の奨学資金の援助の価値を証明したことがわかる．32歳で彼は外微分を発見した[Cartan (1901)]．それからもっぱら微分方程式およびLie群の理論にそれを用いた．そしてこの理論ですでに重要な貢献をしている彼が，幾何学に外微分を適用し始めたのは50歳頃であった．そして今もなお再印刷され研究するだけの価値がある彼の教科書[Cartan (1928)]を含めて，Riemann幾何学がとりわけ外微分の研究の対象となったときにはすでに60歳であった．一般的に認められていたけれども，彼の仕事は，退職近くの1940年頃までは，共鳴する読者は現れなかった．そのころになって，フランス数学者の"Bourbaki"世代がCartanの洞察力と方法（他の事柄とともに）に対する概念的な枠組みを与え始めた．これによって，彼自身の著作がそれまで伝達できず，教えづらかったことを解消し，1951年82歳で死ぬときまでに，彼の影響は明らかに，当時彼がおもに仕事をしていたすべての分野（Lie群，微分方程式，および微分幾何学）でどんどん進んでいた革命的発展を支配していた．

幾何学に対する現代の，抽象的な，座標によらない研究方法は，この本で広く用いられているが，おもにÉlie Cartanによる．彼はまた，12章で展開され利用されている，Newtonの重力への幾何学的な研究方法を発見した．

コラム8.3　微分幾何学の3つのレベル

(1) 純粋に絵による幾何学の取り扱い

接線ベクトルは，2点の隔たりによってこれら2点が無限に近い極限で理解される．

ベクトルは局所的には平坦な空間におけるのと同じように，加えられそして引き算される．

異なる点でのベクトルは1点から他の点への平行移動によって比較される．

この平行移動は測地線の"Schildのはしご構成"によって達成される（コラム10.2）．

図はよろしい，代数はいけない．

幾何学は概念的には，可能な限り密接に試験粒子と測定の世界に結びついている．

(2) 抽象的な微分幾何学

接線ベクトルを，成分への分解，

$$\boldsymbol{A} = A^0\boldsymbol{e}_0 + A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3$$

を与えることなしに，それ自身の権利において存在するものとして取り扱う．ちょうど，電磁気学で今日電気ベクトル $\boldsymbol{E}$ をその成分を書き下ろすこともなく，取り扱うことに慣れているように．

微分を扱うのと同様の方法を用いる（初歩的なベクトル解析の勾配演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ を $\partial/\partial x$,

$\partial/\partial y$，他のような演算子の座標に依存する部分とは異なるものとして).

微分幾何学での一般的な結果を導くために知りうるもっとも速い，もっとも単純な数学的体系である.

(3) **成分**の言葉で表された微分幾何学

一般相対性理論の大部分をコンピュータのためにプログラミングするときに欠くことができない.

Friedmann 宇宙の膨張から静的な引力の中心周りの曲率まで，相対論のもっとも単純な応用を，基本的な代数のレベルで取り扱うときでも，便利でありあるいは必要であり，あるいはその両方である.

*11 太陽の周りを Kepler の運動をしている惑星の速度と加速度についての教科書での取り扱いが立証するように，3 つの言葉の間を行きつ戻りつすることは新しいことでない. 速度は

$$\boldsymbol{v} = v^{\hat{r}}\boldsymbol{e}_{\hat{r}} + v^{\hat{\phi}}\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}} \tag{8.1}$$

と書かれる（$\boldsymbol{e}_{\hat{r}}$ および $\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}$ についてのハット "^" は，これらは単位ベクトルであることを表示している). 加速度は

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv^{\hat{r}}}{dt}\boldsymbol{e}_{\hat{r}} + \frac{dv^{\hat{\phi}}}{dt}\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}} + v^{\hat{r}}\frac{d\boldsymbol{e}_{\hat{r}}}{dt} + v^{\hat{\phi}}\frac{d\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}}{dt} \tag{8.2}$$

である. 単位ベクトルは角速度 $\omega = d\phi/dt$ で回転している（図 8.1). したがって

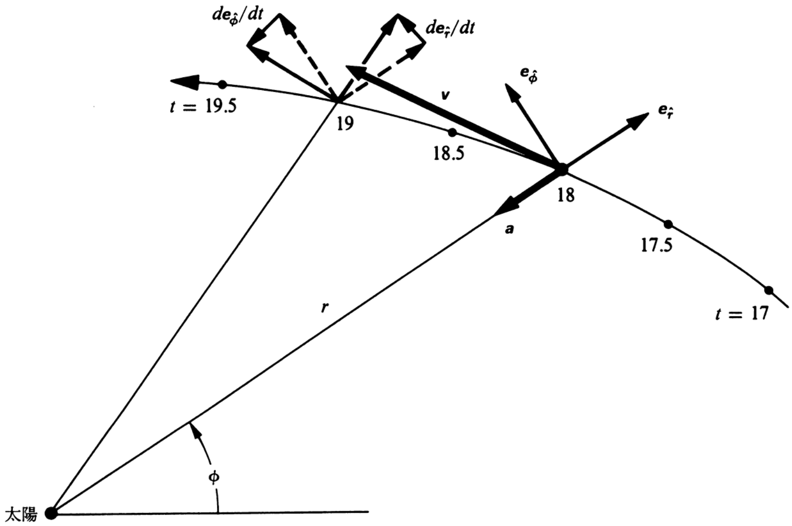


図 8.1 Newton 的な重力が標準的な Euclid 空間バージョンを用いて取り扱われたときの，太陽の重力場内での Kepler 軌道. 基底ベクトル自身は軌道に沿う点から点へ変化する [式 (8.3)]. この図は微分幾何学の絵で表した様相を例示している. 後で（練習問題 8.5）この図は "共変微分" および "接続係数" の概念を例示するだろう.

*11　3 つの観点の例としての惑星の軌道

$$\frac{d\boldsymbol{e}_{\hat{r}}}{dt} = \omega \boldsymbol{e}_{\hat{\phi}} = \frac{d\phi}{dt}\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}},$$
$$\frac{d\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}}{dt} = -\omega \boldsymbol{e}_{\hat{r}} = -\frac{d\phi}{dt}\boldsymbol{e}_{\hat{r}} \tag{8.3}$$

こうして加速度の成分は値

$$a^{\hat{r}} = \frac{dv^{\hat{r}}}{dt} - v^{\hat{\phi}}\frac{d\phi}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \tag{8.4a}$$

および

$$a^{\hat{\phi}} = \frac{dv^{\hat{\phi}}}{dt} + v^{\hat{r}}\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\phi}{dt}\right) + \frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt} \tag{8.4b}$$

をもつ．

ここに成分の言葉で表された加速度がある．$\boldsymbol{a}$ は抽象的な言葉で表された加速度であった．図 8.1 は加速度を矢として示している．これら 3 つの言葉のおのおのは後述の節や章で，2 次元の平坦な空間（曲線座標をもつ）から 4 次元の曲がった時空へ，そして時空からより一般的な多様体（多様体については 9.7 節をみよ）へ，自然に拡張されるだろう．

さて微分幾何学のトラック–1 の概観へ向かう．

8.4　曲がった時空でのテンソル代数

*12 時空の曲率の作用をみるために，潮汐を起こす重力（測地線の逸脱）を吟味する．そして
*13 これらの力を証明するために，有限の大きさをもつ実験室で測定をする．実験室を無限小の大きさにまで圧縮する．時空の曲率のすべての効果は無限小になる．物理学者は自分が平坦な時空内にいるかあるいは曲がった時空内にいるかを告げることができない．数学者もまた自分の注目する領域が唯一の事象，$\mathcal{P}_0$ にまで縮小された極限で，上述の区別を告げることができない．

事象 $\mathcal{P}_0$（無限小の実験室内で）で物理学者も数学者も，ベクトルについて，1–形式につ
*14 いて，テンソルについて述べることができる．時空のいかなる曲率も，議論を平坦な空間の形から強制的に変えさせることはできない．$\mathcal{P}_0$ の粒子は 2 乗された長さ

$$\boldsymbol{p}^2 = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}) = -m^2$$

の 4–運動量 $\boldsymbol{p}$ をもっている．2 乗された長さは，いつものように，$\boldsymbol{p}$ を，線形機械 $\mathcal{P}_0$ での計量 $\boldsymbol{g}$ の両投入口に挿入して計算される．粒子はまた $\mathcal{P}_0$ で 4–加速度 $\boldsymbol{a}$ をもっている．そして，もし粒子が電荷を帯び自由に動いているならば，$\boldsymbol{a}$ は電磁場のテンソル $\boldsymbol{F}$ によって生み出される．

$$m\boldsymbol{a} = e\boldsymbol{F}(\cdots, \boldsymbol{u})$$

*12　テンソル代数
*13　(1) 事象の無限小近傍で起こる
*14　(2) 曲がった時空内では平坦な時空内と同じである

いかなる方法でも曲率はこのような局所的な座標によらない，幾何学的な関係に影響を与えることはできない．そしていかなる方法でも曲率は $\mathcal{P}_0$ に局所 Lorentz 系を導入し，その系内で標準的で，平坦な空間の添字操作をすることを妨げることができない．

$$\boldsymbol{p} = p^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha, \qquad \boldsymbol{p}^2 = p^\alpha p^\beta \eta_{\alpha\beta} = p^\alpha p_\alpha, \qquad ma^\alpha = eF^{\alpha\beta} u_\beta$$

しかし局所 Lorentz 系は曲がった時空で計算しようとする者にとって十分でない．非 Lorentz 系（非直交基底ベクトル $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$）はしばしば計算を単純化する．幸いに，ある定まった事象 $\mathcal{P}_0$ での任意の基底で“添字の力学”の規則を修得するには何の努力も必要でない．規則は以下の 5 点を除いて平坦な時空での規則と同一である．(1) 計量の共役な Lorentz 成分 $\eta_{\alpha\beta}$ は

*15

*16

$$g_{\alpha\beta} \equiv \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta \equiv \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta) \tag{8.5}$$

で置き換えられる．(2) 反変成分 $\eta^{\alpha\beta}$ は $g^{\alpha\beta}$ で置き換えられ，ここに

$$\|g^{\alpha\beta}\| \equiv \|g_{\alpha\beta}\|^{-1}(\text{逆行列}) \tag{8.6}$$

すなわち，

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\gamma \tag{8.6$'$}$$

(3) Lorentz 変換行列 $\|\Lambda^{\alpha'}{}_\beta\|$ およびその逆 $\|\Lambda^\beta{}_{\alpha'}\|$ は，任意のしかし正則な変換行列 $\|L^{\alpha'}{}_\beta\|$ およびその逆 $\|L^\beta{}_{\alpha'}\|$ で置き換えられる．

*17

$$\boldsymbol{e}_\beta = \boldsymbol{e}_{\alpha'} L^{\alpha'}{}_\beta, \qquad p^\beta = L^\beta{}_{\alpha'} p^{\alpha'} \tag{8.7}$$

$$\|L^\beta{}_{\alpha'}\| = \|L^{\alpha'}{}_\beta\|^{-1} \tag{8.8}$$

(4)“座標基底”，$\boldsymbol{e}_\alpha = \partial\mathcal{P}/\partial x^\alpha$，$\boldsymbol{e}_{\beta'} = \partial\mathcal{P}/\partial x^{\beta'}$ の特別な場合には，

$$L^{\alpha'}{}_\beta = \partial x^{\alpha'}/\partial x^\beta, \qquad L^\beta{}_{\alpha'} = \partial x^\beta/\partial x^{\alpha'} \tag{8.9}$$

*18 そして (5) Levi–Civita テンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$ は，計量テンソルのように，基底ベクトルがいかに非直交であるか（練習問題 8.3 をみよ）に依存する成分をもっている．もし $\boldsymbol{e}_0$ が未来を指し示し，そして $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ が右手系であるならば，

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= (-g)^{1/2}[\alpha\beta\gamma\delta], \\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} &= g^{-1}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -(-g)^{-1/2}[\alpha\beta\gamma\delta] \end{aligned} \tag{8.10a}$$

ここに $[\alpha\beta\gamma\delta]$ は完全に反対称な記号

*15　(3) 成分の操作に対する規則は非直交基底を用いるときはわずかに変化する
*16　計量の成分
*17　基底の変換
*18　Levi–Civita テンソルの成分

$$[\alpha\beta\gamma\delta] \equiv \begin{cases} +1 & (\alpha\beta\gamma\delta \text{ が } 0123 \text{ の偶置換}) \\ -1 & (\alpha\beta\gamma\delta \text{ が } 0123 \text{ の奇置換}) \\ 0 & (\alpha\beta\gamma\delta \text{ がすべては異ならない}) \end{cases} \tag{8.10b}$$

であり，g は行列 $\|g_{\alpha\beta}\|$ の行列式である．

$$g \equiv \det\|g_{\alpha\beta}\| = \det\|\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta\| \tag{8.11}$$

完全な議論と証明に対してはコラム 8.4 を読め．より完全な理解と精通に対しては以下の練習問題 8.1 を解け．

この議論にはいくつかの危険が塗りこめられている．平坦な時空では多くの場合，ベクトル，1–形式，あるいはテンソルがどこに位置しているかについて悩まない．幾何学的な対象を事象から事象へ何ら考えずに自由に動かす．もちろん，移動について書かれていない規則は，動かす間すべての長さと方向を一定に保つ．すなわち，すべての Lorentz 系の成分を一定に保つ．すなわち，対象を “平行移動する” のである．しかし曲がった時空では成分を一定に保つような大域的な Lorentz 座標系は存在しない．そして初め平行であった対象も，異なる曲線に沿って “平行移動” した後には平行でなくなる（“測地線の逸脱”，
*19 地球の子午線は，赤道で平行で，北極と南極で交わる）．こうして，曲がった時空では幾何学的な対象を点から点へ，どのようにそしてどのルートで動かすかを注意深く指定せずに，軽率に動かしてはならない．おのおのの局所的な幾何学的対象はそれ自身の公的な住所（事象 $\mathcal{P}_0$）をもっている．それはそこに存在する他の対象と相互作用できる（テンソル代数学）．しかしそれは他の事象 $\mathcal{Q}$ でのいかなる対象とも，それが $\mathcal{P}_0$ から $\mathcal{Q}$ まで注意深く移動されてしまうまでは，相互作用できない．

コラム 8.4　一定の事象を “任意の” 基底で取り扱うテンソル代数学

A. 基　底

接線ベクトル基底：$\mathcal{P}_0$ で $\boldsymbol{e}_0$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ を任意にとる．それらは一次独立であると主張せよ．

1–形式に対する “双対基底”：基底 $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ は 1–形式基底 $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$（“双対基底”）を

$$\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha{}_\beta$$

によって定める [式 (2.19) をみよ]．

幾何学的な解釈（図 9.2）：$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{e}_0$ は $\boldsymbol{\omega}^1$ の面に平行である．$\boldsymbol{e}_1$ は $\boldsymbol{\omega}^1$ の 1 つの面を正確に貫く．

*19　ベクトルとテンソルは点から点へ軽率に動かしてはならない

関数解釈：$\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha{}_\beta$ は $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ の，任意のベクトル $\boldsymbol{u} = u^\beta \boldsymbol{e}_\beta$ に関する値を定める（$\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ を貫くとき“ベルがゴーンと鳴らす音”の数）．

$$\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, u^\beta \boldsymbol{e}_\beta \rangle = u^\beta \langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\beta \rangle = u^\beta \delta^\alpha{}_\beta = u^\alpha$$

特別な例：**座標基底**．任意の座標系 $\{x^\alpha(\mathcal{P})\}$ を選べ．$\mathcal{P}_0$ で $\boldsymbol{e}_\alpha = \partial\mathcal{P}/\partial x^\alpha$ を基底ベクトルとして選べ．そうすると双対基底は $\boldsymbol{\omega}^\alpha = \boldsymbol{d}x^\alpha$ である．**証明**：一般的な座標によらない関係 $\langle \boldsymbol{d}f, \boldsymbol{v} \rangle = \partial_{\boldsymbol{v}} f$ [式 (2.17)] は，ここに $f = x^\alpha$ および $\boldsymbol{v} = \partial\mathcal{P}/\partial x^\beta$，

$$\langle \boldsymbol{d}x^\alpha, \partial\mathcal{P}/\partial x^\beta \rangle = (\partial/\partial x^\beta) x^\alpha = \delta^\alpha{}_\beta$$

である．

B. 接線ベクトルと 1–形式の代数学

式 (2.19) から (2.22) までの Lorentz 系の議論は任意の基底に移っても完全に不変である．その結論：

展開，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_\alpha u^\alpha$，$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_\alpha \boldsymbol{\omega}^\alpha$

成分の計算，$u^\alpha = \langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{u} \rangle$，$\sigma_\alpha = \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{e}_\alpha \rangle$

形式のベクトルに関する値，$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u} \rangle = \sigma_\alpha u^\alpha$

関数の勾配への応用：

展開，$\boldsymbol{d}f = f_{,\alpha} \boldsymbol{\omega}^\alpha$ [$f_{,\alpha}$を定義する]

成分の計算，$f_{,\alpha} = \langle \boldsymbol{d}f, \boldsymbol{e}_\alpha \rangle = \partial_{\boldsymbol{e}_\alpha} f$ [式 (2.17) をみよ]

添字の上げ下げは $g_{\alpha\beta}$ および $g^{\alpha\beta}$ で達成される [式 (8.5) および (8.6) をみよ]．

証明：$\boldsymbol{u}$ に対応する 1–形式，$\tilde{\boldsymbol{u}}$ は，すべての $\boldsymbol{v}$ に対して $\langle \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ で定義される．こうして，$u_\alpha \equiv \langle \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{e}_\alpha \rangle = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_\alpha = u^\beta \boldsymbol{e}_\beta \cdot \boldsymbol{e}_\alpha = u^\beta g_{\beta\alpha}$．この式を逆にすると，$u^\beta = g^{\beta\alpha} u_\alpha$ を与える．

C. 基底の変更

式 (2.39) から (2.43) までにおける Lorentz 変換の議論は，もし $\|\Lambda^{\alpha'}{}_\beta\|$ を任意のしかし正則な行列 $\|L^{\alpha'}{}_\beta\|$[式 (8.7)，(8.8)] で置き換えるならば，基底の一般的な変更に適用されうる．**結論**：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{\alpha'} &= \boldsymbol{e}_\beta L^\beta{}_{\alpha'}, & \boldsymbol{e}_\beta &= \boldsymbol{e}_{\alpha'} L^{\alpha'}{}_\beta, \\
\boldsymbol{\omega}^{\alpha'} &= L^{\alpha'}{}_\beta \boldsymbol{\omega}^\beta, & \boldsymbol{\omega}^\beta &= L^\beta{}_{\alpha'} \boldsymbol{\omega}^{\alpha'}, \\
v^{\alpha'} &= L^{\alpha'}{}_\beta v^\beta, & v^\beta &= L^\beta{}_{\alpha'} v^{\alpha'}, \\
\sigma_{\alpha'} &= \sigma_\beta L^\beta{}_{\alpha'}, & \sigma_\beta &= \sigma_{\alpha'} L^{\alpha'}{}_\beta
\end{aligned}$$

両方の基底が座標基底であるときは，$L^\beta{}_{\alpha'} = \partial x^\beta / \partial x^{\alpha'}, L^{\alpha'}{}_\beta = \partial x^{\alpha'} / \partial x^\beta$．

証明：

$$\boldsymbol{e}_{\alpha'} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}}\boldsymbol{e}_{\beta}, \qquad \text{同様に} \quad \boldsymbol{e}_{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}\boldsymbol{e}_{\alpha'}$$

D. テンソルの代数学

3.2節[式(3.8)から(3.22)まで]および3.5節（勾配および発散を除く）で与えられたテンソルの代数学の議論は，

$$\eta_{\alpha\beta}\longrightarrow g_{\alpha\beta}, \quad \eta^{\alpha\beta}\longrightarrow g^{\alpha\beta}, \quad \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\longrightarrow L^{\alpha'}{}_{\beta}, \quad \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\longrightarrow L^{\beta}{}_{\alpha'}$$

を除いて不変である．そしてLevi–Civitaテンソルの成分は，式(3.50)から(8.10)まで変化する（練習問題8.3をみよ）．

おもな結論：

展開，$\boldsymbol{S} = S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\boldsymbol{e}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\gamma}$

成分，$S^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}^{\alpha}, \boldsymbol{e}_{\beta}, \boldsymbol{e}_{\gamma})$

添字の上げ下げ，$S_{\mu\beta}{}^{\nu} = g_{\mu\alpha}g^{\nu\gamma}S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$

基底の変更，$S^{\lambda'}{}_{\mu'\nu'} = L^{\lambda'}{}_{\alpha}L^{\beta}{}_{\mu'}L^{\gamma}{}_{\nu'}S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$

機械操作，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\sigma_{\alpha}u^{\beta}v^{\gamma}$

テンソル積，$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v} \Longleftrightarrow T^{\alpha\beta} = u^{\alpha}v^{\beta}$

縮約，“$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}$ の，投入口1および3についての縮約” $\Longleftrightarrow M_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$

くさび積，$\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}$ は成分 $\alpha^{\mu}\beta^{\nu} - \beta^{\mu}\alpha^{\nu}$ をもつ

双対，${}^{*}J_{\alpha\beta\gamma} = J^{\mu}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$，${}^{*}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$，${}^{*}B_{\alpha} = \frac{1}{6}B^{\lambda\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}$

E. 交換子（練習問題8.2，9.6節，コラム9.2）

もし $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ が接線ベクトルの場であるならば，$\boldsymbol{u} = \partial_{\boldsymbol{u}}$ および $\boldsymbol{v} = \partial_{\boldsymbol{v}}$ と考える．そして

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] \equiv [\partial_{\boldsymbol{u}}, \partial_{\boldsymbol{v}}] \equiv \partial_{\boldsymbol{u}}\partial_{\boldsymbol{v}} - \partial_{\boldsymbol{v}}\partial_{\boldsymbol{u}}$$

を定義する．この交換子自身，接線ベクトルの場である．

座標基底での成分：

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = (u^{\beta}v^{\alpha}{}_{,\beta} - v^{\beta}u^{\alpha}{}_{,\beta})\underbrace{(\partial/\partial x^{\alpha})}_{[=\boldsymbol{e}_{\alpha}]}$$

基底の交換係数：

$$[\boldsymbol{e}_{\alpha}, \boldsymbol{e}_{\beta}] \equiv c_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\boldsymbol{e}_{\gamma}, \qquad c_{\alpha\beta\mu} \equiv c_{\alpha\beta}{}^{\gamma}g_{\gamma\mu}$$

座標基底（“ホロノミック（holonomic）”）$c_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 0$

非座標基底（“非ホロノミック”）$c_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \neq 0$ など（練習問題 9.9 をみよ）

*20 この線の推論は，さらに進めると，おのおのの事象での “**接線空間**” について述べることになる．そこではその事象のベクトル（矢印）および 1–形式（面の群）が内在する．そしてそこではテンソル（線形機械）が作用する．接線空間の発見法的な絵も，図 9.1 におけるように，描くことができる．

*21 曲がった時空での他の危険は，ベクトルを 2 つの事象（“頭に対する点と尾に対する点”）をつなぐ矢とみなす，すなわち，図 9.1 の接線空間を時空自身に存在するとみなす誘惑である．この習慣は発見法的な目的に対して有用でありうるが，完全な数学的な精密さと両立できない（接線空間はいかに曲がった曲面の鋳型につくられるべきか?）．ベクトルの 4 つの定義は図 2.1 に与えられた．3 つの定義は “頭に対する点と尾に対する点” に依存する，1 つの定義 “$d\mathcal{P}/d\lambda$” は純粋に局所的である．局所的な定義のみが曲がった時空で完全に存立できる，そしてそれすら数学者によって，以下のように改善されうる．

*22

ベクトル $\boldsymbol{u}$ と方向微分演算子 $\partial_{\boldsymbol{u}}$ の間には 1 対 1 の対応（完全な “同形”）がある．ベクトルの概念は少し不明確であるが，“方向微分” は完全によく定義されている．すべての不明確さを取り除くために，同形を最大限活用する，すなわち接線ベクトル $\boldsymbol{u}$ は対応する方向微分に等しいと**定義する**．

*23

$$\boldsymbol{u} \equiv \partial_{\boldsymbol{u}} \tag{8.12}$$

（この習慣は，物理学者にとって初めはなじみの薄いものであるが，数学的な力をもっている．それでこの本はそれをしばしば用いるだろう．完全な議論については，9.2 節をみよ．）

[練習問題]

8.1 テンソル代数学についての実習

t，x，y，z を平坦な時空での Lorentz 座標とし，そして

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \qquad \theta = \cos^{-1}(z/r), \qquad \phi = \tan^{-1}(y/x)$$

を対応する球座標とする．そうすると

$$\boldsymbol{e}_0 = \partial\mathcal{P}/\partial t, \qquad \boldsymbol{e}_r = \partial\mathcal{P}/\partial r, \qquad \boldsymbol{e}_\theta = \partial\mathcal{P}/\partial\theta, \qquad \boldsymbol{e}_\phi = \partial\mathcal{P}/\partial\phi$$

は座標基底，そして

$$\boldsymbol{e}_{\hat{0}} = \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{e}_{\hat{r}} = \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial r}, \qquad \boldsymbol{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\theta}, \qquad \boldsymbol{e}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\phi}$$

*20 接線空間の定義
*21 曲がった時空でのベクトルの定義
*22 (1) $d\mathcal{P}/d\lambda$ として
*23 (2) 方向微分として

は非座標基底である．

(a) 一定の t，r の球上の若干の異なる点で，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\phi$，$\boldsymbol{e}_{\hat\theta}$，および $\boldsymbol{e}_{\hat\phi}$ の図を描け．[$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\phi$ に対する答えは図 9.1 に似ているはずである．]

(b) これらの接線ベクトルの基底に双対な 1–形式の基底 $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$ および $\{\boldsymbol{\omega}^{\hat\alpha}\}$ は何か？ [**答え：**$\boldsymbol{\omega}^0 = \boldsymbol{d}t$，$\boldsymbol{\omega}^r = \boldsymbol{d}r$，$\boldsymbol{\omega}^\theta = \boldsymbol{d}\theta$，$\boldsymbol{\omega}^\phi = \boldsymbol{d}\phi$; $\boldsymbol{\omega}^{\hat 0} = \boldsymbol{d}t$，$\boldsymbol{\omega}^{\hat r} = \boldsymbol{d}r$，$\boldsymbol{\omega}^{\hat\theta} = r\boldsymbol{d}\theta$，$\boldsymbol{\omega}^{\hat\phi} = r\sin\theta\,\boldsymbol{d}\phi$]

(c) 元の Lorentz 系を極座標系 $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ につなげる変換行列は何か？ [**答え：**ゼロでない成分は

$$
\begin{aligned}
&{L^t}_0 = 1, && {L^z}_r = \frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta, && {L^z}_\theta = \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta,\\
&{L^x}_r = \sin\theta\cos\phi, && {L^x}_\theta = r\cos\theta\cos\phi, && {L^x}_\phi = -r\sin\theta\sin\phi,\\
&{L^y}_r = \sin\theta\sin\phi, && {L^y}_\theta = r\cos\theta\sin\phi, && {L^y}_\phi = r\sin\theta\cos\phi
\end{aligned}
$$

である．]

(d) この変換行列を用いて極座標基底での計量成分 $g_{\alpha\beta}$ を計算せよ．そして生ずる行列を逆転させて $g^{\alpha\beta}$ を求めよ．[**答え：**

$$
\begin{aligned}
&g_{00} = -1, \quad g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta, \quad \text{すべての他の } g_{\alpha\beta} = 0\\
&g^{00} = -1, \quad g^{rr} = 1, \quad g^{\theta\theta} = r^{-2}, \quad g^{\phi\phi} = r^{-2}\sin^{-2}\theta, \quad \text{すべての他の } g^{\alpha\beta} = 0]
\end{aligned}
$$

(e) 非座標基底 $\{\boldsymbol{e}_{\hat\alpha}\}$ はいたるところで直交している．すなわち，$g_{\hat\alpha\hat\beta} = \eta_{\hat\alpha\hat\beta}$．すなわち，

$$
\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\omega}^{\hat 0}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\hat 0} + \boldsymbol{\omega}^{\hat r}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\hat r} + \boldsymbol{\omega}^{\hat\theta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\hat\theta} + \boldsymbol{\omega}^{\hat\phi}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\hat\phi}
$$

(f) 関数 f の勾配を極座標および非座標基底によって書け．[**答え：**

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{d}f &= \frac{\partial f}{\partial t}\boldsymbol{d}t + \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{d}\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{d}\phi\\
&= \frac{\partial f}{\partial t}\boldsymbol{\omega}^{\hat 0} + \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{\omega}^{\hat r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{\omega}^{\hat\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{\omega}^{\hat\phi}]
\end{aligned}
$$

(g) Levi–Civita テンソルの成分は，極座標および非座標基底ではどうなるか？ [**座標基底に対する答え：**

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{0r\theta\phi} &= -\varepsilon_{r0\theta\phi} = +\varepsilon_{r\theta0\phi} = \cdots = r^2\sin\theta,\\
\varepsilon^{0r\theta\phi} &= -\varepsilon^{r0\theta\phi} = +\varepsilon^{r\theta\phi0} = \cdots = -r^{-2}\sin^{-1}\theta]
\end{aligned}
$$

8.2　交換子

接線ベクトルと方向微分は同じものである，すなわち $\boldsymbol{u} \equiv \partial_{\boldsymbol{u}}$ という数学者の観点をとる．$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ を 2 つのベクトル場とし，それらの交換子を量子力学からなじみの方法で定義する．

$$
[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}] \equiv [\partial_{\boldsymbol{u}},\partial_{\boldsymbol{v}}] \equiv \partial_{\boldsymbol{u}}\partial_{\boldsymbol{v}} - \partial_{\boldsymbol{v}}\partial_{\boldsymbol{u}} \tag{8.13a}
$$

(a) $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ に対して，任意の**座標**基底で成り立つ以下の表現を導け.

$$[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}] = (u^\beta v^\alpha{}_{,\beta} - v^\beta u^\alpha{}_{,\beta})\boldsymbol{e}_\alpha \tag{8.13b}$$

こうして，$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ は 2 次の微分演算子のようにみえるという事実にもかかわらず，実際は 1 次である—すなわち，それは接線ベクトルである.

(b) 任意の基底 $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ に対して，**"交換係数"** $c_{\beta\gamma}{}^\alpha$ および $c_{\beta\gamma\alpha}$ を

$$[\boldsymbol{e}_\beta, \boldsymbol{e}_\gamma] \equiv c_{\beta\gamma}{}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha, \qquad c_{\beta\gamma\alpha} \equiv g_{\alpha\mu} c_{\beta\gamma}{}^\mu \tag{8.14}$$

で定義する．任意の座標基底に対して $c_{\beta\gamma}{}^\alpha = c_{\beta\gamma\alpha} = 0$ を示せ.

(c) 練習問題 8.1 の非極座標基底に対して $c_{\hat\beta\hat\gamma}{}^{\hat\alpha}$ を計算せよ．[**答え：**以下を除いてすべてゼロである.

$$\begin{aligned} c_{\hat r\hat\theta}{}^{\hat\theta} &= -c_{\hat\theta\hat r}{}^{\hat\theta} = -1/r, \\ c_{\hat r\hat\phi}{}^{\hat\phi} &= -c_{\hat\phi\hat r}{}^{\hat\phi} = -1/r, \\ c_{\hat\theta\hat\phi}{}^{\hat\phi} &= -c_{\hat\phi\hat\theta}{}^{\hat\phi} = -\cot\theta/r] \end{aligned}$$

8.3 Levi–Civita テンソルの非直交系での成分

(a) $\boldsymbol{e}_0$ は未来を指しそして $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ が右手系をなすとして，表現 (8.10) は，任意の基底での $\boldsymbol{\varepsilon}$ の成分であることを示せ．[ヒント：(1) 練習問題 3.13 に与えられている，Lorentz 系での $\boldsymbol{\varepsilon}$ の議論を復習せよ．(2) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ および $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ を局所 Lorentz 系 $\{\boldsymbol{e}_{\hat\mu}\}$ からの変換で計算せよ．たとえば,

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = L^{\hat\mu}{}_\alpha L^{\hat\nu}{}_\beta L^{\hat\lambda}{}_\gamma L^{\hat\rho}{}_\delta \varepsilon_{\hat\mu\hat\nu\hat\lambda\hat\rho}$$

(3) これらの表現は

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \det\|L^{\hat\mu}{}_\nu\| \varepsilon_{\hat\alpha\hat\beta\hat\gamma\hat\delta}, \qquad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det\|L^\nu{}_{\hat\mu}\| \varepsilon^{\hat\alpha\hat\beta\hat\gamma\hat\delta}$$

に帰着することを示せ.

(4) 計量成分に対する変換則から,

$$(\det\|L^\nu{}_{\hat\mu}\|)^2 \det\|g_{\alpha\beta}\| = -1$$

を示せ.

(5) これらの結果を組み合わせて表現 (8.10) を得よ.]

(b) 置換テンソル [式 (3.50h)–(3.50j) で定義されている] の成分は，任意の系で Lorentz 系での値と同じ値 [式 (3.50k)–(3.50m)] をもつことを示せ.

テンソル代数学については，補足的な練習問題は練習問題 9.3 と 9.4.

8.5 平行移動，共変微分，接続係数，測地線

古典力学から量子力学へつれていってくれる車は対応原理である．同様に，平坦な時空と
*24 曲がった時空間の車は等価原理である．“物理法則は，任意の曲がった時空の局所 Lorentz 系で，平坦な時空の大域的な Lorentz 系におけるものと同じである.” しかし等価原理を適用するには，まず局所 Lorentz 系の数学的な表示をもたなければならない．明白な選択は以下のようになる．**与えられた事象 $\mathcal{P}_0$ における局所 Lorentz 系は，その事象における大**
*25 **域的な Lorentz 系のもっとも近くにあるものである．すなわち，局所 Lorentz 系では，**

$$g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0) = \eta_{\mu\nu} \tag{8.15a}$$

であり，$\mathcal{P}_0$ の近傍で，$g_{\mu\nu}$ は可能な限り厳密に $\eta_{\mu\nu}$ のままである．

$$g_{\mu\nu,\alpha}(\mathcal{P}_0) = 0 \tag{8.15b}$$

一般にこれより厳密なものは成り立ちえない [$g_{\mu\nu,\alpha\beta}(\mathcal{P}_0)$ はゼロになりえない]．時空の曲率がそれを変えさせるのである．[11.5 節を式 (8.24) および (8.44) と結合せよ.]

曲がった時空内での局所 Lorentz 系の観測者は，近傍の事象におけるベクトルやテンソルを，まさに平坦な時空で行うように比較できる．しかし比較をするためには，観測者は
*26 それらを共通の事象まで平行移動しなければならない．観測者にとって平行移動の行為は単純である．観測者はまさしく自分が平坦な時空にいるかのように，すべての Lorentz 系の成分が固定されたままに保てばよい．しかし局所 Lorentz 系をもたない—おそらく座標系あるいは基底ベクトルをまったくもたない—者にとって，平行移動はそれほど些細なことではない．観測者は Lorentz 系に基づいている友人に結果を尋ねるか，あるいはより高度な技術を用いねばならない．観測者が用いうる 1 つの技術，すなわち座標あるいは基底ベクトルなど何も必要としない “Schild のはしご” 構成は 10.2 節およびコラム 10.2 で説明されている．しかしトラック–1 の読者は Schild のはしごに習熟する必要はない．彼はつねに局所的な Lorentz 系の観測者に任意の平行移動の結果がどうなるかを尋ねることができる，あるいは彼は以下で説明されるような一般的な公式を用いることができる．

平行移動による比較はテンソル場の勾配，$\boldsymbol{\nabla T}$ のもとになっている根拠である．平行移動については 3.5 節で何も述べられなかった．そこでは勾配が初めて定義されたが，平行移動は暗黙に現れていた．$\boldsymbol{\nabla T}$ を，その成分が $T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma} = \partial T^{\alpha}{}_{\beta}/\partial x^{\gamma}$ であるように定義した [$\boldsymbol{T}$ に対しては $\binom{1}{1}$ テンソル]，すなわち，$\boldsymbol{\nabla T}$ によって，$\boldsymbol{T}$ の Lorentz 系の成分が点から点へどれだけ変化するかを測定することを要求した．しかし “Lorentz 成分に変化がない” ということは “平行移動” を意味したであろう，それで純粋な平行移動後に $\boldsymbol{T}$ があったであろうものに相対的な $\boldsymbol{T}$ の変化を暗黙に求めていた．

*24　平坦な時空と曲がった時空間の車としての等価原理
*25　局所 Lorentz 系の数学的な表示
*26　平行移動が定義される

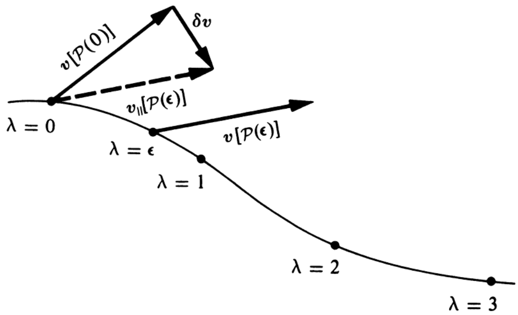


図 8.2 接線ベクトル $\boldsymbol{u} \equiv d\mathcal{P}/d\lambda$ をもつ，曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ に沿うベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の共変微分 "$\boldsymbol{\nabla_u v}$" の定義．(1) 曲線上に点 $\mathcal{P}(0)$ を選び，この点で $\boldsymbol{\nabla_u v}$ を評価する．(2) 曲線上に近傍点 $\mathcal{P}(\varepsilon)$ を選ぶ．(3) $\boldsymbol{v}[\mathcal{P}(\varepsilon)]$ を曲線に沿って逆に $\mathcal{P}(0)$ まで平行移動して，ベクトル $\boldsymbol{v}_{\|}[\mathcal{P}(\varepsilon)]$ を得る．(4) 差 $\delta\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{v}_{\|}[\mathcal{P}(\varepsilon)] - \boldsymbol{v}[\mathcal{P}(0)]$ をとる．(5) そうすると $\boldsymbol{\nabla_u v}$ は，

$$\boldsymbol{\nabla_u v} \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\delta\boldsymbol{v}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\boldsymbol{v}_{\|}[\mathcal{P}(\varepsilon)] - \boldsymbol{v}[\mathcal{P}(0)]}{\varepsilon}\right\}$$

によって定義される．

この微分という概念を抽象的な記号で体系化するには，以下のように進む．まず $\boldsymbol{T}$ の，
*27 接線ベクトルが $\boldsymbol{u} = d\mathcal{P}/d\lambda$ である曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ に沿う "共変微分" $\boldsymbol{\nabla_u T}$ を定義する．

$$(\boldsymbol{\nabla_u T})_{\mathcal{P}(0)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\boldsymbol{T}[\mathcal{P}(\varepsilon)]_{\mathcal{P}(0)\text{ に平行移動される}} - \boldsymbol{T}[\mathcal{P}(0)]}{\varepsilon}\right\} \tag{8.16}$$

（$\boldsymbol{T}$ がベクトル場 $\boldsymbol{v}$ である特別な場合に対しては図 8.2 をみよ）．それから $\boldsymbol{\nabla T}$ は線形機
*28 械であって，$\boldsymbol{u}$ がその最後の投入口に挿入されると $\boldsymbol{\nabla_u T}$ を与えるように定義する．

$$\boldsymbol{\nabla T}(\cdots,\cdots,\boldsymbol{u}) \equiv \boldsymbol{\nabla_u T} \tag{8.17}$$

結果は 3.5 節で定義されたものと同じもの（"勾配"）である（証明に対しては練習問題 8.8 をみよ）．しかしこの択一的な定義は平行移動に対する関係を明白にし，以下のことを含んでいる．

$$\boldsymbol{\nabla_u T} = 0 \iff \boldsymbol{T}\text{ が }\boldsymbol{u} = d\mathcal{P}/d\lambda\text{ に沿って平行移動される} \tag{8.18}$$

局所 Lorentz 系で，$\boldsymbol{\nabla T}$ の成分は $\boldsymbol{T}$ の成分の方向微分であり，$T^{\beta}{}_{\alpha,\gamma}$ となる．一般的な基底ではそうでない．もし $\{\boldsymbol{e}_\beta(\mathcal{P})\}$ が任意にしかし滑らかに点から点へ変化する基底であり，$\{\boldsymbol{\omega}^\alpha(\mathcal{P})\}$ がその双対基底であるならば，$\boldsymbol{\nabla T} = \boldsymbol{\nabla}(T^{\beta}{}_{\alpha}\boldsymbol{e}_\beta\otimes\boldsymbol{\omega}^\alpha)$ は $\boldsymbol{\nabla}T^{\beta}{}_{\alpha} \equiv \boldsymbol{d}T^{\beta}{}_{\alpha} = T^{\beta}{}_{\alpha,\gamma}\boldsymbol{\omega}^\gamma$ からの寄与とともに，$\boldsymbol{\nabla e}_\beta$ および $\boldsymbol{\nabla\omega}^\alpha$ からの寄与を含むだろう．

$\boldsymbol{\nabla e}_\beta$ および $\boldsymbol{\nabla\omega}^\alpha$ からの寄与を定量化するために，すなわち，基底ベクトルと 1–形式
*29 のねじれ，回転，膨張，収縮を定量化するために，"**接続係数**" を定義する．

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \equiv \langle\boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{\nabla}_\gamma\boldsymbol{e}_\beta\rangle \quad \left[\begin{array}{l}\text{微分の添字が }\Gamma\text{ 上で最後にくるように}\\ \beta\text{ と }\gamma\text{ が逆転していることに注意せよ}\end{array}\right] \tag{8.19a}$$

（$\boldsymbol{\nabla}_\gamma$ の下に注記：$[\equiv \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{e}_\gamma}]$）

$$= (\,\boldsymbol{e}_\gamma\text{ に沿う平行移動に相対的な，}\boldsymbol{e}_\beta\text{ の変化の }\alpha\text{ 成分}\,) \tag{8.19b}$$

---

*27 共変微分が定義される

*28 勾配が定義される

*29 接続係数が定義される

そして

$$\langle \boldsymbol{\nabla}_\gamma \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\beta \rangle = -\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \tag{8.19c}$$

が証明される（練習問題 8.12）．

これらの係数および

$$T^\beta{}_{\alpha,\gamma} \equiv \boldsymbol{\nabla}_\gamma T^\beta{}_\alpha \equiv \partial_{\boldsymbol{e}_\gamma} T^\beta{}_\alpha \equiv \partial_\gamma T^\beta{}_\alpha \tag{8.20}$$

*30 で，$T^\beta{}_{\alpha;\gamma}$ と記される勾配の成分は

$$T^\beta{}_{\alpha;\gamma} = T^\beta{}_{\alpha,\gamma} + \Gamma^\beta{}_{\mu\gamma} T^\mu{}_\alpha - \Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma} T^\beta{}_\mu \tag{8.21}$$

である（練習問題 8.13 をみよ）．もし $\boldsymbol{\nabla T}$ が計算される事象での基底が局所 Lorentz 系であったならば，$\boldsymbol{\nabla T}$ の成分はちょうど $T^\beta{}_{\alpha,\gamma}$ であるだろう．そうではないために，この "Lorentz 系" の値を基底ベクトルと 1–形式のねじれ，回転，膨張，および収縮に対して補正しなければならない．式 (8.21) での "ΓT" の項は，$\boldsymbol{T}$ の各添字に対して 1 個必要な補正である．これらの補正項のパターンは記憶しやすい．(1) もし補正される添字が上つきであれば "+" 記号，もしそれが下つきであれば，"−" 記号，(2) 微分の添字（上の場合には γ）はつねに Γ の終わりにくる，(3) 補正される添字（第 1 項では β，第 2 項では α）は T から Γ へ移行し，そして $\boldsymbol{T}$ 上で見せかけの和の添字（μ）で置き換えられる．

勾配の成分 (8.21) がわかれば，共変微分 $\boldsymbol{\nabla_u T}$ の成分を u^γ への単純な縮約で計算することができる [式 (8.17) をみよ]．

$$\boldsymbol{\nabla_u T} = (T^\beta{}_{\alpha;\gamma} u^\gamma) \boldsymbol{e}_\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\alpha \tag{8.22}$$

$\boldsymbol{u}$ が曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ への接線ベクトル，$\boldsymbol{u} = d\mathcal{P}/d\lambda$ であるときは，$\boldsymbol{\nabla_u T}$ の成分に対して記

*31 号 $DT^\beta{}_\alpha/d\lambda$ を用いる．

$$\begin{aligned} \frac{DT^\beta{}_\alpha}{d\lambda} &\equiv T^\beta{}_{\alpha;\gamma} u^\gamma \overset{\left[\substack{\text{もし基底が座標基底，したがって} \\ u^\gamma = dx^\gamma/d\lambda\text{であるならば}}\right]}{=} T^\beta{}_{\alpha;\gamma} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} \\ &= (T^\beta{}_{\alpha,\gamma} + \text{“}\Gamma T\text{” 補正}) dx^\gamma/d\lambda \\ &= \frac{dT^\beta{}_\alpha}{d\lambda} + (\Gamma^\beta{}_{\mu\gamma} T^\mu{}_\alpha - \Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma} T^\beta{}_\mu) \frac{dx^\gamma}{d\lambda} \end{aligned} \tag{8.23}$$

$T^\beta{}_{\alpha;\gamma}$ の ";" は $T^\beta{}_{\alpha,\gamma}$ の "ΓT" 項による補正を気づかせる．同様に，$DT^\beta{}_\alpha/d\lambda$ の "D" は $dT^\beta{}_\alpha/d\lambda$ の "ΓT" 項による補正を気づかせる．

*32 これは完全に望ましく結構である．しかし与えられた基底に対していかにして接続係数 $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ を見出すことができるか？ 答えは練習問題 8.15 で導かれている．それは次のように述べられている．

---

*30　任意の系での勾配の成分

*31　共変微分の成分

*32　接続係数を計量および交換子から計算する

(1) 与えられた基底での計量係数をとれ．

(2) 基底の方向に沿う方向微分を計算せよ．

$$g_{\beta\gamma,\mu} \equiv \partial_\mu g_{\beta\gamma} \qquad = \partial g_{\beta\gamma}/\partial x^\mu \tag{8.24a}$$

$$\uparrow\!\!\lfloor [\equiv \partial_{\boldsymbol{e}_\mu}] \qquad \uparrow\!\!\lfloor \left[\begin{array}{l}\text{もし座標基底}, \boldsymbol{e}_\mu = \partial\mathcal{P}/\partial x^\mu \\ \text{が用いられているならば}\end{array}\right]$$

(3) 基底の交換係数を計算せよ [一般的には式 (8.14)，座標基底の特別な場合には $c_{\mu\beta\gamma} = 0$]．

(4) "共変接続係数" を計算せよ．

$$\Gamma_{\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu} + \underbrace{c_{\mu\beta\gamma} + c_{\mu\gamma\beta} - c_{\beta\gamma\mu}}) \tag{8.24b}$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{これらの項は座標基底} \\ \text{に対してゼロである}\end{array}\right]\!\!\rfloor\!\!\uparrow$$

(5) 接続係数を得るために添字を上げよ．

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta\gamma} \tag{8.24c}$$

[**術語についての注意**：座標基底はつねに $c_{\alpha\beta\gamma} = 0$ をもち，これは時には**ホロノミック** (**holonomic**) とよばれる．非座標基底はつねにゼロでない $c_{\alpha\beta\gamma}$ を若干もっており，これは時には非ホロノミック (anholonomic) とよばれる．ホロノミックの場合には，接続係数は **Christoffel 記号**とよばれることもある．]

セミコロン，コンマ，D，接続係数他についての成分記号は，一見したところ手に負えないようにみえる．しかしそれは偉大な計算力をもち，重力理論に深く進むにつれてそれがわかる．そして操作の規則は容易に学べるほど単純である．対照的に，抽象的な記号 ($\boldsymbol{\nabla T}$, $\boldsymbol{\nabla_u T}$, 他) は複雑な計算に適しているとはいえない．しかしそれは偉大な概念的な力をもっている．

この対照は 2 つの記号が**測地線**の概念を取り扱う方法に明瞭に示される．時空の測地線は，経路に沿うおのおのの局所 Lorentz 系で測定したとき，正しく一様にパラメータ化される曲線である．[*33] もし測地線が時間的であれば，それは自由落下粒子がとることが可能な世界線である，そして一様に時をかちかち刻むパラメータ λ (**"アフィンパラメータ"** とよばれる) は粒子の固有時間の倍数である，$\lambda = a\tau + b$ (等価原理: 試験粒子は局所 Lorentz 系で直線に沿って動く，そして各粒子の時計は任意の Lorentz 系の観測者で測定したとき一様な割合で時をかちかち刻む)．測地線のこの定義は容易に抽象的な，座標によらない言葉に翻訳される．測地線は接線ベクトル $\boldsymbol{u} = d\mathcal{P}/d\lambda$ をそれ自身に沿って平行移動する曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ である．

$$\boldsymbol{\nabla_u u} = 0 \tag{8.25}$$

(図 10.1 をみよ．) 何が概念的により単純であろうか？ しかし最初の事象 $\mathcal{P}_0$ とそこでの最初の接線ベクトル $\boldsymbol{u}(\mathcal{P}_0)$ が与えられたとき，測地線を計算するには，成分形式を用いな

*33 測地線とアフィンパラメータが定義される

ければならない．$u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ であるような座標系 $x^\alpha(\mathcal{P})$ を導入して，式 (8.25) の成分に基づく形を

$$0 = \frac{D(dx^\alpha/d\lambda)}{d\lambda} = \frac{d(dx^\alpha/d\lambda)}{d\lambda} + \left(\Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)\frac{dx^\gamma}{d\lambda}$$

と書く [式 (8.23) をみよ，T に関する添字が 1 個少ない]．すなわち，

*34

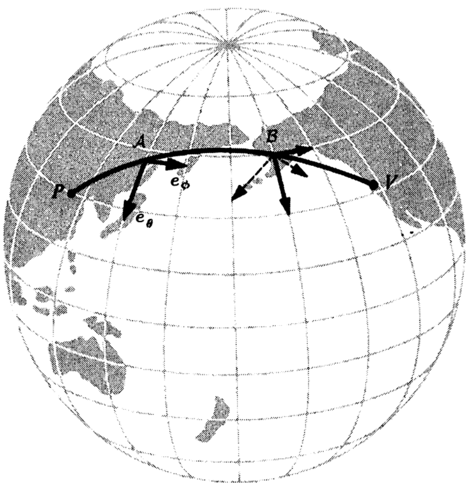


図 8.3　接続係数の目的を図式で描いたもの．北京からバンクーバーまでの大円経路をたどる飛行士はいやしくも彼に利用できるもっとも直線的な経路（測地線）を飛行しているけれども，彼自身は最初北へ行き，後に南へ行くのがわかる．明白な方向の変化は彼の経路においてでなく，彼の経路が座標系に基づいて記述されている方向の変化を指している．彼の速度のベクトル $\boldsymbol{v}$（時空上でなくてむしろ地球の 2 次元の面上で定義されているベクトル）は，より早い時点から後の時点への平行移動によって先へ進められ，彼がたどっているときの速度と一致しているのがわかる．あるいは座標によらない微分幾何学の抽象的な言葉では，共変微分 $\boldsymbol{\nabla_v v}$ は経路に沿ってゼロになる（“測地線の方程式”）．$\boldsymbol{v}$ はこの意味において一定であるけれども，航空士がこのベクトルが構成されていると考える個々の断片，$\boldsymbol{v} = v^\theta \boldsymbol{e}_\theta + v^\phi \boldsymbol{e}_\phi$ は一定でない．

成分の言葉で，量 v^θ および v^ϕ は $\boldsymbol{v}$ の共変微分を抹殺する割合で，経路に沿って変化している．こうして

$$\boldsymbol{\nabla_v v} = \boldsymbol{a} = a^\phi \boldsymbol{e}_\phi + a^\theta \boldsymbol{e}_\theta = 0$$

あるいは

$$0 = a^\theta = \frac{dv^\theta}{dt} + \Gamma^\theta{}_{mn}v^m v^n,$$
$$0 = a^\phi = \frac{dv^\phi}{dt} + \Gamma^\phi{}_{mn}v^m v^n$$

この意味で接続係数 $\Gamma^j{}_{mn}$ は，ベクトルを一定に保つために（基底ベクトルの回転の影響に反して）ベクトルの成分をいかに速く“回転させる”かを告げる“回転係数”として役立つ．

選択的に，航空士は飛行機の経路に沿って自らの基底ベクトルを平行移動する，“自動的な操縦士系”を用いることができる．

$$\boldsymbol{\nabla_v e}_{\theta'} = \boldsymbol{\nabla_v e}_{\phi'} = 0$$

$\mathcal{A}$ での実線のベクトルは $\mathcal{B}$ での点線のベクトルになる．そうすると，$\boldsymbol{v}$ の成分は大円の経路を達成するために固定され続けられなければならない，

$$\frac{dv^{\theta'}}{dt} = \frac{dv^{\phi'}}{dt} = 0$$

そして回転係数はこの平行移動される基底に相対的な緯度および経度の線の回転を記述するために用いられる．

$$\boldsymbol{\nabla_v e}_\theta = \boldsymbol{e}_m \Gamma^m{}_{\theta n} v^n,$$
$$\boldsymbol{\nabla_v e}_\phi = \boldsymbol{e}_m \Gamma^m{}_{\phi n} v^n$$

同じ回転係数は両方の観点で用いられる．唯一の相違はこれらの係数がいかに用いられるかにある．

---

*34　測地線の方程式

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \tag{8.26}$$

この**測地線の方程式**は測地線の座標，$x^\alpha(\lambda)$ に対して，最初の値 [$\lambda = \lambda_0$での x^α および $dx^\alpha/d\lambda$] が指定されているときには，(原理的に) 解ける．

地球表面の測地線（大円）は，接続係数を具体的に描ける箔である（図 8.3 参照）．

この節の題材は，10 および 13 章でより深くそして異なる観点から提示される．これらの章を勉強しようと考えているトラック–2 の読者は，以下の練習問題をとばしてよい．9–15 章を省くつもりのトラック–1 の読者は，練習問題 8.4–8.7 を解くことによって成分の形式について必要な経験を得るだろう．彼にとって，練習問題 8.8–8.15 では，それは共変微分と接続係数の形式論を体系的な方法で展開しており，これらはさほど重要でないが，価値はある．これらの練習問題のもっとも重要な結果はコラム 8.6 に要約されるだろう．

[練習問題]

8.4 勾配の成分を書く練習

以下の量を通常の微分（$f_{,\gamma} \equiv \partial_{\boldsymbol{e}_\gamma} f \equiv \boldsymbol{\nabla}_\gamma f$）と "$\Gamma T$" 補正項で書き直せ．(a) $T_{;\gamma}$，ここに T は関数である．(b) $T^\alpha{}_{;\gamma}$，ここに $\boldsymbol{T}$ はベクトルである．(c) $T_{\alpha;\gamma}$，ここに $\boldsymbol{T}$ は 1–形式である．(d) $T^\alpha{}_{\beta\delta}{}^\varepsilon{}_{;\gamma}$．[**答え**：

(a) $T_{;\gamma} = T_{,\gamma}$.　(b) $T^\alpha{}_{;\gamma} = T^\alpha{}_{,\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}T^\mu$.　(c) $T_{\alpha;\gamma} = T_{\alpha,\gamma} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma}T_\mu$.

(d) $T^\alpha{}_{\beta\delta}{}^\varepsilon{}_{;\gamma} = T^\alpha{}_{\beta\delta}{}^\varepsilon{}_{,\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}T^\mu{}_{\beta\delta}{}^\varepsilon - \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}T^\alpha{}_{\mu\delta}{}^\varepsilon - \Gamma^\mu{}_{\delta\gamma}T^\alpha{}_{\beta\mu}{}^\varepsilon + \Gamma^\varepsilon{}_{\mu\gamma}T^\alpha{}_{\beta\delta}{}^\mu$]

8.5 極座標での 1 枚の紙

平坦な 1 枚の紙に対する極座標 (r, ϕ) での 2 次元の計量は，$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$ である．あるいは，現代の記号で，$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{d}r \otimes \boldsymbol{d}r + r^2 \boldsymbol{d}\phi \otimes \boldsymbol{d}\phi$.

(a) 接続係数を式 (8.24) を用いて計算せよ．[**答え**：$\Gamma^r{}_{\phi\phi} = -r$; $\Gamma^\phi{}_{r\phi} = \Gamma^\phi{}_{\phi r} = 1/r$, 他のすべてはゼロである.]

(b) 測地線の方程式を (r, ϕ) 座標で書き下ろせ．[**答え**：$d^2r/d\lambda^2 - r(d\phi/d\lambda)^2 = 0$, $d^2\phi/d\lambda^2 + (2/r)(dr/d\lambda)(d\phi/d\lambda) = 0$]

(c) $r(\lambda)$ および $\phi(\lambda)$ に対するこの測地線の方程式を解いて，解は一様にパラメータ化された直線である（ある a および b に対して，$x \equiv r\cos\phi = a\lambda + b$，ある j および k に対して，$y \equiv r\sin\phi = j\lambda + k$）ことを示せ．

(d) 非座標基底 $\boldsymbol{e}_{\hat{r}} \equiv \boldsymbol{e}_r = \partial\mathcal{P}/dr$, $\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}} \equiv r^{-1}\boldsymbol{e}_\phi = r^{-1}\partial\mathcal{P}/d\phi$, $\boldsymbol{\omega}^r = \boldsymbol{d}r$, $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} = r\boldsymbol{d}\phi$ は直交しており，$\langle\boldsymbol{\omega}^{\hat{\alpha}}, \boldsymbol{e}_{\hat{\beta}}\rangle = \delta^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}}$ であることを確かめよ．それからこの基底の接続係数を座標基底の接続の知識 [(a) 項] から計算せよ．[**答え**：

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\phi}\hat{r}} &= \langle\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}, \boldsymbol{\nabla}_{\hat{r}}\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}\rangle = \langle r\boldsymbol{d}\phi, \boldsymbol{\nabla}_r(r^{-1}\boldsymbol{e}_\phi)\rangle \\
&= r\langle\boldsymbol{d}\phi, (\boldsymbol{\nabla}_r r^{-1})\boldsymbol{e}_\phi + r^{-1}(\boldsymbol{\nabla}_r\boldsymbol{e}_\phi)\rangle = r\langle\boldsymbol{d}\phi, -r^{-2}\boldsymbol{e}_\phi\rangle + \langle\boldsymbol{d}\phi, \boldsymbol{\nabla}_r\boldsymbol{e}_\phi\rangle \\
&= -r^{-1} + \Gamma^\phi{}_{\phi r} = -r^{-1} + r^{-1} = 0
\end{aligned}$$

同様に，$\Gamma^{\hat\phi}{}_{\hat r\hat\phi}=+1/r$，$\Gamma^{\hat r}{}_{\hat\phi\hat\phi}=-1/r$，他のすべてはゼロである.]

(e) 図 8.1 および 8.3 節の Kepler の軌道を，太陽の赤道面内の 2 次元の Euclid 座標での非測地線曲線と考えよ．古い記号 $d\boldsymbol{v}/dt$，$d\boldsymbol{e}_{\hat r}/dt$，などの代わりに，新しい記号 $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{e}_{\hat r}$，などを用いよ．そうすると $\boldsymbol{v}=d\mathcal{P}/dt$ は軌道への接線であり，そして $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}$ は加速度である．$a^{\hat r}$ および $a^{\hat\phi}$ に対する式 (8.4) を直交基底での成分操作および接続係数を用いて導け．

8.6　平坦な時空での極座標

練習問題 8.1 の非極座標基底 $\{\boldsymbol{e}_{\hat\alpha}\}$ は直交しており，$g_{\hat\alpha\hat\beta}=\eta_{\hat\alpha\hat\beta}$ であった．しかしゼロでない交換係数をもっていた [練習問題 8.2 のパート (c)].

(a) この基底に対する接続係数を，式 (8.24) を用いて計算せよ．[**答え**：

$$\Gamma^{\hat\theta}{}_{\hat r\hat\theta}=\Gamma^{\hat\phi}{}_{\hat r\hat\phi}=-\Gamma^{\hat r}{}_{\hat\theta\hat\theta}=-\Gamma^{\hat r}{}_{\hat\phi\hat\phi}=1/r,$$
$$\Gamma^{\hat\phi}{}_{\hat\theta\hat\phi}=-\Gamma^{\hat\theta}{}_{\hat\phi\hat\phi}=\cot\theta/r$$

他のすべてはゼロである.]

(b) $\boldsymbol{\nabla}_{\hat\alpha}\boldsymbol{e}_{\hat\beta}$ に対する表現を $\boldsymbol{e}_{\hat\gamma}$ で書き下ろし，これらの表現の正しさを一定の t および r の球上の基底ベクトルのスケッチを描いて確かめよ．[**答え**：

$$\boldsymbol{\nabla}_{\hat\theta}\boldsymbol{e}_{\hat r}=r^{-1}\boldsymbol{e}_{\hat\theta},\qquad \boldsymbol{\nabla}_{\hat\theta}\boldsymbol{e}_{\hat\theta}=-r^{-1}\boldsymbol{e}_{\hat r},\qquad \boldsymbol{\nabla}_{\hat\phi}\boldsymbol{e}_{\hat r}=r^{-1}\boldsymbol{e}_{\hat\phi},$$
$$\boldsymbol{\nabla}_{\hat\phi}\boldsymbol{e}_{\hat\theta}=(\cot\theta/r)\boldsymbol{e}_{\hat\phi},\qquad \boldsymbol{\nabla}_{\hat\phi}\boldsymbol{e}_{\hat\phi}=-r^{-1}\boldsymbol{e}_{\hat r}-(\cot\theta/r)\boldsymbol{e}_{\hat\theta}$$

他のすべてはゼロである.]

(c) この基底での，ベクトルの発散，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=A^{\hat\alpha}{}_{;\hat\alpha}$ を計算せよ．[**答え**：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}&=A^{\hat t}{}_{,\hat t}+r^{-2}(r^2A^{\hat r})_{,\hat r}+(\sin\theta)^{-1}(\sin\theta A^{\hat\theta})_{,\hat\theta}+A^{\hat\phi}{}_{,\hat\phi}\\&=\frac{\partial A^{\hat t}}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A^{\hat r})}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A^{\hat\theta})}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A^{\hat\phi}}{\partial\phi}\end{aligned}$$

この答えは平坦な空間のベクトル解析からよく知られているものである.]

8.7　接続係数の対称性

式 (8.24b) から，計量の対称性と，交換係数の反対称性（$c_{\beta\gamma\mu}=-c_{\gamma\beta\mu}$）は，座標基底で $\Gamma_{\alpha[\beta\gamma]}=0$（最後の 2 つの添字は対称である)，大域的に直交している基底，$g_{\hat\alpha\hat\beta}=\eta_{\hat\alpha\hat\beta}$ で $\Gamma_{(\hat\alpha\hat\beta)\hat\gamma}=0$（最初の 2 つの添字は反対称である）であることを示している．

8.5 節の結果の系統だった導出

8.8　$\boldsymbol{\nabla T}$ の新しい定義と古い定義との比較

$\boldsymbol{\nabla T}$ の新しい定義は式 (8.16) および (8.17) で与えられている．平行移動は局所 Lorentz 系の成分を固定したまま保持するということを用いて，式 (8.16) から，Lorentz 系の方程式 $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{T}=T^{\beta}{}_{\alpha,\gamma}u^{\gamma}\boldsymbol{e}_{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\alpha}$ を導け．このことと式 (8.17) から，$\boldsymbol{\nabla T}$ の Lorentz 系の成分は $T^{\beta}{}_{\alpha,\gamma}$ である（それは $\boldsymbol{\nabla T}$ の古い定義と一致している）ことを推論せよ．

8.9　$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{T}$ に対する一連の規則

(a) 局所 Lorentz 系での計算を用いて，“$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}$” は微分に対する標準的な一連の規則に従うことを示せ．

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(f\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}f)\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} + f(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{A})\otimes\boldsymbol{B} + f\boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{B}) \tag{8.27}$$

ここに $\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{B}$ は任意のベクトル，1–形式，あるいはテンソルであり，f は任意の関数である．[ヒント：具体的なために，$\boldsymbol{A}$ は $\binom{1}{1}$ テンソルであり，$\boldsymbol{B}$ はベクトルであると仮定せよ．そうするとこの式は Lorentz 系の成分の記号で，

$$(fA^{\alpha}{}_{\beta}B^{\gamma})_{,\delta}u^{\delta} = (f_{,\delta}u^{\delta})A^{\alpha}{}_{\beta}B^{\gamma} + f(A^{\alpha}{}_{\beta,\delta}u^{\delta})B^{\gamma} + fA^{\alpha}{}_{\beta}(B^{\gamma}{}_{,\delta}u^{\delta}) \tag{8.27$'$}$$

となる.]

(b) 式 (8.27) を任意の基底での成分記号で書き直せ．[**答え**：“,” がいたるところ “;” で置き換えられるということを除いて式 (8.27′) と同じである．しかし $f_{;\delta}u^{\delta} = f_{,\delta}u^{\delta}$ に**注意せよ**，なぜなら関数 f は “訂正されるべき成分をもたない” からである.]

8.10　共変微分は縮約と交換する

(a) $\boldsymbol{S}$ を $\binom{1}{2}$ テンソルとする．局所 Lorentz 系での成分を用いて

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{S}\text{の投入口 1 および 2 についての縮約})\\&= (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S}\text{の投入口 1 および 2 についての縮約})\end{aligned} \tag{8.28}$$

を示せ．[ヒント：局所 Lorentz 系では，この式は自明な陳述

$$\left(\sum_{\alpha} S^{\alpha}{}_{\alpha\beta}\right)_{,\gamma} u^{\gamma} = \sum_{\alpha}(S^{\alpha}{}_{\alpha\beta,\gamma}u^{\gamma})$$

となる.]

8.11　$\boldsymbol{\nabla}$ の代数学的な性質

局所 Lorentz 系での計算を用いて，すべての接線ベクトル $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ および数 a，b に対して

$$\boldsymbol{\nabla}_{a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}}\boldsymbol{S} = a\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S} + b\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{S} \tag{8.29}$$

を示せ．また同じ階数の任意の 2 つのテンソル場 $\boldsymbol{S}$ および $\boldsymbol{M}$ に対して

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{M} \tag{8.30}$$

また任意の 2 つのベクトル場 $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{w}$ に対して

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{u} = \underbrace{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}]} \tag{8.31}$$

[$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{w}$ の交換子，練習問題 8.2 で議論されている]

を示せ．

8.12　1–形式基底に対する接続係数

$\{\boldsymbol{e}_\beta\}$ の点から点への変化 [定義 (8.19a)] を記述する同じ接続係数 $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ は, 符号の変化を除いて, $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$ の変化 (8.19b) をも記述することを示せ. [答え：(1) $\langle\boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\beta\rangle = \delta^\alpha{}_\beta$ は定数関数である ($\alpha = \beta$ であるかないかによって, 1 あるいは 0). (2) こうして, $\boldsymbol{\nabla}_\gamma\langle\boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\beta\rangle = \partial_{\boldsymbol{e}_\gamma}\langle\boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\beta\rangle = 0$. (3) しかし $\langle\boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\beta\rangle$ は $\boldsymbol{\omega}^\alpha\otimes\boldsymbol{e}_\beta$ の縮約であり，したがって式 (8.28) は $0 = \boldsymbol{\nabla}_\gamma(\boldsymbol{\omega}^\alpha\otimes\boldsymbol{e}_\beta$の縮約$) = [\boldsymbol{\nabla}_\gamma(\boldsymbol{\omega}^\alpha\otimes\boldsymbol{e}_\beta)$ の縮約$]$ を意味する. (4) 一連の規則 (8.27) を適用して $0 = [(\boldsymbol{\nabla}_\gamma\boldsymbol{\omega}^\alpha)\otimes\boldsymbol{e}_\beta + \boldsymbol{\omega}^\alpha\otimes(\boldsymbol{\nabla}_\gamma\boldsymbol{e}_\beta)]$ の縮約 $= \langle\boldsymbol{\nabla}_\gamma\boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\beta\rangle + \langle\boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{\nabla}_\gamma\boldsymbol{e}_\beta\rangle$ を結論せよ. (5) 最後に，定義 (8.19a) を用いて求める結果 (8.19b) に到達せよ.]

8.13　$\boldsymbol{T^\beta{}_{\alpha;\gamma}}$ に対する "$\boldsymbol{\Gamma T}$" 補正項

任意の基底での $T^\beta{}_{\alpha;\gamma}$ に対する式 (8.21) を，まず任意の $\boldsymbol{u}$ に対する $\boldsymbol{\nabla_u T}$ の成分を計算し，それから式 (8.17) を用いて $\boldsymbol{\nabla T}$ の成分を推測せよ. [答え：(1) 一連の規則 (8.27) を用いて

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla_u T} &= \boldsymbol{\nabla_u}(T^\beta{}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta\otimes\boldsymbol{\omega}^\alpha)\\ &= (\boldsymbol{\nabla_u}T^\beta{}_\alpha)\boldsymbol{e}_\beta\otimes\boldsymbol{\omega}^\alpha + T^\beta{}_\alpha(\boldsymbol{\nabla_u e}_\beta)\otimes\boldsymbol{\omega}^\alpha + T^\beta{}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta\otimes(\boldsymbol{\nabla_u\omega}^\alpha)\end{aligned}$$

を得る. (2) $\boldsymbol{u}$ をその成分で表し，$\boldsymbol{u} = u^\gamma\boldsymbol{e}_\gamma$. 式 (8.29) から $\boldsymbol{\nabla_u}$ の $\boldsymbol{u}$ についての線形性を用いて，$\boldsymbol{\nabla_u} = u^\gamma\boldsymbol{\nabla}_\gamma$ を得る. そしてこれを $\boldsymbol{\nabla_u T}$ について用いる.

$$\boldsymbol{\nabla_u T} = u^\gamma\{T^\beta{}_{\alpha,\gamma}\boldsymbol{e}_\beta\otimes\boldsymbol{\omega}^\alpha + T^\beta{}_\alpha(\boldsymbol{\nabla}_\gamma\boldsymbol{e}_\beta)\otimes\boldsymbol{\omega}^\alpha + T^\beta{}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta\otimes(\boldsymbol{\nabla}_\gamma\boldsymbol{\omega}^\alpha)\}$$

(3) 式 (8.19a), (8.19b),

$$\boldsymbol{\nabla}_\gamma\boldsymbol{e}_\beta = \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{\nabla}_\gamma\boldsymbol{\omega}^\alpha = -\Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\boldsymbol{\omega}^\mu \tag{8.32}$$

と書き換えられている，を用いて，$\boldsymbol{\nabla_u T}$ を形式

$$\boldsymbol{\nabla_u T} = u^\gamma\{T^\beta{}_{\alpha,\gamma}\boldsymbol{e}_\beta\otimes\boldsymbol{\omega}^\alpha + \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}T^\beta{}_\alpha\boldsymbol{e}_\mu\otimes\boldsymbol{\omega}^\alpha - \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}T^\beta{}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta\otimes\boldsymbol{\omega}^\mu\}$$

に表現せよ.

(4) 基底テンソル $\boldsymbol{e}_\beta\otimes\boldsymbol{\omega}^\alpha$ が因数として取り出せるように，見せかけの添字を付けかえる.

$$\boldsymbol{\nabla_u T} = u^\gamma\{T^\beta{}_{\alpha,\gamma} + \Gamma^\beta{}_{\mu\gamma}T^\mu{}_\alpha - \Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma}T^\beta{}_\mu\}\boldsymbol{e}_\beta\otimes\boldsymbol{\omega}^\alpha$$

(5)

$$\boldsymbol{\nabla_u T} = \boldsymbol{\nabla T}(\cdots,\cdots,\boldsymbol{u}) = (T^\beta{}_{\alpha;\gamma}u^\gamma)\boldsymbol{e}_\beta\otimes\boldsymbol{\omega}^\alpha$$

との比較によって $T^\beta{}_{\alpha;\gamma}$ の値を読む.]

8.14　計量は共変的に定数である

物理学的な立場で（局所 Lorentz 系の性質を用いて）

$$\boldsymbol{\nabla g} = 0 \tag{8.33}$$

あるいは，同じことであるが，任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{g}=0$ を示せ．それから数学的な結果として明らかに望ましい積の規則

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{B})$$

を導け．[**答え：** (1) 式 (8.18) に従って議論されるように，$\boldsymbol{\nabla g}$ の局所 Lorentz 系での成分は $g_{\mu\nu,\alpha}$ である．そこでの議論の $\boldsymbol{T}$ の代わりに $\boldsymbol{g}$ を用いよ．しかしこれらの成分は式 (8.15b) によってすべてゼロである．それゆえ式 (8.33) はこの系で成り立ち，そして—テンソル式として—すべての系で成り立つ．(2) 積の規則はまたテンソル式であり，それは局所 Lorentz 系での成分を通して正しいことがすぐにわかる．(3) 式 (8.33) がどこに入るかをみるために，積の規則をまた，難しい方法で証明する．練習問題 8.9 の一連の規則を用いて

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{g})\otimes\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}+\boldsymbol{g}\otimes(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{A})\otimes\boldsymbol{B}+\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{B})$$

と書く．式 (8.33) を用いて 1 項を落とし，それから縮約して

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})\text{ の縮約}$$

および他の内積をつくる．練習問題 8.10 は，左辺で縮約と $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}$ との交換を正当化するために用いられている.]

8.15 計量で表現された接続係数

式 (8.33) が示す計量は共変的に定数であるという事実を用いて，接続係数に対する式 (8.24b) を導け．式 (8.24c) を $\Gamma_{\mu\beta\gamma}$ の $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ による定義として取り扱え．[**答え：** (1) $\boldsymbol{\nabla g}$ の成分を任意の系で計算する．

$$\begin{aligned}g_{\alpha\beta;\gamma}=0&=g_{\alpha\beta,\gamma}-\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}g_{\mu\beta}-\Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}g_{\mu\alpha}\\&\equiv g_{\alpha\beta,\gamma}-\Gamma_{\beta\alpha\gamma}-\Gamma_{\alpha\beta\gamma}\end{aligned}$$

それによって $g_{\alpha\beta,\gamma}=2\Gamma_{(\alpha\beta)\gamma}$ を結論する（丸い括弧は対称な部分を表す)．(2) $\Gamma_{\mu\beta\gamma}$ に対して要求される答えで計量項をつくる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\gamma}+g_{\mu\gamma,\beta}-g_{\beta\gamma,\mu})&=\Gamma_{(\mu\beta)\gamma}+\Gamma_{(\mu\gamma)\beta}-\Gamma_{(\beta\gamma)\mu}\\&=\frac{1}{2}[\Gamma_{\mu\beta\gamma}+\Gamma_{\beta\mu\gamma}+\Gamma_{\mu\gamma\beta}+\Gamma_{\gamma\mu\beta}-\Gamma_{\beta\gamma\mu}-\Gamma_{\gamma\beta\mu}]\\&=\Gamma_{\mu\beta\gamma}+(-\Gamma_{\mu[\beta\gamma]}+\Gamma_{\beta[\mu\gamma]}+\Gamma_{\gamma[\mu\beta]})\end{aligned}$$

(3) 式 (8.31) から，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{w}$ が 2 個の基底ベクトル（$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_\mu,\boldsymbol{w}=\boldsymbol{e}_\nu$）として選ばれているとき，

$$c_{\mu\nu}{}^{\rho}\boldsymbol{e}_\rho\equiv[\boldsymbol{e}_\mu,\boldsymbol{e}_\nu]=\boldsymbol{\nabla}_\mu\boldsymbol{e}_\nu-\boldsymbol{\nabla}_\nu\boldsymbol{e}_\mu=(\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}-\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu})\boldsymbol{e}_\rho=2\Gamma^{\rho}{}_{[\nu\mu]}\boldsymbol{e}_\rho$$

すなわち，

$$\Gamma^{\rho}{}_{[\mu\nu]} = -\frac{1}{2}c_{\mu\nu}{}^{\rho}, \qquad \Gamma_{\rho[\mu\nu]} = -\frac{1}{2}c_{\mu\nu\rho} \tag{8.34}$$

を推論する．

(4) これは，段階 (2) と組み合わせると $\Gamma_{\mu\beta\gamma}$ に対する求める公式を与える．]

8.6　局所 Lorentz 系：数学的な議論

曲がった時空内を自由落下する観測者が彼の局所 Lorentz 系で測定をする．彼が発見するものは本書のパート I および II で詳細に議論されている．彼の基本的な発見を前の節の形式から導くことをここで試みる．

*35 観測者の世界線上の事象 $\mathcal{P}_0$ をとる．そこでの彼の局所 Lorentz 系は座標系 $x^{\alpha}(\mathcal{P})$ であり

$$g_{\alpha\beta} \equiv \boldsymbol{e}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}_{\beta} \equiv \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x^{\alpha}}\cdot\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x^{\beta}} = \eta_{\alpha\beta} \qquad (\mathcal{P}_0 \text{ で}) \tag{8.35a}$$

($\mathcal{P}_0$ での Lorentz 計量)，そして

$$\partial g_{\alpha\beta}/\partial x^{\mu} = 0 \qquad (\mathcal{P}_0 \text{ で}) \tag{8.35b}$$

($\mathcal{P}_0$ の可能な限り近傍での Lorentz 計量) [式 (8.15) をみよ]．さらに，式 (8.24) によって，

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 0 \qquad (\mathcal{P}_0 \text{ で}) \tag{8.36}$$

(共変微分に“補正項”がない)．もちろん，観測者は彼の局所 Lorentz 系で静止していなければならない．すなわち，彼の世界線は

$$x^{j} = x^{j}(\mathcal{P}_0) = \text{一定} \qquad (x^0 \text{ は変化する}) \tag{8.37}$$

でなければならない．

質問：式 (8.35) から (8.37) までの式は観測者は局所 Lorentz 系で静止していることを
*36 保証する．それらは彼が自由落下していることを意味するか？（そのはずである！）**答え**：観測者の 4–加速度 $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{u}/d\tau$(6 章の記号) $= \boldsymbol{\nabla_u u}$(本章の記号) を計算せよ．彼の 4–速度は，式 (8.37) から計算され

$$\boldsymbol{u} = (dx^{\alpha}/d\tau)\boldsymbol{e}_{\alpha} = (dx^{0}/d\tau)\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_0 \tag{8.38}$$

[なぜなら $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{e}_0$ はともに単位の長さをもっているから] ↑

である．したがって彼の 4–加速度は

*35　局所 Lorentz 系
*36　原点は測地線に沿って自由落下する

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}_0 \boldsymbol{e}_0 = \Gamma^{\alpha}{}_{00} \boldsymbol{e}_{\alpha}$$
$$= 0 \qquad (\mathcal{P}_0 \text{ で}) \tag{8.39}$$

である．こうして，彼は実際自由落下している（$\boldsymbol{a} = 0$），そして彼は測地線に沿って動いている（$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u} = 0$）．

*37 **質問**：自由落下する粒子は観測者の，$\mathcal{P}_0$ での局所 Lorentz 系で直線に沿って動くか（$d^2x^{\alpha}/d\tau^2 = 0$）？（そのはずである！）**答え**：自由落下する粒子はゼロの 4–加速度を経験する

$$\boldsymbol{a}_{\text{粒子}} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}_{\text{粒子}}} \boldsymbol{u}_{\text{粒子}} = 0$$

すなわち，その 4–速度を平行移動する．すなわち，固有時間に等しいアフィンパラメータをもつ時空の測地線に沿って動く．世界線に対する測地線の方程式は，局所 Lorentz 座標で，

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}$$
$$= 0 \qquad (\mathcal{P}_0 \text{ で})$$

となる．粒子の世界線は，実際，$\mathcal{P}_0$ で直線である．

*38 **質問**：自由落下する観測者は彼の空間基底ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ を Fermi–Walker 移動するか，すなわち，彼は空間基底ベクトルを携帯しているジャイロスコープに結びつけることができるか？（彼はできるはずである！）**答え**：Fermi–Walker 移動（コラム 6.2）は

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{古い} \\ \text{記号}}}{\frac{d\boldsymbol{e}_j}{d\tau}} \equiv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{新しい} \\ \text{記号}}}{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{e}_j} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_j) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_j)$$

を与えるだろう．しかし $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_j = 0$, そして観測者に対して $\boldsymbol{a} = 0$．したがってこの場合の Fermi–Walker 移動は $\boldsymbol{e}_0$ に沿っての平行移動に帰着する．こうして $\boldsymbol{\nabla}_0 \boldsymbol{e}_j = 0$．これは，実際，$\boldsymbol{e}_j$ が $\mathcal{P}_0$ を通って移動する方法である，なぜなら

$$\boldsymbol{\nabla}_0 \boldsymbol{e}_j = \Gamma^{\alpha}{}_{j0} \boldsymbol{e}_{\alpha} = 0 \qquad (\mathcal{P}_0 \text{ で})$$

8.7 測地線の逸脱と Riemann 曲率テンソル

“重力は時空の曲率の表示であり，その曲率は 1 つの測地線の近傍の測地線からの逸脱（試験粒子の相対的な加速度）に現れる．” この陳述を明確にするために，まず “逸脱” あるいは近傍の測地線の “相対的な加速度” を定量化する．

---

*37 自由落下する粒子は直線上を動く

*38 原点での基底ベクトルは Fermi–Walker 移動される

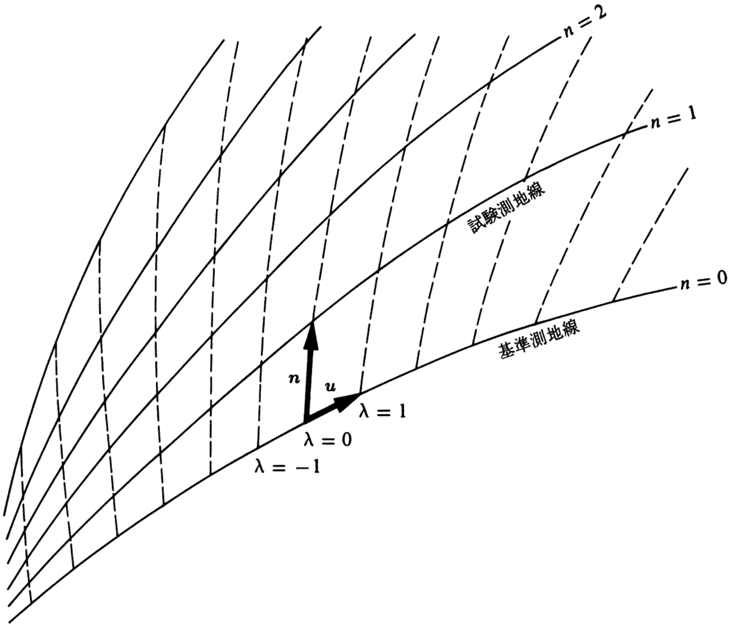


図 8.4　測地線 $\mathcal{P}(\lambda, n)$ の群．選択子パラメータ n は "どの" 測地線かを告げる．アフィンパラメータ λ は与えられた測地線上で "どこに" あるかを告げる．$n = 0$ の基準測地線上の点 $\mathcal{P}(\lambda, 0)$ での分離ベクトル $\boldsymbol{n} \equiv \partial\mathcal{P}/\partial n$ は，$n = 1$ の試験測地線上，同じ λ の値をもつ点 $\mathcal{P}(\lambda, 1)$ に達する（近似的に）．

一群の測地線 $\mathcal{P}(\lambda, n)$ に注目しよう，図 8.4 をみよ．滑らかに変化するパラメータ n（"選択のパラメータ"）は 1 つの測地線を別の測地線から区別する．定められた n に対して，$\mathcal{P}(\lambda, n)$ は，アフィンパラメータ λ と接線ベクトル

$$\boldsymbol{u} = \partial\mathcal{P}/\partial\lambda \tag{8.40}$$

をもつ測地線であり，$\boldsymbol{\nabla_u u} = 0$（測地線の方程式）である．ベクトル

$$\boldsymbol{n} \equiv \partial\mathcal{P}/\partial n \tag{8.41}$$

は近傍の測地線上で同じ λ の値をもつ 2 点間の隔たりを表す．

"基準測地線" $n = 0$ に沿って自由落下する観測者が，"試験測地線" $n = 1$ に沿って落下する試験粒子を観察する．彼は試験粒子の彼に対する相対速度を $\boldsymbol{\nabla_u n}$ で定量化する．この相対速度は，間隔ベクトル $\boldsymbol{n}$ と同じく，任意の "初期条件" である．しかし，試験粒子の観測者に対する "相対加速度"，$\boldsymbol{\nabla_u \nabla_u n}$ は任意でない（コラム 11.2 および 11.3 をみよ）．平坦な時空で，それはゼロであるだろう．曲がった時空では，それは

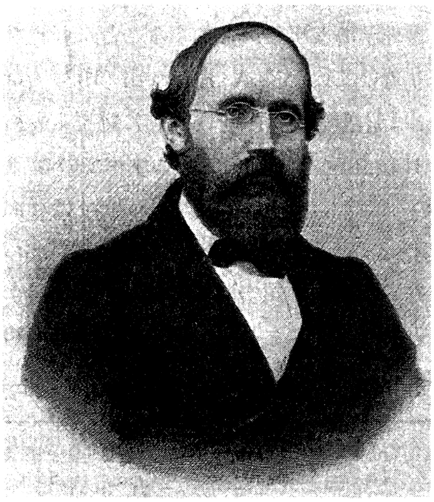
*39
$$\boldsymbol{\nabla_u \nabla_u n} + \boldsymbol{Riemann}(\cdots, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}) = 0 \tag{8.42}$$

で，あるいは，成分の記号で，

*39　Riemann 曲率テンソルは測地線の相対加速度で定義される

コラム 8.5 GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN

1826 年 9 月 17 日，Bresselenz，Hanover に生まれ，
1866 年 7 月 20 日，Selasca，Lake Maggiore にて没．



1851 年の有名な学位論文，“1 個の複素変数の関数の一般論に対する基礎” で，Riemann は現代数学の一分野（Riemann 面の理論）を樹立した．そして 3 年後の有名な講義で他の分野（Riemann 幾何学）を樹立した．これらおよび他の著作は H. Weber によって編集された彼の論文集 (1953) に見出されるだろう．

“空間を，他の考えられうる 3 重に広がった大きさから区別する性質は，ただ経験から演繹されねばならない…どの点においても曲率の 3 つの方向の測定は，空間のすべての測定可能な領域の有効な曲率が目立ってゼロと異ならない場合に限り，任意の値をもちうる．” [G. F. B. Riemann，“幾何学の基礎に存在する仮定について”，1854 年 6 月 10 日，Göttingen 大学の哲学部へ入る**大学教授資格の獲得講義**.]

12 年後結核のため瀕死の状態で，重力と電磁気学との統一された説明への試みに心をとらえられて，Riemann は，今日 Betti にちなんで名づけられている数（それは Riemann を尊敬する記号，R_n と同一視されるものにほかならない）を用いて，彼の多重連結トポロジーの表現系（それは “空間のトポロジー内にとらえられた力線” としての電荷の観点に扉を開いた）を Betti に伝えた．

“面をより詳細に点検すると，われわれが現実に基本的な一片と考えていたものにちっぽけなハンドルがくっついていて，これがその一片の接続性を変えることがわかり，倍率の顕微鏡は，この種のまったく新しい位相的な複雑さが，**限りなく**明らかになるだろう．Riemann の観点はまた，現実の空間に対しても，Euclid 的な空間によっ

て理解されているものとは完全に異なる位相的な条件を容認する．私は前世紀の間の数学の発展によってもたらされた幾何学のより自由でより一般的な概念の基礎の上にのみ，そしてそれが明らかにした創造的な可能性に対する開かれた心で，空間問題についての哲学的に実りある取り組みが着手されうると信ずる．" H. Weyl (1949, p.91).

"しかし…物理学者は依然このような考え方から遠く離れていた．空間は依然，彼らにとって，変化や条件に動かされにくい，堅くて，一様ななにものかであった．孤独で理解されなかった，Riemann の天分のみが，すでに前世紀の半ばまでに，堅さがなく，そして物理学的な事象に参加することが可能であると認められた，空間の新しい概念にたどり着いていた．" A. Einstein (1934, p.68).

Riemann は超空間（43 章をみよ）に対する最初の有名な模型をつくった．しかしそれは正の Riemann 的な計量をもつすべての 3–幾何学の全体からつくられた超空間（Einstein の一般相対性理論の力学的な場）ではなく，等角的に同等な，同じトポロジーの，閉じた Riemann 的なすべての 2–幾何学からつくられた超空間，今日 Teichmüller 空間として知られる型の超空間である．それに対する Riemann の寄与についてさらに多くのことおよびそれに続く展開に対しては，Gilbert and Newton (1970) についての L. Bers and J. A. Wheeler による章をみよ．

$$\frac{D^2 n^\alpha}{d\lambda^2} + R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} u^\beta u^\gamma u^\delta = 0 \tag{8.43}$$

で与えられる．

この式は "*Riemann* **曲率テンソル**" の定義として役立つ．これはまた**座標基底での**

*40 ***Riemann*** の成分に対する以下の表現を導くのに利用されうる．

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} &= \langle \boldsymbol{d}x^\alpha [\boldsymbol{\nabla}_\gamma, \boldsymbol{\nabla}_\delta] \boldsymbol{e}_\beta \rangle \\ &= \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} \end{aligned} \tag{8.44}$$

（証明に対しては，コラム 11.4，11.5 および練習問題 11.3 を，この順番に読め）．まず 3 次元およびより高次元の空間の曲率を解析した者が一瞥するには，コラム 8.5 をみよ．

*41 時空の曲率は測地線の逸脱だけでなく，平行移動に経路依存性をも引き起こす（閉じた曲線周りの平行移動はベクトルあるいはテンソルを変える，コラム 11.7）．それは共変微分が交換するのを妨げる [式 (8.44)]．そしてそれは大域的な Lorentz 座標系の存在を妨げる（11.5 節）．

一見して ***Riemann*** は 4×4×4×4 = 256 個の独立成分をもっていると考えられるだろう．しかし詳細に吟味すれば（13.5 節），種々の対称性が明らかになる，

*42
$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]} = R_{[\gamma\delta][\alpha\beta]}, \qquad R_{[\alpha\beta\gamma\delta]} = 0, \qquad R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0 \tag{8.45}$$

---

*40 ***Riemann*** の成分
*41 曲率の効果
*42 ***Riemann*** の対称性

(最初の 2 個の添字について反対称，最後の 2 個の添字について反対称，最初の対と最後の対との交換のもとで対称，完全に反対称の部分はゼロである)．これらは ***Riemann*** (4 次元での) の独立成分を 256 個から 20 個に減らす．

これらの代数学的な対称性の他に ***Riemann*** は "***Bianchi* の恒等式**" とよばれる微分対称性，

*43
$$R^{\alpha}{}_{\beta[\lambda\mu;\nu]} = 0 \tag{8.46}$$

をもっている．それは深い幾何学的な意味をもつ (15 章)．

Riemann からいくつかの他の曲率テンソルを縮約によってつくることができる．もっともつくりやすいものは "***Ricci* 曲率テンソル**"，

*44
$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha} \tag{8.47}$$

↑[座標系で]

と "**スカラー曲率**"

*45
$$R \equiv R^{\mu}{}_{\mu} \tag{8.48}$$

である．しかしはるかに大きい幾何学的な意味をもつのは "***Einstein* の曲率テンソル**" である．

*46
$$G^{\mu}{}_{\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} R_{\beta\gamma}{}^{\rho\sigma} \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\alpha\rho\sigma} = R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu} R \tag{8.49}$$

Riemann を縮約してつくりうるすべての 2 階の曲率テンソルの中で，***Einstein*** $= \boldsymbol{G}$ のみが Bianchi の恒等式 (8.46) の性質を保持する．それは

*47
$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{8.50}$$

を満たす．これらの "**縮約された *Bianchi* の恒等式**" ("境界の境界はゼロである") の美しい幾何学的な意味に対しては，15 章をみよ．

コラム 8.6 は，曲率を記述する上述の方程式を，共変微分に対する基本的な方程式とともに要約する．

[練習問題]

[トラック–2 に対する以下の練習問題は，練習問題 11.6，11.9，11.10，13.7–13.11，および 14.3 のような，曲率の理解を確かにすることを望むトラック–1 の読者に対して適当で

*43 Bianchi の恒等式
*44 Ricci 曲率テンソル
*45 スカラー曲率
*46 Einstein の曲率テンソル
*47 縮約された Bianchi の恒等式

ある.]

8.16　座標系で有用ないくつかの公式

任意の座標系で，g は行列 $g_{\alpha\beta}$ の行列式 [式 (8.11)] であると定義する．任意の座標系で成り立つ，以下の関係を導け．

(a) 接続係数の縮約

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha} = (\ln\sqrt{-g})_{,\beta} \tag{8.51a}$$

[ヒント：練習問題 5.5 の結果を用いよ.]

(b) Ricci テンソルの成分

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta})_{,\mu} - (\ln\sqrt{-g})_{,\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu} \tag{8.51b}$$

(c) ベクトル A^{α} の発散あるいは反対称テンソル $F^{\alpha\beta}$ の発散

$$A^{\alpha}{}_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^{\alpha})_{,\alpha}, \qquad F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}F^{\alpha\beta})_{,\beta} \tag{8.51c}$$

(d) スカラー場 Ψ の 4 次元の領域 $\mathcal{V}$ の固有体積についての積分

$$\int_{\mathcal{V}} \Psi\, d(\text{固有体積}) = \int_{\mathcal{V}} \Psi\sqrt{-g}\, dt\, dx\, dy\, dz \tag{8.51d}$$

[ヒント：局所 Lorentz 系で，$d(\text{固有体積}) = d\hat{t}\, d\hat{x}\, d\hat{y}\, d\hat{z}$．Jacobian を用いてこの体積要素を与えられた座標系に変換せよ，そして変換則

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\hat{\mu}}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\hat{\nu}}}{\partial x^{\beta}}\eta_{\mu\nu}$$

から Jacobian は $\sqrt{-g}$ に等しいことを証明せよ.]

コラム 8.6　共変微分と曲率：基本的な式

実体	抽象的な記号	成分の記号
共変微分	$\nabla_{u} T = \nabla T(\cdots,\cdots,u)$	$T^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}u^{\gamma} = DT^{\beta}{}_{\alpha}/d\lambda \qquad (u = d\mathcal{P}/d\lambda)$
		$= \dfrac{dT^{\beta}{}_{\alpha}}{d\lambda} + (\Gamma^{\beta}{}_{\nu\mu}T^{\nu}{}_{\alpha} - \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}T^{\beta}{}_{\nu})u^{\mu}$
	$\nabla_{u} f = \partial_{u} f = \langle df, u\rangle$	$f_{;\alpha}u^{\alpha} = f_{,\alpha}u^{\alpha}$
代数学的性質	$\nabla_{au+bv} T = a\nabla_{u} T + b\nabla_{v} T$	$T^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}(au^{\gamma}+bv^{\gamma}) = aT^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}u^{\gamma} + bT^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}v^{\gamma}$
(練習問題 8.11)	$\nabla_{u}(S+M) = \nabla_{u} S + \nabla_{u} M$	$(S^{\beta}{}_{\alpha}+M^{\beta}{}_{\alpha})_{;\gamma}u^{\gamma} = S^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}u^{\gamma} + M^{\beta}{}_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}$
	$\nabla_{u} w - \nabla_{w} u = [u, w]$	$\Gamma^{\rho}{}_{[\mu\nu]} = -\frac{1}{2}c_{\mu\nu}{}^{\rho}$ [式 (8.34)]
	ベクトル場 u, w に対して	

鎖則	$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{A})\otimes\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{B})$	$(A^{\alpha}{}_{\beta}B_{\gamma})_{;\mu}u^{\mu} = A^{\alpha}{}_{\beta;\mu}B_{\gamma}u^{\mu} + A^{\alpha}{}_{\beta}B_{\gamma;\mu}u^{\mu}$
	$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(f\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}f)\boldsymbol{A} + f\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{A}$	$(fA^{\alpha}{}_{\beta})_{;\mu}u^{\mu} = f_{,\mu}A^{\alpha}{}_{\beta}u^{\mu} + fA^{\alpha}{}_{\beta;\mu}u^{\mu}$
$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}$ と縮約は交換する	$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{S}$の縮約$) = (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S}$の縮約$)$	$\left(\sum_{\alpha} S^{\alpha}{}_{\alpha\gamma}\right)_{;\mu} u^{\mu} = \sum_{\alpha}(S^{\alpha}{}_{\alpha\gamma;\mu}u^{\mu})$
* 共変的に一定な計量勾配	$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{g} = 0$	$g_{\alpha\beta;\gamma}u^{\gamma} = 0$
勾配	$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{T}$	$T^{\beta}{}_{\alpha;\gamma} = T^{\beta}{}_{\alpha,\gamma} + \Gamma^{\beta}{}_{\mu\gamma}T^{\mu}{}_{\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}T^{\beta}{}_{\mu}$
接続係数	$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \langle\boldsymbol{\omega}^{\alpha}, \boldsymbol{\nabla}_{\gamma}\boldsymbol{e}_{\beta}\rangle = -\langle\boldsymbol{\nabla}_{\gamma}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e}_{\beta}\rangle$	$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta\gamma}{}^{*}$, $\Gamma_{\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu} + c_{\mu\beta\gamma} + c_{\mu\gamma\beta} - c_{\beta\gamma\mu})^{*}$, $c_{\beta\gamma\mu} = g_{\mu\alpha}c_{\beta\gamma}{}^{\alpha} = g_{\mu\alpha}\langle\boldsymbol{\omega}^{\alpha}, [\boldsymbol{e}_{\beta}, \boldsymbol{e}_{\gamma}]\rangle^{*}$
*$\mathcal{P}_0$ での局所 Lorentz 系：		$g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0) = \eta_{\mu\nu}, \quad \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(\mathcal{P}_0) = 0$ をもつ座標系
平行移動の式	$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S} = 0$	$S^{\alpha}{}_{\beta;\gamma}u^{\gamma} = 0$
測地線の式	$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} = 0$	$d^2x^{\alpha}/d\lambda^2 + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}(dx^{\mu}/d\lambda)(dx^{\nu}/d\lambda) = 0$ （座標基底で）
Riemann 曲率テンソル	$\boldsymbol{Riemann}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \equiv \langle\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}\rangle$ $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \equiv [\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{B}}] - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]}$ （トラック-1 の公式でない．11 章をみよ）	$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}$ （座標系で） [座標系によらない公式に対しては式 (11.13) をみよ]
Ricci 曲率テンソル	$\boldsymbol{Ricci} = \boldsymbol{Riemann}$の，投入口 1 および 3 についての縮約	$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}$ （座標系で）
* 曲率スカラー	$R = \boldsymbol{Ricci}$ の縮約	$R = R^{\alpha}{}_{\alpha}$
*Einstein 曲率テンソル	$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{Ricci} - \frac{1}{2}\boldsymbol{g}R$	$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$ $G^{\alpha}{}_{\beta}$ を計算するための有用な公式（14.2 節で導かれている） $G^{0}{}_{0} = -(R^{12}{}_{12} + R^{23}{}_{23} + R^{31}{}_{31})$, $G^{0}{}_{1} = R^{02}{}_{12} + R^{03}{}_{13}$, $G^{1}{}_{1} = -(R^{02}{}_{02} + R^{03}{}_{03} + R^{23}{}_{23})$, $G^{1}{}_{2} = R^{10}{}_{20} + R^{13}{}_{23}$，etc.
* 曲率テンソルの対称性		$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]} = R_{[\gamma\delta][\alpha\beta]}$, $R_{[\alpha\beta\gamma\delta]} = 0, \quad R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0$, $R_{\alpha\beta} = R_{(\alpha\beta)}, \quad G_{\alpha\beta} = G_{(\alpha\beta)}$

Bianchi の恒等式		$R^{\alpha}{}_{\beta[\mu\nu;\lambda]} = 0$
* 縮約された Bianchi の恒等式		$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$
測地線の逸脱	$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{Riemann}(\cdots, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}) = 0$	$\dfrac{D^2 n^{\alpha}}{d\lambda^2} + R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}u^{\beta}n^{\gamma}u^{\delta} = 0$
閉じた曲線の周りの平行移動（11.4節）	$\delta\boldsymbol{A} + \boldsymbol{Riemann}(\cdots \boldsymbol{A}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$（もし $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が曲線の縁であるならば）	$\delta A^{\alpha} + R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}A^{\beta}u^{\gamma}v^{\delta} = 0$

* もし計量が存在しないならば，これらの*印のついた公式は成立できない．他のすべての公式は計量が存在しない場合にも成り立つ．

9章
微分トポロジー

解析幾何学では，どの座標系にも依存しない多くの関係を，ある特別な座標系について表現しなければならない．したがって新しい方法――座標について何の言及もせずに直接本質的な性質に通ずる方法を，案出することが望ましい．一般的な空間のトポロジーとその中で起こる事象の発展は，一般的な計量空間の幾何学の発展とともに，この方向に進む一段階である．

KARL MENGER, in Schilpp (1949), p.467.

[本章は完全にトラック–2 である．前述のトラック–2 の内容に依存しない．これは (1) 10–13 章（微分幾何学，Newton 的重力），および (2) コラム 30.1（ミックスマスター宇宙論）に対する準備として必要である．これはまた，(1) 14 章（曲率の計算）および (2) 15 章（Bianchi の恒等式）で有用であるだろう.]

9.1 計量によらず，測地線によらない時空での幾何学的な対象

計量あるいは測地線あるいは平行移動をもたない曲がった時空，すなわち，“微分トポロジー” が，このやさしい章の題目である．すべての必要な幾何学的対象（事象，曲線，ベクトル，1–形式，テンソル）はすでに平坦な時空でよく知られているから，この題目はやさしい．しかし，平坦な時空の Lorentz 計量を放棄するとき，観点は洗練されなければならないから，この題目はまた必要である．

事　　象

事象 $\mathcal{P}$（図 1.2）の素朴な概念は改善を必要としない．ここでの本質的な性質は，時空の Lorentz 計量構造によらない同定可能性である．

*1
曲　　線

*2
再び改善は必要ない．“曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$” もまた時空が計量をもつかどうかをかまうには素朴すぎる――計量がなくなってしまえば，曲線に沿う “固有の長さ” という概念は存在しない，ということを除いて．これは Newton の重力理論と一致しており，そこでは “空間” での曲線の長さについて述べるが，“時空” での曲線の長さについて述べない．

*1　計量は放棄される
*2　幾何学的な概念は洗練されねばならない

ベクトル

ここでは改善が必要である．特殊相対性理論では基本的な（“同定できる”）事象を十分代数学的なはでな服装で飾って，ベクトルを“代数学的な”事象間の差 $\mathcal{P}-\mathcal{Q}$ として述べることができるだろう．今やはでな服装はなくなってしまい，そしてベクトルの古い2局所的（“頭部に対する点と後部に対する点”）な説明は純粋に局所的な形で置き換えられなければならない（9.2節）．またベクトルは動き回ることができない．各ベクトルは特別な事象に結びつけられなければならない（9.2および9.3節）．

1−形　式

ほとんど改善は必要でない．計量がなくなってしまい，どの1–形式が与えられたベクトルに対応するかを述べる方法がない（添字を上げ下げする方法がない）．そして各1–形式は特別な事象に結びつけられなければならない（9.4節）．

テンソル

再びほとんど改善は必要でない．テンソルの各投入口は特別であるということを除いて．もし投入口がベクトルを受け入れるならば，それは1–形式を収容できない，そして逆も成り立つ（添字の上げ下げがない）．また，各テンソルは特別な事象に結びつけられなければならない（9.5節）．

9.2 “ベクトル”と“方向微分”は接線ベクトルに洗練される

平坦な時空はいくつかの同等なベクトルの定義を許容できる（2.3節）．ベクトルは事象 $\mathcal{P}_0$ から事象 $\mathcal{Q}_0$ に達する矢である．それは $\lambda=0$ での $\mathcal{P}_0$から$\lambda=1$ での $\mathcal{Q}_0$ に延びる，パラメータ化された直線 $\mathcal{P}(\lambda)=\mathcal{P}_0+\lambda(\mathcal{Q}_0-\mathcal{P}_0)$ である．それは λ が増大するときの点 $\mathcal{P}(\lambda)$ の変化率，$d\mathcal{P}/d\lambda$ である．

*3 Lorentz計量がなくなると，“矢”の定義と“パラメータ化された直線”の定義は壊れなければならない．どのような経路によって矢あるいは線が $\mathcal{P}_0$と $\mathcal{Q}_0$ 間に設計されなければならないか？ まっすぐという概念は存在しない．すべての経路は等しく直線であるかあるいは曲がっている．

このような不明確さが“曲線に沿う点の変化率”の定義，$d\mathcal{P}/d\lambda$ に焦点を合わせさせる．それは，**“接線ベクトル”**という新しい名前のもとで，コラム9.1で簡単に探究され，そして以下の節でさらに深く探究される．

“$d\mathcal{P}/d\lambda$” すら接線ベクトルの不明確な定義であり，大部分の数学者は論争するだろう．
*4 彼らは次の定義がより受け入れられるものであると提案する．**曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ に対する接線ベクトル $\boldsymbol{u}$ はその曲線に沿う方向微分演算子**

---

*3 ベクトルの古い定義は，計量が放棄されるとき壊れる

*4 最善の新しい定義：“接線ベクトルは方向微分演算子 $\boldsymbol{u}=d/d\lambda$に等しい”

$$u = \partial_u = (d/d\lambda)_{曲線に沿って} \tag{9.1}$$

である．

接線ベクトルは方向微分演算子に等しいか？ これは非常識である！ ベクトルは $\mathcal{P}_0$ から $\mathcal{Q}_0$ への幸福な，責任のない旅行として始まった．それは $\mathcal{P}_0$ で何か他のことがいかに変わるかを告げるべき社会的な責任を負わされて終わった．どの点でベクトルはこの予期しない荷物を負わされたのか？ そしてその荷物はベクトルの性質を変えたようにみえるが，実際どれほど多く変えているのか？ これに答えるために，元に戻り，"点の変化率" の定義，$d\mathcal{P}/d\lambda$ を極限過程の形でやり直してみる．

0. 曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ を選んで，$\lambda = 0$ での接線ベクトル $d\mathcal{P}/d\lambda$ が求められているとする．
1. λ が 0 から 1 まで動くとき $\mathcal{P}$ の変位をとる．それは $d\mathcal{P}/d\lambda$ でない．
2. λ が 0 から 1/2 まで動くとき $\mathcal{P}$ の変位の 2 倍をとる．それは $d\mathcal{P}/d\lambda$ でない．

N. λ が 0 から $1/N$ まで動くとき，$\mathcal{P}$ の変位の N 倍をとる．それは $d\mathcal{P}/d\lambda$ でない．

∞. $N \to \infty$ のときこのような変位の極限をとる．それは $d\mathcal{P}/d\lambda$ である．

この定義は，$d\mathcal{P}/d\lambda$ が，曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ の性質を $\lambda = 0$ から $\lambda = 1$ への大きな領域（そこでは曲線は乱雑になっているかもしれない），にわたってでなく，点 $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}(0)$ の無限小近傍でのみ記述するという長所をもっている．

この定義での欠陥は段階 $1, 2, \cdots, N, \cdots$, に何の意味も当てられず，したがってその極限をとるまでは何もないということである．おのおのの "$\mathcal{P}$ の変位" を，"極限" が意味をもつような空間内での明確な数学的対象とするには，元の多様体はあるはるかに高次元の平坦な空間内の低次元曲面であると推測できる．そうすると $\mathcal{P}(1/N) - \mathcal{P}(0)$ は 2 点を結ぶ直線の矢，すなわち一般に曲面自身内に存在しないであろう直線の切片と考えられる．コラム 9.1 をみよ．生ずる接線ベクトルの頭の中の映像は若干の人為構造という犠牲を払って，その本質的な性質を美しいほど明白にする．その映像は関心をもっている多様体（計量によらない時空）を非本質的な平坦な空間内へはめ込む，特別なしかし任意の方法に依存している．この映像を用いるときには，はめ込みの特殊性に依存するものをすべてを無視しなければならない．分子の多くの本質的な性質を，へぼ職人のおもちゃのような分子模型を用いて明白に視覚化するが，しかし量子力学的な実在に似せていない模型の人為構造（原子の色，ボルトの直径，崩壊しようとする傾向）を容易に無視する化学者のように考えなければならない．

Élie Cartan の接線ベクトルの $d\mathcal{P}/d\lambda$ という考え方を含む，微分幾何学に取り組む方法は，次のようなものであった．彼はつねに多様体を，平坦な空間内にこのようにはめ込まれたものと考え，このような映像の本質的な幾何学をはめ込みに依存する詳細から分離することを，必ずしも明確な形にしないような洞察に頼ったのである．彼の計算方法がなかなか容認されなかった．事実と人為的構造を区別する自らの能力を信用しない数学者た

[*5] もう 1 つの定義，$u = d\mathcal{P}/d\lambda$ は，高次元の平坦な空間内へのはめ込みを要求する

*6 ちは，容認する代わりに次の代価を要求した．点自身の移動について語ることを止め，そして，多様体内で生じ，点が動くとき任意のあるいはすべてのスカラー関数 f において起こる具体的で測定可能な変化を取り扱うことのみを始めよ．そうすると極限過程は以下のようになる．

0. $\lambda=0$ での接線ベクトルが求められている曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ を選ぶ．

1. 数 $f[\mathcal{P}(1)]-f[\mathcal{P}(0)]$ を求める．それは点 $\mathcal{P}(\lambda)$ が $\mathcal{P}_0=\mathcal{P}(0)$ から $\mathcal{Q}_0=\mathcal{P}(1)$ へ動くとき f での変化を測定する．

2. $2\{f[\mathcal{P}(\frac{1}{2})]-f[\mathcal{P}(0)]\}$ を求める．それは点が $\mathcal{P}(0)$ から $\mathcal{P}(\frac{1}{2})$ へ動くとき f での変化の2倍である．

N. $N\{f[\mathcal{P}(1/N)]-f[\mathcal{P}(0)]\}$ を求める．それは点が $\mathcal{P}(0)$ から $\mathcal{P}(1/N)$ へ動くとき f での変化の N 倍である．

∞. $N\to\infty$ の極限で同じことを行う．(f での変化)$=df/d\lambda$.

0. ベクトルはそれ自身 f での変化でない．f に適用されるとき，変化 $df/d\lambda$ を与えるのは演算 $d/d\lambda$ である．こうして

$$\text{接線ベクトル}=d/d\lambda$$

[定義 (9.1) を参照せよ].

演算 $d/d\lambda$ はこの極限過程での最後の段階 $N\to\infty$ 以外の何ものも含まず，そしてこれらの段階の f に無関係な様相のみを含んでいる．しかしこれは点 $\mathcal{P}$ の無限小変位を含み**それ以上の何ものも含まないこと**を意味している．

現在の検討を続け，Cartan の深い幾何学的な洞察（コラム 9.1）を放棄しないことを望む者は，以下の2つの間の区別を存続させることを求めるだろう．

(A) Cartan の意味での接線ベクトル自身，点の変位 $d\mathcal{P}/d\lambda$，および

(B) この変位によって関数に起こるものを明らかにする“接線ベクトル演算子”，あるいは“方向微分演算子”．(接線ベクトル演算子)$=d/d\lambda$.

しかし，現在の慣習は (B) の“演算子”という言葉を省き（あるいは，もし望むならば，“不明瞭に発音し”），今後の慣習となるように，演算子に対して“接線ベクトル”という語句そのものを用いる．認識 (A) および (B) はまた心の中でなおざりにされるかあるいはいっしょになるにちがいない．そしてはめ込み図を面に接して描かれた矢で視覚化するときには，矢は，純粋に面内で起こる点の無限小運動 $d\mathcal{P}/d\lambda$ を特徴づけるものと，つねに理解する．そして微分演算子 $d/d\lambda$ を考えるときは，多様体内での点のこの同じ無限小運動，任意の微分 $df(\mathcal{P})/d\lambda$ をつくるときに必ず起こる運動をつねに視覚化する．この意味で，ベクトル $d\mathcal{P}/d\lambda\equiv d/d\lambda$ を，“1点から他の点へ注意を運ぶ変位”として，また“点の上にそして点以外の何ものでもないものの上に築かれる純粋に幾何学的な対象”とみなすべき

*6　$d\mathcal{P}/d\lambda$ の $d/d\lambda$ への改善

である.

頑固な物理学者は依然として“接線ベクトルが方向微分演算子に等しいって? 馬鹿げている!”と言いたい気になるだろう. おそらく彼は他の議論によって気楽になるだろう. 事象 $\mathcal{P}_0$ を取り上げる. その事象に4つの同一平面内にないベクトル(どのような方法で定義されるにしろ妥当と思われるベクトル)の任意の組を選ぶ. それらを $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ と名づける. それらを基底として用い, $\mathcal{P}_0$ でのすべての他のベクトルをそれについて展開する.

$$\boldsymbol{u} = u^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha, \qquad \boldsymbol{v} = v^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \tag{9.2}$$

*7 4つの基底ベクトルに沿って4つの方向微分演算子 $\partial_\alpha \equiv \partial_{\boldsymbol{e}_\alpha}$ をつくることが要求される. 平坦な時空の場合のように, ここでもまた $\boldsymbol{u} = u^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$ に現れるのと同じ展開係数がまた方向微分に対する展開に現れる.

$$\partial_{\boldsymbol{u}} = u^\alpha \partial_\alpha, \qquad \partial_{\boldsymbol{v}} = v^\alpha \partial_\alpha \tag{9.3}$$

したがって, $\mathcal{P}_0$ での特別なベクトル間のすべての関係はそれらの微分演算子間の同一の関係を引き起こす.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} = a\boldsymbol{w} + b\boldsymbol{v} &\Longleftrightarrow u^\alpha = a w^\alpha + b v^\alpha \\ &\Longleftrightarrow \partial_{\boldsymbol{u}} = a\partial_{\boldsymbol{w}} + b\partial_{\boldsymbol{v}} \end{aligned} \tag{9.4}$$

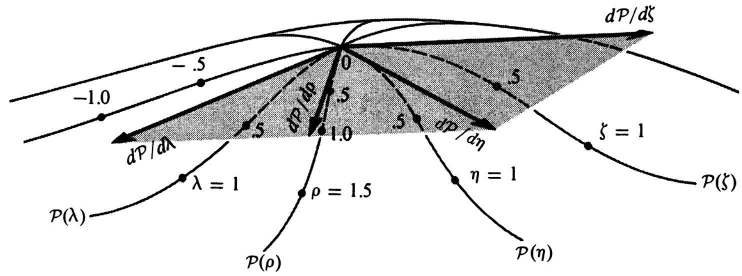
ベクトルと対応する方向微分との間には完全な“同形”がある. したがって高慢な物理学者は, 高慢な数学者がおのおのの接線ベクトルをその方向微分と完全に同一視する権利をどうして否定できるだろうか? いかなる不都合もなく, どのような計算に対する答えも影響を受けえない.

*8 この同形は“**接線空間**”という概念に延びていく. **1つのそして同じ点 $\boldsymbol{\mathcal{P}_0}$ で求められ**た方向微分の間の線形関係($\partial_{\boldsymbol{u}} = a\partial_{\boldsymbol{w}} + b\partial_{\boldsymbol{v}}$ のような)は意味があり, そして通常の加法および積の規則に従うから, これらの微分演算子は, $\mathcal{P}_0$ での接線空間とよばれる抽象的な(しかし有限次元の)ベクトル空間をつくる. はめ込み図(コラム9.1)でこれらの微分を用いて(平坦なはめ込み空間内での演算子として)接線ベクトル $\boldsymbol{u} = \partial_{\boldsymbol{u}}\mathcal{P}$, $\boldsymbol{v} = \partial_{\boldsymbol{v}}\mathcal{P}$ を, 直線の矢の形で構成する. それによって抽象的な空間を幾何学的に視覚化された接線空間と同一視する.

コラム9.1 接線ベクトルと接線空間

接線ベクトル $d\mathcal{P}/d\lambda$ は, “λ が0から $1/N$ まで動くとき $\mathcal{P}$ の変位の N 倍の, $N \to \infty$ の極限”であると定義される. この最終的な変位 $d\mathcal{P}/d\lambda$ が時空内に存在すると考えることはできない. 不明確さがこれを禁止する(直線という概念が存在しない). 代わり

*7 方向微分とベクトル間の同形
*8 接線空間が定義される



に $d\mathcal{P}/d\lambda$ を，$d\mathcal{P}/d\lambda$ が求められる事象 $\mathcal{P}(0)$ でのみ時空と接触する“接線平面”あるいは“接線空間”内に存在するとして視覚化する．$\mathcal{P}(0)$ でのすべての他の接線ベクトル，たとえば，$d\mathcal{P}/d\rho$，$d\mathcal{P}/d\eta$，$d\mathcal{P}/d\zeta$ はこの同じ接線空間内に存在する．

接線空間および接線ベクトルのこれらの概念を明確にするために，時空が 4 次元よりも大きい次元の平坦な空間内にはめ込まれているとみなせばよい．そうすると $d\mathcal{P}/d\lambda$ にいたる極限過程を，平坦なはめ込み空間内での直線の矢を用いて遂行できる．結果は上に示された図の高次元の相似物である．

しかしこのような取り扱いは危険である．それは，$\mathcal{P}_0$ での接線ベクトル $d\mathcal{P}/d\lambda$ および接線空間は，はめ込みがなされる仕方に依存する，あるいはそれらの存在に対してはめ込み過程に依存することを，誤って暗示してしまう．それらは依存しない．それらが依存しないことを明白にすることが，Cartan の絵で表した概念“$d\mathcal{P}/d\lambda$”を用いるのではなく，方向微分演算子“$d/d\lambda$”が接線ベクトルであると定義することにした 1 つの動機である．

9.3　基底，成分，およびベクトルに対する変換則

*9　事象 $\mathcal{P}_0$ での接線空間におけるとくに有用な基底は任意の座標系 [4 個の関数，$x^0(\mathcal{P})$, $x^1(\mathcal{P}), x^2(\mathcal{P}), x^3(\mathcal{P})$] によって導かれる．

$$\boldsymbol{e}_0 \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)_{x^1,x^2,x^3} = \left(\begin{array}{c}\text{一定な}\ (x^1,x^2,x^3)\ \text{とパラメータ}\\ \lambda = x^0\text{をもつ曲線に沿う方向微分}\end{array}\right)_{\mathcal{P}_0\text{で}}, \tag{9.5}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \frac{\partial}{\partial x^3}$$

（図 9.1 をみよ．）

*10　$\mathcal{P}_0$ での接線空間内で 1 つの基底から他の基底への変換は，任意のベクトル空間内での基底の任意の変換のように，正則な行列でなされる．

$$\boldsymbol{e}_{\alpha'} = \boldsymbol{e}_\beta L^\beta{}_{\alpha'} \tag{9.6}$$

---

*9　座標に導かれた基底が定義される
*10　基底の変化：変換行列が定義される

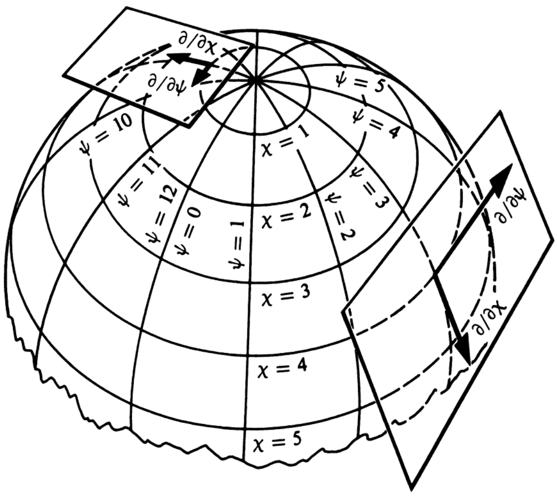


図 9.1　おのおのの事象での接線空間に，座標系によって，誘導される基底ベクトル．ここでは切り詰められた，2 次元時空が座標 $\chi(\mathcal{P})$ および $\psi(\mathcal{P})$，および対応する基底ベクトル $\partial/\partial\chi$ および $\partial/\partial\psi$ で，示されている（2 個の別な次元が削除されている）．

そして，いつものように（平坦な時空の Lorentz 系を含めて），ベクトルの成分は逆行列によって変換されなければならない．

$$u^{\alpha'} = L^{\alpha'}{}_{\beta} u^{\beta} \tag{9.7}$$

$$\|L^{\alpha'}{}_{\beta}\| = \|L^{\beta}{}_{\gamma'}\|^{-1}, \qquad \text{すなわち} \begin{cases} L^{\alpha'}{}_{\beta} L^{\beta}{}_{\gamma'} = \delta^{\alpha'}{}_{\gamma'}, \\ L^{\delta}{}_{\alpha'} L^{\alpha'}{}_{\beta} = \delta^{\delta}{}_{\beta} \end{cases} \tag{9.8}$$

この “逆” 変換則は展開 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_{\alpha'} u^{\alpha'}$ および $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_{\beta} u^{\beta}$ 間の両立性を保証する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{e}_{\alpha'} u^{\alpha'} = (\boldsymbol{e}_{\gamma} L^{\gamma}{}_{\alpha'})(L^{\alpha'}{}_{\beta} u^{\beta}) = \boldsymbol{e}_{\gamma} \delta^{\gamma}{}_{\beta} u^{\beta} \\ &= \boldsymbol{e}_{\beta} u^{\beta} \end{aligned}$$

座標に基づく基底間の変換という特別な場合には，変換行列は単純な形をもつ．

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \qquad \text{（計算の普通の規則による）}$$

したがって

$$L^{\beta}{}_{\alpha'} = (\partial x^{\beta} / \partial x^{\alpha'})_{\text{接線空間が存在する事象 } \mathcal{P}_0 \text{で}} \tag{9.9}$$

（**注意**：これは微分形式 $\Lambda^{\beta}{}_{\alpha'} = \partial x^{\beta}/\partial x^{\alpha'}$ をもつ Lorentz 変換則 $x^{\beta} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'} x^{\alpha'}$ を一般化する．また，それは Λ 行列での符号を記憶する良い方法を与える）．

9.4　1－形　式

Lorentz 計量が時空から除去されると，1–形式 $\boldsymbol{\sigma}$ は，任意の接線ベクトル $\boldsymbol{u}$ のように，時空内の特別な事象 $\mathcal{P}_0$ に結びつけられることを主張することによって，その概念を明確

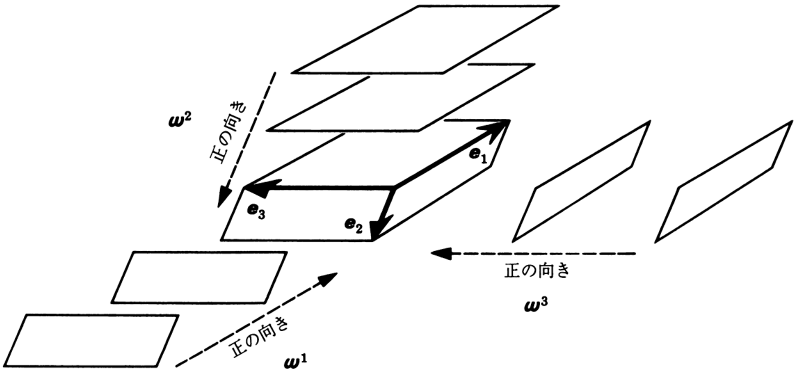


図 9.2　事象 $\mathcal{P}_0$ の接線空間における基底ベクトル $\boldsymbol{\omega}_\alpha$ および双対基底 1–形式 $\boldsymbol{\omega}^\beta$．条件
$$\langle \boldsymbol{\omega}^\beta, \boldsymbol{e}_\alpha \rangle = \delta^\beta{}_\alpha$$
は，ベクトル $\boldsymbol{e}_2$ および $\boldsymbol{e}_3$ は $\boldsymbol{\omega}^1$ の面に平行に存在し，そして $\boldsymbol{e}_1$ は $\boldsymbol{\omega}^1$ の 1 つの面から次の面へ延長する（正確に 1.00 面が貫通される）．

この図は X 線および結晶学に関する本に完全によく調和するだろうことに注意せよ．そこではベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は結晶の単位セルの稜であるだろう，そして $\boldsymbol{\omega}^1, \boldsymbol{\omega}^2, \boldsymbol{\omega}^3$ の面は単位セルの面であるだろう．また，放射の波長と適切に調整された結晶の方向づけをもつ，X 線回折実験に対しては，$\boldsymbol{\omega}^1$ の連続する面は Bragg 反射を生み出すだろう．波長および方向づけの別な選択に対しては，$\boldsymbol{\omega}^2$ あるいは $\boldsymbol{\omega}^3$ の面は Bragg 反射を生み出すだろう．

にしなければならない．$\boldsymbol{\sigma}$ を表現する面の集団は時空そのものではなく $\mathcal{P}_0$ での接線空間内に内在する．$\boldsymbol{\sigma}$ の面を矢 $\boldsymbol{u}$ で貫けば，数 $\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u} \rangle$（“ベルのゴーンと鳴る音”）は完全に接線空間内で起こる．

事象 $\mathcal{P}_0$ での基底ベクトルの任意の組 $\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ が与えられると，$\boldsymbol{\omega}^\beta$ の面を選んで

$$\langle \boldsymbol{\omega}^\beta, \boldsymbol{e}_\alpha \rangle = \delta^\beta{}_\alpha \tag{9.10}$$

*11 となるように，1–形式の “**双対基底**”$\{\boldsymbol{\omega}^0, \boldsymbol{\omega}^1, \boldsymbol{\omega}^2, \boldsymbol{\omega}^3\}$ を構成する（図 9.2 をみよ）．接線ベクトルと 1–形式の成分を計算したり操作したりするための驚くほど単純な公式が生ずる．

*12

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_\alpha u^\alpha \qquad (\boldsymbol{u}\text{ の成分の定義}) \tag{9.11a}$$
$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_\beta \boldsymbol{\omega}^\beta \qquad (\boldsymbol{\sigma}\text{ の成分の定義}) \tag{9.11b}$$
$$u^\alpha = \langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{u} \rangle \qquad (\boldsymbol{u}\text{ の成分を計算する方法}) \tag{9.11c}$$
$$\sigma_\beta = \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{e}_\beta \rangle \qquad (\boldsymbol{\sigma}\text{ の成分を計算する方法}) \tag{9.11d}$$
$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u} \rangle = \sigma_\alpha u^\alpha \qquad (\text{成分を用いて}\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u} \rangle\text{ を計算する方法}) \tag{9.11e}$$
$$\boldsymbol{\omega}^{\alpha'} = L^{\alpha'}{}_\beta \boldsymbol{\omega}^\beta \qquad (\text{式 (9.6) に相応する, 1–形式基底に対する変換則}) \tag{9.11f}$$
$$\sigma_{\alpha'} = \sigma_\beta L^\beta{}_{\alpha'} \qquad (\text{1–形式成分に対する変換則}) \tag{9.11g}$$

（下の練習問題 9.1 はこれらの式を正当化する.）

---

*11　1–形式の双対基底が定義される

*12　成分操作の公式

*13 計量が存在しない場合に，事象 $\mathcal{P}_0$ での特別な 1–形式 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ をとりそしてそれが $\mathcal{P}_0$ での特別な接線ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対応するという方法は存在しない．平坦な時空で設定された対応，

$$\langle \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \qquad \text{すべての } \boldsymbol{v} \text{ に対して}$$

は，“·” が完全に破壊されるときには，完全に破壊される．

成分の言葉で述べなおすと，添字を上げる，$u^\alpha = \eta^{\alpha\beta}u_\beta$ は，$\eta^{\alpha\beta}$ が存在しないから不可能である．同じように，添字を下げる，$u_\beta = \eta_{\beta\alpha}u^\alpha$ も不可能である．

*14 1–形式の勾配 $\boldsymbol{d}f$ は 2.6 節で計量にまったく関係せずに導入された．したがって，$\boldsymbol{d}f$ およびその数学的な形式は計量をもたないここでも，計量をもつ 2.6 節と同じである．ただすべての他の 1–形式のように，$\boldsymbol{d}f$ は今や時空そのものよりもむしろ接線空間内に存在する．たとえば，勾配の方向微分への射影に関する基本方程式に変化はない．

$$\langle \boldsymbol{d}f, \boldsymbol{u} \rangle = \partial_{\boldsymbol{u}} f = \boldsymbol{u}[f] \tag{9.12}$$

［方向微分に対する古い記号］↑　↑［新しい記号：$\boldsymbol{u} = \partial_{\boldsymbol{u}}$ を思い出せ］

同様に，成分の式に変化はない．

$$\boldsymbol{d}f = f_{,\alpha}\boldsymbol{\omega}^\alpha \qquad (\boldsymbol{d}f \text{ の任意の基底についての展開}) \tag{9.13a}$$

$$f_{,\alpha} = \partial_\alpha f = \boldsymbol{e}_\alpha[f] \qquad (\boldsymbol{d}f \text{ の成分を計算する方法}) \tag{9.13b}$$

$$f_{,\alpha} = \partial f/\partial x^\alpha \qquad (\text{もし } \{\boldsymbol{e}_\alpha\} \text{ が座標基底であるならば})$$

ただし，これらの式はたんに Lorentz 基底だけでなく，任意の基底で成り立つ．そして，Lorentz 系でと同じく一般にもまた，1–形式基底 $\{\boldsymbol{d}x^\alpha\}$ および接線ベクトル基底 $\{\partial/\partial x^\alpha\}$ は，同じ座標系によって接線空間に誘導され，互いに双対である．

$$\langle \boldsymbol{d}x^\alpha, \partial/\partial x^\beta \rangle = \delta^\alpha{}_\beta \tag{9.14}$$

（証明に対しては練習問題 9.2 をみよ）．また，Cartan の “外計算”（コラム 4.1 の A，B，C 項）の多くの性質は計量の除去で影響を受けずに残る．

9.5 テンソル

テンソル $\boldsymbol{S}$ は，Lorentz 計量が存在しない場合には，平坦な Lorentz 時空のテンソルと 2 つの点で異なる．(1) $\boldsymbol{S}$ はちょうど任意のベクトルあるいは 1–形式と同じく，特別な

*15 事象 $\mathcal{P}_0$ に存在しなければならない．(2) $\boldsymbol{S}$ の各投入口は特別である．それはベクトルか 1–形式のいずれかを受け入れるが，両方を受け入れないだろう．なぜならそれは 1–形式 $\tilde{\boldsymbol{u}}$

---

*13 ベクトルと完全に破壊された 1–形式間の対応

*14 関数の勾配

*15 テンソル投入口の特質

を線形機械を通して送るときに，$\tilde{\boldsymbol{u}}$ を “対応するベクトル” $\boldsymbol{u}$ に変換する方法をもたないからである．こうして，もし $\boldsymbol{S}$ が $\binom{1}{2}$ テンソルであるならば

$$\boldsymbol{S}(\cdots,\cdots,\cdots) \tag{9.15}$$

[1–形式をここに挿入せよ]（第1スロット）　[ベクトルをここに挿入せよ]（第2スロット）　[ベクトルをここに挿入せよ]（第3スロット）

そうするとそれは $\binom{2}{1}$ テンソル，あるいは $\binom{3}{0}$ テンソル，あるいは $\binom{0}{3}$ テンソルのいずれにも 3.2 節の操作によって，**転換できない**．成分の言葉でいうと，$\boldsymbol{S}$ の添字は上げ下げできない．

これら 2 つの制限（特別な事象に結びつくこと，投入口の特質）を除けば，テンソル $\boldsymbol{S}$ は今までと同じ線形機械である．そして成分操作の代数学は同じである．

$$S^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}^{\alpha}, \boldsymbol{e}_{\beta}, \boldsymbol{e}_{\gamma}) \ (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{\omega}^{\alpha}, \boldsymbol{e}_{\beta} \text{ はすべて同じ事象に存在しなければならない}) \tag{9.16}$$

$$\boldsymbol{S} = S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\boldsymbol{e}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\gamma} \tag{9.17}$$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\sigma_{\alpha}u^{\beta}v^{\gamma} \tag{9.18}$$

[練習問題]

9.1　成分操作

式 (9.11c) から (9.11g) までを (9.10)，(9.11a)，(9.11b)，(9.6)，(9.7)，および (9.8) から導け．

9.2　勾配の成分，および座標基底の双対

任意の基底で，$f_{,\alpha}$ を展開 (9.13a) によって定義せよ．それから式 (9.11d) および (9.12) を結合して $f_{,\alpha}$ を求める方法 (9.13b) を得よ．最後に，式 (9.12) および (9.13b) を結合して基底 $\{\boldsymbol{d}x^{\alpha}\}$ および $\{\partial/\partial x^{\beta}\}$ は互いに双対であることを示せ．

9.3　接線ベクトルを操作する練習

$\mathcal{P}_0$ を 3 次元空間で座標 $(x=0, y=1, z=0)$ をもつ点とする．そして $\mathcal{P}_0$ を通る 3 つの曲線を

$$\mathcal{P}(\lambda) = (\lambda, 1, \lambda),$$
$$\mathcal{P}(\zeta) = (\sin\zeta, \cos\zeta, \zeta),$$
$$\mathcal{P}(\rho) = (\sinh\rho, \cosh\rho, \rho+\rho^3)$$

によって定義する．(a) 関数 $f = x^2 - y^2 + z^2$ に対して，$(d/d\lambda)f, (d/d\zeta)f,$ および $(d/d\rho)f$ を点 $\mathcal{P}_0$ で求めよ．(b) 接線ベクトル $d/d\lambda, d/d\zeta,$ および $d/d\rho$ の成分を，基底 $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}$ を用いて，$\mathcal{P}_0$ で計算せよ．

9.4 接線ベクトルについてのさらなる練習

座標 (x, y, z) をもつ 3 次元空間で，ベクトル場 $\boldsymbol{v} = y^2\partial/\partial x - x\partial/\partial z$，および関数 $f = xy$，$g = z^3$ を導入し，以下の量を求めよ．

(a) $\boldsymbol{v}[f]$ (c) $\boldsymbol{v}[fg]$ (e) $\boldsymbol{v}[f^2 + g^2]$

(b) $\boldsymbol{v}[g]$ (d) $f\boldsymbol{v}[g] - g\boldsymbol{v}[f]$ (f) $\boldsymbol{v}\{\boldsymbol{v}[f]\}$

9.5 座標によって引き起こされる基底 1–形式の絵

図 9.1 の接線空間で，ψ, χ–座標系によって引き起こされる基底 1–形式 $\boldsymbol{d}\psi$，および $\boldsymbol{d}\chi$ を描け．

9.6 双対基底についての練習

極座標 r, θ, ϕ をもつ 3 次元空間では，基底 $\partial/\partial r, \partial/\partial\theta, \partial/\partial\phi$ の代わりに，基底

$$\boldsymbol{e}_{\hat{r}} = \frac{\partial}{\partial r}, \qquad \boldsymbol{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \boldsymbol{e}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

をしばしば，好んで用いる．(a) この接線ベクトル基底に双対な 1–形式基底 $\{\boldsymbol{\omega}^{\hat{r}}, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}\}$ は何か？ (b) 球 $r = 1$ 上で，基底 $\{\partial/\partial r, \partial/\partial\theta, \partial/\partial\phi\}$，$\{\boldsymbol{e}_{\hat{r}}, \boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}, \boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}\}$，$\{\boldsymbol{d}r, \boldsymbol{d}\theta, \boldsymbol{d}\phi\}$，および $\{\boldsymbol{\omega}^{\hat{r}}, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}\}$ の図を描け．

9.6 交換子と絵で表した方法

1 点 $\mathcal{P}_0$ でのみ与えられているベクトル $\boldsymbol{u}_0$ は，微分 $\boldsymbol{u}_0[f] \equiv \partial_{\boldsymbol{u}_0} f$ を求めるのに十分であり，これは単純に点 $\mathcal{P}_0$ に結びついた数である．対照的に，ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ はベクトル $\boldsymbol{u}(\mathcal{P})$ を与え，それは時空のある領域内の各点 $\mathcal{P}$ での微分演算子 $\partial_{\boldsymbol{u}(\mathcal{P})}$ である．このベクトル場は関数 f に作用して数をつくるだけでなく，別な関数 $\boldsymbol{u}[f] \equiv \partial_{\boldsymbol{u}} f$ をつくる．第 2 のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は完全によくこの新しい関数に作用でき，さらに別な関数

$$\boldsymbol{v}\{\boldsymbol{u}[f]\} = \partial_{\boldsymbol{v}}(\partial_{\boldsymbol{u}} f)$$

をつくる．この関数は $\boldsymbol{v}$ を先に適用し，それから $\boldsymbol{u}$ を適用した結果と一致するか？ 同等のことであるが，“交換子”

*16
$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}][f] \equiv \boldsymbol{u}\{\boldsymbol{v}[f]\} - \boldsymbol{v}\{\boldsymbol{u}[f]\} \tag{9.19}$$

はゼロになるか？

もっとも単純な特別な場合は $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ が座標系の基底ベクトル，$\boldsymbol{u} = \partial/\partial x^\alpha$，$\boldsymbol{v} = \partial/\partial x^\beta$ であるときである．そうすると交換子はゼロになる．なぜなら偏微分はつねに交換するからである．

*16 交換子が定義される

$$[\partial/\partial x^\alpha, \partial/\partial x^\beta][f] = \partial^2 f/\partial x^\beta \partial x^\alpha - \partial^2 f/\partial x^\alpha \partial x^\beta = 0$$

しかし，座標に基づいた計算からわかるように，一般に交換子はゼロでない．

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]f &= u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(v^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta}\right) - v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(u^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta}\right) \\ &= \left[(u^\alpha v^\beta{}_{,\alpha} - v^\alpha u^\beta{}_{,\alpha})\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right] f\end{aligned}$$

*17 しかし，交換子 $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ は，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ 自身のように，ベクトル場である，すなわち，各事象での線形微分演算子であることに注意せよ．

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = (\boldsymbol{u}[v^\beta] - \boldsymbol{v}[u^\beta])\frac{\partial}{\partial x^\beta} = (u^\alpha v^\beta{}_{,\alpha} - v^\alpha u^\beta{}_{,\alpha})\frac{\partial}{\partial x^\beta} \qquad (9.20)$$

このような結果は角運動量演算子（練習問題 9.8）に対する量子論の形式からよく知られているはずである．

幾何学の 3 つのレベル（絵で表した，抽象的な，そして成分）は交換子への 3 つの異なる洞察を与える．(1) 抽象的な表現 $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ は量子論への密接な関係を暗示し，そして演算子を取り扱うために量子論で展開された多くの道具を思い出させる．しかし量子論の演算子は 1 次の微分演算子である必要はないことを思い出せ．よく知られた Schrödinger 方程式では，運動エネルギーは 2 次であり，ポテンシャルはゼロ次である．唯一の 1 次の演算子はベクトルである．(2) 任意の座標基底で成り立つ成分表現 $u^\alpha v^\beta{}_{,\alpha} - v^\alpha u^\beta{}_{,\alpha}$ は，交換子を添字力学という強力な道具が使える領域にもたらす．(3) $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ を（コラム 9.2 参照）
*18 絵で表した表示は“曲線を閉じるもの”（11 章の曲率の解析で重要になる役割）としての基本的な役割を明らかにする．

交換子は，座標に基づく基底，$\{\boldsymbol{e}_\alpha\} = \{\partial/\partial x^\alpha\}$ および座標に基づかない基底間の区別に適用される．なぜなら偏微分はつねに交換するからである．

$$[\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta] = [\partial/\partial x^\alpha, \partial/\partial x^\beta] = 0 \qquad \text{任意の座標基底で} \qquad (9.21)$$

逆に，もし基底ベクトルの場（“座標系の場”）$\{\boldsymbol{e}_\alpha(\mathcal{P})\}$ が与えられているが，しかしそこでは $\{\boldsymbol{e}_\alpha\} = \{\partial/\partial x^\alpha\}$ であるような，座標系 $\{x^\alpha(\mathcal{P})\}$ が存在するかどうかわからないならば，単純なテストでそれを見つけることができる．すべての $(4\times3)/2 = 6$ 個の交換子 $[\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta]$ を計算せよ．もしそれらがすべてゼロであるならば，このような座標系は存在する．もしそうでないならば，存在しない．より簡単に述べると，**すべての $\boldsymbol{e}_\alpha$ および $\boldsymbol{e}_\beta$ に**
*19 **対して $[\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta] = 0$ である場合に限り，$\{\boldsymbol{e}_\alpha(\mathcal{P})\}$ は座標に基づく基底である**（証明については練習問題 9.9 をみよ，重要な応用については 11.5 節をみよ）．座標に基づく基底はときどき“**ホロノミック（holonomic）**”とよばれる．“**非ホロノミック（anholonomic）**
*20 **基底**”（非座標基底）では，交換係数 $c_{\mu\nu}{}^\alpha$ を

*17　2 つのベクトル場の交換子はベクトル場である
*18　曲線を閉じるものとしての交換子
*19　ゼロの交換子：座標基底に対するテスト
*20　交換係数が定義される

$$[\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu] = c_{\mu\nu}{}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \tag{9.22}$$

で定義する．それらは任意のベクトル場 $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ の交換子に対する成分公式に入る．

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = (\boldsymbol{u}[v^\beta] - \boldsymbol{v}[u^\beta] + u^\mu v^\nu c_{\mu\nu}{}^\beta)\boldsymbol{e}_\beta \tag{9.23}$$

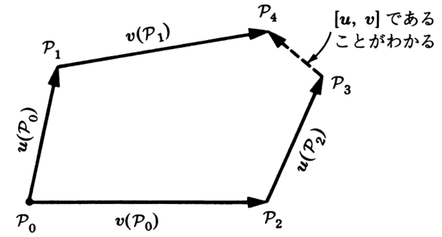
（練習問題 9.10 をみよ.）

*21 [**警告！** 関数および場に対する記号で，数学者と物理学者はしばしば矛盾するものを表すのに同じ記号を用いる．物理学者は自分が設計している器具についてのある重大な構成要素の長さを考えるとき l と書き，その温度変化に対する反応を解析し始めると $l(T)$ に移る．こうして l は数であるが，$l(T)$ は関数である．数学者は，対照的に，関数に対して f と書き，この関数をある無限次元の関数空間の 1 要素と考える．関数が独立変数を与えられると，数学者はたんに数である $f(x)$（点 x での f の値）を熟視する．物理学と数学の学派のこれらの対照的な形式の狭間にとらえられて，著者は明白な方針を採用した（揺れがある）．通常，"曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ 上で…" のような，物理学派の陳述が用いられる．そして読者はそれを自分自身で数学的に正確な言葉，すなわち "曲線 $\mathcal{C}$ を考え，その上の代表点が $\mathcal{P} = \mathcal{C}(\lambda)$ であり，この曲線上に…" に翻訳できる．しかし時折読者は，数学派の専門語で書かれた衒学的に響く節に出くわす（例：コラム 23.3）．このような節は非常に複雑な概念と関係を取り扱うので標準的な物理学的慣習は極端な混乱にいたるだろう．それらはまた読者が物理学的慣習に非常な条件づけをすることを妨げるはずであるから，彼は数学的な文献を毛嫌いするだろう．そこでは思索の明白さと経済性という大きな有利さが完全に明瞭な記号への首尾一貫した依存性で達成されているのだけれども.]

コラム 9.2　四辺形を閉じるものとしての交換子

A. 平坦な時空内の絵による表示

1. 視覚化を容易にするために，平坦な時空を考えよ．したがって 2 つのベクトル場 $\boldsymbol{u}(\mathcal{P})$ および $\boldsymbol{v}(\mathcal{P})$ を時空そのものの内に設定できる．



2. 交換子 $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ が計算されるべき事象 $\mathcal{P}_0$ を選べ.

3. 図に描かれた事象に名前 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$ を与えよ.

4. そうすると 4 つの足をもつ曲線が閉じるのにどれだけ足りないかを測るベクトル $\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_3$ は，座標基底について

---

*21 物理学者の記号対数学者の記号

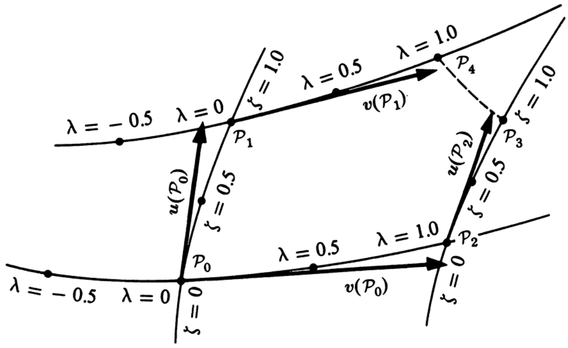
$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_4-\mathcal{P}_3&=[\boldsymbol{u}(\mathcal{P}_0)+\boldsymbol{v}(\mathcal{P}_1)]-[\boldsymbol{u}(\mathcal{P}_2)+\boldsymbol{v}(\mathcal{P}_0)]\\
&=[\boldsymbol{v}(\mathcal{P}_1)-\boldsymbol{v}(\mathcal{P}_0)]-[\boldsymbol{u}(\mathcal{P}_2)-\boldsymbol{u}(\mathcal{P}_0)]\\
&=(v^{\beta}{}_{,\alpha}u^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\beta})_{\mathcal{P}_0}-(u^{\beta}{}_{,\alpha}v^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\beta})_{\mathcal{P}_0}+\text{誤差}\\
&=[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]_{\mathcal{P}_0}+\text{誤差}
\end{aligned}
$$

↑ $[v^{\beta}{}_{,\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}\boldsymbol{e}_{\beta}$のような項$]$

と表すことができる．

5. もし $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ がいたるところで半分にされると，$[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$ は 1/4 に減り，上の誤差の項は 1/8 に減る．こうして，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ が十分短い極限で，$[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$ は 4 つの足をもつ曲線（“**四辺形**”）の間隙を正確に表している．すなわち，$[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$ はベクトル場 $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ を稜としてもつ “**四辺形を閉じる**”．

B. 計量が存在しない場合，あるいは計量をもつ曲がった時空での絵による表示



1. 同じ絵は正常に機能せねばならない．しかし今や時空そのものの内にベクトル場をあえて設定しない（少なくとも初めは）．代わりに 2 組の曲線を設定する．$\boldsymbol{u}(\mathcal{P})$ がその接線ベクトルであるような曲線，および $\boldsymbol{v}(\mathcal{P})$ がその接線ベクトルであるような曲線である．

2. 4 つの足をもつ曲線内での間隙 “$\mathcal{P}_4-\mathcal{P}_3$” は，任意の関数の $\mathcal{P}_4$ および $\mathcal{P}_3$ での値の差 $f(\mathcal{P}_4)-f(\mathcal{P}_3)$ によって特徴づけられる．その差は，座標基底について，

$$
\begin{aligned}
f(\mathcal{P}_4)-f(\mathcal{P}_3)=&\underbrace{[f(\mathcal{P}_4)-f(\mathcal{P}_1)]}_{\left(f_{,\alpha}v^{\alpha}+\frac{1}{2}f_{,\alpha\beta}v^{\alpha}v^{\beta}\right)_{\mathcal{P}_1}}+\underbrace{[f(\mathcal{P}_1)-f(\mathcal{P}_0)]}_{\left(f_{,\alpha}u^{\alpha}+\frac{1}{2}f_{,\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}\right)_{\mathcal{P}_0}}\\
&-\underbrace{[f(\mathcal{P}_2)-f(\mathcal{P}_0)]}_{\left(f_{,\alpha}v^{\alpha}+\frac{1}{2}f_{,\alpha\beta}v^{\alpha}v^{\beta}\right)_{\mathcal{P}_0}}-\underbrace{[f(\mathcal{P}_3)-f(\mathcal{P}_2)]}_{\left(f_{,\alpha}u^{\alpha}+\frac{1}{2}f_{,\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}\right)_{\mathcal{P}_2}}\\
=&[(f_{,\alpha}v^{\alpha})_{,\beta}u^{\beta}-(f_{,\alpha}u^{\alpha})_{,\beta}v^{\beta}]_{\mathcal{P}_0}+\text{“3 次の誤差”}
\end{aligned}
$$

$$= [(u^\beta v^\alpha{}_{,\beta} - v^\beta u^\alpha{}_{,\beta})\partial f/\partial x^\alpha]_{\mathcal{P}_0} + \text{“3 次の誤差”}$$
$$= \{[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}][f]\}_{\mathcal{P}_0} + \text{“3 次の誤差”}$$

である．

ここに，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ が半分に減少されるときはつねに，“3 次の誤差” は 8 の因子で減少されるが，$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]f$ は 4 の因子で減少される．

3. 結果

$$f(\mathcal{P}_4) - f(\mathcal{P}_3) = \{[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}][f]\}_{\mathcal{P}_0} + \text{“3 次の誤差”}$$

は，$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ は，点 $\mathcal{P}_3$ および $\mathcal{P}_4$ 間の隔たりを記述する $\mathcal{P}_0$ での接線ベクトルであることを述べている．その記述は $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ が短くなるほどより正確になる．こうして，$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ は $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ を時空への射影とする稜をもつ四辺形を閉じる．

C. 絵の哲学

1. 絵は計算の代用品でない．むしろ，絵は (a) 今まで想像されなかった幾何学的な関係を暗示し，続いて計算によってそれを確かめること，(b) 新しく学んだ幾何学的な結果を解釈すること，に対して有用である．

2. 絵のこの通常の非計算的な役割は，絵を描くときにずさんであることを許容する．注意深く接線ベクトルをそれぞれの接線空間に移して，曲線だけが時空内に存在することを許したとき，本質的な新しい洞察は，A 項以上に B 項で得られなかった．さらに，元の絵（A 項）はそのより大きな単純性のゆえに，より明白であった．

3. これは時空そのものの内に存在する接線ベクトルをもつ，“ずさんな” 絵を描く動機を与える—これらの接線ベクトルが短く，そしてときどき，ベクトルの長さが半分になるときに誤差のスケールを検査する限りにおいては．

［**練習問題**］

9.7　交換子についての練習

ベクトル場

$$\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \boldsymbol{e}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

の交換子 $[\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}, \boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}]$ を求めよ．結果を $\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}$ および $\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}$ の線形結合として表せ．

9.8　角運動量演算子

3 次元 Euclid 空間の直交座標で 3 つの “**角運動量演算子**”（ベクトル場）$\boldsymbol{L}_j$ を

$$\boldsymbol{L}_j \equiv \epsilon_{jkl} x^k (\partial/\partial x^l)$$

で定義する．これら 3 つのベクトル場の絵を描け．それらの交換子を絵でまた解析的に計

算せよ．

9.9　交換子および座標に基づいた基底

$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ を時空内のベクトル場とする．任意の与えられた点のある近傍で，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が一次独立で交換する．

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = 0$$

である場合に限り，

$$\boldsymbol{u} = \partial/\partial x^1, \qquad \boldsymbol{v} = \partial/\partial x^2$$

となる座標系が存在することを示せ．まずこの結果をコラム 9.2 での 2 番目の図から説明せよ．それから数学的に証明せよ．**注意**：この結果は 4 つの任意のベクトル場 $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ に一般化できる．$\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が一次独立であり，すべての対 $\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu$ に対して $[\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu] = 0$ である場合に限り，$\boldsymbol{e}_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ となる座標系が存在する．

9.10　非座標基底での交換子の成分

式 (9.23) を導け．

9.11　Lie 微分

ベクトル場 $\boldsymbol{v}(\mathcal{P})$ のベクトル場 $\boldsymbol{u}(\mathcal{P})$ に沿う “Lie 微分” は

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v} \equiv [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] \tag{9.24}$$

で定義される．1 枚の紙の上に空間を満たす曲線の集団（“**合同**”）を描け．紙上の任意点 $\mathcal{P}_0$ で任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を描け．そのベクトルを $\mathcal{P}_0$ を通る曲線に沿って，“**Lie 移動則**”$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v} = 0$（ここに $\boldsymbol{u} = d/dt$ は曲線への接線である）によって移動せよ．生ずるベクトル $\boldsymbol{v}$ を曲線に沿ういくつかの点 $\mathcal{P}(t)$ で描け．

9.12　古いブロックをそぎとる

(a) Jacobi の恒等式

$$[\boldsymbol{u}, [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]] + [\boldsymbol{v}, [\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}]] + [\boldsymbol{w}, [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]] = 0 \tag{9.25}$$

を証明せよ．形 $\partial_{\boldsymbol{u}}\, \partial_{\boldsymbol{v}}\, \partial_{\boldsymbol{w}}$ のすべての項を取り出し，それらが加わってゼロになることを示し，そして対称性から，すべての他の項，たとえば，$\partial_{\boldsymbol{w}}\, \partial_{\boldsymbol{u}}\, \partial_{\boldsymbol{v}}$ 項は，同様に相殺することを示して，

(b) この恒等式を添字形式で述べよ．

(c) この恒等式に相応する絵を描け（コラム 9.2 をみよ）．

9.7　多様体と微分トポロジー

時空は，本章の考えが適用されうる唯一の場でない．点，曲線，ベクトル，1–形式，およびテンソルは任意の “微分可能な多様体” に存在する．微分可能な多様体を研究するの

にそれらを用いることは“**微分トポロジー**”とよばれる数学の 1 分野，したがって本章の表題を構成する．

数学者は通常，微分トポロジーの展開を，集合および集合のトポロジーのようなある非常に素朴な概念を導入し，それらからかなり念の入った枠組みを構成し，さらにその枠組みを用いて微分可能な多様体の概念を定義することによって始める．しかし多くの物理学
*22 者は多様体のより不明確な，直観的な定義で満足する．大ざっぱに言えば，n 次元**微分可能な多様体**は連続的にそして微分可能なように結びつけられた“点”の集合である．したがって任意の十分小さい領域内の点は R^n の開集合と 1 対 1 対応にもたらされうる [R^n は n 次元の数空間，すなわち，順序づけられた n 組の空間 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ である]．その対応は近傍に対して座標系を与える．

*23 この定義よりも，若干の例は，よく概念を伝えるだろう．基本的な例（Euclid 3–空間，球の表面）は非常に多くの幾何学的な考えを幾何学のより豊かなレベルから思い出させる．それで何かより複雑なものを考えさせてしまう．R^3 を連続性と微分可能性の通常の高等な計算の考えが成り立つ 3 次元数空間とする．R^3 の点 $\boldsymbol{\xi}$ は実数の三つ組，$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ である．R^3 での**射線** $\mathcal{P}$ を，ある定められた $\boldsymbol{\eta} \neq 0$ およびすべての正の実数 $\lambda > 0$ に対して $\boldsymbol{\xi} = \lambda \boldsymbol{\eta}$ の形をとるすべての $\boldsymbol{\xi}$ からなる，原点からの任意の半直線とする（図 9.3 をみよ）．微分可能な多様体の良い例は，そうするとすべての異なる射線の集合 S^2 である．
*24 もし f が，任意の射線 $\mathcal{P}$ に対して特別な値 $f(\mathcal{P})$ をもつ実数値の関数であるならば [次のように書く．f: $S^2 \rightarrow R$: $\mathcal{P} \rightarrow f(\mathcal{P})$]，$f$ は連続である，あるいは微分可能である，と言うことが意味するものを定義できることは，直観的に明白であるはずである（あるいは証明すらできる）．この意味で S^2 そのものは連続でありそして微分可能である．こうして S^2 は多様体であり，射線 $\mathcal{P}$ は S^2 の点である．微分トポロジーが S^2 と区別できないたくさんの他の多様体がある．もっとも単純なのは 2 次元球面（2–球）であり，それは S^2 の標準的な表示である．それは $(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (\xi_3)^2 = 1$ を満たす R^3 の点 $\boldsymbol{\xi}$ の集合である．

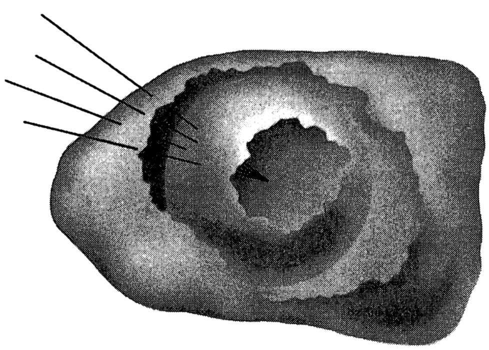


図 9.3 微分可能な多様体 S^2 の 3 個の異なる表示．第 1 は原点から出るすべての光線の組である．第 2 はそれらが交差する球である．第 3 は，おのおのの光線が正確に一度交差する奇妙な形の閉じた面である．

---

*22 微分可能な多様体が“定義”される
*23 微分可能な多様体の例
*24 多様体 S^2

明らかに S^2 の異なる点 $\mathcal{P}$（R^3 での1つの射線）はこの標準的な2–球面の各点と交わる．そして対応はいずれの方向にも連続であり，微分可能である（点への射線，射線への点）．同じことは原点を取り囲む R^3 内の任意の楕円面に対して，そして面そのものの各点を通る異なる射線をもつ原点を取り囲む任意の他の面に対して成り立つ．それらはおのおの同じ大域的な連続性と微分可能性の概念を含み，そして同じ抽象的で微分可能な多様体 S^2，2–球を表している．それら，および出発点からの射線の束は，幾何学のこの基本のレベルですべて同じ幾何学的な性質をもっている．このレベルで異なる幾何学的な構造（異なる
*25 “微分可能な構造”）をもつ2次元多様体はトーラス T^2，ドーナツの表面である．この面を滑らかに R^3 にはめ込み，異なる射線 $\mathcal{P}\in S^2$ がこの面の点のおのおのと交わるようにする方法は存在しない．T^2 と S^2 の間には可逆的で微分可能な対応は存在しない．

*26 多様体の別な例は回転群 $SO(3)$ であり，その点 $\mathcal{P}$ は単位行列式のすべての 3×3 直交行列である．したがって $\mathcal{P}=\|P_{ij}\|$，ここに $\mathcal{P}^T\mathcal{P}=1$ そして $\det\mathcal{P}=1$．これは3次元空間であり（計算にはしばしば3個の Euler 角パラメータを用いる），微分の考え（たとえば，角速度）が用いられる．したがって，それは多様体であり，Lorentz 群は多様体である．

多様体の微分可能性（すなわち，多様体上に微分可能な関数を定義する可能性）は，座標系を，大域的でないにしても，局所的に，そしてまた曲線，接線空間，接線ベクトル，1–形式，およびテンソルを，ちょうど時空に対してと同様に，導入することを許す．しかし多様体が微分可能であるということだけでは，測地線，平行移動，曲率，計量，あるいは長さのような概念が多様体に存在することを意味しない．これらは若干の多様体が有する付加的な層の構造であるが，すべての多様体が有するというわけでない．大ざっぱに言って，どの多様体も滑らかさの性質とトポロジーをもっているが，付加的な構造なしにはそれは形がないし，また大きさがない．

*27 測地線，平行移動，そして曲率（形）を多様体に加えた数学の分野は**アフィン幾何学**とよばれる．計量を加えた分野は **Riemann 幾何学**とよばれる．それらは次の数章で学ぶことができるだろう．

[練習問題]

回転群についての練習問題

微分幾何学の記述が以下の章でますます複雑になるにつれて，練習問題は，時間を戻して再び多様体の例として回転群を扱うだろう．それから，これらの練習問題で展開される結果は，コラム30.1で，Einstein の場の方程式に対するとくに重要な宇宙論的な解である“ミックスマスター（mixmaster）宇宙”を解析するのに用いられるだろう．

これらの練習問題を解く前に，読者は，たとえば，Goldstein(1959) の p.107–109 で取

*25　多様体 T^2
*26　多様体 $SO(3)$（回転群）
*27　アフィン幾何学と Riemann 幾何学が定義される

り扱われているように，回転行列に対する Euler 角のパラメータ化を再検討することが望ましい．

9.13 回転群：生成演算子

$\mathcal{K}_l$ を 3 個の 3×3 行列，その成分を $(K_l)_{mn} = \epsilon_{lmn}$ とする．

(a) 行列 $\mathcal{K}_1, (\mathcal{K}_1)^2, (\mathcal{K}_1)^3$, および $(\mathcal{K}_1)^4$ を表せ．

(b) 級数

$$\mathcal{R}_x(\theta) \equiv \exp(\mathcal{K}_1\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}(\mathcal{K}_1)^n \tag{9.26}$$

の和を求めよ．$\mathcal{R}_x(\theta)$ は回転行列であり，x 軸周りに角度 θ だけの回転を生み出すことを示せ．

(c) 同様に $\mathcal{R}_z(\phi) = \exp(\mathcal{K}_3\phi)$ および $\mathcal{R}_y(\chi) = \exp(\mathcal{K}_2\chi)$ は z 軸および y 軸周りに，それぞれ角度 ϕ および χ だけの回転を生み出すことを示せ．

(d) なぜ $\mathcal{P} = \mathcal{R}_z(\psi)\mathcal{R}_x(\theta)\mathcal{R}_z(\phi)$ は，回転群の一般的な要素 $\mathcal{P}\in SO(3)$ に対する Euler 角座標，ψ, θ, ϕ を定義するかを説明せよ．

(e) $\mathcal{C}$ を恒等行列，$\mathcal{C}(0) = \mathcal{I}\in SO(3)$ を通る曲線 $\mathcal{P} = \mathcal{R}_z(t)$ とする．その接線，$(d\mathcal{C}/dt)(0) \equiv \dot{\mathcal{C}}(0)$ はゼロにならないことを，$\dot{\mathcal{C}}(0)f_{12}$ を計算して示せ．ここに f_{12} は関数 $f_{12}(\mathcal{P}) = P_{12}$ であり，その値は $\mathcal{P}$ の 12 行列要素である．

(f) $SO(3)$ 上でベクトル場 $\boldsymbol{e}_3$ を，$\boldsymbol{e}_3(\mathcal{P})$ が $\mathcal{P}$ を通る曲線 $\mathcal{C}(t) = \mathcal{R}_z(t)\mathcal{P}$ への接線（$t=0$ で）となるように定義せよ．$\boldsymbol{e}_3(\mathcal{P})$ はどこでもゼロでないことを示せ．**注意：**$\boldsymbol{e}_3(\mathcal{P})$ は "z 軸周りの回転の生成子" とよばれる．なぜならそれは $\mathcal{P}$ での近傍回転，$\mathcal{R}_z(t)\mathcal{P}$ を示すからである．それは $\mathcal{P}$ と z 軸周りの回転だけ異なる．

(g) $\boldsymbol{e}_3 = (\partial/\partial\psi)_{\theta\phi}$ を示せ．

(h) $t\ll 1$ に対して，成り立つ以下の公式を導け．

$$\mathcal{R}_x(t)\mathcal{R}_z(\psi)\mathcal{R}_x(\theta)\mathcal{R}_z(\phi) = \mathcal{R}_z(\psi - t\sin\psi\cot\theta)\mathcal{R}_x(\theta + t\cos\psi)\mathcal{R}_z(\phi + t\sin\psi/\sin\theta),$$

$$\mathcal{R}_y(t)\mathcal{R}_z(\psi)\mathcal{R}_x(\theta)\mathcal{R}_z(\phi) = \mathcal{R}_z(\psi + t\cos\psi\cot\theta)\mathcal{R}_x(\psi + t\sin\psi)\mathcal{R}_z(\phi - t\cos\psi/\sin\theta)$$

(i) $\boldsymbol{e}_1(\mathcal{P})$ および$\boldsymbol{e}_2(\mathcal{P})$ はそれぞれ，曲線 $\mathcal{C}(t) = \mathcal{R}_x(t)\mathcal{P}$ および $\mathcal{C}(t) = \mathcal{R}_y(t)\mathcal{P}$ への接線ベクトル（$t=0$ で）であると定義する．

$$\boldsymbol{e}_1 = \cos\psi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\psi\left(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right),$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \sin\psi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\psi\left(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

を示せ．$\boldsymbol{e}_1$ および $\boldsymbol{e}_2$ は "x および y 軸周りの回転の生成子" である．

9.14 回転群：構造定数

上の練習問題で構成された 3 つのベクトル場

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \cos\psi \frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\psi \left(\cot\theta \frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \right), \\
\boldsymbol{e}_2 &= \sin\psi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\psi \left(\cot\theta \frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \right), \\
\boldsymbol{e}_3 &= \frac{\partial}{\partial\psi}
\end{aligned}
\tag{9.27}
$$

を回転群の多様体に対する基底ベクトルとして用いよ．上式はこの "生成子の基底" を Euler 角基底によって表している．この基底に対する交換係数は回転群での位置 $\mathcal{P}$ に無関係に，

$$
c_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \tag{9.28}
$$

であることを示せ．これらの係数はまた回転群の**構造定数**とよばれる．

10章
アフィン幾何学：測地線，平行移動，および共変微分

Galileiの慣性の原理はそれ自身，世界は特質としてアフィンであることを決定的に証明するに十分である．

HERMANN WEYL

[本章は完全にトラック–2である．9章は10章に対する必要な準備である．10章は(1)11–13章（微分幾何学，Newton的重力），(2)14章の後半（曲率の計算），および(3)15章の詳細であるが，主旨でないこと（Bianchiの恒等式）に対する準備として必要であるだろう．]

10.1 測地線と等価原理

自由落下は“運動の自然な状態”である．**自由落下している，中性の試験物体が時空を通る経路はその構造と成分によらない**（Einstein，Eötvös，Dickeの“弱い等価原理”，コラム1.2および38.3節をみよ）ほど，実際，自然である．

時空を自由落下軌道で満たされているものとして絵を描き，事象をとり，そこでの速度をとる．それらは一義的な軌道を定める．

より正確にしよう．おのおのの軌道に結びつけられている情報の最大量を求めよ．それはたんに試験物体が沿って落下する点の連続であるか？ そうでない．それ以上のものが

*1 ある．おのおのの試験物体はそれ自身時計を運ぶことができる（同じ種類の時計—図1.9の意味で“良い”時計—試験物体の構造あるいは成分に関係なく）．時計は物体が動くにつれて時を刻み，軌道上の各事象を数値，すなわち物体がそこにあった時間 λ で名称をつける．結果として，自由落下の軌道はたんに点の連続でない，それはパラメータ化された連続，**“曲線”**$\mathcal{P}(\lambda)$ である．

しかしパラメータ化は一義的であるか？ 完全にはそうでない．(1) 時間の原点，$\mathcal{P}(0)$ の選択，および (2) 時計の時間 λ が測定される単位（センチメートル，秒，ファーロング (furlong（長さの単位)),…）は完全に任意である．したがって，λ は一次変換を除いてのみ一義的である．

$$\lambda_{\text{新しい}} = a\lambda_{\text{古い}} + b \tag{10.1}$$

b（“時計の時間の新しい原点”）はこの特別な自由落下軌道の位置によらない数であり，a（“古い単位に対する新しい単位の比”）もまたそうである．

*1 自由落下する粒子とそれらの時計

Einstein の曲がった時空で［そして Cartan–Newton の曲がった時空で（12 章）］，これらのパラメータ化された自由落下軌道はすべての可能な曲線の中でもっとも直線的である．したがって，これらの軌道に，数学者が曲がった多様体の直線に対して用いるのと同じ名前，“**測地線**”を与える．そして数学者と同じく，自由落下測地線に沿うパラメータ λ に対して“**アフィンパラメータ**”という名前を用いる．そうすると式 (10.1) は“測地線のアフィンパラメータは 1 次変換を除いて一義的である”ことを述べている．

*2

*3

測地線に沿うアフィンパラメータ（“時計の時間”）は，先験的に，いかなる計量とも関係がない．それは計量が存在しなくても存在する（たとえば，Cartan–Newton の時空）．それは測地線上の事象間の隔たりを比較するための方法を与える（もし $[\lambda_{\mathcal{B}} - \lambda_{\mathcal{A}}] = 2[\lambda_{\mathcal{R}} - \lambda_{\mathcal{Q}}]$ であるならば，$\mathcal{B}$ と $\mathcal{A}$ は $\mathcal{R}$ と $\mathcal{Q}$ の隔たりの“2 倍だけ離れている”）．しかしアフィンパラメータはそれ自身の測地線に沿う相対的な分離だけを測定する．それは測地線を離れたところまで及ぶ手段をもたない．

上述の測地線の特徴，および他のことがらは，図 10.1 およびコラム 10.1 に要約されている．

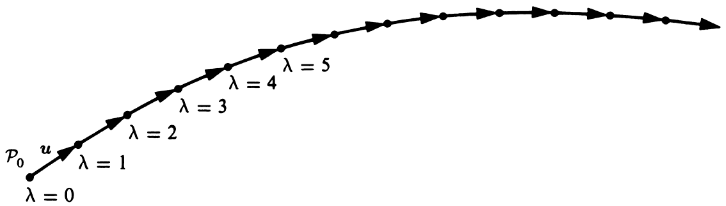


図 10.1　“直線の平行移動”に対する規則と考えられる測地線．事象 $\mathcal{P}_0$ およびそこでの接線ベクトル $\boldsymbol{u} = d/d\lambda$ を取り上げる．(1) $\mathcal{P}_0$ を通過する ($\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}_0$)，そして (2) $\boldsymbol{u}$ をそこでの接線ベクトルとしてもつ ($(d\mathcal{P}/d\lambda)_{\lambda=0} = \boldsymbol{u}$) ような一義的な測地線 $\mathcal{P}(\lambda)$ を構成する．この測地線は，$\boldsymbol{u}$ を $\mathcal{P}(0)$ から取り上げ，それを可能な限り直線状態で，再び先端，$\mathcal{P}(1)$ に置く，

$$\boldsymbol{u}_{\lambda=1} = (d\mathcal{P}/d\lambda)_{\lambda=1}$$

それからそれを取り上げ $\mathcal{P}(2)$ に再び可能な限り直線状態で置く．

$$\boldsymbol{u}_{\lambda=2} = (d\mathcal{P}/d\lambda)_{\lambda=2}$$

測地線は，これらに対する規則とみることができる．“可能な限り直線”，“先端の上に末端”移動のこの連続は，$(d\mathcal{P}/d\lambda)_{\lambda=17}$ および $\boldsymbol{u} = (d\mathcal{P}/d\lambda)_{\lambda=0}$ は，測地線に沿う異なる点での“同じベクトル”である．あるいは，同じことであるが，1 つのベクトルは別なベクトルから“**直線の平行移動**”によって得られている，ということになる．

10.2　平行移動と共変微分：絵による研究方法

2 個の試験物体が，最初時空内で平行な，相隣る測地線上を落下しているとすると，潮汐を引き起こす重力（時空の曲率）によって互いの方に押されたりあるいは離れたりする．この陳述を定量化するには，“平行”および“互いから離れる加速度の割合”の概念を定量化しなければならない．平行から始めよう．

*2　自由落下軌道として定義される測地線

*3　自由落下軌道に沿う時計の時間として定義されたアフィンパラメータ

コラム 10.1 測 地 線

*4 点を与え，接線ベクトルを与え，一義的な，アフィンパラメータ化された曲線（“測地線”）を得る．

*5 中性の試験物体の世界線（“Einstein の幾何学的な重力理論”，また “Newton の重力理論の幾何学的な表現への Cartan の翻訳”）．

(1) “与えられた点”：この世界線上のある事象．

(2) “与えられたベクトル”：その事象によって定義された瞬間での世界線への接線ベクトル（パラメータの単位増加あたりの変位）．

(3) “一義的な曲線”：指定された最初の位置と指定された初速度をもつすべての中性試験粒子は，その構成および質量に関係なく，同じ世界線に従う（小さい試験質量！“Einstein–Eötvös–Dicke の弱い等価原理”）．

(4) “アフィンパラメータ”：Cartan–Newton 理論で，Newton の “普遍的な時間”（それは “良い” 時計で測定される），実在の物理学的世界では，時間的な測地線に沿う “固有時間”（“良い” 時計で測定されるものとして）．

(5) “パラメータ化された曲線”：(a) $\lambda \rightarrow a\lambda + b$ のような形の変換を除いて一義的なアフィンパラメータ，ここに a および b は定数である（与えられた測地線に沿って，パラメータのゼロおよびパラメータの単位以外に任意性はない）．あるいは同じことであるが (b) 測地線上に任意の 3 つの事象 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$，$\mathcal{C}$ が与えられると，$(\lambda_{\mathcal{D}} - \lambda_{\mathcal{C}})$ が $(\lambda_{\mathcal{B}} - \lambda_{\mathcal{A}})$ に等しいような，測地線上の一義的な 4 番目の事象 $\mathcal{D}$ を，よく定められた物理学的な構成によって（“計器を用いて”）見出すことができる．あるいは同じことであるが (c) [微分的なバージョン] 点 $\mathcal{A}$ で成分 $(dx^{\alpha}/d\lambda)_{\mathcal{A}}$ をもつ接線ベクトルが与えられると，点 $\mathcal{C}$ で一義的に定められる成分 $(dx^{\alpha}/d\lambda)_{\mathcal{C}}$ をもつ “同じ接線ベクトル”（ベクトルは “等しい”，成分は $\mathcal{A}$ および $\mathcal{C}$ 間の任意の基底ベクトルのねじれと回転のため普通は等しくない）を，点 $\mathcal{C}$ で物理学的な構成によって（再び “計器を用いて”）見出すことができる．

曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ で結ばれている，2 個の相隣る事象 $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ を考える．ベクトル $\boldsymbol{v}_{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}$ での接空間内に存在し，ベクトル $\boldsymbol{v}_{\mathcal{B}}$ は $\mathcal{B}$ での接空間内に存在する．いかにして $\boldsymbol{v}_{\mathcal{A}}$ と
*6 $\boldsymbol{v}_{\mathcal{B}}$ が平行であるかどうかを言うことができるか，そしていかにしてそれらの長さを比較できるか？ 等価原理が答えを与える．観測者は（必要なものとしてロケット力を用いて）世界線 $\mathcal{P}(\lambda)$ に沿って時空内を動く．彼は動くときベクトル $\boldsymbol{v}_{\mathcal{A}}$ を自分とともに運び，そして平坦な空間の Newton 的あるいは Minkowski 的基準を用いて，$\boldsymbol{v}_{\mathcal{A}}$ がつねに変わら

---

*4 測地線の要約

*5 測地線：重力物理学の背景の中で

*6 異なる事象でのベクトルの平行移動による比較

ないようにする（平坦な空間の物理学は等価原理によって局所的に成り立つ！）．事象 $\mathcal{B}$ に達して観測者は彼の“平行移動されたベクトル”$\boldsymbol{v}_{\mathcal{A}}$ をベクトル $\boldsymbol{v}_{\mathcal{B}}$ と比較する．もしそれらが同一であるならば，元のベクトル $\boldsymbol{v}_{\mathcal{A}}$ は（定義により）$\boldsymbol{v}_{\mathcal{B}}$ に平行であった．そしてそれらは同じ長さをもっていた（計量は長さを定量化する方法を意味しないわけではないにもかかわらず，平行移動は長さを比較する方法を与える！）．

等価原理はこの議論におそらくよく知られていない方法で入り込み，自由落下している観測者に対してよりもむしろ，加速しているかもしれない観測者に適用された．しかしたんに等価原理を複雑に適用することによって基本原理を回避することはできない（巧妙な永久運動の機械は単純な機械と同じように不可能である！）．等価原理は，重力による潮汐力に反応しない局所的な測定は平坦な時空と曲がった時空間のいかなる相違も見つけることができないことを述べている．宇宙船の航空士は平坦な時空で慣性基準系を保持できる，
*7 慣性の誘導装置（加速度計，ジャイロスコープ，計算機）をもっている．そして平坦な時空で，宇宙船内のいかなる対象の，与えられた慣性系に相対的な姿勢と速度を計算できる．購入者は重力がゼロの Newton 力学の法則でプログラムされた誘導計算機，あるいは特殊相対性物理学の法則でプログラムされた誘導計算機のどれが欲しいかを指定してよい．この同じ誘導装置（同じ計算機プログラムを含めて）を曲がった時空内で用いる．もし誘導装置の計算機が，ベクトルが変化していないと告げるならば，ベクトルは平行移動されている．

このような方法での移動の結果は $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ を結ぶために用いられる曲線に無関係であるだろうか？　重力の存在しない時空では，明らかに，正しい．これは，慣性の誘導装置の購入者が製造業者に要求できる基本的な行為の基準であるからである．しかし曲がった時
*8 空では，答えは“否！”である．もし $\boldsymbol{v}_{\mathcal{A}}$ が 1 つの曲線に沿う平行移動の後 $\boldsymbol{v}_{\mathcal{B}}$ と一致するならば，$\boldsymbol{v}_{\mathcal{A}}$ は他の曲線に沿う平行移動の後 $\boldsymbol{v}_{\mathcal{B}}$ と一致する必要はない．時空の曲率が相違を生み出す．しかし平行移動の数学的な公式を展開し終わるまで，これらの相違を研究し定量化する（11 章）準備ができていない．一方，平行移動の数学的な公式は，ベクトル $\boldsymbol{v}_{\mathcal{A}}$ が曲線に沿って移動されるとき“つねに変化せずに保たれるための平坦な空間基準”を明確にし終わるまでは，得られない．

*9 平坦な空間基準はコラム 10.2 で明確にされる．それらは，(1) 平行移動を遂行するための“Schild のはしご”構成，(2) ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の接線 $\boldsymbol{u}$ をもつ曲線に沿う“共変微分，”$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$ の概念，(3) 測地線に対する“運動方程式”$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}=0$，それは“測地線は自分自身の接線ベクトルを自分自身に沿って平行移動する”ことを述べている．そして (4) 相隣る事象での接空間間の連結（図 10.2）に通ずる．

10.3　平行移動と共変微分：抽象的な研究方法

コラム 10.2 の“Schild のはしご”構成から，時空の共変微分の以下の性質を学ぶ．

---

*7　慣性の誘導装置を用いて定義される平行移動と等価原理

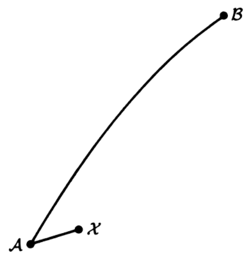
*8　平行移動の結果は経路に依存する

*9　平行移動を遂行するための Schild のはしご，その結果

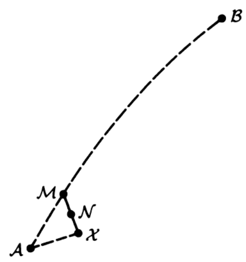
コラム 10.2　測地線から平行移動へ，共変微分へ，測地線へ…

*10

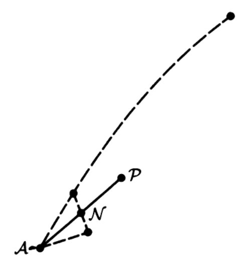
A. 曲線 $\mathcal{AX}$ の任意の十分短い広がり（すなわち，任意の接線ベクトル）を自分自身に平行に，曲線 $\mathcal{AB}$ に沿って点 $\mathcal{B}$ へ以下のように移動せよ．



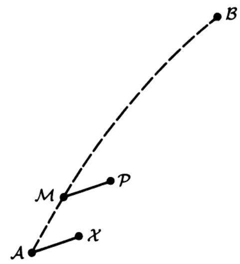
1. $\mathcal{AB}$ に沿うある点 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{A}$ の近くにとる．$\mathcal{X}$ および $\mathcal{M}$ を通る測地線 $\mathcal{XM}$ をとる．$\mathcal{XM}$ の任意のアフィンパラメータ λ をとり，条件 $\lambda_{\mathcal{N}} = \frac{1}{2}(\lambda_{\mathcal{X}} + \lambda_{\mathcal{M}})$（"$\mathcal{XN}$ および $\mathcal{NM}$ での等しい時間の広がり"）によって一義的な点 $\mathcal{N}$ を定義せよ．



2. $\mathcal{A}$ で始まり，$\mathcal{N}$ を通る測地線をとり，それを等しいパラメータの増加だけ点 $\mathcal{P}$ へ延長せよ．

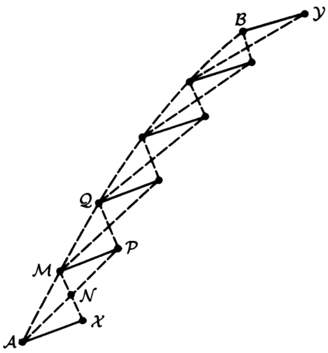


3. 曲線 $\mathcal{MP}$ はベクトル $\mathcal{AX}$ を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{M}$ へ（十分短い $\mathcal{AX}$ および $\mathcal{AM}$ に対して）自分自身に平行に伝播されたものである．この構成は確かに平坦な時空（Newton 的なあるいは Einstein 的な）内の平行移動を与える．さらに，この構成は局所的である（ベクトル $\mathcal{AX}$，$\mathcal{AM}$，などは非常に短い）．したがって，この構成は曲がった時空内でも成り立たなければならない（それは等価原理を含んでいる）．



*10　測地線によって定義されるものとしての "平行移動"

4. 操作を何度も繰り返し，そして最後に $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ へ自分自身に平行に伝播された $\mathcal{AX}$ で終われ．この構成を Schild(1970) の類似の構成から，
*11 "Schild のはしご" とよぶ [また Ehlers, Pirani, and Schild(1972) をみよ]．曲線 $\mathcal{AB}$ は測地線である必要はないことに注意せよ．$\mathcal{MQ}$ は $\mathcal{AM}$ の，$\mathcal{NP}$ は $\mathcal{AN}$ の直線的な延長であるという "十字形の支柱" としての測地線の要求に似た，直線的な延長であるという要求はない．

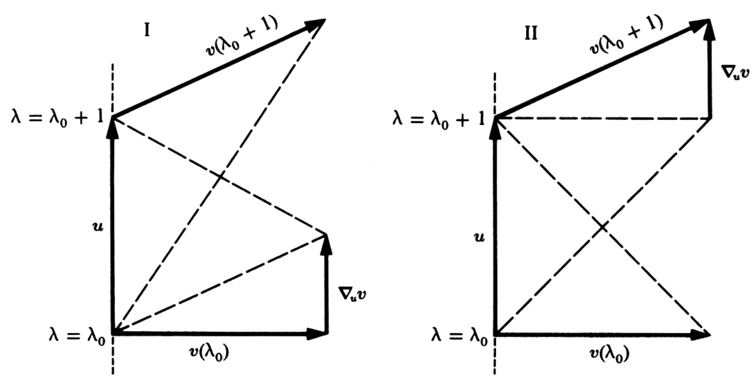


5. $\mathcal{AX}$ を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ へ自分自身に平行に伝播した結果は世界線 $\mathcal{AB}$ の選択に依存する（"時空の曲率の証拠"）．

*12 B. ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は接線ベクトル $\boldsymbol{u} = d/d\lambda$ をもつ曲線に沿って，いかに早く変化しているかを尋ねよ．答え，$d\boldsymbol{v}/d\lambda \equiv \boldsymbol{\nabla_u v} \equiv$ "$\boldsymbol{v}$ の λ についての変化率" $\equiv$ "$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ に沿う共変微分" は，以下の明白な操作によって構成される．(1) $\boldsymbol{v}$ を $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$ でとれ．(2) それを平行移動して $\lambda = \lambda_0$ へ戻せ．(3) それがそこでの $\boldsymbol{v}$ とどれだけ異なるかを計算せよ．(4) ε で割れ（そして $\varepsilon \to 0$ の極限をとれ）．

$$\boldsymbol{\nabla_u v} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{[\boldsymbol{v}(\lambda_0 + \varepsilon)]_{\lambda_0\text{に平行移動される}} - \boldsymbol{v}(\lambda_0)}{\varepsilon} \right\}$$

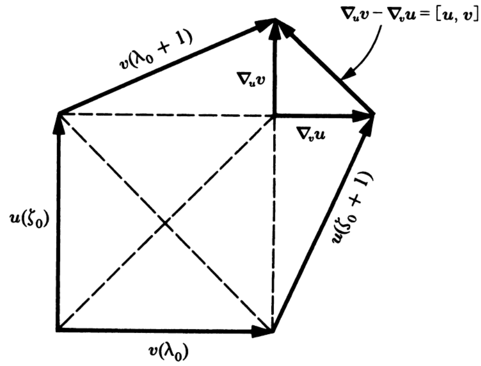
もし $\boldsymbol{u} = d/d\lambda$ がベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の不均質さのスケールに比べて短いならば，$\boldsymbol{\nabla_u v}$ は図 I，あるいは，同様によく，図 II から直接読み取れる．



*13 C. 2 つのベクトル場をとれ．$\boldsymbol{\nabla_u v}$ および $\boldsymbol{\nabla_v u}$ に対する 2 つの図を 1 つの図に結合せよ．それによって $\boldsymbol{\nabla_u v} - \boldsymbol{\nabla_v u}$ は $\boldsymbol{v}$-$\boldsymbol{u}$-$\boldsymbol{v}$-$\boldsymbol{u}$ 4 変形がそれがなければ閉じないようなベクトルであることを見出せ．すなわち（コラム 9.2 をみよ），それは交換子 $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$

*11　"Schild のはしご"
*12　平行移動によって定義されるものとしての "共変微分"
*13　共変微分の "対称性"

である．$\nabla_u v - \nabla_v u = [u, v]$．術語：$\nabla$ は，$\nabla_u v - \nabla_v u = [u, v]$ であるとき，“**対称的な**” あるいは “**ねじれのない**” 共変微分であるといわれる．他の型の共変微分は，数学者によって研究されているように，等価原理に基づいた任意の重力理論に対して何の関係ももたない．



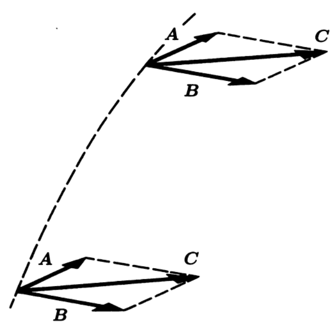
*14 D. $\nabla_u v$ を定義するために用いられる “差をとる” および “極限をとる” という操作は，$\nabla_u v$ が積を微分するための普通の規則に従うことを保証する．

$$\nabla_u(fv) = f\nabla_u v + \underbrace{(u[f])}\, v$$

（f は）スカラー場，（v は）ベクトル場；$u[f]$ は “f の u に沿う微分”，本の初めの部分で $\partial_u f$ と記されている．実際にはもし $u = d/d\lambda$ ならば，$df/d\lambda$ に等しい．またときどき $\nabla_u f$ と記される．

（証明には，練習問題 10.2 をみよ）．

*15 E. 現実の物理学的世界は，Newton 的であれ，あるいは相対論的であれ，その中での三角形の平行移動はその辺をばらばらにすることはできない．(1) A，B，C は初め，$A + B = C$ を満たすものとする．(2) A，B，C はそれぞれ自由落下する（慣性の）観測者によって彼とともに平行移動される．(3) そうすると $A + B = C$ がつねに成り立つ．いかなる他の結果も等価原理を破るだろう！



1. この結果（共変微分の定義に終わりまで従うことによって，そして任意のベクトル u は自由落下する世界線への接線ベクトルとみなされうることを注意することによって，わかるように）

$$\nabla_u(v + w) = \nabla_u v + \nabla_u w$$

任意のベクトル u とベクトル場 v と w に対して．

---

*14 共変微分に対する鎖則
*15 共変微分に対する加法

2. この結果は，共変微分の対称性と，“四辺形を閉じるもの”$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ の加法と結び合わせると

$$\nabla_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{n}} \boldsymbol{v} = \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v} + \nabla_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{v}$$

(練習問題 10.1 をみよ)．これは，代わりに，等価原理から推測されうる．局所慣性系では，特殊相対性理論あるいは Newton の理論におけるように，$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{n}$ に沿う $\boldsymbol{v}$ での変化は $\boldsymbol{u}$ に沿う変化と $\boldsymbol{n}$ に沿う変化の和に等しいはずである．

3. 上の結果，$\boldsymbol{n}$ が $\boldsymbol{u}$ の倍ベクトルであるように選べ．それによって

$$\nabla_{a\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v} = a \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v}$$

を結論せよ．

*16　F. 平行移動に対する“Schild のはしご”構成過程（このコラムの初め）は，測地線の接線ベクトルに適用されると（練習問題 10.6），**測地線は自分自身に沿って自分自身の接線ベクトルを平行移動する**，ことを保証する．共変微分の言葉に翻訳すると

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} = d/d\lambda \text{ は曲線への接線ベク} \\ \text{トルであり，そして } \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u} = 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \text{曲線は測地} \\ \text{線である} \end{pmatrix}$$

こうして循環を閉じる．測地線から平行移動へ，共変微分へ，測地線へ．

*17

対称性：	$\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v} - \nabla_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u} = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$	任意のベクトル場 $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ に対して	(10.2a)
鎖則：	$\nabla_{\boldsymbol{u}}(f\boldsymbol{v}) = f\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\partial_{\boldsymbol{u}} f$	任意の関数 f，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$，およびベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して	(10.2b)
加法：	$\nabla_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v} + \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w}$	任意のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$，およびベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して	(10.2c)
	$\nabla_{a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{n}} \boldsymbol{v} = a\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v} + b\nabla_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{v}$	任意のベクトル場 $\boldsymbol{v}$，ベクトルあるいはベクトル場 $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{n}$，および数あるいは関数 a および b に対して	(10.2d)

新しいベクトル場を古いベクトル場から生み出すことに対する，これら 4 つの条件を満たす**任意の“法則”∇** は，微分幾何学者によって“**対称的な共変微分**”とよばれる．このような法則は曲線，ベクトル，テンソル，他のより素朴な概念（9 章）に内在しない．時空の実験室の場には，重力場の源を配列し直す方法の数だけ多くの共変微分の法則 ∇ を定義する方法がある．異なる自由落下の軌道（測地線）は質量の異なる分布から生ずる．

---

*16　平行移動あるいは共変微分によって定義されるものとしての測地線

*17　共変微分：基本的な性質

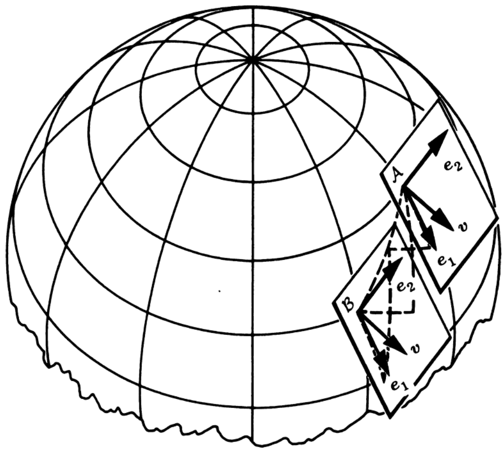


図 10.2 近傍点での接線空間の間の連係が，平行移動則によって可能になる．事象 $\mathcal{A}$ で基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ および $\boldsymbol{e}_2$ を選ぶ．それらを近傍の事象 $\mathcal{B}$ へ平行移動する（$\boldsymbol{e}_1$ の移動に対する Schild の手段が図に示されている）．そうすると，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ へ平行移動される任意の別なベクトル $\boldsymbol{v}$ は 2 個の事象で同じ成分をもつだろう（平行移動は三角形の脚を破ることができない，コラム 10.2 をみよ）．

[$\mathcal{A}$ におけるのと同じ値]

$$\boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + v^2\boldsymbol{v}_2\ (\mathcal{A}\ \text{における}) = \boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + v^2\boldsymbol{e}_2\ \ (\mathcal{B}\ \text{における})$$

[$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ へ平行移動されている]

こうして，平行移動は $\mathcal{A}$ での接線空間と $\mathcal{B}$ での接線空間との間に一義的で完全な連係を与える．それは $\mathcal{B}$ での一義的なベクトルをすべての代数的な関係を保存する方法で $\mathcal{A}$ でのおのおののベクトルと同定する．同様に（10.3 節をみよ），それは $\mathcal{B}$ での一義的な 1–形式を $\mathcal{A}$ でのおのおのの 1–形式と，そして $\mathcal{B}$ での一義的なテンソルを $\mathcal{A}$ でのおのおののテンソルと，$\langle\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}\rangle = 19.9$ および $\boldsymbol{S}(\sigma, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 37.1$ のようなすべての代数的な関係を保存して，同定する．

実際，このことのすべては $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ が互いに任意に接近している極限でのみ真実である．$\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ が接近しているが，しかし任意に接近していないときには，平行移動の結果は異なる経路に対してはわずかに異なる．したがって接線空間の間の連係はわずかに非一義的である．しかし差は，$\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ 間のアフィンパラメータの距離が半分に切断されるたびごとに，因子 4 だけ減少する（11 章をみよ）．

時空の，あるいは任意の他の多様体の測地線が与えられたとすると，コラム 10.2 の Schild のはしご操作によって一義的な対応する共変微分を構成できる．任意の共変微分が与えられると，式

*18

$$d\boldsymbol{v}/d\lambda \equiv \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} = 0 \Longleftrightarrow \begin{array}{l}\text{ベクトル場 } \boldsymbol{v} \text{ がベクトル } \boldsymbol{u} = d/d\lambda \\ \text{に沿って平行移動される}\end{array} \tag{10.3}$$

によって平行移動を議論できる．そして任意の曲線が測地線であるかどうかを

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} = 0 \Longleftrightarrow \begin{array}{l}\text{接線ベクトル } \boldsymbol{u} = d/d\lambda \text{ をもつ曲線 } \mathcal{P}(\lambda) \text{ は} \\ \text{それ自身の接線ベクトル } \boldsymbol{u} \text{ を平行移動する}\end{array} \tag{10.4}$$

$$\Longleftrightarrow \mathcal{P}(\lambda)\ \text{は測地線である}$$

*19 によって試すことができる．こうしてすべての測地線の知識は共変微分の知識に完全に同等である．

*18 平行移動に対する式

*19 すべての測地線の知識は共変微分の知識に同等である

*20　共変微分 $\boldsymbol{\nabla}$ は平坦な空間の勾配 $\boldsymbol{\nabla}$ を曲がった時空に一般化するその平坦な空間の親類と同様に，それは 1–形式 $\boldsymbol{\sigma}$，ベクトル $\boldsymbol{u}$，およびベクトル場 $\boldsymbol{v}$ から数 $\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v} \rangle$ を生み出すための機械とみなされうる．この機械の観点はコラム 10.3 で研究される．そこで 1 つの重要な事実に注意せよ．その機械的な性質にかかわらず $\boldsymbol{\nabla}$ はテンソルでない．それは非テンソル的な幾何学的な対象である．

*21　曲がった時空内では平坦な時空内でと同じように，$\boldsymbol{\nabla}$ はベクトル場にだけでなく，関数，1–形式の場，およびテンソル場にも適用されうる．関数に対するその作用は明白な方法で定義される．

$$\boldsymbol{\nabla} f \equiv \boldsymbol{d} f, \qquad \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} f \equiv \partial_{\boldsymbol{u}} f \equiv \boldsymbol{u}[f] \equiv \langle \boldsymbol{d} f, \boldsymbol{u} \rangle \tag{10.5}$$

1–形式の場およびテンソル場に対するその作用は式 (3.39) の曲がった空間への一般化によって定義される．$\boldsymbol{\nabla S}$ は“一定の”（すなわち，平行移動された）ベクトルがその投入口に挿入されたとき，点から点への，$\boldsymbol{S}$ の出力の変化を計算するための線形機械である．例：$\binom{0}{1}$ テンソル，すなわち，1–形式の場 $\boldsymbol{\sigma}$ の勾配．事象 $\mathcal{P}_0$ をとれ．$\mathcal{P}_0$ での接線空間内に 2 個のベクトル $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ をとれ．$\boldsymbol{v}$ から“一定の”ベクトル場 $\boldsymbol{v}(\mathcal{P})$ を $\boldsymbol{u}$ の方向に沿う平行移動によってつくれ，$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v} = 0$．そうすると $\boldsymbol{\nabla \sigma}$ は $\binom{0}{2}$ テンソルである，そして $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\sigma}$ は

$$\boldsymbol{\nabla \sigma}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \equiv \langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v} \rangle \equiv \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v} \rangle) \equiv \frac{d}{d\lambda} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{10.6}$$

によって $\mathcal{P}_0$ で定義された $\binom{0}{1}$ テンソルである．ここに $\boldsymbol{u} = d/d\lambda$ である．これは $\boldsymbol{\nabla \sigma}$ および $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\sigma}$ を定義する．なぜならこの式は任意の与えられた入力ベクトル $\boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{u}$ に対するそれらの出力を述べているからである．もし $\boldsymbol{v}(\mathcal{P})$ が $\boldsymbol{u} = d/d\lambda$ に沿って“一定”であるように拘束されていないならば，$(d/d\lambda)\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v} \rangle$ は $\boldsymbol{v}$ での変化と $\boldsymbol{\sigma}$ での変化の両方からの寄与をもつ．

$$\frac{d}{d\lambda} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v} \rangle \equiv \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v} \rangle \tag{10.7}$$

（練習問題 10.3 をみよ．）

同様に，もし $\boldsymbol{S}$ が $\binom{1}{2}$ テンソル場であるならば，その勾配 $\boldsymbol{\nabla S}$ は以下のように定義される $\binom{1}{3}$ テンソル場である．事象 $\mathcal{P}_0$ をとり，3 個のベクトル $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$，および $\mathcal{P}_0$ での接線空間内の 1–形式 $\boldsymbol{\sigma}$ をとる．$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$，および $\boldsymbol{\sigma}$ を $\mathcal{P}_0$ 近傍で，平行移動（$\mathcal{P}_0$ で，$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\sigma} = 0$）によって“一定”のベクトル場および“一定の”1–形式の場に変えよ．それから

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla S}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) &\equiv (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{S})(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \equiv \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})] \\ &= \partial_{\boldsymbol{u}}[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})] \end{aligned} \tag{10.8}$$

を定義せよ．

*20　共変微分は平坦な空間の勾配を一般化する
*21　共変微分の関数，1–形式，そしてテンソルへの作用

コラム 10.3　機械としてみた共変微分：その成分としての接続係数

A. 機械的な観点

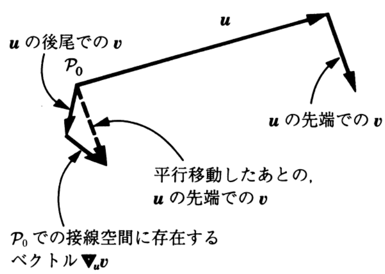
1. 共変微分演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ は，多くの他の幾何学的な対象のように，投入口をもつ機械とみなされうる．時空内のそれぞれの事象 $\mathcal{P}_0$ に 1 つのこのような機械がある．簡単にいうとすれば，$\mathcal{P}_0$ での $\boldsymbol{\nabla}$ の機械的な解釈は次式を述べている．

$$\boldsymbol{\nabla}(\underset{\cdots}{\boldsymbol{\sigma}}, \underset{\cdots}{\boldsymbol{v}(\mathcal{P})}, \underset{\cdots}{\boldsymbol{u}}) \quad \equiv \langle \boldsymbol{\sigma}, \underbrace{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}} \rangle$$

第 1 の投入口：$\mathcal{P}_0$ での接線空間内に存在する 1–形式 $\boldsymbol{\sigma}$ を挿入せよ	第 2 の投入口：$\mathcal{P}_0$ の近傍で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{v}(\mathcal{P})$ を挿入せよ	第 3 の投入口：$\mathcal{P}_0$ での接線空間内に存在するベクトル $\boldsymbol{u}$ を挿入せよ	新しいベクトル："ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ についての共変微分"

[注意：$\boldsymbol{\nabla}$ に対するこの投入口の記号は，$\boldsymbol{\nabla}$の "機械" としての性質を強調すること以外に何の有用な目的にも役立たない．このコラムは投入口が用いられる唯一の場所である．]

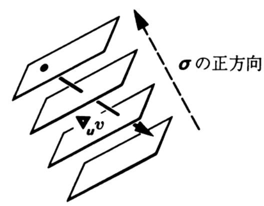
2. 幾何学的に，機械の出力，$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} \rangle$ は，以下のように得られるだろう．



(a) ベクトル $\boldsymbol{u}$ に沿う $\boldsymbol{v}$ の変化率，$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$ を計算せよ．$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ が無限に小さいときは，計算は絵で表現できる．

(b) 1–形式 $\boldsymbol{\sigma}$ のどれだけの面がベクトル $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$ によって貫かれるかを数えよ（貫通は $\mathcal{P}_0$ での接線空間内で起こる）．

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} \rangle = -2.8$$



この数は $\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{v}(\mathcal{P})$ および $\boldsymbol{u}$ が機械 $\boldsymbol{\nabla}$ の投入口に挿入されるとき，その出力である．

3. 機械としての共変微分のもう 1 つの同等な陳述．第 1 の投入口を空のままにせよ（どのような 1–形式 $\boldsymbol{\sigma}$ についても言及しない）．元のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ から新しいベクトル場を得よ．

$$\nabla(\underbrace{\cdots}_{\text{空}}, \boldsymbol{v}(\mathcal{P}), \boldsymbol{u}) \equiv \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$$
$$= \text{“ベクトル場 } \boldsymbol{v} \text{ のベクトル } \boldsymbol{u} \text{ に沿う共変微分”}$$

4. 3 番目の機械的な操作．第 1 と第 3 の投入口を空のままにしておく（どんな 1–形式 $\boldsymbol{\sigma}$ についても言及しない．どのようなベクトル $\boldsymbol{u}$ に沿って微分すべきかについても言及しない）．$\binom{1}{1}$ テンソル場を元のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ から得よ．

$$\nabla(\underbrace{\cdots}_{\text{空}}, \boldsymbol{v}(\mathcal{P}), \underbrace{\cdots}_{\text{空}}) \equiv \nabla\boldsymbol{v}$$
$$= \text{“共変微分” あるいはベクトル場 } \boldsymbol{v} \text{ の “勾配”}$$

このテンソル場，$\nabla\boldsymbol{v}$ は，3.5 節で研究された平坦な空間の $\nabla\boldsymbol{v}$ の曲がった空間への拡張である．それは 2 つの投入口（これら 2 つは定義では空のまま残されている）をもつ．与えられた入力に対するその出力は

$$\nabla\boldsymbol{v}(\underbrace{\cdots}_{\text{空}}, \boldsymbol{u}) = \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$$
$$\nabla\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}) = \langle\boldsymbol{\sigma}, \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}\rangle$$

である．

5. 上に定義された量の要約

(a) ∇ は**共変微分演算子**である．それから数を得るには，$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{v}(\mathcal{P})$，および $\boldsymbol{u}$ を挿入せよ．結果は $\langle\boldsymbol{\sigma}, \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}\rangle$ である．

(b) $\nabla\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}$ **の勾配**である．それから数を得るには，$\boldsymbol{\sigma}$ および $\boldsymbol{u}$ を挿入せよ．結果は $\langle\boldsymbol{\sigma}, \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}\rangle$ である [(a) におけるのと同じである]．

(c) $\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}$ **の** $\boldsymbol{u}$ **に沿う共変微分**である．それから数を得るには，$\boldsymbol{\sigma}$ を挿入せよ．結果は $\langle\boldsymbol{\sigma}, \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}\rangle$ である [(a) および (b) におけるのと同じである]．

B. ∇ はテンソルといかに異なるか

機械 ∇ は 2 つの方法でテンソルと異なる．(1) ∇ の真ん中の投入口はベクトルを受け入れないだろう．それはベクトル場，すなわち微分されるべきベクトル場を要求する．(2) ∇ は線形機械でない（それに対してテンソルは線形でなければならない!）．

$$\nabla(a\boldsymbol{\sigma}, f(\mathcal{P})\boldsymbol{v}(\mathcal{P}), b\boldsymbol{u}) \equiv \langle a\boldsymbol{\sigma}, \nabla_{b\boldsymbol{u}} f\boldsymbol{v}\rangle$$
$$= abf\langle\boldsymbol{\sigma}, \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}\rangle + \underbrace{ab\langle\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}\rangle\nabla_{\boldsymbol{u}} f}_{\uparrow}$$

[もし ∇ が線形機械であったならば
これは存在しないだろう]

C. ∇ の成分としての “接続係数”

階数 $\binom{1}{2}$ のテンソル $\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{S}$ が存在する事象 $\mathcal{P}_0$ での接線ベクトルの基底 $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$，および 1–形式の基底 $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$ が与えられると，$\boldsymbol{S}$ の成分を

$$S^\alpha{}_{\beta\gamma} \equiv \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\beta, \boldsymbol{e}_\gamma)$$

で定義する．同様に，∇ の成分を定義する．ただし ∇ に対しては事象 $\mathcal{P}_0$ での基底 $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ だけでなく，事象 $\mathcal{P}_0$ の近傍の各事象 $\mathcal{P}$ での基底 $\{\boldsymbol{e}_\alpha(\mathcal{P})\}$ をも必要とすることを除いて，

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} &\equiv \nabla \text{ の成分} = \nabla(\boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\beta(\mathcal{P}), \boldsymbol{e}_\gamma)\\ &\equiv \langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \nabla_{\boldsymbol{e}_\gamma}\boldsymbol{e}_\beta\rangle\\ &\simeq \begin{pmatrix}\text{“}\boldsymbol{e}_\gamma \text{ の後尾から先端へ動くときの，}\\ \text{基底ベクトル } \boldsymbol{e}_\beta \text{ の変化の } \alpha \text{ 成分”}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

∇ のこれらの成分は基底 $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ の **“接続係数”** とよばれる．それらは共変微分演算子 ∇ の “座標表示” である．

共変微分演算子 ∇ と接続係数 $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ は同じ幾何学的な動物の異なる数学的な表示を与えるだろうか？ 非常識な！ 1 つの動物が場所から場所へ走りそしてほえる，あるいは少なくともかむ（たとえば，1 つの場所と近傍の場所でのベクトル場間の差をとる）．他の動物は，40 個の顔を与えられており（練習問題 10.9 をみよ），1 つの場所に静かに座っている．2 つの動物がさらに異なってみえることは難しいだろう．しかしそれらは，等価原理と矛盾しないどのような世界においても同じ仕事をする．(1) それらは問題の点を通過するすべての測地線の性質を要約し，そして，そのようにしつつ，(2) それらは 2 つの近傍の事象でのベクトル場とテンソル場を比較する物理学的な手段（平行移動）を与える．

[**練習問題**]

10.1 共変微分の加法

交換子（“四辺形を閉じるもの”）は加法的である．

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}] = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] + [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}], \qquad [\boldsymbol{u}+\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] + [\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}]$$

ことを示せ．この結果，加法の条件 $\nabla_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} + \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}$，および共変微分の対称性，$\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} - \nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ を用いて，

$$\nabla_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v} = \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} + \nabla_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}$$

を証明せよ．

10.2　共変微分に対する鎖則

図，および $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$ の “差をとりそして極限をとる” 定義（コラム 10.2）を用いて

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(f\boldsymbol{v}) = f\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\partial_{\boldsymbol{u}}[f] \tag{10.9}$$

を示せ．

10.3　もう 1 つの鎖則

微分の “差をとりそして極限をとる” の定義を用いて，式 (10.7) を導け．ヒント：差をとるまえに，$\boldsymbol{\sigma}[\mathcal{P}(\lambda)]$ および $\boldsymbol{v}[\mathcal{P}(\lambda)]$ を $\mathcal{P}(\lambda)$ から $\mathcal{P}(0)$ へ平行移動して戻せ．

10.4　さらにもう 1 つの鎖則

平坦な時空におけるように，曲がった時空でも

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v})\otimes\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\otimes(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}) \tag{10.10}$$

を示せ．この式の平坦な時空でのよりよく知られた，成分に基づく形を書き下ろせ．

練習問題の最初の部分への解：問題の事象 $\mathcal{P}_0$ での 1–形式 $\boldsymbol{\sigma}$ および $\boldsymbol{\rho}$ を選び，それらをベクトル $\boldsymbol{u} = d/d\lambda$ に沿って平行移動，$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\sigma} = 0$ によって延長せよ．そうすると

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})](\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{d}{d\lambda}[(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\sigma})] && \text{(テンソルに関する } \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \text{ の定義)}\\
&= \frac{d}{d\lambda}[\langle\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{v}\rangle\langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{w}\rangle] && \text{(テンソル積 “}\otimes\text{” の定義)}\\
&= \frac{d\langle\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{v}\rangle}{d\lambda}\langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{w}\rangle + \langle\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{v}\rangle\frac{d\langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{w}\rangle}{d\lambda} && \text{(微分に対する鎖則)}\\
&= \langle\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}\rangle\langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{w}\rangle + \langle\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{v}\rangle\langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}\rangle\\
& && \text{(一定の } \boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{\sigma} \text{ をもつ式 (10.7) によって)}\\
&= [(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v})\otimes\boldsymbol{w}](\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\sigma}) + [\boldsymbol{v}\otimes(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w})](\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\sigma})\\
& && \text{(テンソル積 “}\otimes\text{” の定義)}
\end{aligned}$$

10.5　もう 1 つの鎖則

練習問題 10.4 の技術に似た技術を用いて，

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\rho}\otimes\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\sigma})\otimes\boldsymbol{\rho}\otimes\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\sigma}\otimes(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\rho})\otimes\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\rho}\otimes(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}) \tag{10.11}$$

を示せ．

10.6　測地線の方程式

平行移動に対する “Schild のはしご” 構成過程（コラム 10.2 の初め）を用いて，測地線は自分自身に沿って自分自身の接線ベクトルを平行移動すること（コラム 10.2 の終わり）を示せ．

10.4　平行移動と共変微分：成分による研究

絵による方法は数学を動機づける．抽象的な方法は絵による認識を明白にする．しかし通常，複雑な計算を実際に行うためには成分による方法を用いなければならない．

成分で作業するには，1 組の基底ベクトル $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ と基底 1–形式 $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$ の双対的な組を必要とする．平坦な時空ではただ 1 つのこのような基底で十分である．すべての事象は同じ Lorentz 基底を用いることができる．曲がった時空ではそうでない！ そこでは各事象はそれ自身の接線空間をもっており，そして各接線空間はそれ自身の基底を必要とする．事象から事象へ移動するとき，すべての事象の基底を平行移動によって比較して，基底がねじれそして回転していることを知る．当然そうでなければならない．他のいかなる方法によっても時空の曲率に自分自身を適応させることはできない．1 つの曲線に沿う平行移動で比較したとき同じである，点 $\mathcal{P}_0$ および $\mathcal{P}_1$ での基底は，他の曲線に沿って比較したとき異ならなければならない（11 章 “曲率” をみよ）．

基底ベクトル $\{\boldsymbol{e}_\alpha(\mathcal{P})\}$ および形式 $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha(\mathcal{P})\}$ の “場” のねじれと回転を定量化するには，共変微分を用いる．基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\beta$ に沿うベクトル場での変化を吟味する．簡略化して次のようになる．

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{e}_\beta} \equiv \boldsymbol{\nabla}_\beta \qquad (\boldsymbol{\nabla}_\beta \text{ の定義}) \tag{10.12}$$

そしてとくにある基底ベクトルの変化率 $\boldsymbol{\nabla}_\beta \boldsymbol{e}_\alpha$ を吟味する．この変化率自身ベクトルであり，したがって基底によって展開されうる．

*22

$$\boldsymbol{\nabla}\underbrace{{}_\beta \boldsymbol{e}_\alpha} = \boldsymbol{e}_\mu \Gamma^\mu{}_{\underbrace{\alpha\beta}} \qquad (\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \text{ の定義}) \tag{10.13}$$

α と β の順序の逆転に注意せよ！

そして生ずる “**接続係数**” $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ は基底 1–形式への射影によって計算されうる．

$$\langle \boldsymbol{\omega}^\mu, \boldsymbol{\nabla}_\beta \boldsymbol{e}_\alpha \rangle = \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \tag{10.14}$$

（練習問題 10.7 をみよ，コラム 10.3 もまた．）基底 1–形式は基底ベクトル “の中へ閉じ込められる”（$\langle \boldsymbol{\omega}^\nu, \boldsymbol{e}_\alpha \rangle = \delta^\nu{}_\alpha$）から，これらの同じ接続係数 $\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}$ は 1–形式の基底が点から点へいかに変化するかを告げる．

$$\boldsymbol{\nabla}_\beta \boldsymbol{\omega}^\nu = -\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} \boldsymbol{\omega}^\alpha \tag{10.15}$$

$$\langle \boldsymbol{\nabla}_\beta \boldsymbol{\omega}^\nu, \boldsymbol{e}_\alpha \rangle = -\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} \tag{10.16}$$

（練習問題 10.8 をみよ．）

接続係数はさらに多くの役割を果たす．それらは任意のテンソル $\boldsymbol{S}$ の勾配の成分を計算することを可能にする．平坦な時空の Lorentz 系で，$\boldsymbol{\nabla S}$ の成分は基底ベクトル

*22　接続係数が定義される

$\boldsymbol{e}_\alpha = \partial\mathcal{P}/\partial x^\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ を $\boldsymbol{S}$ の成分に作用させせることによって得られる．こうして $\binom{1}{2}$ テンソル場 $\boldsymbol{S}$ に対して

$$\boldsymbol{\nabla S} \text{ は成分 } S^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} = \frac{\partial}{\partial x^\delta}[S^\alpha{}_{\beta\gamma}] \text{ をもつ}$$

ことを見出す．曲がった時空では，あるいは平坦な時空内の非 Lorentz 基底でもそうでない．そこでは基底ベクトルは回転し，ねじれ，膨張し，そして収縮する．したがって $\boldsymbol{S}$ が一定（$\boldsymbol{\nabla S}=0$）であっても，ねじれた基底ベクトルに関するその成分は変化するだろう．接続係数は，適当に適用されると，このねじれと回転に対して相殺するだろう．練習問題
*23 10.10 で学ぶように，$\boldsymbol{\nabla S}$ の成分，$S^\alpha{}_{\beta\gamma;\delta}$ とよばれる．したがって

$$\boldsymbol{\nabla S} = S^\alpha{}_{\beta\gamma;\delta}\,\boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma \otimes \boldsymbol{\omega}^\delta \tag{10.17}$$

は通常の平坦な時空の方法，および各添字に（すなわち，各基底ベクトルに）適用される補正によって $\boldsymbol{S}$ の成分から計算されうる．

[“上つき” 添字を補正するときの “+”]
[添字に関する交換と和の補正]
[微分の添字]

$$S^\alpha{}_{\beta\gamma;\delta} = S^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + S^\mu{}_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha{}_{\mu\delta} - S^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - S^\alpha{}_{\beta\mu}\Gamma^\mu{}_{\gamma\delta} \tag{10.18}$$

[“下つき” 添字を補正するときの “−”]
[微分の添字]
[添字に関する交換と和の補正]

ここに

$$S^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} \equiv \boldsymbol{e}_\delta[S^\alpha{}_{\beta\gamma}] \equiv \partial_{\boldsymbol{e}_\delta} S^\alpha{}_{\beta\gamma} \tag{10.19}$$

である．式 (10.18) は複雑にみえる．しかしパターンが把握されると，それは実際非常に単純である．

$\boldsymbol{\nabla S}$ の成分に対して，特別な記号，$S^\alpha{}_{\beta\gamma;\delta}$ を用いるのとちょうど同じように，$\boldsymbol{u} = d/d\lambda$
*24 に沿う共変微分 $\boldsymbol{\nabla_u S}$ の成分に対して，特別な記号，$DS^\alpha{}_{\beta\gamma}/d\lambda$ を導入する．

$$\boldsymbol{\nabla_u S} = (DS^\alpha{}_{\beta\gamma}/d\lambda)\,\boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma, \tag{10.20}$$
$$\frac{DS^\alpha{}_{\beta\gamma}}{d\lambda} = S^\alpha{}_{\beta\gamma;\delta}u^\delta = (S^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + \text{補正項})u^\delta$$

任意の f に対して

$$f_{,\delta}u^\delta = \partial_{\boldsymbol{u}} f = df/d\lambda$$

であるから，これは

$$\frac{DS^\alpha{}_{\beta\gamma}}{d\lambda} = \frac{dS^\alpha{}_{\beta\gamma}}{d\lambda} + S^\mu{}_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}u^\delta - S^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta}u^\delta - S^\alpha{}_{\beta\mu}\Gamma^\mu{}_{\gamma\delta}u^\delta \tag{10.21}$$

---

*23　テンソル場の勾配の成分

*24　テンソル場の共変微分の成分

に帰着する．

成分による方法の力は共変微分に対する鎖則を議論するときに明白に示される．多数の抽象的な方法による鎖則 (10.2b)，(10.7)，(10.10)，(10.11) はすべて，成分に対するただ1つの規則に要約する．

*25 **勾配の作用 "$;$" は通常の計算の標準的な偏微分鎖則に従う．**たとえば

$$(fv^{\alpha})_{;\mu} = f_{;\mu}v^{\alpha} + fv^{\alpha}{}_{;\mu} \tag{10.22a}$$

↑[$= f_{,\mu}$　f は補正すべき添字をもたないから]

[これを u^{μ} で縮約すると鎖則 (10.2b) を得る]．別の例，

$$(\sigma_{\alpha}v^{\alpha})_{;\mu} = \sigma_{\alpha;\mu}v^{\alpha} + \sigma_{\alpha}v^{\alpha}{}_{;\mu} \tag{10.22b}$$

↑[$= (\sigma_{\alpha}v^{\alpha})_{,\mu}$　$\sigma_{\alpha}v^{\alpha}$ は補正すべき自由な添字をもたないから]

[これを u^{μ} で縮約すると鎖則 (10.7) を得る]．別な例，

$$(\sigma_{\alpha}\rho_{\beta}v^{\gamma})_{;\mu} = \sigma_{\alpha;\mu}\rho_{\beta}v^{\gamma} + \sigma_{\alpha}\rho_{\beta;\mu}v^{\gamma} + \sigma_{\alpha}\rho_{\beta}v^{\gamma}{}_{;\mu} \tag{10.22c}$$

[これを u^{μ} で縮約すると鎖則 (10.11) を得る]．別な例は練習問題 10.12 をみよ．

[練習問題]

10.7　接続係数の計算

$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ に対する式 (10.14) を式 (10.13) から導け．

10.8　1–形式基底に対する接続

$\boldsymbol{\nabla}_{\beta}\boldsymbol{\omega}^{\nu}$ を $\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}$ に関係づける式 (10.15) および (10.16) を，式 (10.14) から導け．ヒント：式 (10.7) を用いよ．

10.9　接続係数の対称性

時空の共変微分の対称性 (10.2a) は接続係数に関する以下の対称性の条件に同等であることを示せ．

$$\begin{aligned}(\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\text{ の非対称な部分}) &\equiv \frac{1}{2}(\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}) \\ &\equiv \Gamma^{\mu}{}_{[\alpha\beta]} = -\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{\omega}^{\mu}, \underbrace{[\boldsymbol{e}_{\alpha}, \boldsymbol{e}_{\beta}]}\rangle \equiv -\frac{1}{2}c_{\alpha\beta}{}^{\mu}\end{aligned} \tag{10.23}$$

↑[基底ベクトルの交換子]

特別な場合として，$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ は座標基底（$\boldsymbol{e}_{\alpha} = \partial/\partial x^{\alpha}$）が用いられるときは，$\alpha$ と β について対称である．座標基底ではこの対称性は各事象での独立な接続係数の数を $4\times4\times4 = 64$ から $4\times10 = 40$ に減少させる．

*25　勾配に対する鎖則

10.10　勾配の成分

勾配の成分，$S^{\alpha}{}_{\beta\gamma;\delta}$ に対する式 (10.18) を導け．ヒント：$\boldsymbol{S}$ を与えられた基底で展開し，それから任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(S^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\boldsymbol{e}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\gamma})$$

の右辺を求めよ．鎖則 [式 (10.2b) および (10.11)] を用いよ．結果を

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S} = S^{\alpha}{}_{\beta\gamma;\delta}u^{\delta}\boldsymbol{e}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\beta}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\gamma}$$

と比較して成分 $S^{\alpha}{}_{\beta\gamma;\delta}$ を読み取れ．

10.11　発散

$\boldsymbol{T}$ を $\binom{2}{0}$ テンソル場とし，平坦な時空内でと同じ操作，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{T}$ の縮約，すなわち，

$$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T})^{\alpha} = T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \tag{10.24}$$

によって 2 番目の投入口に関する発散を定義せよ．成分 $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}$ を $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}$ と $\boldsymbol{T}$ の 2 つの添字のおのおのに対する補正項で書け．[**答え：**

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}T^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\mu\beta}T^{\alpha\mu}]$$

10.12　鎖則の確認

$S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}$ は $\binom{2}{1}$ テンソル場の成分であり，そして $M_{\beta}{}^{\gamma}$ は $\binom{1}{1}$ テンソル場の成分であるとする．これらのテンソル場を縮約して，ベクトル場 $S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma}$ を得る．このベクトル場の発散に対する鎖則は

$$(S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma})_{;\alpha} = S^{\alpha\beta}{}_{\gamma;\alpha}M_{\beta}{}^{\gamma} + S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma}{}_{;\alpha}$$

となる．この鎖則の妥当性を式の両辺を方向微分（$\partial_{\boldsymbol{e}_{\alpha}}$）と接続係数による補正で表して確かめよ．ヒント：左辺は

$$(S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma})_{;\alpha} = \underbrace{(S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma})_{,\alpha}}_{\uparrow} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}(S^{\mu\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma})$$

$\left[S^{\alpha\beta}{}_{\gamma,\alpha}M_{\beta}{}^{\gamma} + S^{\alpha\beta}{}_{\gamma}M_{\beta}{}^{\gamma}{}_{,\alpha}\right.$
方向微分に対する鎖則によって$\left.\right]$

となる．右辺はさらに多くの補正項（$S^{\alpha\beta}{}_{\gamma;\alpha}$ に関して 3 個; $M_{\beta}{}^{\gamma}{}_{;\alpha}$ に関して 2 個）をもっている．しかしそれらはただ 1 個を残して互いに相殺せねばならない．

10.13　接続係数に対する変換則

$\{\boldsymbol{e}_{\alpha}\}$ および $\{\boldsymbol{e}_{\mu'}\}$ は変換則

$$\boldsymbol{e}_{\mu'}(\mathcal{P}) = L^{\alpha}{}_{\mu'}(\mathcal{P})\boldsymbol{e}_{\alpha}(\mathcal{P}) \tag{10.25}$$

によって関係する，2 つの異なる基底ベクトルの場とする．対応する接続係数は

$$\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'} = \underbrace{L^{\alpha'}{}_{\rho} L^{\mu}{}_{\beta'} L^{\nu}{}_{\gamma'} \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}}_{\text{テンソルの成分に対する標準的な変換則}} + L^{\alpha'}{}_{\mu} L^{\mu}{}_{\beta',\gamma'} \tag{10.26}$$

10.14 平坦な 2 次元空間における極座標

1 枚の紙の上に (r, ϕ) 極座標系を描く．近傍の点で，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_{\hat{r}} = \partial/\partial r$ および $\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}} \equiv r^{-1}\partial/\partial\phi$ を描け．(a) この図と，平行移動の Euclid 的バージョンを用いて，関係式

$$\nabla_{\hat{r}}\boldsymbol{e}_{\hat{r}} = 0, \qquad \nabla_{\hat{r}}\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}} = 0, \qquad \nabla_{\hat{\phi}}\boldsymbol{e}_{\hat{r}} = r^{-1}\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}, \qquad \nabla_{\hat{\phi}}\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}} = -r^{-1}\boldsymbol{e}_{\hat{r}}$$

を正当化せよ．(b) これらの関係式から接続係数を書き下ろせ．(c) $\boldsymbol{A} = A^{\hat{r}}\boldsymbol{e}_{\hat{r}} + A^{\hat{\phi}}\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}$ はベクトル場とする．その発散，$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = A^{\hat{\alpha}}{}_{;\hat{\alpha}} = A^{\hat{\alpha}}{}_{,\hat{\alpha}} + \Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\mu}\hat{\alpha}}A^{\hat{\mu}}$ は，公式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial A^{\hat{\phi}}}{\partial\phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rA^{\hat{r}})}{\partial r}$$

（それはたいていの読者によく知られているはずである）を用いて計算することができる．

10.5 測地線の方程式

測地線，すなわち自由落下粒子のパラメータ化された経路は本章の出発点であった．そ
*26 れから平行移動が構成された（コラム 10.2，Schild のはしご）．そして平行移動は今度は共変微分とその接続係数を生み出した．共変微分が与えられると，測地線を取り戻した．測地線はその接線ベクトル，$\boldsymbol{u} = d\mathcal{P}/d\lambda$，が $\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} = 0$（$\boldsymbol{u}$ は自分自身に沿って平行移動される）を満たすような曲線であった．

*27 座標系 $\{x^\alpha(\mathcal{P})\}$ が与えられているとする．それは基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ を各事象での接線空間に誘導する．この "座標基底" に対する接続係数 $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ が与えられるとする．そうすると **"測地線の式"** $\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} = 0$ の成分による形は測地線 $x^\alpha(\lambda)$ に対する微分方程式になる．

(1) $\boldsymbol{u} = \dfrac{d}{d\lambda} = \dfrac{dx^\alpha}{d\lambda}\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad\Longrightarrow\quad$ $\boldsymbol{u}$ の成分は $u^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{d\lambda}$ である

(2) そうすると $\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} = 0$ の成分は

$$\begin{aligned} 0 = u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta &= (u^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}u^\gamma)u^\beta \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\right)\frac{dx^\beta}{d\lambda} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}\frac{dx^\gamma}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} \end{aligned}$$

であり，微分方程式

---

*26 測地線の方程式：抽象的な形

*27 成分による形

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}\frac{dx^\gamma}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \tag{10.27}$$

に帰着する．

*28 測地線の方程式のこの成分による形は，測地線の知識から平行移動の法則を構成するための解析的な方法（Schild のはしごの“翻訳”）を与える．事象 $\mathcal{P}_0$ をとり，その近傍に座標系を設定する．多くの時計を所持した粒子が $\mathcal{P}_0$ を（あるいは任意に近くを）通過するのを見張る．各粒子に対して $\mathcal{P}_0$ での $d^2x^\alpha/d\lambda^2$ および $dx^\alpha/d\lambda$ の値を読み取る．多くの粒子に対するすべてのデータを式 (10.27) に挿入し，接続係数に対して解く．$\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}$ の対称部分のみがそれによって得られることを邪魔されないようにする．非対称な部分，$\Gamma^\alpha{}_{[\gamma\beta]}$ は，どんな座標系でも恒等的にゼロになる！（練習問題 10.9 をみよ．）$\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}$ を知って，それらを任意の求めるベクトルを $\mathcal{P}_0$ を通る任意の求める曲線に沿って平行移動するために用いよ．

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} = 0 \iff \frac{dv^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}v^\gamma\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \tag{10.28}$$

[練習問題]

10.15　平行移動の法則の成分

式 (10.28) はベクトル $\boldsymbol{v}$ を接線ベクトル $\boldsymbol{u} = d\mathcal{P}/d\lambda$ をもつ曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ に沿って平行移動することに対する法則の成分による形であることを示せ．

10.16　極座標についての測地線

1 枚の平坦な紙の上の直交座標で，Euclid の直線（測地線）は $d^2x/d\lambda^2 = d^2y/d\lambda^2 = 0$ を満たす．この測地線の方程式を極座標 $(x = r\cos\phi, y = r\sin\phi)$ に変換せよ．そして式 (10.27) との比較によって生ずる接続係数を読み取れ．これらは座標基底 $(\partial/\partial r, \partial/\partial\phi)$ に対する接続係数である．それらから基底

$$\boldsymbol{e}_{\hat{r}} = \frac{\partial}{\partial r}, \qquad \boldsymbol{e}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

に対する接続係数を計算せよ．答えは練習問題 10.14(b) 項の答えと一致するはずである．ヒント：

$$\nabla_{\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}}\boldsymbol{e}_{\hat{r}} = \nabla_{(1/r)(\partial/\partial\phi)}(\partial/\partial r) = \frac{1}{r}\nabla_{(\partial/\partial\phi)}(\partial/\partial r)$$

のような関係を用いよ．

10.17　回転群：測地線と接続係数

[練習問題 9.13 および 9.14 の継続] 回転群を議論するときには，回転行列が作用する **Euclid 空間**（座標 x，y，z，基底ベクトル $\partial/\partial x$，$\partial/\partial y$，$\partial/\partial z$）と，点 $\mathcal{P}$ を回転行列としてもつ**群多様体** $SO(3)$（座標 ψ，θ，ϕ，座標基底 $\partial/\partial\psi$，$\partial/\partial\theta$，$\partial/\partial\phi$，“生成子” の基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$）との間に明白な区別をしなければならない．

*28　測地線の知識から平行移動の法則を構成する方法

(a) ベクトル

$$\boldsymbol{n} = n^x \partial/\partial x + n^y \partial/\partial y + n^z \partial/\partial z$$

を Euclid 空間内にとれ.

$$\mathcal{R}_{\boldsymbol{n}}(t) \equiv \exp[(n^x \mathcal{K}_1 + n^y \mathcal{K}_2 + n^z \mathcal{K}_3)t] \tag{10.29}$$

は，Euclid 空間の軸を角度

$$t|\boldsymbol{n}| = t[(n^x)^2 + (n^y)^2 + (n^z)^2]^{1/2}$$

だけ方向 $\boldsymbol{n}$ の周りに回転する回転行列であることを示せ（$\mathcal{K}_j$ は練習問題 9.13 で定義された行列である）.

(b) 群多様体 $SO(3)$ で，点（回転行列）$\mathcal{P}$ をとり，そして $\mathcal{P}$ での接線ベクトル $\boldsymbol{u} = u^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$ をとる．$\boldsymbol{u}$ は，$\boldsymbol{u}$ が $SO(3)$ でもつのと同じ成分をもつ，Euclid 空間内のベクトルとする.

$$\boldsymbol{u} = u^1 \boldsymbol{e}_1 + u^2 \boldsymbol{e}_2 + u^3 \boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{u} = u^1 \partial/\partial x + u^2 \partial/\partial y + u^3 \partial/\partial z \tag{10.30}$$

$\boldsymbol{u}$ は曲線

$$\mathcal{C}(t) = \mathcal{R}_{\boldsymbol{u}}(t)\mathcal{P} \tag{10.31}$$

への（$t = 0$ での）接線ベクトルであることを示せ.

任意の接線ベクトル $\boldsymbol{u} = (d\mathcal{C}/dt)_{t=0}$ をもち，任意点 $\mathcal{P}$ を通る曲線 $\mathcal{C}(t)$ は非常に特殊な曲線である．その上のすべての点は $\mathcal{P}$ と 1 つの同じ方向 $\boldsymbol{u}$ 周りの回転 $\mathcal{R}_{\boldsymbol{u}}(t)$ だけ異なる．“初期条件”$\{\mathcal{P}, \boldsymbol{u}\}$ をもつ $SO(3)$ 内の他の曲線はこのような美しい単純さをもたない．したがっておのおののこのような $\mathcal{C}(t)$ は群多様体 $SO(3)$ の測地線であると定めることは自然である．この命令は $SO(3)$ に新しい幾何学的な構造を加える．それは $SO(3)$ を微分可能な多様体からより特別なあるもの，**アフィン多様体**に転換する.

任意の多様体内の任意に選ばれた曲線群は測地線となるように定められ**うる**という保証はない．たいていの曲線群は単純に測地線としての関数に対する正しい幾何学的な性質を有しない．多くは基本的な条件 (10.2) の 1 つあるいはそれ以上を破るような共変微分になるだろう．測地線の与えられた選択が可能であるかどうかを知るには，選択された測地線に対応する接続係数 $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$（ある与えられた基底に対する）を導くよう試みることができる．もし導出が成功すれば，測地線の選択は可能なものであった．もし導出が矛盾を生み出すならば，選択された曲線群は測地線としての関数に対する間違った幾何学的な性質をもつ.

(c) 生成子の基底 $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ に対して，$SO(3)$ の選択された測地線，$\mathcal{C}(t) = \mathcal{R}_{\boldsymbol{u}}(t)\mathcal{P}$ に対応する接続係数を導け．**ヒント**：与えられた測地線に対する接線 $\boldsymbol{u} = d\mathcal{C}/dt$ の成分 $u^\alpha = \langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{u} \rangle$ は測地線に沿う位置 $\mathcal{C}(t)$ によらないことを示せ．それから基底 $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ について展開された，測地線の方程式 $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u} = 0$ を用いて接続の対称部分 $\Gamma^\alpha{}_{(\beta\gamma)}$ を計算せよ．最後に式 (10.23) を用いて $\Gamma^\alpha{}_{[\beta\gamma]}$ を計算せよ．[**答え**：

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \tag{10.32}$$

ここに $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ は $\epsilon_{123} = +1$ をもつ完全に反対称な記号である．この答えは $SO(3)$ での位置 $\mathcal{P}$ によらない!]

11章
測地線の逸脱と時空の曲率

[本章は完全にトラック–2である．9および10章は11章に対して必要な準備である．それは (1) 12および13章（Newton的な重力，Riemann的な幾何学），(2) 14章の後半（曲率の計算），そして (3) 15章の詳細であるが，主旨でないこと（Bianchiの恒等式）に対する準備として必要となるだろう.]

11.1　ついに曲率！

*1　時空の曲率は1つの測地線の近傍の測地線からの逸脱（ずれ）（試験粒子の相対的な加速度）によって，重力として現れる．

時空の測地線がわかっているとする．そうすると共変微分 $\boldsymbol{\nabla}$ とその接続係数 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ もまたわかっている．この知識から，いかにして測地線のずれおよび時空の曲率を定義し，計算し，そして理解するか？　答えは本章で明らかになり，そしてコラム11.1で要約される．答えを明らかにするには，(1) 1つの測地線の他の測地線からのずれを測定し，“相対加速度ベクトル”$\boldsymbol{\nabla_u \nabla_u n}$ を定義する（11.2節），(2) 測地線のずれを生み出す“Riemann曲率テンソル”に対する $\boldsymbol{\nabla}$ あるいは $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ による表現を導く（11.3節），(3) 閉じた回路の周りを平行移動されるベクトルに変化を生み出しているRiemann曲率の働きをみる（11.4節），(4) Riemann曲率をみて時空が平坦であるかどうかをテストする（11.5節），そして (5) Riemann曲率テンソルに特殊な方法で結びついている特殊な座標系，“Riemann規準座標”を構成する（11.6節），ということをしなければならない.

11.2　近傍の測地線の相対加速度

*2　1群の測地線に注目する（図11.1）．1個の測地線が他の測地線から“選択子パラメー
*3　タ”n の値によって区別されるとする．この群は測地線 $n = 0, 1, 2, \cdots$ のみならず n のすべての中間の値に対する測地線をも含む．代表的な測地線上の代表点 $\mathcal{P}$ は連続的で2階微
*4　分可能な，選択子パラメータ n とアフィンパラメータ λ の関数であるだろう．

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\lambda, n) \tag{11.1}$$

*1　章の概観
*2　1群の測地線の幾何学
*3　選択子パラメータ
*4　アフィンパラメータ

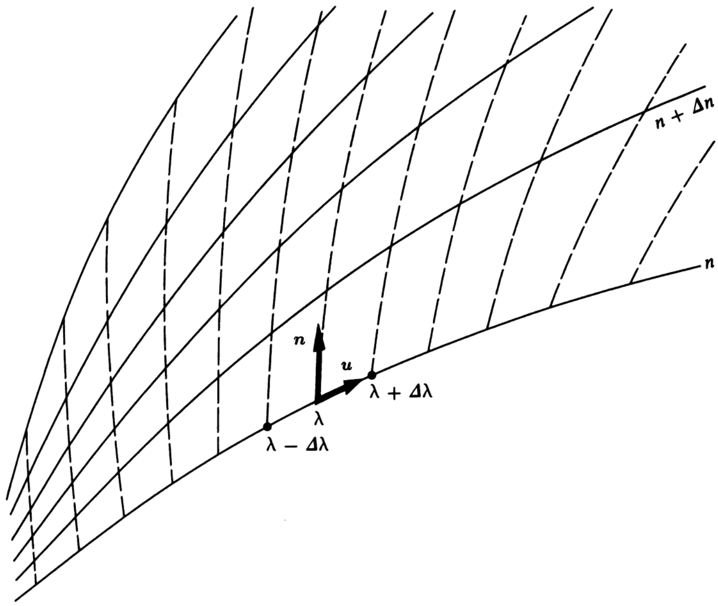


図 **11.1**　測地線の 1–パラメータ群．"選択子パラメータ"n はどの測地線かを示す．アフィンパラメータ λ は与えられた測地線上のどこかを示す．図に示されている 2 個の接線ベクトルは $\boldsymbol{u} = \partial/\partial\lambda$ (Cartan : $\partial\mathcal{P}/\partial\lambda$) および $\boldsymbol{n} = \partial/\partial n$ (Cartan : $\partial\mathcal{P}/\partial n$) である．

コラム 11.1　測地線のずれと Riemann 曲率の要約

"測地線の間隔"$\boldsymbol{n}$ は，基準の測地線上の点から，アフィンパラメータ λ の同じ値で特徴づけられる近傍の測地線上の点への変位（接線ベクトル）である．測地線の間隔は λ について（すなわち，接線ベクトル $\boldsymbol{u} = d/d\lambda$ に沿って），**測地線のずれの方程式**

$$\boldsymbol{\nabla_u \nabla_u n} + \boldsymbol{Riemann}(\cdots, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}) = 0 \tag{1}$$

で与えられる割合で変化する（2 階微分方程式, 1.6 および 1.7 節をみよ, 図 1.10, 1.11, 1.12 を参照せよ）．

Riemann テンソルの成分を用いると駆動力（"潮汐重力"）は

$$\boldsymbol{Riemann}(\cdots, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{e}_\alpha R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} u^\beta n^\gamma u^\delta \tag{2}$$

である．

Riemann 曲率テンソルの座標系での成分は接続係数を用いて公式

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} \tag{3}$$

によって与えられる．

この曲率テンソルは "潮汐重力" の概念を定量化するだけでなく，Einstein の法則

（それによって“物質は時空がいかに曲がっているかを述べる”）にも入ってくる．その法則は後の章で研究されるが，これは与えられた座標系で以下のような演算子的な，計算の形式をとる．

(a) 計量係数 $g_{\mu\nu}$ の時間についての力学的な発展に対する試みの公式を書き下ろす．

(b) 接続係数を

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}\Gamma_{\beta\mu\nu} \tag{4}$$

$$\Gamma_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}\right) \tag{5}$$

から計算せよ（13 章で導かれている）．

(c) Riemann 曲率テンソルを式 (3) から計算せよ．

(d) Einstein 曲率テンソルを

$$G_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\sigma\tau}R^{\alpha}{}_{\sigma\alpha\tau} \tag{6}$$

から計算せよ（幾何学的な意味は 15 章にある）．

(e) Einstein の方程式（17 章）

$$G_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(空の空間)},$$

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \qquad \text{(質量–エネルギーが存在するとき)}$$

に挿入せよ．

(f) 幾何学の力学的な発展に対する試みの公式が正しかったかどうかをテストせよ，もし正しくなかったら，試みの公式が正しくなるように変えよ．

*5　接線ベクトル

$$\boldsymbol{u} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda} \qquad \text{(Cartan の記号)}$$

あるいは

$$\boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \qquad \text{(本書の記号)} \tag{11.2}$$

は以下の意味で任意の与えられた測地線に沿って一定である．任意点でのベクトル $\boldsymbol{u}$ は，測地線に沿って自分自身に平行に移動されると，第 2 の点にすでに存在する $\boldsymbol{u}$ と方向および長さについて一致してこの点に達する．

*6　**“分離ベクトル”**

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial n} \qquad \text{(Cartan の記号)}$$

あるいは

---

*5　接線ベクトル

*6　分離ベクトル

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial}{\partial n} \qquad \text{(本書の記号)} \tag{11.3}$$

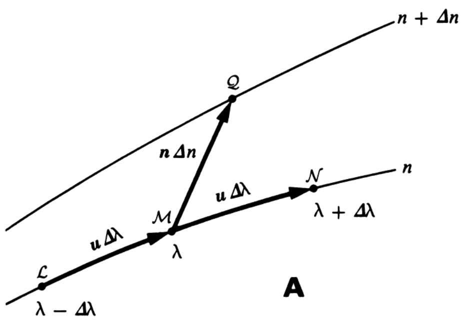
は，基準の測地線とみなされる測地線 n と代表的な近傍の測地線 $n + \Delta n$（小さい Δn に対して）との間の隔たりを測定する．それは，アフィンパラメータ λ の固定された値のもとで，1 つの測地線から他の測地線へ注意を移すことによってもたらされる

$$(\Delta n)\boldsymbol{n} = \begin{Bmatrix} \Delta n \dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial n} \\ \Delta n \dfrac{\partial}{\partial n} \end{Bmatrix} \text{は} \begin{Bmatrix} \text{位置} \\ \text{任意の関数} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{の変化を} \\ \text{測定する} \end{matrix} \tag{11.4}$$

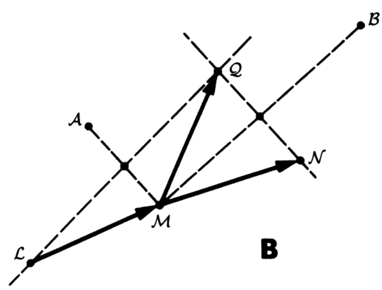
を意味する．このベクトルはコラム 11.2 の最初の図での矢 $\mathcal{MQ}$ によって表される．

コラム 11.2　矢として表された測地線のずれ

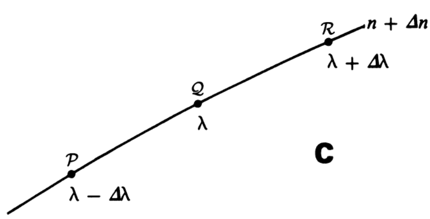
“基準の測地線” n. 間隔ベクトル $\boldsymbol{n}\Delta n = \mathcal{MQ}$ はその上の点 $\mathcal{M}$ から，近傍の “試験測地線” $n + \Delta n$ 上の同じアフィンパラメータの値 λ をもつ点 $\mathcal{Q}$ へ達する（時間的な量）.



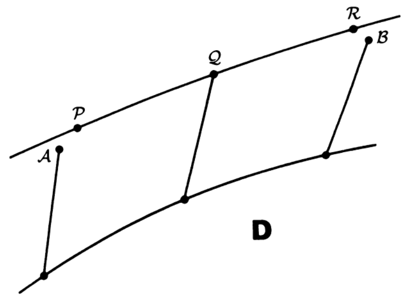
$\mathcal{MQ}$ の “Schild のはしご構成”（コラム 10.2）による $\mathcal{NB}$ および $\mathcal{LA}$ への平行移動．もし試験測地線 $n + \Delta n$ が基準の測地線 n から一定の間隔を保持したとすれば，その追跡点はアフィンパラメータの値 $(\lambda - \Delta\lambda)$ で $\mathcal{A}$ に，そして $(\lambda + \Delta\lambda)$ で $\mathcal{B}$ に到達しただろう．



時間的なアフィンパラメータの値 $(\lambda - \Delta\lambda)$, λ, および $(\lambda + \Delta\lambda)$ での試験測地線の追跡点の実際の位置.

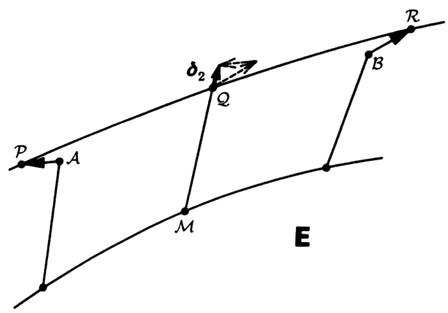


試験測地線上の追跡点の実際のコースと“正準コース”との間の対決．基準測地線に沿って動く追跡点から一定の間隔を保持するために追跡点がとらねばならなかったコース．



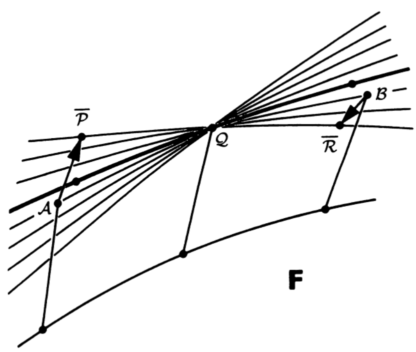
D

アフィンパラメータのスケールについての一様な伸びを除いた，前と同じ試験測地線．測地線の実際のコースの正準コース ($\mathcal{AQB}$) からのずれのどのような度量も，有用であるためには，この伸びによらないはずである．したがって，測地線のずれの度量として，ベクトル $\mathcal{BR}$ だけでなく，またベクトル $\mathcal{AP}$ でなく，伸びによらない組合せ $\boldsymbol{\delta}_2=(\mathcal{BR})+(\mathcal{AP})$ をとる．ここで加法の符号は 2 つのベクトルは，加えられる前に，共通点 (図の $\mathcal{Q}$, 微分計算の極限 $\Delta n\longrightarrow 0$, $\Delta\lambda\longrightarrow 0$ での $\mathcal{M}$) に自分自身に対して平行移動されていることを意味する．



E

D の試験測地線が $\mathcal{Q}$ を通って重複選択可能なコース (左からの発散あるいは右への収束の異なる度合いによって特徴づけられる測地線の群)．傾斜は $\mathcal{AP}$ ($\mathcal{A}\bar{\mathcal{P}}$ へ) および $\mathcal{BR}$ ($\mathcal{B}\bar{\mathcal{R}}$ へ) の値をそれぞれ変えるが，和 $\boldsymbol{\delta}_2=(\mathcal{BR})+(\mathcal{AP})$ の値を変えない (“てこの原理”)．



F

矢 $\mathcal{BR}$ は $\Delta\lambda$ について 1 次であり，また Δn について 1 次である．$\mathcal{AP}$ についても同様である．したがって組合せ $\boldsymbol{\delta}_2$ は $\Delta\lambda$ について 2 次であり，Δn について 1 次である．矢 $\boldsymbol{\delta}_2/(\Delta\lambda)^2(\Delta n)$ は，

網の大きさ (究極的に 0 になる) は相殺する，
試験測地線のパラメータ化は相殺する，
試験測地線の傾斜は相殺する，

という意味で，**求めるべき測地線のずれの度量**であると結論する．

この矢に“**相対加速度ベクトル**”という名前を与える．そしてそれをより詳しく吟味する（コラム 11.3）ことによって，それに対する公式

$$\boldsymbol{\delta}_2/(\Delta\lambda)^2(\Delta n) = \boldsymbol{\nabla_u \nabla_u n}$$

を見出す．

コラム 11.2 は測地線のずれについて話すことは何を意味するかを例示している．間隔 $\boldsymbol{n}\Delta n = \mathcal{MQ}$ を基準の測地線に沿って自分自身に平行に移動する．このベクトルの先端は，近傍の追跡点が基準の追跡点から一定の間隔を保つべきであるとすれば，たどらねばならないだろう標準的なコースを描く．試験測地線の実際のコースはこの“標準的な”コースからずれる．ずれ，すなわちベクトル（コラム 11.2 の $\mathcal{AP}$）はアフィンパラメータとともに変化する（$\mathcal{A}$ で $\mathcal{AP}$，$\mathcal{Q}$ で 0, $\mathcal{B}$ で $\mathcal{BR}$）．このベクトルのアフィンパラメータについての 1 階微分は試験測地線に沿うパラメータ化のスケールと，試験測地線の勾配に敏感である（コラム 11.2F）．2 階微分はそうでない．それは基準の測地線の接線ベクトル $\boldsymbol{u}$ と，間隔ベクトル $\boldsymbol{n}\Delta n$ に依存する．ずれのこの 2 階微分を Δn で割り，それに名前“**相対加速度ベクトル**”を与えよ．それに対する単純な公式
*7

$$(\text{相対加速度ベクトル}) = \boldsymbol{\nabla_u \nabla_u n} \tag{11.5}$$

を見出せ（コラム 11.3）．

11.3　潮汐重力と Riemann 曲率テンソル

今定義された“相対加速度”とともに，それを生み出す“潮汐重力”（すなわち，“時空の曲率”）に向かう．潮汐力の Newton 的解析（コラム 11.4 の左半分）を用いて幾何学的な解析（同じコラムの右半分）を動機づける．それによって注目すべき式

$$\underbrace{\boldsymbol{\nabla_u \nabla_u n}}_{\text{“相対加速度”}} + \underbrace{[\boldsymbol{\nabla_n}, \boldsymbol{\nabla_u}]\boldsymbol{u}}_{\text{“潮汐を生み出す重力”}} = 0 \tag{11.6}$$
*8

に到達する．

この式は一見馬鹿げているようにみえるから，注目すべきである．項 $[\boldsymbol{\nabla_n}, \boldsymbol{\nabla_u}]\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}$ の 2 階微分と，$\boldsymbol{\nabla_n}$ の 1 階微分を含んでいる．

$$[\boldsymbol{\nabla_n}, \boldsymbol{\nabla_u}]\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{\nabla_n \nabla_u u} - \boldsymbol{\nabla_u \nabla_n u} \tag{11.7}$$

それは，こうして，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{n}$ が点から点へいかに変化するかに依存しなければならない．しかしそれが生み出す相対加速度，$\boldsymbol{\nabla_u \nabla_u n}$ は，基準点での $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{n}$ の値のみに依存

*7　相対加速度ベクトル
*8　交換子で表された，潮汐を生み出す重力

コラム 11.3 測地線のずれ：2 階共変微分と関連した矢

コラム 11.2 での矢 $\boldsymbol{\delta}_2$ は，試験測地線 $n+\Delta n$ の基準線としての“正準コース”$\mathcal{AQB}$ からの隔たりの変化率でなく，2 階微分

$$\left(\lambda+\frac{1}{2}\Delta\lambda\ \text{での 1 階微分}\right)=\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n}=\frac{\mathcal{NR}-\mathcal{NB}}{\Delta\lambda\Delta n}=\frac{\mathcal{BR}}{\Delta\lambda\Delta n},$$

$$\left(\lambda-\frac{1}{2}\Delta\lambda\ \text{での 1 階微分}\right)=\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n}=\frac{\mathcal{LA}-\mathcal{LP}}{\Delta\lambda\Delta n}=\frac{-\mathcal{AP}}{\Delta\lambda\Delta n}$$

を測定する．共通の位置 λ に移し，差をとり，それを $\Delta\lambda$ で割ってベクトル $\boldsymbol{u}$ についての 2 階共変微分を得る．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n}&=\frac{(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n})_{\lambda+\frac{1}{2}\Delta\lambda}-(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n})_{\lambda-\frac{1}{2}\Delta\lambda}}{\Delta\lambda}\\&=\frac{(\mathcal{BR}+\mathcal{AP})_{\substack{\text{共通の位置へ}\\ \text{移動されたベクトル}}}}{(\Delta\lambda)^2\Delta n}=\frac{\boldsymbol{\delta}_2}{(\Delta\lambda)^2\Delta n}\\&=\text{近傍の測地線に対する“相対加速度ベクトル”}\end{aligned}$$

し，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{n}$ がいかに変化するかに依存しないことが知られている（コラム 11.2F をみよ）．いかにしてこれは可能なのだろうか？

ともかくもすべての微分は潮汐力の量 $[\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}]\boldsymbol{u}$ から消えねばならない．$[\boldsymbol{\nabla}\cdots,\boldsymbol{\nabla}\cdots]\cdots$ を 3 個の投入口をもつ純粋に局所的で，代数的な機械，その出力はベクトルであるもの，とみなせなければならない．もしそれが純粋に局所的であり微分でないならば，それは線形であっても（$\boldsymbol{\nabla}$ の加法性からわかるように），したがってそれはテンソルでなければならない．このテンソルに名前 ***Riemann*** を与える．そして 1–形式を入力するために 4 番目の投入口を与える．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Riemann}(\cdots,\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})&\equiv[\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{A}},\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{B}}]\boldsymbol{C},\\ \boldsymbol{Riemann}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})&\equiv\langle\boldsymbol{\sigma},[\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{A}},\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{B}}]\boldsymbol{C}\rangle\end{aligned}$$

これは ***Riemann*** の試みの定義にすぎない．それを受け入れる前に，それが，実際，テンソルであることを確かめるべきである．それは本当に評価されるべき点で $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ の値のみに依存し，これらの値がそこでいかに変化しているかに依存しないか？ 答え（コラム 11.5 で導かれている）は“ほとんど”である．それは試験に失敗するが，わずかな修正
*9 で合格するだろう．修正は交換子 $[\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{A}},\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{B}}]$ を“**曲率演算子**”

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\equiv[\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{A}},\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{B}}]-\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]}\qquad(11.8)$$

*9 曲率演算子が定義される

で置き換えることである．ここに $\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]}$ はベクトル $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$（$\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{B}$ の交換子）に沿う微分である（測地線のずれ問題の場 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{n}$ および $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{u}$ に対しては $\mathcal{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\equiv$
*10 $[\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{A}},\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{B}}]$，なぜなら $[\boldsymbol{n},\boldsymbol{u}]=0$ であるから）．そうすると ***Riemann*** **曲率テンソルの修正された，受容可能な定義は**

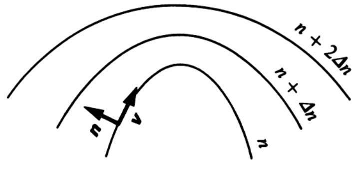
$$\begin{aligned}\boldsymbol{Riemann}(\cdots,\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})&\equiv\mathcal{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\boldsymbol{C},\\ \boldsymbol{Riemann}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})&\equiv\langle\boldsymbol{\sigma},\mathcal{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}\rangle\end{aligned}\tag{11.9}$$

である．***Riemann*** をこのように定義し，そのテンソル的な性質（練習問題 11.2）を確かめることは，けっして曲率についてのすべてを教えてくれない．曲率を理解するには，***Riemann*** をすべての観点からくわしく調べなければならない．それが本章の残りの仕事である．

コラム 11.4　試験粒子の相対加速度—Newton 的解析にならって形成された幾何学的な解析

Newton 的解析

1. 通常の，3 次元空間での 1 群の試験粒子の軌道 $x^j(t,n)$ を考える．“t” は粒子の時計，あるいは任意の時計で測定された時間である．“n” は “選択子パラメータ” である．



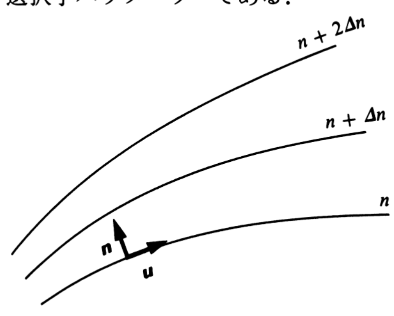
2. 各軌道に対する運動方程式

$$\left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial t^2}\right)_n+\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}=0$$

ここに Φ は Newton 的ポテンシャルである．

幾何学的な解析

1. 時空内に 1 群の試験粒子の軌道（測地線），$\mathcal{P}(\lambda,n)$ を考える．“λ” はアフィンパラメータ，すなわち，粒子の時計によって測定される時間である．“n” は “選択子パラメータ” である．



2. 各軌道に対する測地線の方程式

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}=0$$

[1 次の方程式のようにみえる．実際は 2 次である．なぜなら “$\boldsymbol{u}$” は微分されるわけであるが，それ自身微分，$\boldsymbol{u}=(\partial\mathcal{P}/\partial\lambda)_n$ である．]

*10　Riemann 曲率テンソルが定義される

3. 近傍の軌跡，n および $n+\Delta n$ に対する運動方程式間の差をとり，そして $\Delta n\to 0$ としての極限をとる，すなわち，微分

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_t\left[\left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial t^2}\right)_n+\frac{\partial \Phi}{\partial x^j}\right]=0$$

をとる．

4. $\partial/\partial n$ が第 2 項に作用するとき，それを

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_t=\left(\frac{\partial x^k}{\partial n}\right)_t\frac{\partial}{\partial x^k}=n^k\frac{\partial}{\partial x^k}$$

と書き直す．それによって

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_n\left(\frac{\partial x^j}{\partial t}\right)_n+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j\partial x^k}n^k=0$$

を得る．

5. 相対加速度に対する方程式を得るには，$(\partial/\partial n)_t$ を $(\partial/\partial t)_n$ 項の両方を通って動かす（偏微分は交換するから許される!)．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_n\left(\frac{\partial x^j}{\partial n}\right)_t+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j\partial x^k}n^k=0$$

これは以下に同等である．

$$\left(\frac{\partial^2 n^j}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j\partial x^k}n^k=0$$

［“相対加速度”］↑（第 1 項）　↑［“潮汐を生み出す重力”］（第 2 項）

3. 近傍の測地線 n および $n+\Delta n$ に対する測地線の方程式間の差をとり，そして $\Delta n\to 0$ としての極限をとる，すなわち，共変微分

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}[\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}]=0$$

をとる．

4. 2 番目の項は存在しないので次式が残る．

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}[\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}]=0$$

5. 相対加速度に対する式，$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n}$ を得るには，$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}$ を $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}$ および $\boldsymbol{u}=\partial\mathcal{P}/\partial\lambda$ の $\partial/\partial\lambda$ を通って動かす．

a. **第 1 段階**：$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}=0$ で，$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}$ を $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}$ を通って動かす．結果は次式．

$$(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}+\underbrace{[\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}]}_{\uparrow})\boldsymbol{u}=0$$

［交換子；　$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\neq\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}$ の可能性に対する保護として含まれねばならない］

b. **第 2 段階**：$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}$ を $\boldsymbol{u}=\partial\mathcal{P}/\partial\lambda$ の $\partial/\partial\lambda$ を通って動かす．すなわち，次式を書く．

$$\nabla_n \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda} = \nabla_n u = \nabla_u n = \nabla_u \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial n}$$

[$\boldsymbol{u}$ の定義]　　[$\boldsymbol{n}$ の定義]

[なぜか？ 共変微分の対称性が
$\nabla_n u - \nabla_u n = [n, u]$
$= \left[\frac{\partial}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right] = \frac{\partial^2}{\partial n \partial \lambda} - \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial n}$
$= 0$ を示すから．]

c. 結果：

$$\nabla_u \nabla_u n + [\nabla_n, \nabla_u] u = 0$$

[“相対加速度”]　[“潮汐を生み出す重力”，すなわち，“時空の曲率”]

コラム 11.5　Riemann 曲率テンソル

A. 潮汐重力によって動機づけられた*Riemann*の定義

1. 潮汐力（時空の曲率）は

$$\nabla_u \nabla_u n + [\nabla_n, \nabla_u] u = 0 \tag{1}$$

で与えられる試験粒子（測地線）の相対加速度を生み出す．

2. これは定義

$$\textit{Riemann}(\cdots, C, A, B) = [\nabla_A, \nabla_B] C \tag{2}$$

[1–形式を挿入するための空の投入口]

を動機づける．

B. この定義の失敗

1. $\textit{Riemann}(\cdots, C, A, B)$ は，A, B, C が点から点へいかに変化するかによらない，線形機械である場合に限り定義を受容できる．

2. 部分的な検査：事象 $\mathcal{P}_0$ で，C そのものは変えずに，C の変化を変える．

$$C_{\text{新しい}}(\mathcal{P}) = f(\mathcal{P}) C_{\text{古い}}(\mathcal{P})$$
$$\uparrow [f(\mathcal{P}_0) = 1 \text{ を除いて任意の関数}]$$

3. これは $[\boldsymbol{\nabla_A}, \boldsymbol{\nabla_B}]\boldsymbol{C}$ を変えるか？ ハイ！ 練習問題 11.1 によれば

$$\{[\boldsymbol{\nabla_A}, \boldsymbol{\nabla_B}]\boldsymbol{C}_{\text{新しい}}\}_{\mathcal{P}_0\text{で}} - \{[\boldsymbol{\nabla_A}, \boldsymbol{\nabla_B}]\boldsymbol{C}_{\text{古い}}\}_{\mathcal{P}_0\text{で}} = \boldsymbol{C}_{\text{古い}} \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]} f$$

である．

C. *Riemann* の修正された定義

1. 困難をもたらす項，$\boldsymbol{C}_{\text{古い}}\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]}f$ は，それに似た“補正項”を ***Riemann*** から引くことによって，すなわち，

$$\boldsymbol{Riemann}(\cdots, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \equiv \mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{3}$$
$$\mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \equiv [\boldsymbol{\nabla_A}, \boldsymbol{\nabla_B}] - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]} \tag{4}$$

と再定義することによって処理することができる．

2. そうすると，上の計算は“修正するための関数”f によらない結果を与える．

$$\{\mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}_{\text{新しい}}\}_{\mathcal{P}_0\text{で}} = \{\mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}_{\text{古い}}\}_{\mathcal{P}_0\text{で}}$$

D. 修正された定義は潮汐重力に対する方程式と両立できるか？

1. $\boldsymbol{\nabla_u}\boldsymbol{\nabla_u}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{Riemann}(\cdots, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}) = 0$ と書きたい．

2. これは ***Riemann*** の修正された定義に対して，元の定義に対するのとちょうど同じようにうまくいく，なぜなら

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}) = [\boldsymbol{\nabla_n}, \boldsymbol{\nabla_u}] - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{n},\boldsymbol{u}]} = [\boldsymbol{\nabla_n}, \boldsymbol{\nabla_u}]$$
$$\uparrow \begin{bmatrix} = 0 \text{ なぜなら } \boldsymbol{n} = (\partial/\partial n)_\lambda \text{ および} \\ \boldsymbol{u} = (\partial/\partial\lambda)_n \text{ は交換するから} \end{bmatrix}$$

測地線のずれおよび潮汐力は $\mathcal{R}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u})$ と $[\boldsymbol{\nabla_n}, \boldsymbol{\nabla_u}]$ との間の相違，したがって ***Riemann*** の古い定義と新しい定義との間の相違を，述べることができない．

E. 修正された定義は受け入れられるか？

すなわち，$\boldsymbol{Riemann}(\cdots, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \equiv \mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ は，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ が評価されるべき点の近傍でいかに変化するかによらない出力をもつ線形機械であるか？ ハイ！（練習問題 11.2 をみよ．）

まず，Riemann 曲率テンソルについてすでに知っていることを吟味し直そう．(1) ***Riemann*** はテンソルである．定義 (11.9) に $\boldsymbol{\nabla}$ が現れるにもかかわらず，入力ベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，および $\boldsymbol{C}$ に何らの微分も実際作用しない．(2) ***Riemann*** は $\binom{1}{3}$ テンソルである．その第 1 の投入口は 1–形式を受け入れる．他の投入口は，ベクトルを受け入れる．(3) ***Riemann*** は $\boldsymbol{\nabla}$ によって，あるいは同等に時空の測地線によって，あるいは同等に時空の平行移動則によって完全に定まる．$\boldsymbol{\nabla}$ および入力のベクトルおよび 1–形式以
*11 外の何ものも ***Riemann*** の出力を定めるのに必要ない．(4) ***Riemann*** は測地線（試験粒子の軌跡）をこじあけて離れさせたりあるいは押して一緒にしたりする潮汐重力を生み出す．すなわち，それは "時空の曲率" を特徴づける．

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{Riemann}(\cdots, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}) = 0 \tag{11.10}$$

（この **"測地線のずれの方程式"** は式 (11.6)，(11.8)，および (11.9) と関係 $[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}] = 0$ から出る．）

Riemann のこれらの局面はすべて**絵で表される**（たとえば，測地線のずれ．コラム 11.2 および 11.3 をみよ），あるいは**抽象的である**［たとえば，$\boldsymbol{\nabla}$ による ***Riemann*** に対
*12 する式 (11.8) および (11.9)］．***Riemann* の成分**の局面，

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} \equiv \boldsymbol{Riemann}(\boldsymbol{\omega}^{\alpha}, \boldsymbol{e}_{\beta}, \boldsymbol{e}_{\gamma}, \boldsymbol{e}_{\delta}) \equiv \langle \boldsymbol{\omega}^{\alpha}, \mathcal{R}(\boldsymbol{e}_{\gamma}, \boldsymbol{e}_{\delta})\boldsymbol{e}_{\beta}\rangle \tag{11.11}$$

は，以下の式によって，任意の座標基底 $\{\boldsymbol{e}_{\alpha}\} = \{\partial/\partial x^{\alpha}\}$ で成り立つ $\boldsymbol{\nabla}$ の成分の局面に関係している．

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma} \tag{11.12}$$

（この表現を導き出すことについては練習問題 11.3 を，非座標基底への拡張については練習問題 11.4 をみよ．）***Riemann*** のこれらの成分は，いかなる微分演算子のしるしをどこにももたず，特徴づけられない微分をもつ定義 (11.8) よりも，より良い感覚を胃に残すだろう！

［練習問題］

11.1　$[\boldsymbol{\nabla}_{A}, \boldsymbol{\nabla}_{B}]\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{C}$ の微分に依存する

（コラム 11.5 に基づいている．）$\boldsymbol{C}_{新しい}$ および $\boldsymbol{C}_{古い}$ は

$$\boldsymbol{C}_{新しい}(\mathcal{P}) = f(\mathcal{P})\boldsymbol{C}_{古い}(\mathcal{P})$$

└[$f(\mathcal{P}_0 = 1$ を除いて，任意の関数)]

によって関係しているベクトル場であるとする．

*11　***Riemann*** で表された潮汐を生み出す重力
*12　接続係数で表された ***Riemann*** の成分

$$\{[\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{B}}]\boldsymbol{C}_{新しい}\}_{\mathcal{P}_0で} - \{[\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{B}}]\boldsymbol{C}_{古い}\}_{\mathcal{P}_0で} = \boldsymbol{C}_{古い}\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]}f$$

を示せ.

11.2　*Riemann* はテンソルであることの証明

Riemannの定義 [式 (11.8), (11.9)] からそれがテンソルであることを示せ.

ヒント：以下の手続きを用いよ.

(a) もし $f(\mathcal{P})$ が任意の関数であるならば,

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})f\boldsymbol{C} = f\mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

を示せ.

(b) 同様に

$$\mathcal{R}(f\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = f\mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \quad \text{および} \quad \mathcal{R}(\boldsymbol{A}, f\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = f\mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

を示せ.

(c) $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ は線形であることを示せ. すなわち,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{a}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} &= \mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} + \mathcal{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}, \\
\mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{C} &= \mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} + \mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{C}, \\
\mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{c}) &= \mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} + \mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{c}
\end{aligned}$$

を示せ.

(d) さて上の性質を用いて $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ のもっとも決定的な特徴を証明せよ. $\mathcal{P}_0$ で $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ を変えないまま, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{C}$ の変化（勾配）を任意の方法で修正せよ.

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &\longrightarrow \boldsymbol{A} + a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \\
\boldsymbol{B} &\longrightarrow \boldsymbol{B} + b^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \\
\boldsymbol{C} &\longrightarrow \boldsymbol{C} + c^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha
\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}&a^\alpha(\mathcal{P}), b^\alpha(\mathcal{P}), c^\alpha(\mathcal{P}) \text{ は, } \mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \\ &\text{ですべて 0 になる以外は任意である}\end{aligned}$$

この修正は $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ を $\mathcal{P}_0$ で不変にすることを示せ.

(e) これらの事実から, ***Riemann*** はテンソルであると結論せよ.

11.3　座標基底での *Riemann* の成分

座標基底での, ***Riemann*** テンソルの成分に対する式 (11.12) を導け.

[解：

$$\begin{aligned}
R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} &= \boldsymbol{Riemann}(\boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\beta, \boldsymbol{e}_\gamma, \boldsymbol{e}_\delta) && [\text{成分を計算する標準的な方法}] \\
&= \langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathcal{R}(\boldsymbol{e}_\gamma, \boldsymbol{e}_\delta)\boldsymbol{e}_\beta \rangle && [\text{定義 (11.9) によって}] \\
&= \langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, (\boldsymbol{\nabla}_\gamma \boldsymbol{\nabla}_\delta - \boldsymbol{\nabla}_\delta \boldsymbol{\nabla}_\gamma)\boldsymbol{e}_\beta \rangle && \begin{bmatrix}\text{定義 (11.8) および座標基底で} \\ \text{の } [\boldsymbol{e}_\gamma, \boldsymbol{e}_\delta] = 0 \text{ によって}\end{bmatrix} \\
&= \langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\mu \Gamma^\mu{}_{\beta\delta,\gamma} + (\boldsymbol{e}_\nu \Gamma^\nu{}_{\mu\gamma})\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \boldsymbol{e}_\mu \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma,\delta} - (\boldsymbol{e}_\nu \Gamma^\nu{}_{\mu\delta})\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} \rangle \\
&= (\Gamma^\mu{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma,\delta})\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\mu \rangle + (\Gamma^\nu{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\nu{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma})\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\nu \rangle
\end{aligned}$$

これは（$\langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{e}_\mu \rangle = \delta^\alpha{}_\mu$ を用いて）式 (11.12) に帰着する.]

11.4　非座標基底での *Riemann* の成分

式 (9.22) で定義される接続係数 $c_{\alpha\beta}{}^\gamma$ をもつ非座標基底で，***Riemann*** の成分に対する以下の式を導け.

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}c_{\gamma\delta}{}^\mu \tag{11.13}$$

11.4　閉曲線周りの平行移動

時空の曲率の効果は何であるか？ そしてそれらをいかに定量化できるか？ 1 つの効果は測地線のずれ（試験物体の相対加速度）であり，式 (11.10) によって定量化される．別
*13 な効果は，ほとんど同じくらい重要であるが，閉曲線周りの平行移動によってもたらされるベクトルの変化である．この効果はもっとも明瞭に，同じ問題，まず第 1 に曲率を動機
*14 づけた測地線のずれに現れる．相対加速度ベクトル $\boldsymbol{\nabla_u \nabla_u n}$ もまた，ベクトル $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{u}$ を辺とする曲線周りの平行移動によってもたらされるベクトル $\boldsymbol{u}$ の変化 $\delta \boldsymbol{u}$ である．

$$\boldsymbol{\nabla_u \nabla_u n} = \delta \boldsymbol{u}$$

（証明に対してはコラム 11.6 をみよ．）したがって，この特別な場合には

$$\delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{Riemann}(\cdots, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}) = 0$$

と書くことができる．

予期される一般化は明白である．辺 $\boldsymbol{u}\,\Delta a$ および $\boldsymbol{v}\,\Delta b$ をもつ閉じた四辺形をとる（図 11.2，Δa および Δb は小さいパラメータであり，議論の終わりでゼロにする）．ベクトル $\boldsymbol{A}$ をこの四辺形の周りを平行移動する．生ずる $\boldsymbol{A}$ の変化は式

*15
$$\delta \boldsymbol{A} + \boldsymbol{Riemann}(\cdots, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{u}\,\Delta a, \boldsymbol{v}\,\Delta b) = 0 \tag{11.14}$$

あるいは，同等のことであるが，

$$\delta \boldsymbol{A} + \Delta a\,\Delta b\,\mathcal{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{A} = 0 \tag{11.14$'$}$$

あるいは，より正確に，

$$\lim_{\substack{\Delta a \to 0 \\ \Delta b \to 0}} \left(\frac{\delta \boldsymbol{A}}{\Delta a\,\Delta b} \right) + \boldsymbol{Riemann}(\cdots, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 \tag{11.14$''$}$$

を満たすはずである．

---

*13　閉曲線周りの平行移動によるベクトルの変化

*14　測地線のずれに関係している

*15　変化に対する式

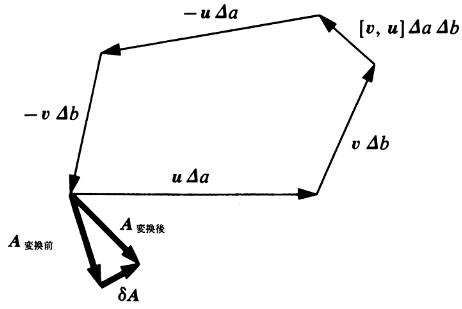


図 11.2 閉曲線周りを平行移動された結果としてのベクトル $\boldsymbol{A}$ における変化 $\delta\boldsymbol{A}$. 曲線の稜はベクトル場 $\boldsymbol{u}\,\Delta a$ および $\boldsymbol{v}\,\Delta b$, プラス "四辺形の終結線"$[\boldsymbol{v}\,\Delta b, \boldsymbol{u}\,\Delta a] = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}]\Delta a\,\Delta b$ である（コラム 9.2 をみよ）.

証明は啓蒙的である．なぜならそれは曲率演算子での補正項 $\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]}$ の幾何学的な起源を明らかにするからである．

[*16] 移動の回路（図 11.2）は 2 つの任意のベクトル場 $\boldsymbol{u}\,\Delta a$ および $\boldsymbol{v}\,\Delta b$ からつくられなければならない．しかし，これらの場だけからつくられる回路には，単純な理由により，間隙がある．$\boldsymbol{u}$ の大きさは場所から場所へ違った方法で変化する．四辺形の底辺で $\boldsymbol{v}$ の 1 つの線から他の線までよぎって到達する変位 $\boldsymbol{u}\,\Delta a$ は，四辺形の上端では接続をなしえない．同様に $\boldsymbol{u}$ を接続するためには，$\boldsymbol{v}$ は場所から場所へ違った方法で変化する．間隙を閉じて回路を完成するために，"四辺形を閉じるもの"$[\boldsymbol{v}\,\Delta b, \boldsymbol{u}\,\Delta a] = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}]\Delta a\,\Delta b$ を挿入する（このベクトルが間隙をなぜ閉じるかについてはコラム 9.2 をみよ）.

今指定されたルートで，ベクトル $\boldsymbol{A}$ はその周りを移動されなければならない．これを行う 1 つの方法，Schild のはしごの方法を何度も何度も適用することによる "幾何学的な構成" は，可能な実験を計画するための基礎である．抽象的で，座標によらない計算（現在の方策の線）を計画するには，"基準の場" を導入し，計算の終わりでそれを取り去る．**計画**：$\boldsymbol{A}$ を旅の出発点でのみ定義された局所化されたベクトルとしてでなく，ベクトル場（旅を通して定義された）として理解する．**目的**：参照の基準を与えること（原点から移動された $\boldsymbol{A}$ と，問題の場所での $\boldsymbol{A}$ との比較）．**原理**：参照の基準は最後に相殺するだろう．**手続き**：

$-\delta\boldsymbol{A} = -$ (初めに回路の出発点に局所化されていたベクトル $\boldsymbol{A}$ をとり，それをそれ自身に平行に閉回路の周りを移動する（"移動できる $\boldsymbol{A}$"）とき $\boldsymbol{A}$ に生じる正味の変化．この量は回路を 1 周するまで求められない．なぜなら途中に参照の基準があらかじめ存在しないからである．)

$= +$ (回路の各辺に対してそれぞれ解析を必要とする量．この新しい量は全領域を通してベクトル場 $\boldsymbol{A}^{(場)}$（滑らかに変化し，出発点で元の局所化された $\boldsymbol{A}$ と一致する．しかしそれ以外では任意である）を導入することによって定義される．この新しい量は，そうすると，出発点での $\boldsymbol{A}^{(場)}$（出発点での $\boldsymbol{A}^{(局所化された)}$ と同じ）$-$ 終点での（1 周後の）$\boldsymbol{A}^{(移動)}$ によって与えられる．)

---

*16 変化に対する式の導出

$$= \sum_{\substack{\text{回路}\\\text{の辺}}} \left(\begin{array}{l} \text{指定された辺に沿う移動の過程での } \boldsymbol{A}^{(\text{移動})} \text{ に相対的な，} \boldsymbol{A}^{(\text{場})} \text{ の変} \\ \text{化．任意の辺に対する値は } \boldsymbol{A}^{(\text{場})} \text{ の任意の選択に依存する，しかし} \\ \text{この任意性は回路が閉じているために最後に相殺する．} \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{l} \text{参照の基準としての，平行移動された } \boldsymbol{A}^{(\text{移動})} \text{ に相対的な } \boldsymbol{A}^{(\text{場})} \text{ の変化} \\ \text{は，図 11.2 の以下の辺に沿う寄与からつくられる．} \\ \quad \boldsymbol{v}\,\Delta b, \quad \text{（出発点から } \boldsymbol{u}\,\Delta a \text{ 変位した線上で）} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{A}^{(\text{場})} \Delta b \text{ を与える} \\ -\boldsymbol{v}\,\Delta b, \quad \text{（出発点を通る線上で）} -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{A}^{(\text{場})} \Delta b \text{ を与える} \\ -\boldsymbol{u}\,\Delta a, \quad \text{（出発点から } \boldsymbol{v}\,\Delta b \text{ 変位した線上で）} -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{A}^{(\text{場})} \Delta a \text{ を与える} \\ +\boldsymbol{u}\,\Delta a, \quad \text{（出発点を通る線上で）} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{A}^{(\text{場})} \Delta a \text{ を与える} \\ +[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}]\,\Delta a\,\Delta b, \quad \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}]} \boldsymbol{A}^{(\text{場})} \Delta a\,\Delta b \text{ を与える} \end{array} \right)$$

$$= \{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}]}\} \boldsymbol{A}^{(\text{場})} \Delta a\,\Delta b$$

$$= \boldsymbol{Riemann}(\cdots, \boldsymbol{A}^{(\text{場})}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \Delta a\,\Delta b = \mathcal{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \boldsymbol{A}^{(\text{場})} \Delta a\,\Delta b \tag{11.15}$$

収益：曲率演算子

$$\boldsymbol{Riemann}(\cdots, \cdots, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}] - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]}$$

は，ベクトル場 $\boldsymbol{A}^{(\text{場})}$ に適用されると，閉回路周りの平行移動で，局所化されたベクトル $\boldsymbol{A}^{(\text{局所化された})}$（旅の段階の間では $\boldsymbol{A}^{(\text{移動})}$ とよばれる）の変化のマイナスを与える．それは回路を回るときに $\boldsymbol{A}^{(\text{場})}$ の変化を与えない．なぜなら $\boldsymbol{A}^{(\text{場})}$ は旅の終わりで，初めの値と同じ値をもつからである．式 (11.14′) は好都合に計算された微分演算子，$\mathcal{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}] - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]}$ でその変化を表している．**パラドックス**：この演算子の作用を受けたときの量 $\boldsymbol{A}^{(\text{場})}$ の変化は望まれていないし，また求められていない．**報酬**：演算子 $\boldsymbol{Riemann}(\cdots, \cdots, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ は，$\boldsymbol{A}$ への作用の性質については明らかに微分であるが，実際は局所的である．こうして，提案されている滑らかに変化するベクトル場 $\boldsymbol{A}^{(\text{場})}$ をまったく異なるが，しかしまた滑らかに変化するベクトル場 $\boldsymbol{A}^{(\text{場, 新しい})}$ で置き換える．そうすると 2 つの場は問題の一点で同じ出力 $\boldsymbol{Riemann}(\cdots, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{A}$ を与えるために，その点でのみ一致する必要がある．これは計算された量 $\delta\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}^{(\text{場})}$ の選択によらない存在と値をもつという事実からわかる．これはまた詳細な計算（練習問題 11.2）で確かめることができる．**効力**：曲率演算子でのいくつかの微分は，$\boldsymbol{A}$ の位置に伴うあらゆる変化への対応においても相殺するけれども，それらは“位置に伴う幾何学の変化率”に直接反応する（“測地線のずれ”）．**延長**：閉曲線は四辺形である必要はない．曲率演算子はベクトルが任意の形の小さい曲線についての平行移動でいかに変化するかを告げる（コラム 11.7）．

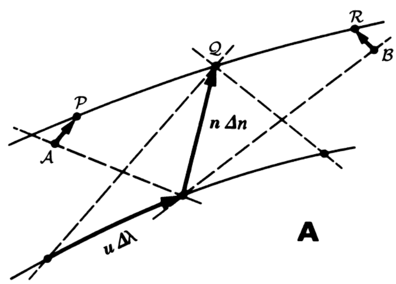
コラム 11.6 測地線のずれと閉曲線周りの平行移動：同じ構成の 2 つの様相

測地線のずれ

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n} = \lim_{\substack{\Delta\lambda\to 0\\ \Delta n\to 0}} \left\{ \frac{\mathcal{AP}+\mathcal{BR}}{(\Delta\lambda)^2\Delta n} \right\}$$

[コラム 11.2 および 11.3 をみよ.]

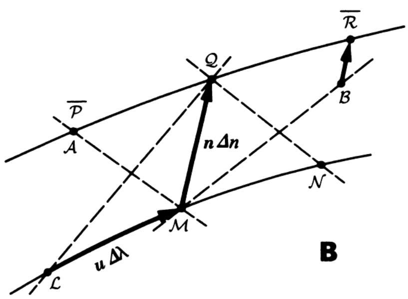
測地線のずれ



同じ結果と異なる構成．閉曲線の移動との関連を単純化するために，傾斜を変え，**A** での測地線 $\mathcal{PQR}$ のパラメータ化を拡大する．**結果：B** では $\bar{\mathcal{P}}$ および $\mathcal{A}$ が一致する．コラム 11.2 の **F** から $\mathcal{AP}+\mathcal{BR}=\mathcal{A}\bar{\mathcal{P}}+\mathcal{B}\bar{\mathcal{R}}$，すなわち $\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n}$ は，この測地線の群に対して元の群に対するのと同じである．

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n} = \lim_{\substack{\Delta\lambda\to 0\\ \Delta n\to 0}} \left\{ \frac{\mathcal{B}\bar{\mathcal{R}}}{(\Delta\lambda)^2\Delta n} \right\}$$

また，議論を単純化するために $\Delta n = \Delta\lambda = 1$ とおき，そして $\boldsymbol{n}$ および $\boldsymbol{u}$ が十分小さく，極限をとらずに $\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n}$ を求めることができると仮定する．



$$\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n} = \mathcal{B}\bar{\mathcal{R}}$$

閉曲線周りの平行移動．これは同じ構成によって遂行される

計画：ベクトル $\boldsymbol{u}\,\Delta\lambda = \mathcal{Q}\bar{\mathcal{R}}$ を曲線 $\mathcal{Q}\to\bar{\mathcal{P}}\to\mathcal{L}\to\mathcal{M}\to\mathcal{Q}$ に沿って反時計回りに平行移動する．**実行：**(1) 移動されるベクトル $\boldsymbol{u}^{(\mathrm{m})}$（“mobile（移動できる）” に対する “m”）をよび出す．(2) $\mathcal{Q}$ で，$\boldsymbol{u}^{(\mathrm{m})}=\mathcal{Q}\bar{\mathcal{R}}$．(3) $\bar{\mathcal{P}}$ で，$\boldsymbol{u}^{(\mathrm{m})}=\bar{\mathcal{P}}\mathcal{Q}$，なぜなら $\bar{\mathcal{P}}\mathcal{Q}\bar{\mathcal{R}}$ は測地線でありそして $\boldsymbol{u}^{(\mathrm{m})}$ はその接線ベクトルであるから．(4) $\mathcal{L}$ で，図の Schild のはしごに従って $\boldsymbol{u}^{(\mathrm{m})}=\mathcal{LM}$．(5) $\mathcal{M}$ で，$\boldsymbol{u}^{(\mathrm{m})}=\mathcal{MN}$，なぜなら $\mathcal{LMN}$ は測地線でありそして $\boldsymbol{u}^{(\mathrm{m})}$ は今その接線ベクトルであるから．(6) $\mathcal{Q}$ で，Schild のはしごに従って $\boldsymbol{u}^{(\mathrm{m})}=\mathcal{QB}$．結果：$\boldsymbol{u}^{(\mathrm{m})}$ での変化は $-\mathcal{B}\bar{\mathcal{R}}$ である．もし曲線が逆方向に（$\mathcal{L}\to\bar{\mathcal{P}}\to\mathcal{Q}\to\mathcal{M}\to\mathcal{L}$）1 周されたとすれば，変化は $+\mathcal{B}\bar{\mathcal{R}}$ であったであろう．

$$(\delta \boldsymbol{u})_{\substack{\text{上向きに}\boldsymbol{n},\ \text{外向きに}\boldsymbol{u},\ \text{下向きに}-\boldsymbol{n},\ \text{ついで}\\ -\boldsymbol{u}\text{に沿って出発点に戻る，平行移動による}}} = \mathcal{B}\bar{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n}$$

[練習問題]

11.5　閉曲線の共面性

$\boldsymbol{f}_1$ および $\boldsymbol{f}_2$ は同じ事象での 2 つの小さい閉曲線に対するバイベクトル（コラム 11.7 をみよ）とする．ある数 a に対して $\boldsymbol{f}_1 = a\boldsymbol{f}_2$ である場合に限り，曲線は共面であることを示せ．

コラム 11.7　閉曲線周りの平行移動に対する法則

A. 特別な場合

曲線はベクトル場 $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ でつくられた閉じた四辺形である．

1. 法則は（成分の形で）

$$\delta A^\alpha + R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} A^\beta u^\gamma v^\delta = 0 \tag{1}$$

と書ける．

2. これは閉曲線のどんな特徴に依存するか？

a. $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = -R^\alpha{}_{\beta\delta\gamma}$（最後の 2 つの添字について反対称．成分に対する式 (11.12) で明白である．また，曲線が 1 周される方向を逆にする，すなわち，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ を交換することは，$\delta\boldsymbol{A}$ の符号を逆にするはずであるから明白である）．

b. 式 (1) は $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$ をこれらの反対称な，最後の 2 つの添字に縮約する．$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$ の対称な部分はゼロを与えねばならない．反対称な部分，$\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}$ のみが寄与できる．

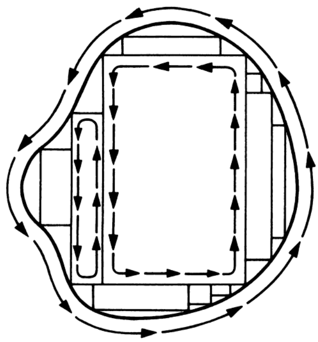
$$\delta A^\alpha + \frac{1}{2} R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} A^\beta (\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})^{\gamma\delta} = 0 \tag{2}$$

3. この反対称な部分は "バイベクトル" である．それは曲線の形に無関係である．それは (a) 曲線が存在する平面と，(b) 曲線によって取り囲まれる面積のみに依存する．[計量がなければ "面積" は意味をもたないけれども，"与えられた平面内の事象での相対的な面積" は "与えられた方向に沿う事象での相対的な長さ" とまさに同じ意

味をもつ．同じ事象での 2 個のベクトルは，もしそれらが互いの倍数であれば同じ線上に存在する; その場合におけるそれらの相対的な長さはそれらの比である．同様に，同じ事象での 2 個の小さい閉曲線は，もしそれらのバイベクトルが互いの倍数であるならば同じ平面内に存在する（練習問題 11.5）．その場合におけるそれらの相対的な面積はそれらのバイベクトルの比である.]

B. 一般的な場合

任意のしかし小さい閉曲線



1. 曲線を，すべて曲線と同じ平面内に存在する多くの四辺形に分けよ.

2. 各四辺形を一度だけ，曲線が 1 周されるのと同じ向きに 1 周せよ．**結果**：すべての内部の境界は反対方向に 2 度通過される（正味の通過はない）．外の境界（曲線自身）は 1 度だけ通過される.

3. こうして，曲線を 1 周することによる $\delta\boldsymbol{A}$ は，各四辺形の 1 周からの $\delta\boldsymbol{A}$ の和である.

$$\delta A^{\alpha} = -\frac{1}{2}\sum_{\text{四辺形}} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}A^{\beta}(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}_{\text{与えられた四辺形に対する}})^{\gamma\delta}$$

曲線に対するバイベクトル $\boldsymbol{f}$ を曲線の成分四辺形に対するバイベクトルの和として定義せよ.

$$\boldsymbol{f} \equiv \sum_{\text{四辺形}} (\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})_{\text{四辺形}}$$

（“面積” を加える．平面を同じに保つ.）

4. そうすると

$$\delta A^{\alpha} + \frac{1}{2}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}A^{\beta}f^{\gamma\delta} \equiv \delta A^{\alpha} + R^{\alpha}{}_{\beta|\gamma\delta|}A^{\beta}f^{\gamma\delta} = 0$$

C. 警告

これは小さい範囲の閉曲線に対してのみ成り立つ．$\delta\boldsymbol{A}$ は面積が 2 倍になると 2 倍になる．しかし誤差は因子 $\sim 2^{3/2}$ だけ増大する [11.4 節の計算で $\delta\boldsymbol{A}$ は $\propto \Delta a \Delta b$，しかし誤差は $\propto(\Delta a)^2\Delta b$ あるいは $\Delta a(\Delta b)^2$].

11.5 平坦さはゼロ Riemann 曲率と同等である

*17　空間あるいは任意の他の多様体が平坦であるということは，すべての測地線が直線となるような座標系 $\{x^\alpha(\mathcal{P})\}$ が存在するということである．

$$x^\alpha(\lambda) = a^\alpha + b^\alpha \lambda \tag{11.16}$$

(例：特殊相対性理論の Lorentz 時空，そこでは試験体はこのような直線上を動く．) 同じ座標系で表された測地線の方程式

$$\frac{d^2x^\beta}{d\lambda^2} + \Gamma^\beta{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{11.17}$$

の接続係数がすべてゼロになる，

$$\Gamma^\beta{}_{\mu\nu} = 0 \tag{11.18}$$

*18　の場合に限り，試験体は直線上を動きうる．これらの接続係数がゼロになることから，ただちに，曲率テンソルのすべての成分がゼロになることがわかる [式 (11.12)]．

$$R^\beta{}_{\gamma\mu\nu} = 0 \tag{11.19}$$

[式 (11.16)→(11.18)→(11.19) の幾何学的な再陳述：すべての測地線が与えられた座標系で直線であることは，初めに平行な測地線はそれらの間隔を保持する．測地線のずれはゼロであり，したがって曲率はゼロになることを意味する．]

逆は真実であるか？　ゼロ Riemann 曲率はすべての測地線が直線になるような座標系の存在を意味するか？　ハイ，それは以下の構成でわかる．

*19　ベクトルを自分自身に平行に $\mathcal{P}_0$ から $\mathcal{Q}$ まで移動し，それから $\mathcal{Q}$ から $\mathcal{P}_0$ までわずかに異なる経路に沿って戻せ．ベクトルは大きさあるいは方向について何の変化も受けずに出発点に戻る．なぜなら ***Riemann*** はいたるところゼロであるからである．したがって基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ の $\mathcal{P}_0$ から $\mathcal{Q}$ への平行移動は $\mathcal{Q}$ で，大きさについてもそして方向についても，移動の経路（任意の連続な一連の変形によって他の経路から得られる経路に対して）によらない基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ を与える．$\mathcal{Q}$ に対してと同じく，多様体のすべての点に対して，そして 1 つの基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ に対してと同じく，基底ベクトルの完全な集合 ($\mu = 0, 1, 2, 3$) に対して．基底 $\{\boldsymbol{e}_\alpha(\mathcal{P}_0)\}$ の平行移動はいたるところに座標系の場（“座標系場”）を与える．その各基底ベクトルは任意点から任意の近傍点への平行移動で（座標系場に相対的に）変化を受けない．こうして

$$\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{e}_\mu = 0 \tag{11.20}$$

---

*17　多様体の平坦さが定義される

*18　平坦さは ***Riemann*** $= 0$ を意味する

*19　***Riemann*** $= 0$ は平坦さを意味する証明

あるいは

$$\boldsymbol{\nabla}_\nu \boldsymbol{e}_\mu \, (\equiv \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{e}_\nu} \boldsymbol{e}_\mu) = 0 \tag{11.21}$$

これらのそれぞれの微分がゼロになるとともに，また任意の 2 つの基底ベクトル場の交換子はゼロになる．

$$[\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu] = \boldsymbol{\nabla}_\mu \boldsymbol{e}_\nu - \boldsymbol{\nabla}_\nu \boldsymbol{e}_\mu = 0 - 0 = 0 \tag{11.22}$$

図 11.2 の四辺形での間隙（そこで “$\boldsymbol{u}$” を “$\boldsymbol{e}_\mu$” に置き換え，“$\boldsymbol{v}$” を “$\boldsymbol{e}_\nu$” に置き換える）は完全に閉じる．そこで座標 x^μ を導入できる，そのおのおのは対応するベクトル場の方向に運動とともに増大する．そしてこれらの座標の目盛りを適当にして，

$$\boldsymbol{e}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{11.23}$$

と書くことができる（練習問題 9.9 をみよ）．この座標基底を手に，公式

$$\boldsymbol{\nabla}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = \boldsymbol{e}_\mu \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha} \tag{11.24}$$

を用いて接続係数を計算することができる．左辺の量はゼロになるから，右辺のすべての接続係数（“測地線の屈曲”）はゼロでなければならない．したがって時空は実際平坦である．**要約：*Riemann* = 0 である場合に限り時空は平坦である．**すなわち，いたるところで $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = 0$ であり，測地線が直線，$x^\alpha(\lambda) = a^\alpha + b^\alpha\lambda$ であるような **“平坦な座標” が存在する．**

注意：計量をもつ Einstein の時空では，上の議論での $\{\boldsymbol{e}_\mu(\mathcal{P}_0)\}$ が $\mathcal{P}_0$ で直交するように，$\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}$ と選ぶことができる．生ずる座標系の場はそうするといたるところで直交するであろう．そして生ずる座標系は Lorentz 系になるだろう．こうして，Einstein 的
*20 重力では上の要約は書き直されうる．***Riemann* = 0 である場合に限り時空は平坦である（そこには Lorentz 座標系が存在する）．**

*21 **警告：**平坦さは必ずしも Euclid 的トポロジーを意味しない．1 枚の紙をとる．それは平坦である．それを丸めて円筒をつくると，それは依然として本質的に，平坦である．その上の測地線の軌道は変わっていない．近傍点の間の距離は変わっていない．永久に紙に閉じ込められた観測者に関する限り，トポロジーだけが変わっている（“外的な幾何学”，紙が周りの 3 次元空間内にはめ込まれる方法もまた変わっている．しかし紙の上の観測者はこのことについて何も知らない，それは本章の主題でない．代わりに，21.5 節をみよ）．

この円筒をとり，それを曲げて，その平坦な本質的な幾何学を変えずに，両端を接着する．そうすることはもし円筒が平坦な，3 次元 Euclid 的空間内にはめ込まれたままであるならば不可能である．もしそれが 4 次元の Euclid 的空間にはめ込まれているならば完全に可能である．しかし，はめ込みは円筒に閉じ込められている観測者にとって重要でない．

---

*20 ***Riemann* = 0** である場合に限り Lorentz 座標は存在する

*21 平坦さは Euclid 的トポロジーを意味しない

なぜなら観測者が測定するすべてのものは本質的な幾何学である．したがって彼らに重要なものはすべて，円筒の両端を互いに**トポロジー的に同一視する**ことである．結果はトポロジー的にトーラスである．しかし測地線の軌道は依然として変わっていない．本質的な幾何学は平坦である．***Riemann*** はゼロである．

類似によって，平坦な Minkowskii 時空をとる．ある Lorentz 系をとり，各辺上に 10^{10} 光年の長さをもつ立方体（$0 < x < 10^{10}$ 光年，y および z に対しても同様である）をとる．立方体の反対面を同一視せよ．したがって 1 つの面をよぎって存在する測地線は他の面をよぎって入る．結果はトポロジー的に 3–トーラスである．有限の体積，平坦な Minkowskii 幾何学をもち，そして Lorentz 時間 t が経過するときまったく変化しない形をもつ "閉じた宇宙" である（膨張はなく，収縮もない）．

11.6　Riemann 規準座標

曲がった時空で，いたるところで $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = 0$ をもつ座標系を見出すことはけっしてできない．しかし与えられた事象 $\mathcal{P}_0$ で局所慣性系をつねに構成することができる．そしてこのような系で眺めると，自由粒子は，少なくとも局所的には直線に沿って動かねばならない．それは $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ は，少なくとも局所的にはゼロにならねばならないことを意味する．

*22　このような局所慣性系の非常に特別なそして有用な実現は **Riemann 規準座標系**である．事象 $\mathcal{P}_0$ と慣性観測者によってそこで用いられるべき基底ベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_\alpha(\mathcal{P}_0)\}$ を
*23　とる．$\mathcal{P}_0$ 近傍で，$\mathcal{P}_0$ からハリネズミあるいはヤマアラシの針のように放射状に広がっていく測地線で時空を満たす．おのおのの測地線は $\mathcal{P}_0$ での接線ベクトル $\boldsymbol{v}$ で定まる．そして測地線上の一般点は

$$\mathcal{P} = \mathcal{G}(\lambda; \boldsymbol{v}) \tag{11.25}$$

［アフィンパラメータ，測地線上の "どこ" かを示す］↑（λ）　↑（$\boldsymbol{v}$）［$\mathcal{P}_0$ での接線ベクトル，"どの測地線" かを示す］

と記されうる．実際，これは必要以上の測地線を与える．もし初めの接線ベクトルが $\boldsymbol{v}$ であるならばパラメータの長さ λ 後に到達するのと同じ点に，初めの接線ベクトルが $2\boldsymbol{v}$ でパラメータの長さ $\frac{1}{2}\lambda$ 後に到達する．

$$\mathcal{G}(\lambda; \boldsymbol{v}) = \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\lambda; 2\boldsymbol{v}\right) = \mathcal{G}(1; \lambda\boldsymbol{v})$$

こうして，$\lambda = 1$ を固定し $\boldsymbol{v}$ をすべての可能な方法で変えることによって，$\mathcal{P}_0$ のある近傍内のすべての点に到達できる．これが Riemann 規準座標を構成するための基礎である．事象 $\mathcal{P}$ を選ぶ．$\mathcal{P} = \mathcal{G}(1; \boldsymbol{v})$ となるような $\mathcal{P}_0$ での接線ベクトル $\boldsymbol{v}$ を見出す．その $\boldsymbol{v}$ を選ばれた基底で展開し，その成分に名前 x^α を与えよ．

$$\mathcal{P} = \mathcal{G}(1; x^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha) \tag{11.26}$$

*22　Riemann 規準座標：局所慣性系の実現
*23　Riemann 規準座標の幾何学的な構成

点 $\mathcal{P}$ は x^α を一義的に定める（もし $\mathcal{P}$ が $\mathcal{P}_0$ に十分近いならば，その時空の曲率は測地線が互いに交わるようにさせない）．同様に，x^α は $\mathcal{P}$ を一義的に定める．したがって，x^α は $\mathcal{P}$ の座標として選ばれうる．すなわち，事象 $\mathcal{P}_0$ と基底 $\{\boldsymbol{e}_\alpha(\mathcal{P}_0)\}$ に基づいた，その "Riemann 規準座標" である

*24 式 (11.26) は Riemann 規準座標を簡潔に要約する．練習問題 11.9 で導かれている，他の式はそれらの有力な性質を要約する．

$$\boldsymbol{e}_\alpha(\mathcal{P}_0) = (\partial/\partial x^\alpha)_{\mathcal{P}_0} \tag{11.27}$$

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(\mathcal{P}_0) = 0 \tag{11.28}$$

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\mu}(\mathcal{P}_0) = -\tfrac{1}{3}(R^\alpha{}_{\beta\gamma\mu} + R^\alpha{}_{\gamma\beta\mu}) \tag{11.29}$$

もし時空が計量をもち（実際そうであるように），そして $\mathcal{P}_0$ での観測者の系が直交に（$\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$）選ばれていたら，

$$g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}_0) = \eta_{\alpha\beta} \tag{11.30}$$

$$g_{\alpha\beta,\mu}(\mathcal{P}_0) = 0 \tag{11.31}$$

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\mu\nu}(\mathcal{P}_0) &= -\tfrac{1}{3}(R_{\alpha\mu\beta\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu}) \\ &= -\tfrac{2}{3} J_{\alpha\beta\mu\nu} \end{aligned} \tag{11.32}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathcal{P}_0) = g_{\alpha\delta,\beta\gamma}(\mathcal{P}_0) - g_{\alpha\gamma,\beta\delta}(\mathcal{P}_0) \tag{11.32$'$}$$

ここに $J_{\alpha\beta\mu\nu}$ は Jacobi 曲率テンソル（練習問題 11.7 をみよ）の成分である．

これは $\mathcal{P}_0$ で局所的に慣性的である（すなわち，そこで $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = 0$ をもつ）唯一の座標系であり，そしてそこで基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\alpha$（すなわち，そこで $\partial/\partial x^\alpha = \boldsymbol{e}_\alpha$ をもつ）に結

*25 びついているか？ イイエ．しかしすべてのこのような座標系（"**規準座標**" とよばれる）は 2 次まで同じであるだろう．

$$x^\alpha_{新しい}(\mathcal{P}) = x^\alpha_{古い}(\mathcal{P}) + 次数の補正\ (x^\alpha_{古い})^3$$

さらに，3 次まで同じであるもの

$$x^\alpha_{新しい}(\mathcal{P}) = x^\alpha_{古い}(\mathcal{P}) + 次数の補正\ (x^\alpha_{古い})^4$$

のみが Riemann 曲率テンソルに対する美しい結びつき，すなわち式 (11.29) および (11.32) を保つだろう．

---

*24 Riemann 規準座標の数学的な性質

*25 局所慣性系の他の数学的な実現

[練習問題]

11.6　*Riemann* の対称性

（13 章で議論されるべきである．）***Riemann*** は以下の対称性をもつことを示せ．

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta]} \qquad \text{(最後の 2 つの添字について反対称)} \tag{11.33a}$$

$$R^{\alpha}{}_{[\beta\gamma\delta]} = 0 \qquad \text{(完全に反対称な部分はゼロである)} \tag{11.33b}$$

11.7　測地線のずれはすべての曲率成分を測定する

測地線のずれの式は，いま形

$$\boldsymbol{\nabla_u \nabla_u n} + \boldsymbol{Riemann}(\cdots, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}) = 0$$

あるいは

$$\boldsymbol{\nabla_u \nabla_u n} + \mathcal{R}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} = 0$$

に書き上げると，またそれ自身 Jacobi 形式 $\boldsymbol{\nabla_u \nabla_u n} + \mathcal{J}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{n} = 0$ に書ける．ここに $\mathcal{J}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$，**“Jacobi 曲率演算子”** は

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{n} \equiv \frac{1}{2}[\mathcal{R}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{v} + \mathcal{R}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{u}] \tag{11.34}$$

によって定義され，そして “Jacobi 曲率テンソル” に

$$\boldsymbol{Jacobi}(\cdots, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \equiv \mathcal{J}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{n} \tag{11.35}$$

によって関係している，それは

$$J^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = J^{\mu}{}_{\nu\beta\alpha} = \frac{1}{2}(R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta} + R^{\mu}{}_{\beta\nu\alpha}) \tag{11.36}$$

を意味する．

(a) $J^{\mu}{}_{(\alpha\beta\gamma)} = 0$ は $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} = R^{\mu}{}_{\alpha[\beta\gamma]}$ から出ることを示せ．

(b) 測地線のずれを調べる（$\boldsymbol{\nabla_u \nabla_u n} + \mathcal{J}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{n} = 0$ で任意の $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{n}$ を許して）ことによって，***Jacobi*** のすべての成分を測定できることを示せ．

(c) ***Jacobi*** は正確に ***Riemann*** と同じ情報を含んでいることを示せ．[ヒント：

$$R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta} = \frac{2}{3}(J^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} - J^{\mu}{}_{\beta\alpha\nu}) \tag{11.37}$$

を示せ．これと $J^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ に対する式 (11.36) は “同じ情報の内容” を証明する.] したがって，測地線のずれを調べることによって，また ***Riemann*** のすべての成分を測定できる．

(d) $R^{\mu}{}_{[\nu\alpha\beta]} = 0$ の対称性は，***Jacobi*** と ***Riemann*** の同等性について本質的であることを示せ．そのとき $R^{\mu}{}_{[\nu\alpha\beta]} \neq 0$ であり，そして $J^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = 0$ であるような $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = -R^{\mu}{}_{\nu\beta\alpha}$ に対して提示された値を示すことを用いよ．

11.8 むごいほどの詳細さで表された測地線のずれ

測地線のずれの方程式を座標系での成分形式で書き表せ．すべての共変微分（セミコロン記号）を通常の（コンマ）微分と Γ で展開し，Γ と ∂ 項を明確に示せ．

11.9 一般的な Riemann 規準座標

Riemann 規準座標の性質，式 (11.27)，(11.28)，(11.29)，(11.31)，(11.32)，および (11.32′) を導け．ヒント：以下のように実行せよ．

(a) 定義式 (11.26) から，$(\partial\mathcal{P}/\partial x^\alpha)_{\mathcal{P}_0} = \boldsymbol{e}_\alpha$ を導け．

(b) 同様に，定義式 (11.26) から，曲線 $x^\alpha = v^\alpha\lambda$（ここに v^α は定数である）のおのおのは $\mathcal{P}_0$ を通りアフィンパラメータ λ をもち，$\mathcal{P}_0$ を通る測地線であることを示せ．

(c) $x^\alpha = v^\alpha\lambda$ を測地線の式に代入して，$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(\mathcal{P}_0) = 0$ を示せ．

(d) 曲線 $x^\alpha = v^\alpha\lambda$ はパラメータ v^α のすべての選択に対して測地線であるから，それらは測地線の接線 $\boldsymbol{u} \equiv (\partial/\partial\lambda)_{v^\alpha}$ だけでなく，いくつかのずれのベクトル $\boldsymbol{N}_{(\alpha)} \equiv (\partial/\partial v^\alpha)_\lambda$ を与える．これらのベクトルの成分を Riemann 規準座標系で計算し，練習問題 11.8 に書かれているように測地線のずれの式に代入せよ．

(e) (d) の測地線のずれの式で λ のゼロ次および 1 次のべきの係数を，Γ に対する Taylor 級数である，

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}|_{x^\mu=v^\mu\lambda} = \lambda v^\mu \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\mu}(\mathcal{P}_0) + O(\lambda^2)$$

を用いてゼロに等しくおけ．このようにして Riemann テンソルによる $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\mu}$ に対する式 (11.29) に到達する．

(f) 計量による接続係数に対する式 (11.28)，(11.29)，および (8.24) から，式 (11.31)，(11.32)，および (11.32′) を導け．

11.10 Bianchi 恒等式

Riemann 曲率テンソルは以下の “Bianchi 恒等式”

$$R^\alpha{}_{\beta[\gamma\delta;\epsilon]} = 0 \tag{11.38}$$

を満たすことを示せ．これらの恒等式の幾何学的な意味は 15 章で議論されるだろう．[ヒント：Riemann 規準座標系の原点で計算を行え.]

11.11 曲率演算子は 1–形式に作用する

$\mathcal{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ は，接線ベクトルに対するのと同様に 1–形式 $\boldsymbol{\sigma}$（あるいは他のテンソル）に作用するとき，演算子 $\mathcal{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}] - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]}$ であるとする．

$$\langle \mathcal{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{w}\rangle = -\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathcal{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}\rangle$$

を示せ．

11.12 回転群：Riemann 曲率

[練習問題 9.13，9.14，および 10.17 の続き.] 回転群の多様体 $SO(3)$ に対する Riemann 曲率テンソルの成分を計算せよ．生成子の基底 $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ を用いよ．[**答え**：

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} \tag{11.39}$$

ここに $\delta^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$ は式 (3.50l) で定義された置換記号である.

$$\delta^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} \equiv (\delta^{\alpha}{}_{\gamma}\delta^{\beta}{}_{\delta} - \delta^{\alpha}{}_{\delta}\delta^{\beta}{}_{\gamma})$$

この答えは群多様体内の位置 $\mathcal{P}$ によらないことに注意せよ.]

---

12 章
曲がった時空の言葉でのNewton的重力

近代絵画が公共の美術館で，気づかれないままに逆さまに展示されたもっとも長い時間間隔は 47 日である．これは New York 近代美術館で Matisse の「Le Bateau（舟）」に対して起こった．このとき 116,000 の人が展示室を通過していた．

McWHIRTER AND McWHIRTER (1971)

[本章は完全にトラック–2 である．9–11 章は本章に対して必要な準備である．本章はどの後の章に対しても必要でないが，(1) 17 章（Einstein の場の方程式）および (2) 38 および 39 章（実験的なテストおよび重力の他の理論)，で有用になるだろう．]

12.1 Newton 的重力の要約

等価原理は，重力という事実の Einstein の記述に固有のものでない．Einstein が独特なのは等価原理と局所 Lorentz 幾何学との結合である．Newton の世界に戻るために，特殊相対性理論，光円錐，光の極限的な速さ，固有時間について過去 1 世紀に発見されたすべてのことを忘れよう．より以前の世紀の “宇宙時間” t に戻る．その宇宙時間と，直交する，“Galilei 的” 空間座標で，Newton の理論は中性の試験粒子の軌道に対して次式を与える．

*1

$$\frac{d^2x^j}{dt^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}=0 \tag{12.1}$$

$$\Phi(\text{ときどき}\ -U\ \text{と記される})=\text{Newton 的ポテンシャル} \tag{12.2}$$

習慣的にこれらの方程式を，試験粒子が Euclid 空間（時空でない）内で落下する “曲がった経路” $x^j(t)$ を記述するものと解釈する．これらの曲がった経路は地球周りの円軌道や野

*2 球の放物線軌道を含む．Cartan はこの観点を放棄することを要求する．代わりに，彼はこれらの軌道を曲がった時空での測地線 $[t(\lambda), x^j(\lambda)]$ とみなせという (1923, 1924)（この観点の変化はコラム 1.6 の図 B および C に表されていた)．“アフィン的に時を刻む”，試験粒子によって運ばれる Newton 的時計が宇宙時間（あるいはそのある倍数 $\lambda=at+b$）を読むから，運動方程式 (12.1) は

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2}=0, \qquad \frac{d^2x^j}{d\lambda^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2=0 \tag{12.3}$$

*1 Newton 的重力：本来の公式

*2 Newton 的重力：曲がった時空の言葉への変換

と書き直すことができる．測地線の方程式

$$d^2x^\alpha/d\lambda^2 + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(dx^\beta/d\lambda)(dx^\gamma/d\lambda) = 0$$

と比較して接続係数の値を読み取ることができる．

$$\Gamma^j{}_{00} = \partial\Phi/\partial x^j, \quad \text{他のすべての } \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \text{ はゼロである} \tag{12.4}$$

そして Riemann テンソルの成分に対する基準方程式 (11.12) にこれらを挿入して

$$R^j{}_{0k0} = -R^j{}_{00k} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j \partial x^k}, \quad \text{他のすべての } R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} \text{ はゼロである} \tag{12.5}$$

を得る（練習問題 12.1）．最後に，Newton 的ポテンシャルに対する源の方程式

$$\nabla^2\Phi \equiv \sum_j \Phi_{,jj} = 4\pi\rho \tag{12.6}$$

を "***Ricci* 曲率テンソル**"

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^\mu{}_{\alpha\mu\beta} \qquad (\textbf{\textit{Riemann}}\text{の縮約}) \tag{12.7}$$

の助けを借りて幾何学的な形（練習問題 12.2）

$$R_{00} = 4\pi\rho, \quad \text{他のすべての } R_{\alpha\beta} \text{ はゼロである} \tag{12.8}$$

に書き直すことができる．

$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ に対する式 (12.4)，$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ に対する式 (12.5)，$R_{\alpha\beta}$ に対する式 (12.8)，および測地線の運動の法則は幾何学的な言葉で書き直された，Newton 的重力の完全な内容である．

これらの成分の操作を素早く通過することは 1 つのことである．これらの式の意味と Newton 的時空の構造を抽象的に，絵で表した表現によって，完全に理解することはまったく別なことである．このような理解を生み出すことおよび Newton 的時空を Einstein 的時空と比較することは，本章の目的であり，これは Cartan（1923, 1924），Trautman（1965），および Misner（1969a）の仕事に基づいている．

［練習問題］

12.1　Newton 的時空の Riemann 曲率

$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ に対する式 (12.5) を $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ に対する式 (12.4) から導け．

12.2　Newton 的な場の方程式

Newton 的な場の方程式の幾何学的な形式 (12.8) を式 (12.5)–(12.7) から導け．

12.2 Newton 的時空の階層化

Galileo と Newton は平坦で Euclid 的な "絶対空間" と "絶対時間" の 2 つの概念は異なり，そしてつながっていないことについて話した．絶対空間で Newton 的物理学が起こった．それに伴って，絶対時間が着実に進んだ．空間と時間が，曲がった **"時空"** という 1 つの実体の 2 つの様相であるかもしれないという暗示は存在しなかった．Einstein が相対性物理学で統一をし，そして Cartan (1923) が Einstein の考えにより明白な洞察を与えるために，Newton 的物理学で同じことを行うまでは．

*3 Galileo および Newton の絶対空間と絶対時間は，どのように Cartan の **"Newton 的時空"** に適合するか？ 適合への鍵は**階層化**，宇宙時間座標 t によって生み出される階層化である．

*4 t を Newton 的な時空できちんと定義された関数（スカラー場）とみなす．

$$t = t(\mathcal{P}) \tag{12.9}$$

それなしには，時空は Newton 的でありえないだろう．なぜなら "t" は，計量 "$\boldsymbol{g}$" が Lorentz 的時空に対してそうであるように，Newton 的時空に対してまさに本質的であるからである．時空の層は一定の t の薄片，**"空間薄片"** である．この空間薄片のおのおのは，以前は "絶対空間" とよばれた同一の幾何学的な構造をもっている．

Cartan の観点を採用して，どのような種類の幾何学が周囲の時空の幾何学によっておのおのの空間層（空間薄片）に引き起こされるかを考えよう．与えられた空間層は，12.1 節の Galilei 的座標によって，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_j = \partial/\partial x^j$ を与えられる．そしてこの基底

*5 はゼロの接続係数をもつ，$\Gamma^j{}_{kl} = 0$ ［式 (12.4) を参照せよ］．したがって，**各空間層の幾何学は完全に平坦である．**

"絶対空間" は古い観点によれば，その幾何学は Euclid 的であり，そして Galilei 的座標は直交座標である．Cartan の言葉に翻訳すると，これは，各空間層（t=一定）は平坦であり，その Galilei 的座標はゼロの接続係数をもっているばかりでなく，**各空間層は 3 次元の計量を与えられており，その Galilei 的基底は直交している．**

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = (\partial/\partial x^i)\cdot(\partial/\partial x^j) = \delta_{ij} \tag{12.10}$$

*6 もし空間層が実際に平坦であるならば，曲率や測地線のずれはどこに入るか？ それらは**時空**の性質である．完全に空間層内に存在する閉曲線の周りに沿ってベクトルを平行移動する．ベクトルは変化を受けずに出発点に戻るだろう．しかし，時間について Δt だけ前に，そして空間について Δx^k だけ北に，そして，時間について $-\Delta t$ だけ後ろに，そして $-\Delta x^k$ だけ南へと，ベクトルを出発点へ平行移動したとき，ベクトルは

*3 Newton 的時空の幾何学
*4 スカラー場としての "宇宙時間"
*5 Euclid 的幾何学をもつ空間薄片
*6 曲率は時空で作用し，空間層で作用しない

$$\delta \boldsymbol{A} = -\mathcal{R}\left(\Delta t \frac{\partial}{\partial t}, \Delta x^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \boldsymbol{A}$$

すなわち，

$$\delta A^0 = 0, \qquad \delta A^j = -R^j{}_{00k} A^0 (\Delta t)(\Delta x^k) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} A^0 (\Delta t)(\Delta x^k) \quad (12.11)$$

だけ変化して戻るだろう．最初平行である空間層の測地線（Euclid の直線）はつねに平行にとどまる．しかし最初平行な時空の測地線（自由落下する粒子の軌道）は時空の曲率によって互いに離れたり縮められたりする．

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{n} + \mathcal{R}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}) \boldsymbol{u} = 0$$

あるいは同等のことであるが Galilei 的座標で

$$\text{最初に}\ \ n^0 = dn^0/dt = 0 \Longrightarrow \text{つねに}\ \ n^0 = 0 \qquad (12.12a)$$

$$\frac{d^2 n^j}{dt^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} n^k = 0 \qquad (12.12b)$$

（コラム 12.1 および練習問題 12.3 をみよ）．

［練習問題］

12.3　測地線のずれが導かれる

コラム 11.4 の第 3 項，**Newton 的解析**，“幾何学的解析” を成分記号で実行するものを，Newton 的時空の Galilei 的接続係数 (12.4) を用いて，生み出せ．それによって幾何学的解析がいかに古い Newton 的解析と類似しているのか，より深い理解をなし遂げよ．

12.3　Galilei 的座標系

特殊相対性理論の Lorentz 時空はどの座標系にも完全によらない存在と構造をもっている．しかしその幾何学の特殊な性質（ゼロ曲率）は，特別な方法

$$(\partial/\partial x^\alpha)\cdot(\partial/\partial x^\beta) = \eta_{\alpha\beta} \qquad \text{（いたるところで）}$$

で時空にくっついている特別な種類の座標（Lorentz 座標）の導入を許す．これらの特別な座標系とそれら（Lorentz 変換）の間の関係を調べることによって時空そのものの構造について多く（同時性の破れ，Lorentz 収縮，時間の膨張，…）を学ぶ．

コラム 12.1 Newton 的時空での測地線のずれ

計算のための座標系：Galilei 的空間座標 x^j および宇宙時間座標 t．方程式の一般的な成分形式

$$\frac{D^2n^\alpha}{d\lambda^2}+R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\frac{dx^\beta}{d\lambda}n^\gamma\frac{dx^\delta}{d\lambda}=0$$

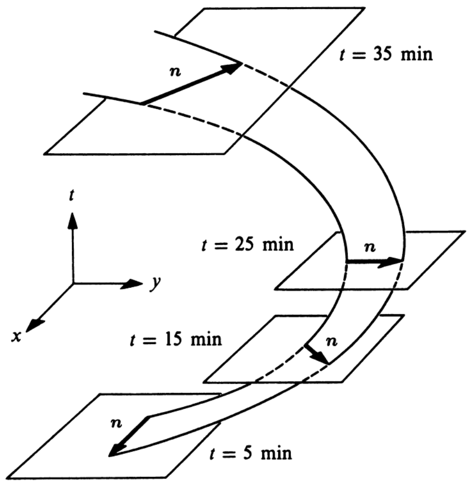
この計算に対する特別な条件: 粒子の時計（アフィンパラメータ）はすべて宇宙時間，$\lambda=t$ を読むために規格化されているとする．これは測地線の間隔のベクトル

$$n^\alpha=(\partial x^\alpha/\partial n)_\lambda$$

はゼロ時間成分，$n^0=0$ をもつことを意味する．すなわち，抽象的な言葉で，

$$\langle \boldsymbol{dt},\boldsymbol{n}\rangle=t_{,\alpha}n^\alpha=n^0=0$$

すなわち，幾何学的な言葉で，$\boldsymbol{n}$ は空間層（一定の時間 t の面）内に存在する．



共変微分を求める．

$$\frac{Dn^\alpha}{D\lambda}=\frac{dn^\alpha}{d\lambda}+\underbrace{\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}}_{[\beta=0\text{ でなければ }0]}\underset{[\beta\text{ が空間添字でなければ }0\ (n^0=0)]}{n^\beta}\frac{dx^\mu}{d\lambda}=\frac{dn^\alpha}{d\lambda},$$

$$\frac{D^2n^\alpha}{d\lambda^2}=\frac{d(Dn^\alpha/d\lambda)}{d\lambda}+\underbrace{\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}}_{[\beta=0\text{ でなければ }0]}\underset{[\beta\text{ が空間添字でなければ }0]}{\frac{dn^\beta}{d\lambda}}\frac{dx^\mu}{d\lambda}=\frac{d(Dn^\alpha/d\lambda)}{d\lambda}=\frac{d^2n^\alpha}{d\lambda^2}\underset{[\lambda=t\text{ であるから}]}{=}\frac{d^2n^\alpha}{dt^2}$$

潮汐加速度を求める．

$$R^0{}_{\beta\gamma\delta}\frac{dx^\beta}{d\lambda}n^\gamma\frac{dx^\delta}{d\lambda}=0 \quad R^j{}_{0k0} \text{ および } R^j{}_{00k} \text{ が唯一のゼロでない成分であるから}$$

$$\underbrace{R^j{}_{\beta\gamma\delta}}\frac{dx^\beta}{d\lambda}n^\gamma\frac{dx^\delta}{d\lambda}=R^j{}_{0k0}\frac{dt}{d\lambda}n^k\frac{dt}{d\lambda}=R^j{}_{0k0}n^k=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\partial x^k}n^k$$

[γ が空間添字でなければ 0]

[空間添字 γ に対して: $\beta=\delta=0$ でなければ 0]

測地線のずれの最終方程式は次のようになる．

$$\frac{d^2n^0}{dt^2}=0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{結果 } n^0=0 \text{ とつねに一致する，それはす}\\ \text{べての粒子に対する選択 } \lambda=t \text{ からでる}\end{array}\right)$$

$$\frac{d^2n^j}{dt^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\partial x^k}n^k=0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{コラム 11.4 での Newton 型の計算と}\\ \text{一致する，また練習問題 12.3 をみよ}\end{array}\right)$$

*7　同様に Newton 的時空に対して，その幾何学の特別な性質（後で要約して解説される，コラム 12.4）は，特別な方法

$$x^0(\mathcal{P})=t(\mathcal{P}),$$

$$(\partial/\partial x^j)\cdot(\partial/\partial x^k)=\delta_{jk},$$

$$\text{あるスカラー場 } \Phi \text{ に対して，} \Gamma^j{}_{00}=\Phi_{,j}$$

$$\text{そしてすべての他の } \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \text{ はゼロである．}$$

で時空にくっついている特別な座標（Galilei 的座標）の導入を許す．Newton 的時空をより深く理解するために，これらの Galilei 的座標系の間の関係を研究せよ．

原理の要点：重力の法則および時空の性質を Galilei 的座標でまず書き下ろし（12.1 節），それから初めて（ここで）座標系の性質およびその非一意性にいかに取り組むことができるか？　**答え**：（3.1 節からわずかばかり修正された引用）“ここでまた科学の他のところで，Henri Poincaré によって少なからず強調されたように，‘あなたの言葉をあなたが先へ進む前に定義せよ’ と言い古されたようにその観点は，時代遅れである．物理学のすべての法則および理論は，Newton の重力の法則を含めて，それらが用いる概念（ここでは Galilei 的座標）を定義し，これらの概念について陳述をするという，この深くて微妙な性質をもっている．”

Newton の重力の法則は，Galilei の座標系

$$x^0=t, \quad (\partial/x^j)\cdot(\partial/x^k)=\delta_{jk}$$

で書くと，時空の幾何学について，“$\Gamma^j{}_{00}=\Phi_{,j}$ およびすべての他の $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}=0$ である” と陳述する．この陳述は今度は異なる Galilei 系間の関係について情報を与える．1 つの

*7　Galilei 的座標が定義される

Galilei 系 $\{x^{\alpha}(\mathcal{P})\}$ が与えられ，そして他の Galilei 系 $\{x^{\alpha'}(\mathcal{P})\}$ に通ずるもっとも一般的な座標変換を求める．以下の制限が存在する．(1) $x^{0'} = x^0 = t$（両方の時間座標は宇宙時間でなければならない），(2) 固定された t で（すなわち，固定された空間層内で）空間座標の両方の組は Euclid 的でなければならない．したがってそれらは回転と並進で関係づけられなければならない．

$$x^{j'} = A_{j'k}x^k + a^{j'} \tag{12.13a}$$

[回転行列，すなわち，$A_{j'l}A_{k'l} = \delta_{j'k'}$]（$A_{j'k}$ を指す）　[並進]（$a^{j'}$ を指す）

$$x^k = A_{j'k}x^{j'} - a^k,\quad ここに\ a^k \equiv A_{j'k}a^{j'} \tag{12.13b}$$

回転と並進は**先験的に**，異なる層上で異なるだろう，$A_{j'k} = A_{j'k}(t)$ そして $a^j = a^j(t)$．しかし (3) それらは接続係数の要求される特別な形によって制限されなければならない．接続係数の形が古い座標系で与えられているとき，それらを新しい座標系で求める．結果（練習問題 12.4）は以下である．

$$\Gamma^{j'}{}_{0'k'} = \Gamma^{j'}{}_{k'0'} = A_{j'l}\dot{A}_{k'l} \quad (\text{“Coriolis の力” を生み出す}),$$

$$\Gamma^{j'}{}_{0'0'} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^{j'}} + A_{j'k}(\ddot{A}_{l'k}x^{l'} - \ddot{a}^k) \tag{12.14}$$

[“遠心力”]（$\ddot{A}_{l'k}x^{l'}$ を指す）　[“慣性力”]（$\ddot{a}^k$ を指す）

すべての他の $\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}$ はゼロである

（“Euclid 的” 添字の慣習，繰り返される空間添字はたとえ両者が下つきであっても和を求めなければならない，点は時間微分を表す）．これらは，以下の場合に限り基準的な Galilei 的形式 (12.4) をもつ．

$$\dot{A}_{j'k} = 0,\qquad \Phi' = \Phi - \ddot{a}^k x^k + \text{constant} \tag{12.15}$$

[新しい座標系での Newton 的ポテンシャル]（Φ' を指す）　[古い座標系での Newton 的ポテンシャル]（Φ を指す）

*8 これらの結果は言葉で述べ直すことができる．任意の 2 つの Galilei 的座標系は，(1) 空間格子の時間によらない回転（各空間層で**同じ**回転），そして (2) 空間格子の時間に依存する並進（異なる層で**異なりうる**並進）

$$x^{j'} = A_{j'k}x^k + a^{j'}(t) \tag{12.16}$$

[一定]（$A_{j'k}$ を指す）　[時間に依存する]（$a^{j'}(t)$ を指す）

*9 で関係づけられる．Newton 的ポテンシャルは，すべての座標系によらない存在をもつ時空で定義された関数でない（時空を測定する座標によらない方法は存在しない）．むしろ，時空

*8 Galilei 的座標系をつなぐ変換

*9 Newton 的ポテンシャルは Galilei 的座標系の選択に依存する

はその存在に対して Galilei 的座標の特別な選択に依存する．そしてもし選択が式 (12.16) によって変化するならば，Φ は変化する．

$$\Phi' = \Phi - \ddot{a}^k x^k \tag{12.17}$$

(対照的に，すべての座標によらない存在は，宇宙時間 $t(\mathcal{P})$ と共変微分 ∇ に許される．)

*10　宇宙内のすべての物質が空間の有限領域内に集中し，空によって取り囲まれていたならば（“島宇宙”），包括的な境界条件を課することができるだろう．

$$r \equiv (x^k x^k)^{1/2} \longrightarrow \infty \text{ のとき，} \qquad \Phi \longrightarrow 0 \tag{12.18}$$

*11　これは一義的で，共通の Newton 的ポテンシャルをもつ，Galilei 的座標の下位区分（“**絶対的な**”Galilei 的座標）を選び出すだろう．1 つの絶対的な Galilei 的座標系から任意の他の絶対的な Galilei 的座標系への変換は

$$x^{j'} = \underbrace{A_{j'k}}_{\text{一定の回転}} x^k + \underbrace{a^{j'}}_{\text{一定の変位}} + \underbrace{v^{j'}}_{\text{一定の速度}} t \tag{12.19}$$

となるだろう（“Galilei 的変換”）．しかし，(1) 局所的な測定によってこれらの絶対的な Galilei 的座標系をより広い種類の Galilei 系から区別することはできないだろう（区別するには，局所的に測定可能な量 $\Phi_{,j} = \Gamma^j_{00}$ を無限遠まで積分しなければならない）．そして (2) 天文学的なデータは，実在の宇宙は空によって取り囲まれた物質の島であることを否定する．

上に記述されたものとしての Galilei 的座標と Newton 的時空を，Lorentz 座標および特殊相対性理論の Minkowskii 時空，そして一般的な座標および一般相対性理論の Einstein 時空と比較することは教訓的である．コラム 12.2 および 12.3 をみよ．

コラム 12.2　Newton 的時空，Minkowskii 的時空，および Einstein 的時空：比較と対照

質　問	Newton 的時空	Minkowskii 的時空（特殊相対論）	Einstein 的時空（一般相対論）
時空はどのような**先験的**幾何学的な構造をもつか?	(1) 宇宙時間関数 t (2) 共変微分 ∇ (3) 空間の計量 “·”，しかし時空の計量は**定義できない**（練習問題 12.10）	平坦な時空の計量（ゼロRiemann曲率）	時空の計量

*10　絶対的な Galilei 的座標が定義される
*11　絶対的な Galilei 的座標系をつなぐ変換

どのような優先的な座標系が存在するか？	(1) 一般に Galilei 的座標 (2) 島宇宙での絶対的な Galilei 的座標（この場合はここでは考えない）	Lorentz 座標	一般に，すべての座標系は等しく優先される（対称性をもつ特別な場合には特別な優先される座標があるけれども）
特別な優先される座標系を選び出すには何が要求されるか？	(1) ただ 1 つの空間の方向づけ，すべての時空を通して同じ (3 個の Euler 角) (2) 空間座標の原点の任意の世界線（3 個の時間の関数）	(1) ただ 1 つの空間の方向づけ，すべての時空を通して同じ (3 個の Euler 角) (2) 座標原点の位置 (4 個の数) (3) 空間座標の原点の速度（3 個の数）	すべての 4 個の位置の関数 $x^{\alpha}(\mathcal{P})$
"$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が同時である" ということはどんな条件のもとでよく定義されるか？	一般にできる．それは座標によらない幾何学的な概念である	Lorentz 系の選択がなされた後初めて，"同時" は系の速度に依存する	時間座標の任意の選択がなされて初めて
"$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が空間内の同じ点で起こる" ということはどんな条件のもとでよく定義されるか？	Galilei 的座標の選択がなされて初めて	Lorentz 座標の選択がなされて初めて	空間の座標の任意の選択がなされて初めて
"異なる事象で $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が同じ方向を指し示す" ということはどんな条件のもとでよく定義されるか？	$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ がともに空間ベクトル ($\langle \boldsymbol{d}t, \boldsymbol{u}\rangle = \langle \boldsymbol{d}t, \boldsymbol{v}\rangle = 0$) である場合，あるいはそれらが同じ空間層に存在し，任意のベクトルである場合，あるいは平行移動によってそれらを比較するための，それらの位置を結ぶ優先された経路が存在する場合に限り	つねに	$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が互いに無限小近傍の事象に存在する場合，あるいは平行移動によってそれらを比較するための，それらの位置を結ぶ優先された経路（たとえば，一義的な測地線）が存在する場合に限り

“$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の間の不変距離”はどのような条件のもとでよく定義されるか?	$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が同じ空間層内に存在する場合に限り	つねに	$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が互いに十分接近している場合，あるいは距離を測定するための，それらを結ぶ一義的な優先された世界線(たとえば，測地線)が存在する場合に限り

コラム 12.3　Cartan を通しての Newton 的重力，および Einstein 的重力：比較と対照

性　質	Newton–Cartan	Einstein
概念の要約（非常に異なる範囲の等価原理の定式化）	局所的な，自由落下する，非回転系での自由粒子の運動法則は重力の存在しない Galilei 系で表された Newton の運動法則に同等である	局所的な，自由落下する，非回転系での物理学の法則は，Lorentz 系での特殊相対性理論で定式化された物理学の法則と同等である
概念をさらに簡単に述べる	質点の力学は局所慣性系で単純である	すべては局所慣性系で単純である
結果（Roll–Krotkov–Dicke の実験によって 10^{11} 分の 1 まで確かめられている）	同じ最初の位置と同じ初速度で出発したさまざまな成分をもつ試験粒子は，同じ世界線に従う（“測地線の定義”）	同じ最初の位置と同じ初速度で出発したさまざまな成分をもつ試験粒子は，同じ世界線に従う（“測地線の定義”）
他の結果	すべての局所的な領域で，局所系（“自由落下する系”）が存在し，そこではすべての測地線は直線となる（すべての $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = 0$）	すべての局所的な領域で，局所系（“自由落下する系”）が存在し，そこではすべての測地線は直線となる（すべての $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = 0$）

光線が実在の物理学的世界を通過する方法の結果	無視するあるいは回避する．すべての光線は同じ速度をもつ？ 速さは源の運動に依存する？ 速さは観測者の運動に依存する？ 光線に追いつくほど速く動くことができる？ これらの問題のいずれについても満足な見解はない	時空はつねにそしていたるところ，局所 Lorentz 性質をもつ
時空構造の要約	空間的な層に形成される．各層での幾何学は Euclid 的である．各層は宇宙時間（測地線パラメータ）の値で特徴づけられる．1 つの層の他の層についての変位は定義されない．時空間隔のようなものはない	層形成はない．すべての事象とすべての近傍の事象との間にはよく定義された間隔がある．時空はいたるところで局所 Lorentz 性質をもつ．1 つの局所系（特別な空間軸と時間軸）は他の局所系（他の空間軸と時間軸）と同じようによい．層形成されるよりも むしろ"一様である"
数学的な言葉で表された構造	$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ である．時空計量は，$g_{\mu\nu}$ ではない．$\Gamma^i{}_{00} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$ $(i = 1, 2, 3)$，すべての他の $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ はゼロである	$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ は独立な存在でない．すべては $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\right)$ から導かれる（"重力の計量理論"）

［**練習問題**］

12.4　回転し，加速している座標に対する接続係数

Galilei 的座標系 $\{x^\alpha(\mathcal{P})\}$ の接続係数に対する式 (12.4) から始めて，式 (12.13) の座標系 $\{x^{\alpha'}(\mathcal{P})\}$ の接続係数 (12.14) を導け．これから，式 (12.15) は $\{x^{\alpha'}(\mathcal{P})\}$ が Galilei 的であるために必要かつ十分であることを確かめよ．

12.5　Einstein のエレベータ

本章の公式を用いて "Einstein のエレベータ"，すなわち，"重力" は基準系の加速度に等価であることを議論せよ．"重力" のどの様相が加速度に等価であり，どの様相が等価で

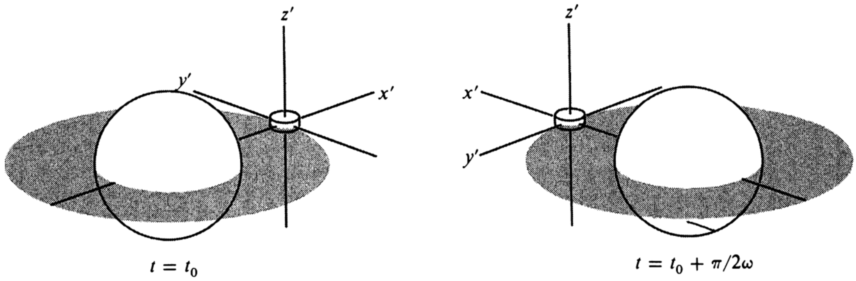


図 12.1　軌道実験室が地球の周りの円軌道を動くときに，軌道実験室によって運ばれる座標系．

ないか？

12.6　地球上高いところでの測地線のずれ

人が乗り込んでいる軌道上の実験室が地球周りの円軌道［軌道半径 $= r_0$，角速度 $= \omega = (M/{r_0}^3)^{1/2}$—なぜか？］に置かれている．宇宙飛行士が廃棄物の袋を投げ捨て，それが測地線の経路に沿って動くのを観察する．彼は（非 Galilei 的）空間座標 $\{x^{j'}(\mathcal{P})\}$（図 12.1 をみよ）に対するその動きを観察する．この空間座標は，(1) 宇宙時間の各瞬間で Euclid 的であり $[(\partial/\partial x^{j'})\cdot(\partial/\partial x^{k'}) = \delta_{j'k'}]$，(2) 実験室の中心に原点をもち，(3) 地球から離れた方向を示す $\partial/\partial x'$ をもち，(4) 軌道面に $\partial/\partial x'$ および $\partial/\partial y'$ をもつ．測地線のずれの式を用いてこの座標系での廃棄物の袋の運動を計算せよ．実験室および廃棄物の Kepler 的軌道を吟味して答えを確かめよ．ヒント：(1) テンソル成分の簡単な変換によってこの座標系での $R^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'\delta'}$ を計算せよ．(2) 式 (12.14) を用いて実験室の中心での（すなわち，基準測地線上の）$\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}$ を計算せよ．

12.4　Newton 的重力の幾何学的な，座標に依存しない定式化

座標によらない，幾何学的な言葉で Newton の重力理論を述べ直すことが本章の主要な目標である．それはすでに，特別な種類の座標系，Galilei 的座標からの大きな助けで達成されている．Galilei 的座標から完全に座標に依存しない言葉に到達することは，原理的に簡明である．たんに添字記号から抽象的な記号へ移行するだけである．

例：Galilei 的座標の条件 $\Gamma^0{}_{\alpha\beta} = 0$ を座標に依存しない言葉で述べ直せ．

解：$\Gamma^0{}_{\alpha\beta} = -\langle \boldsymbol{\nabla}_\beta \boldsymbol{d}t, \boldsymbol{e}_\alpha \rangle$ を書け．すべての α に対してこれがゼロであることは，すべての β に対して $\boldsymbol{\nabla}_\beta \boldsymbol{d}t = 0$ を意味する．それは今度はすべての $\boldsymbol{u}$ に対して $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{d}t = 0$ を意味する．言葉で言えば，**宇宙時間の勾配は共変的に一定である．**

*12　この手続きによって，非幾何学的な形に完全に同等な，Newton の重力理論の標準的な，Newton 的時空について，1 組の座標に依存しない陳述（コラム 12.4）を構成することが

[*12] Newton の重力理論に対する座標に依存しない，幾何学的な公理

できる．標準的な Newton 的理論から，これらの幾何学的な陳述を演繹することができる（練習問題 12.7）．公理とみなされる，これらの幾何学的な陳述から，標準的な Newton 的理論を演繹することができる（練習問題 12.8）．

［練習問題］

12.7　Newton から Cartan へ

Newton 的理論の標準的な公理（コラム 12.4 の最後の部分）から幾何学的な公理（コラム 12.4 の最初の部分）を導け．**提案される手続き：**幾何学的な公理のおのおのを Galilei 的座標系での計算によって確かめよ．12.1 節での計算と結果を自由に使え．

12.8　Cartan から Newton へ

Newton 的理論の幾何学的な公理（コラム 12.4 の最初の部分）から標準的な公理（コラム 12.4 の最後の部分）を導け．**提案される手続き：**(1) ある事象 $\mathcal{P}_0$ で 3 個の直交する，空間基底ベクトル（$\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k = \delta_{jk}$）をとれ．それらのおのおのを時空内のすべての他の事象へ任意の経路によって平行移動せよ．

(2) すべての $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{n}$ に対する条件 $\mathcal{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})\boldsymbol{e}_j = 0$［公理 (3)］および 11.5 節におけるような議論を用いて (a) 生じるベクトル場 $\boldsymbol{e}_j$ は任意の移動経路によらない，(b) 生ずる場に対して $\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{e}_j = 0$，そして (c) $[\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k] = 0$ を結論せよ．

(3) 各空間層（一定の t の層）を一度しかも一度だけ通過する任意の“時間線”をとれ．それを t でパラメータ化し，それに沿う各事象で基底ベクトル $\boldsymbol{e}_0$ としてその接線ベクトルを選べ．これらの $\boldsymbol{e}_0$ のおのおのをその相応する空間層を通して任意の経路で平行移動せよ．

(4) 公理 (4) から生ずる場は移動経路によらないことを結論せよ．また上の構成手続きは $\boldsymbol{\nabla}_j \boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{\nabla}_0 \boldsymbol{e}_j = 0$ を保証することを示せ．

(5) 4 個の基底ベクトル場のすべての対に対して $[\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta] = 0$ を示し，これから $\boldsymbol{e}_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$（11.5 節および練習問題 9.9 をみよ）であるような座標系（“Galilei 的座標”）が存在することを結論せよ．

(6) この座標系ではいたるところで $\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k = \delta_{jk}$（空間座標は Euclid 的である），そして接続係数の唯一のゼロでない成分は $\Gamma^j{}_{00}$ であることを示せ．ここに公理 (6) および (2) は有用であるだろう．

(7) Jacobi 曲率演算子の自己同形（公理 7）の性質から $R^j{}_{0k0} = R^k{}_{0j0}$ を示せ．接続係数の言葉でこれは $\Gamma^j{}_{00,k} = \Gamma^k{}_{00,j}$ となることを示せ．そしてこれから $\Gamma^j{}_{00} = \Phi_{,j}$ となるようなポテンシャル Φ が存在することを結論せよ．

(8) 幾何学的な場の方程式（公理 5）は Poisson の方程式 $\nabla^2 \Phi = 4\pi\rho$ に帰着することを示せ．

(9) 自由落下に対する測地線の方程式（公理 8）は Newton 的な運動方程式 $d^2x^j/dt^2 + \Phi_{,j} = 0$ に帰着することを示せ．

コラム 12.4　Newton 的重力：幾何学的な定式化が標準的な定式化と対照される

幾何学的な定式化

Newton の重力理論と Newton 的時空の性質は以下の公理（導出に対しては練習問題 12.8 をみよ）から導かれうる．

(1) “宇宙時間” とよばれる関数 t と，対称的な共変微分 $\boldsymbol{\nabla}$（関連した測地線，平行移動則，曲率演算子などとともに）が存在する．

(2) 1–形式 $\boldsymbol{d}t$ は共変的に一定である．すなわち，

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{d}t = 0 \qquad \text{すべての } \boldsymbol{u} \text{ に対して}$$

[**結果**：もし $\boldsymbol{w}$ が空間ベクトル場（すなわち，$\boldsymbol{w}$ がいたるところで一定の t の面内に存在する．すなわち，いたるところで $\langle \boldsymbol{d}t, \boldsymbol{w}\rangle = 0$ であるならば)，$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}$ もまたいかなる $\boldsymbol{u}$ に対しても空間層内に存在する．

$$\langle \boldsymbol{d}t, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}\rangle = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\underbrace{\langle \boldsymbol{d}t, \boldsymbol{w}\rangle}_{[\text{つねに } 0]} - \langle\underbrace{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{d}t}_{[\text{つねに } 0]}, \boldsymbol{w}\rangle = 0]$$

(3) 空間ベクトルは無限小の閉曲線周りの平行移動によって不変である．すなわち，$\mathcal{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})\boldsymbol{w} = 0$．もし $\boldsymbol{w}$ がすべての $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{n}$ に対して空間層内に存在するならば．

(4) すべてのベクトルは無限小の，空間層内に存在する，閉曲線周りの平行移動によって不変である．すなわち，

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0 \qquad \text{すべての } \boldsymbol{v} \text{ および } \boldsymbol{w} \text{ に対して}$$

(5) Ricci 曲率テンソル，$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta}$，は

$$\boldsymbol{Ricci} = 4\pi\rho\, \boldsymbol{d}t \otimes \boldsymbol{d}t$$

の形をもつ．ここに ρ は質量密度である．

(6) 空間ベクトルのみについて定義された計量 “·” が存在する．それは次の意味で共変微分と共存できる．任意の空間に対して，層内に存在する $\boldsymbol{w}$ および $\boldsymbol{v}$ に対して，そして任意の $\boldsymbol{u}$ に対して，それが何であろうと次のようになる．

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v})$$

[注：公理 (1)，(2)，および (3) はこのような空間計量が存在できることを保証する．練習問題 12.9 をみよ.]

(7) 任意のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}$ に対して

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}[\mathcal{R}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{n})\boldsymbol{u} + \mathcal{R}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{n}]$$

で定義される Jacobi 曲率演算子 $\mathcal{J}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})$ は，空間ベクトルに作用するときは **"自己同形"** である．すなわち，

$$\boldsymbol{v}\cdot[\mathcal{J}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})\boldsymbol{w}] = \boldsymbol{w}\cdot[\mathcal{J}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})\boldsymbol{v}]$$
すべての空間層内に存在する $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対して，そして任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n}$ に対して

(8) "理想的なものさし" は空間計量で計算される長さを測定する，"理想的な時計" は宇宙時間 t (あるいはそのある倍数) を測定する，そして "自由落下する粒子" は $\boldsymbol{\nabla}$ の測地線に沿って動く．[注：これは "理想的なものさし"，"理想的な時計"，および "自由落下する粒子" の定義とみなされうる．より完全な理論 (たとえば，一般相対性理論，16.4 節をみよ)] は与えられた物理学的なものさしあるいは時計は理想的であるかどうか，そして与えられた実在の粒子は自由落下するかどうかを前もって予言するだろう.]

注：代わりのしかし同等な公理の組に対しては，Trautman (1965) の p.106–107 をみよ．

標準的な定式化

以下の標準的な公理は上述の公理と同等である．

(1) 宇宙時間 t，1 組の直交空間座標 x^j ("Galilei 的座標" とよばれる)，そして Newton 的重力ポテンシャル Φ が存在する．

(2) 質量密度 ρ は Poisson の方程式

$$\boldsymbol{\nabla}^2\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\,\partial x^j} = 4\pi\rho$$

によって Newton 的ポテンシャルを生成する．

(3) 自由落下する粒子に対する運動方程式は

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^j} = 0$$

である．

(4) "理想的なものさし" は Galilei 的座標による長さを測定し，"理想的な時計" は宇宙時間を測定する．

12.9　他の公理によって許される空間計量

コラム 12.4 の幾何学的な公理 (1), (2), および (3) は公理 (6) を満たす空間計量の導入が許されることを示せ．**ヒント**：ある事象で任意の空間基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ をとる．それは直交する $\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k \equiv \delta_{jk}$ と**定義**せよ．この基底を練習問題 12.8 の (1) で用いられた方法によってすべての時空に広げよ．時空内のいたるところでこの基底に対して $\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k \equiv \delta_{jk}$ を定義せよ．それから，生ずる計量は公理 (6) の共存条件を満たすことを証明せよ．

12.10　他の公理によって禁止される時空の計量

Newton 的時空で，すべてのベクトルについて定義されていて，縮退していない時空の計量 $\boldsymbol{g}$ を構成することは不可能であることを示せ．$\boldsymbol{g}$ は

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{p}) \tag{12.20}$$

の意味で共変微分と共存する．**注意**：これを証明するには 8 章あるいは 13 章の教材を修得することが必要である．したがってこれと取り組む前に 8 章あるいは 13 章のいずれかを研究せよ．**ヒント**：このような $\boldsymbol{g}$ が存在すると仮定せよ．練習問題 12.8 の方法によって，Galilei 的座標系で空間成分 g_{jk} は時空内の位置によらないことを示せ．それから，これおよび Galilei 的座標での $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ の形を用いて R_{j0k0} および $-R_{0jk0}$ は同じでない，すなわち，共存する計量と共変微分をもつ多様体での Riemann テンソルの対称性 (8.45) と矛盾する結果であることを証明せよ．

12.5　物理学の幾何学的な観点：批評

重要な，別の話をする必要がある．

“すべての物理学的な量は（座標に依存しない）幾何学的な対象によって記述されなければならない．そして物理学の法則はすべてこれらの幾何学的な対象間の幾何学的な関係として表現できなければならない.” ときには **“一般共変性の原理”** として知られる物理学のこの観点は，20 世紀の考えに広く行きわたっている．しかしそれはどのような強制的な内容をもっているか？　イイエ，Kretschmann (1917) にさかのぼる 1 つの観点によれば，まったくもっていない．もともと特別な座標系で書かれたどのような物理学の理論も幾何学的な，座標に依存しない言葉で練り直されうる．Newton 的理論は，その同等で幾何学的な標準の定式化（コラム 12.4）をもつ良い例である．したがって，存立できる理論を存立できない理論から分離することに対するふるいとして，一般共変性の原理は役に立たない．

しかし他の観点は説得力がある．それはわずかに変化されたそしてわずかにより曖昧な原理の形で有力なふるいを構成する．“自然は座標に依存しない，幾何学的な言葉で述べら

*13　一般共変性の原理は強制的な内容をもたない

*14　20 世紀の観点は幾何学的な定式化の単純性によって理論を判断する

れたとき単純である理論を好む”*．この原理によれば，自然は一般相対性理論を愛さなければならず，そして Newton 的理論を憎まねばならない．かつて物理学者によって抱かれた
*15
たすべての理論の中で，一般相対性理論はもっとも単純で，もっとも優雅な幾何学的基礎［3 つの公理：(1) 計量がある，(2) 計量は Einstein の場の方程式 $\boldsymbol{G} = 8\pi \boldsymbol{T}$ によって支配される，(3) 物理学のすべての特殊相対論的な法則は計量の局所 Lorentz 系で成り立っている］をもつ．対照的に，どのような悪魔のように利口な物理学者が Newton 的理論のような複雑な幾何学的な基礎をもつ理論を人間にいつまでも押しつけるのだろうか？

もちろん 19 世紀の観点からは，役割は逆である．それは理論の座標による定式化を吟味することによって理論の単純さを判断した．Galilei 的座標で，Newton 的理論は美しく単純である．特別な座標系での計量係数に対する微分方程式として表すと，Einstein の場の方程式は恐ろしく複雑である（実は 10 個の計量係数！）．

幾何学的な，20 世紀の観点が広く行われているのは，実験データともっともよく一致するからである（38–40 章をみよ）．17 章で Einstein の場の方程式を説得力のあるものにみせることが，冷酷に適用されるだろう．

---

*　明白にこの原理は擬人論である．20 世紀の物理学者はこのような理論を好み，そしてそれらを観測データを関連づけるのに有効であると見出しさえする．したがって，自然はそれらをまた好まねばならない！

*15　Einstein の重力理論は単純であり，Newton の重力理論は複雑である

13 章
Riemann 的幾何学：すべての基礎としての計量

哲学はこの偉大な本に書かれている（哲学とは宇宙を意味する），この本はいつでもみることができるが，この本に書かれている言葉を理解し，そして記号を解釈する方法をまず学ばなければ理解できない．そしてその記号は三角形，円，そして他の幾何学的な図である．それらなしにはこの本の一語すら理解することは人間の力では不可能である．これらの記号がなければ暗い迷路の中をさまようだろう．

GALILEO GALILEI (1623)

[本章は完全にトラック–2 である．9–11 章は 13 章に対して必要な準備である．本章は (1) 14 章の後半（曲率の計算），および (2) 15 章（Bianchi の恒等式）の詳細であるが，しかし主旨でないことに対する準備として必要だろう．13.6 節（適当な基準系）は重力理論の応用（18–40 章）を通して有用であるだろう.]

13.1 特殊相対性理論の局所的な妥当性によって幾何学に課される新しい特徴

自由落下する粒子（測地線）は時空の構造を定義しそして調べる．この時空は曲がっている．重力は時空の曲率の表示である．ここまでは，Cartan による幾何学的な言葉に翻訳されたものとしての Newton の重力理論でよい．しかし，絶対に受け入れられないものは Cartan–Newton 観点（12 章）のさらなる結果である．すなわち，時空を 1 つの層内の事象と他の層内の事象間の時空の分離に対して何の意味ももたない，滑らせうる層へ階層化することである．

*1 物理学のすべての基礎の中で，特殊相対性理論より以上に堅固に確立されたものはなく，そして特殊相対性理論のすべての教訓の中で以下のもの以上に大きい力で際立っているものはない．(1) 時空は，階層化されているどころか，重力的な潮汐を生み出す効果（“時空の曲率”）が無視できるだけの任意の小さい領域（“局所領域”）を通して一様で等方性である．(2) 局所的な実験は何であれ，1 つの局所慣性系を他の局所慣性系から区別できない．(3) 光の速さはすべての局所慣性系で同じである．(4) 時間についての分離に系によらない意味を与えることは不可能である（“Newton 的な階層化は存在しない”）．(5) すべての事象とすべての近傍の事象との間には系によらない，座標によらない時空間隔（“Riemann 的幾何学”）が存在する．(6) 時空はつねにそしていたるところで局所的に Lorentz 的性質をもつ（この “Riemann 的幾何学の局所 Lorentz 的性質”）．

*1 特殊相対性理論によって時空に課される制限

*2 数学はこれらすべての物理学的な性質に何を与えるか？ 計量，局所的に Lorentz である計量（13.2 および 13.6 節）．そうすると他のすべてのものが後に続く．とくに，計量は Newton 的時空の階層化された構造を，その重力ポテンシャルや宇宙時間座標とともに破壊する．しかし破壊されないものは Newton 的重力のもっとも深い特徴，(1) 等価原理（自由落下運動の測地線記述に含まれるものとして，13.3 と 13.4 節），および (2) 時空の曲率（潮汐効果によって測定されるものとして，13.5 節）である．

ベクトル，形式，テンソル（9 章），測地線，平行移動，共変微分（10 章），および曲率（11 章）の摩天楼は崩壊する基礎，すなわち Newton 的物理学およびそれに基づいた測地線の法則に支えられている．しかし計量が今や存在して，全摩天楼は隙間が現れずに新しい基礎に移行されうる．1 つの変化だけが必要である．測地線の法則は新しい相対論的な方法，計量に基づいた方法（13.3 および 13.4 節）で選ばれなければならない．計量の基礎に支えられて，時空の曲率は付加的なそしてより強い性質を得る（摩天楼は再装飾されそして拡張される）．それは 13.5 節および 14 章と 15 章で解説され，そしてほとんどいや応なく Einstein の場の方程式に通ずる．

13.2 計　　量

時空の計量，曲がった時空の計量，局所的に Lorentz で曲がった時空の計量．これが，
*3 実在の物理学的な世界での時空幾何学の基礎である．そこで，時間をとって，3 つの対照的な言葉で “計量” とは何であるかを思い出そう．

基本的な幾何学の言葉で，“計量” は，すべての事象とすべての他の事象との間の間隔を与える計算表である（コラム 13.1 と図 13.1）．座標の言葉では，“計量” は，10 個の位置の関数 $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ の組であって，表現

$$\Delta s^2 = -\Delta\tau^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha)\Delta x^\mu \Delta x^\nu \tag{13.1}$$

は任意の事象 x^α と任意の近傍の事象 $x^\alpha + \Delta x^\alpha$ との間の間隔を与える．抽象的な微分幾何学の言葉では，計量は双一次の機械，$\boldsymbol{g} \equiv (\cdots\cdots)$ であって，2 つの接線ベクトル，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ から数［“スカラー積 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \equiv (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$”］を生み出す．

抽象的な機械の観点と具体的な座標の観点との間の連携は容易に示される．接線ベクトル

$$\boldsymbol{\xi} \equiv \Delta x^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha = \Delta x^\alpha (\partial/\partial x^\alpha)$$

は 2 つの近傍の事象間の変位を表すものとする．抽象的な観点はそれらの事象間の間隔に対して，次式を与える．

$$\Delta s^2 \equiv \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} \equiv \boldsymbol{g}(\Delta x^\mu \boldsymbol{e}_\mu, \Delta x^\nu \boldsymbol{e}_\nu) = \Delta x^\mu \Delta x^\nu \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu)$$

---

*2 計量：制限を課す道具
*3 3 つの言葉で記述される計量

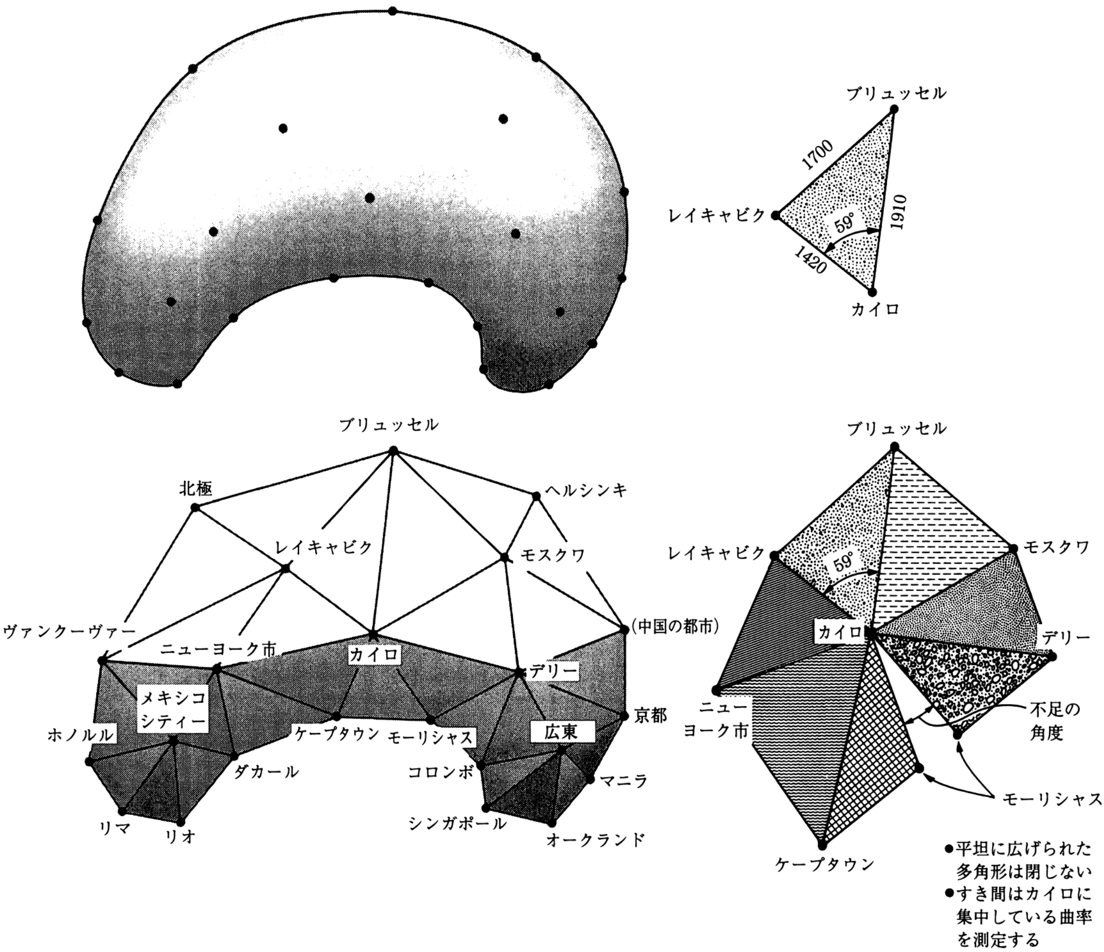
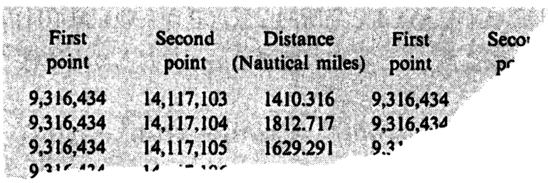


図 13.1　距離が幾何学を定める．左上：十分に大きい潮汐力が，ちょうどよいタイミングで地球に加えられ，地球を涙の一滴の形に変形させている．左下：この涙の一滴が三角形からつくられている多面体によって近似されている（“骨組み幾何学”）．近似は，三角形の数を十分に大きくしおのおのの三角形の大きさを十分に小さくすることによって，十分によくなされうる．右上：おのおのの三角形における幾何学は Euclid 的である．3 個の稜の長さを与えることは示されている角度を含めて，図のすべての特徴を固定する．右下：与えられた頂点に属する三角形は，平坦な面上に広げてみせられると，交わらなくなる．不足の角度は涙の一滴の地球上のその頂点に集中されている曲率の量を測定する．涙の一滴のすべての頂点に対するこれらの不足の角度の和は 4π に等しい．この “Gauss–Bonnet 定理” は 2–球のトポロジーをもつ任意の図に対して成り立つ．すべての図の中でもっとも単純な図，四面体に対しては，おのおのの頂点で 180° の不足の角度をもつ 4 個の頂点が必要とされる，すなわち利用できる三角形あたり，3 個の三角形 $\times 60° = 180°$ の不足．要するに，涙の一滴の形は，与えられた骨組み幾何学の近似で，50 個のみえる稜の長さプラス，たとえば，32 個の図の背後に隠れているさらなる稜の長さ，あるいは 82 個の稜の長さの全体によって，そしてそれのみで，定められる（“距離は幾何学を定める”）．“計量” はすべての点とすべての近傍点との間の距離を示す．もし火山活動がレイキャビクをもち上げるならば，アイスランドの首都と近傍点との間の距離はそれに応じて増大する．距離は再び形を示す．逆に，アイスランドの近辺で地球上に大きい隆起が存在しないということ，および地球は涙の一滴の形をもたないということは，距離の測定以外のどのような観測も必要なく，十分によく分布された点の網内で点から点への距離のパターンを解析することによって明確に確立されうる．

コラム 13.1　距離から抽出される計量

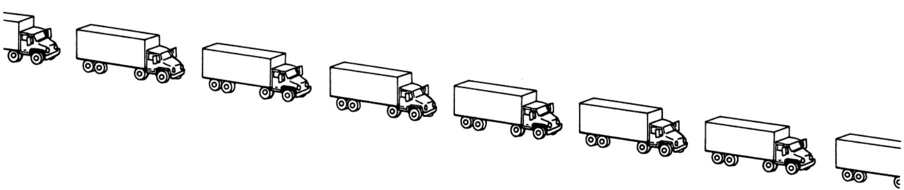
距離についての生のデータ

地球の形は図 13.1 におけるように，同定できるおもな点（たとえばブイ，船，氷山，灯台，山頂，および旗など $n = 2\times10^7$ 個の全体に達する点）の間の距離を与えることによって記述されるものとする．与えられるべき距離の全数は $n(n-1)/2 = 2\times10^{14}$ である．出力には 1 ページあたり 200 個の距離が載るから，これは各ページ 6 g の重



First point	Second point	Distance (Nautical miles)	First point	Seco[illegible] p[illegible]
9,316,434	14,117,103	1410.316	9,316,434	
9,316,434	14,117,104	1812.717	9,316,434	
9,316,434	14,117,105	1629.291	9.3[illegible]	

さの 10^{12} ページ，あるいは 6×10^6 トン（1,000 kg）のデータを意味する．トラック 1 台あたり 6 t とするとこれは 10^6 個のトラック荷重分のデータを意味する．あるいはトラックが 5 秒に 1 台ずつ進むとすると，データを集めるために 5×10^6 秒あるいは 2 ヶ月の昼夜かかることを意味する．



1 番目の抽出：近傍点までの距離だけ

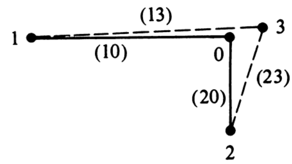
遠く離れた点の間の距離を基本的な短い行程の旅行で覆われる距離を加えることによって得る．距離表を要約して各点と 100 個の近傍点との間の距離だけを与えよ．今や $100n = 2\times10^9$ 個の距離，あるいは $2\times10^9/200 = 10^7$ ページのデータ，あるいは 60 t の記録，あるいは 10 個のトラック荷重となる．

2 番目の抽出：計量による近傍点間の距離

地球の表面を滑らかであると理想化する．そうすると任意の十分限定された領域では幾何学は Euclid 的である．この事情は幸せな結果をもたらす．近傍点間のすべての距離を定めうるには近傍点間の若干の距離を知れば十分である．図の（102）が直角三角形になるように点 2 の位置を定める．こうして，$(12)^2 = (10)^2 + (20)^2$ である．

0 に近い点 3 を考える．

$$x(3) = (13) - (10)$$



そして

$$y(3) = (23) - (20)$$

そうすると距離 (03) は独立に与えられるには及ばない．それは公式*

$$(03)^2 = [x(3)]^2 + [y(3)]^2$$

から計算できる．点 4 と局所的な原点 0 からの距離 (04) に対しても同様である．0 に近い任意の 2 点 m と n 間の距離 (mn) に対しても同様である．

$$(mn)^2 = [x(m) - x(n)]^2 + [y(m) - y(n)]^2$$

こうして 0 に近いすべての点 n から 0 に近い各点 m までの距離を求めることができるためには，点 $m(m = 3, 4, \cdots, N+2)$ に対して距離（$1m$）（点 1 から）および（$2m$）（点 2 から）をもつことだけが必要である．これら N 個の近傍点間の $N(N-1)/2$ 個の距離を定める手続きは以下の言葉で有利に再表現されうる．(1) 各点は 2 個の座標，x と y をもつ，そして (2) 距離はこれらの座標で標準的な Euclid 的計量によって与えられる．こうして

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

---

* もし距離 (03) が任意に与えられるならば，生ずる 4 頂点図は平面から飛び出すだろう．3 次元の Euclid 的空間での 4 面体とみなすと，Niccolo Fontana Tartaglia（1500–1557）の公式で与えられる体積をもつ．今日［Blumenthal（1953）］

$$\begin{pmatrix} (n+1)\text{ 個の点} \\ \text{によって結ばれ} \\ \text{た } n \text{ 次元の単体} \\ \text{の体積} \end{pmatrix} = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)^{1/2} \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & (01)^2 & (02)^2 & \cdots & (0n)^2 \\ 1 & (10)^2 & 0 & (12)^2 & \cdots & (1n)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & (n0)^2 & (n1)^2 & (n2)^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}^{1/2}$$

に一般化され，3 点に対しては Alexandra の Hero（西暦 62 年から西暦 150 年まで）の標準的な教科書の公式に帰着する．三角形の面積に対しては

$$\text{面積} = \{s[s-(01)][s-(02)][s-(12)]\}^{1/2},$$

$$2s = (01) + (02) + (12)$$

逆に，もし 4 点が 2 次元 Euclid 的空間内に留まるべきであるとすれば，4 面体はゼロ体積につぶれねばならない．この要求は 1 つの距離 (03) に 1 つの条件を与える．それは (03) を小さくとりそして (102) が上述のように，直角三角形であるとするこの条件の議論を単純化する．しかし，一般的な原理はこのような近似によらない．そして拡張された Hero–Tartaglia 公式から直接出る．n 次元の局所的に Euclid 的あるいは Lorentz 空間で，$(n+1)$ 個の基準点 $0, 1, 2, \cdots, n$ を規定してしまい，そしてすべての他の点 $j, k, \cdots$ の互いに他からの距離（"座標による近傍点間の距離"，距離のデータの抽出としての計量）を計算できるために，これらの点 $j, k, \cdots$ の基準点からの距離を知れば十分である．

“距離幾何学”（これについてさらなる知識についてはRobb（1914および1936）をみよ）の基礎についてここまできたから，小さい領域（Euclid的）から大きい領域（非Euclid的）へ一般化できる．いたるところで独立な曲線座標 x^k の任意の滑らかな対を導入し，点0のごく近傍でだけではなく，面のすべての点（別な座標の部分へ行かねばならない場所を除く．2–球に対しては少なくとも2つの部分が必要とされる）のごく近傍での距離を公式

$$ds^2 = g_{jk}\, dx^j\, dx^k$$

で表せ．こうして近傍点間の距離の表から今や，点あたり5個の数（2個の座標，x^1, x^2，そして3個の計量係数，$g_{11}, g_{12} = g_{21}$，そして g_{22}）を抽出し，$100/5 = 20$ の因子だけ前の数から減らした（今や3tのデータ，あるいは半分のトラック荷重）．

3番目の抽出：座標の解析関数として表された計量係数

面の $2{\times}10^7$ 個の点のおのおので3個の計量係数を与える代わりに，それらを2個の座標 x^1, x^2 の関数として，べき級数あるいは球関数についての展開あるいは適度な数，たとえば100個の調整可能な係数を与える．そうすると幾何学そのものについての情報（その幾何学上に位置している $2{\times}10^7$ 個の点の座標と異なるものとして）はこれらの300個の係数，ただ1ページの出力で理解される．どんなトラックにもさようなら！　要するに，計量はすべての点とすべての他の点との間の距離を与える省略表現の方法を与える．しかしその役割，その正当化およびその意味は，これらの距離そしてこれらの多くの距離にのみ存在する．

座標の観点 (13.1) との比較は

*4
$$g_{\mu\nu} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu) = \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu \tag{13.2}$$

を示す（テンソルの成分を計算するための標準的な式）．

*5 ちょうど現代の微分幾何学は古い型の“微分”df を“微分形式”$\boldsymbol{d}f$（コラム2.3）で置き換えるように，それはまた古い型の“線要素”

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = (\text{“}x^\alpha \text{ と } x^\alpha + dx^\alpha \text{ との間の間隔”}) \tag{13.3}$$

を双一次機械（“計量テンソル”）

$$\boldsymbol{g} \equiv \boldsymbol{ds}^2 \equiv g_{\mu\nu}\, \boldsymbol{d}x^\mu \otimes \boldsymbol{d}x^\nu \tag{13.4}$$

で置き換える．この機械の出力 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})$ は，与えられた変位ベクトルの入力に対して，古い型の間隔に同等である．したがって，$\boldsymbol{ds}^2 = g_{\mu\nu}\, \boldsymbol{d}x^\mu \otimes \boldsymbol{d}x^\nu$ は指定されていない変位の間隔を表している．そして $\boldsymbol{\xi}$ を $\boldsymbol{ds}^2$ の投入口に挿入する行為は明確な変位の間隔 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = g_{\mu\nu}\, \Delta x^\mu \Delta x^\nu$ を明確にする行為である．

*4　計量の共変成分

*5　“双一次機械としての計量”と比較される“線要素”

計量をもつ曲がった時空では，ちょうど計量をもつ平坦な時空（2.5 節）におけるよう
*6 に，特別な 1–形式 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ は任意の与えられた接線ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対応する．

$$\tilde{\boldsymbol{u}} \text{ は “すべての } \boldsymbol{v} \text{ に対して } \langle\tilde{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{v}\rangle \equiv \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\text{” で定義される} \tag{13.5}$$

（“同じ物理量のベクトルおよび 1–形式の 2 つの選択的なバージョンでの表示”，$\binom{1}{0}$ テンソルとしての，また $\binom{0}{1}$ テンソルとしての “対応する表示”.）**例**：基底ベクトル $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_\alpha$ に対応する 1–形式 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ は成分

$$u_\beta = \langle\tilde{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{e}_\beta\rangle \equiv \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_\beta) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_\alpha,\boldsymbol{e}_\beta) = g_{\alpha\beta}$$

［u_β を計算する標準的な方法］　［定義 (13.5)］　［$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_\alpha$ によって］　［式 (13.2)］

をもつ．

こうして

$$g_{\alpha\beta}\boldsymbol{\omega}^\beta \text{ は } \boldsymbol{e}_\alpha \text{ に対応する 1–形式 } \tilde{\boldsymbol{e}}_\alpha \text{ である} \tag{13.6}$$

また平坦な時空におけるように（3.2 節），テンソルはベクトルであれ 1–形式であれ任意の与えられた投入口に受け入れることができる

$$\boldsymbol{S}(\tilde{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{v}) \equiv \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{v}) \tag{13.7}$$

*7 同等に，成分の言葉で，テンソルの添字は計量の共変成分で下げることができる．

$$S_\alpha{}^\beta{}_\gamma = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{e}_\alpha,\boldsymbol{\omega}^\beta,\boldsymbol{e}_\gamma) = \boldsymbol{S}(\tilde{\boldsymbol{e}}_\alpha,\boldsymbol{\omega}^\beta,\boldsymbol{e}_\gamma) = \boldsymbol{S}(g_{\alpha\mu}\boldsymbol{\omega}^\mu,\boldsymbol{\omega}^\beta,\boldsymbol{e}_\gamma) = g_{\alpha\mu}S^{\mu\beta}{}_\gamma \tag{13.8}$$

［$S_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ の定義］　［式 (13.6) によって］

基底ベクトル $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ は各事象で任意に選ばれうる．したがって計量の対応成分 $g_{\alpha\beta}$ はまったく任意である（対称であるけれども，$g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$）．しかし混合成分 $g^\alpha{}_\beta$ は任意でない．とくに，式 (13.5) および (13.7) は

$$\boldsymbol{g}(\tilde{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{v}) \equiv \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \equiv \langle\tilde{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{v}\rangle \tag{13.9}$$

*8 を意味する．したがって混合表示での計量テンソルは単位行列と同一であると結論する．

$$g^\alpha{}_\beta \equiv \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\omega}^\alpha,\boldsymbol{e}_\beta) = \langle\boldsymbol{\omega}^\alpha,\boldsymbol{e}_\beta\rangle = \delta^\alpha{}_\beta \tag{13.10}$$

計量のこの特徴は代わりに計量の反変成分を固定する．

---

*6　計量は 1–形式と接線ベクトルとの間の対応を生み出す
*7　添字を下げる
*8　計量の混合成分および反変成分

$$g^{\alpha\mu}g_{\mu\beta} = g^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} \tag{13.11}$$

[$g^{\alpha\mu}$ の "添字を下げる"]

すなわち，

$$\left\|g^{\alpha\beta}\right\| \text{は} \left\|g_{\alpha\beta}\right\| \text{の逆行列である} \tag{13.12}$$

*9 この相互関係は，テンソルの添字を下げたものを $g^{\alpha\beta}$ で元に戻す（すなわち，添字を上げる）ことを可能にする．

$$S^{\mu\beta}{}_{\gamma} = \delta^{\mu}{}_{\alpha}S^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha}S^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = g^{\mu\nu}S_{\nu}{}^{\beta}{}_{\gamma} \tag{13.13}$$

最後の 2 節は簡単に要約されるだろう．

(1) $g^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$

(2) $\left\|g^{\alpha\beta}\right\| = \left\|g_{\alpha\beta}\right\|^{-1}$

(3) テンソルの添字は $g_{\alpha\beta}$ で下げられる

(4) テンソルの添字は $g^{\alpha\beta}$ で上げられる

*10 計量および添字の上げ下げについてのこの形式で，注意が必要な大きい問題がある．計量が局所的に Euclid 的あるいは局所的に何か他のものよりも局所的に Lorentz であるかどうかを，いかにして述べることができるかということである．もちろん，1 つの基準（必要であるが十分でない！）は次元である．局所的に Lorentz な時空は 4 次元をもたねばならない（次元を定めるために 1.2 節の方法を思い出せ）．それから，4 次元多様体に注意を限定する．他に何を要求しなければならないか？ すべての事象 $\mathcal{P}$ で直交系（基底ベクトル $\{\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}}\}$ の直交する組）が存在すること，その系では計量の成分は平坦な時空の形式

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \equiv \boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}}\cdot\boldsymbol{e}_{\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta} \equiv \text{対角部分}\,(-1,1,1,1) \tag{13.14}$$

をもつことを要求しなければならない．このテストを行うことは簡明である（練習問題 13.1）．(1) 時間的なベクトル $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} < 0)$ を探す．もし存在しないならば，時空は局所的に Lorentz でない．もし 1 つが見つかれば，(2) $\boldsymbol{u}$ に垂直なすべてのゼロでないベクトル $\boldsymbol{v}$ を吟味する．もしそれらがすべて空間的 $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} > 0)$ であるならば，時空は局所的に Lorentz である．それ以外は局所的に Lorentz でない．

---

*9 添字を上げる

*10 計量は局所的に Lorentz でなければならない

［練習問題］

13.1　時空が局所 Lorentz であるかどうかをテストせよ

時空が局所的に Lorentz であるかどうかをテストするための上述の 2 段階の手続きが妥当であることを証明せよ．すなわち，手続きが“ハイ”と言うならば，問題の事象で $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta}$ をもつ直交基底が存在し，手続きが“イイエ”と言うならば，このような基定が存在しないことを証明せよ．

13.2　計量についての実習

座標 v, r, θ, ϕ をもつ 4 次元多様体は線要素（古い型の記号）

$$ds^2 = -(1-2M/r)dv^2 + 2dv\ dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2)$$

をもつ．これは計量（新しい型の記号）

$$\boldsymbol{ds^2} = -(1-2M/r)\boldsymbol{dv}\otimes\boldsymbol{dv} + \boldsymbol{dv}\otimes\boldsymbol{dr} + \boldsymbol{dr}\otimes\boldsymbol{dv} + r^2(\boldsymbol{d\theta}\otimes\boldsymbol{d\theta} + \sin^2\theta\ \boldsymbol{d\phi}\otimes\boldsymbol{d\phi})$$

に対応する．ここに M は定数である．

(a) この座標系での計量の“**共変**”成分 $g_{\alpha\beta}$ および“**反変**”成分 $g^{\alpha\beta}$ を求めよ．［**答え**：$g_{vv} = -(1-2M/r)$, $g_{vr} = g_{rv} = 1$, $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta$, すべての他の $g_{\alpha\beta}$ はゼロである．$g^{vv} = (1-2M/r)$, $g^{vr} = g^{rv} = 1$, $g^{\theta\theta} = r^{-2}$, $g^{\phi\phi} = r^{-2}\sin^{-2}\theta$, すべての他の $g^{\alpha\beta}$ はゼロである．］

(b) スカラー場 t を

$$t \equiv v - r - 2M\ln[(r/2M) - 1]$$

で定義せよ．1–形式 $\tilde{\boldsymbol{u}} \equiv \boldsymbol{dt}$ の共変成分と反変成分（u_αおよび u^α）は何であるか？ 対応するベクトルの 2 乗された長さ $\boldsymbol{u}^2 \equiv \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}$ は何であるか？ 領域 $r > 2M$ で $\boldsymbol{u}$ は時間的であることを示せ．［**答え**：$u_v = 1$, $u_r = -1/(1-2M/r)$, $u_\theta = u_\phi = 0$. $u^v = -1/(1-2M/r)$, $u^r = 0$, $u^\theta = u^\phi = 0$. $\boldsymbol{u}^2 = -1/(1-2M/r)$.］

(c) 領域 $r > 2M$ で $\boldsymbol{u}$ に直交するもっとも一般的なゼロでないベクトル $\boldsymbol{w}$ を見出し，それが空間的であることを示せ．それによって領域 $r > 2M$ で時空は局所的に Lorentz であると結論せよ．［**答え**：$\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} = w_\alpha u^\alpha = -w_v/(1-2M/r)$ であるから，w_v はゼロでなければならない．しかし w_r, w_θ, w_ϕ は任意であり，そして $\boldsymbol{w}^2 = (1-2M/r){w_r}^2 + r^{-2}{w_\theta}^2 + r^{-2}\sin^{-2}\theta\ {w_\phi}^2 > 0$.］

(d) t, r, θ, ϕ は時空に対する新しい座標とする．この座標系で線要素を見出せ．［**答え**：これは“Schwartzschild”線要素

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-2M/r} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\ d\phi^2$$

である．］

(e) 領域 $r > 2M$ で $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta}$ であるような直交基底を見出せ．［答え：$\boldsymbol{e}_{\hat{0}} = (1 - 2M/r)^{-1/2}\partial/\partial t$，$\boldsymbol{e}_{\hat{r}} = (1-2M/r)^{1/2}\partial/\partial r$，$\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}} = r^{-1}\partial/\partial\theta$，$\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}} = (r\sin\theta)^{-1}\partial/\partial\phi$.］

13.3　曲がった時空の幾何学の測地線と局所 Lorentz 幾何学の直線との一致

“計量” の数学的な機械および物理学的な意味についてより多くのことを述べることができるだろう．しかしより大きい緊急を要する問題に強い注意が必要である．計量（あるいは時空間隔）は測地線（あるいは試験粒子の世界線）とどのような関係をもつかということである．答え：同じ物理学的な対象（試験粒子の世界線）に等しい 2 つの数学的な対象（“局所 Lorentz 系での直線” と “全体の包括的な曲がった時空幾何学の測地線”）は互いに等しくなければならない（“調和の条件”）．この調和の要求をわかりやすく説明する第 1 の方法として，与えられた事象 $\mathcal{P}_0$ の近傍での試験粒子の世界線の 2 つの数学的な表示を吟味する．局所 Lorentz 表示は次のように述べる．

*11　“$\mathcal{P}_0$ で局所 Lorentz 系をとる．［練習問題 13.3 でわかりやすく説明されているように，このような局所 Lorentz 系は，$\mathcal{P}_0$ での包括的な Lorentz 系に存在するもっとも近いものである．すなわち，それは

$$g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}_0) = \eta_{\alpha\beta} \qquad \text{（平坦な時空の計量）} \tag{13.15a}$$

$$g_{\alpha\beta,\gamma}(\mathcal{P}_0) = 0 \tag{13.15b}$$

$$g_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\mathcal{P}_0) \neq 0 \qquad \text{（平坦な空間のような，特別な場合を除いて）} \tag{13.15c}$$

である座標系である.］その系での世界線はゼロ加速度をもつ．

$$d^2x^\alpha/d\tau^2 = 0 \qquad (\mathcal{P}_0\text{で}) \quad \text{“直線の方程式”} \tag{13.16}$$

ここに τ は粒子の時計によって測定される固有時間である.”

*12　測地線表示は次のように述べる．

“局所 Lorentz 系では，任意の座標系におけるように，世界線は測地線の方程式

$$d^2x^\alpha/d\tau^2 + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(dx^\beta/d\tau)(dx^\gamma/d\tau) = 0 \tag{13.17}$$

を満たす（τ はアフィンパラメータである，なぜならそれは試験粒子の時計によって測定される時間であるから).”

*13　試験粒子の任意のそしてすべての選択（$\mathcal{P}_0$ での $dx^\alpha/d\tau$ 任意のそしてすべての選択）に対する 2 つの表示の調和は

---

*11　直線の局所 Lorentz 表示

*12　直線の測地線表示

*13　調和の条件：局所 Lorentz 系で $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = 0$

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(\mathcal{P}_0) = 0 \tag{13.18}$$

任意の局所 Lorentz 系［$\mathcal{P}_0$ で式 (13.15) を満たす座標系］で

を要求する．すなわち，それは**すべての局所 Lorentz 系は局所慣性系である**ことを要求する（局所慣性系については 11.6 節をみよ）．このような系では，“重力” のすべての局所的な効果はなくなる．それは式 (13.18) に対する物理学的な省略表現である．

測地線（$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ から導かれる）と局所 Lorentz 幾何学 ($g_{\mu\nu}$) の直線との間の同等性を要求するときは，特別な座標系の言葉で述べるべきでない．座標の局所 Lorentz 特殊化は物理学（“重力の局所的な効果がない”）をみるもっとも直接的な方法であるだろう．しかし
*14 それは，基礎的な数学的要求を完全な一般性と力で定式化する正しい方法でない．正しい方法は

$$\nabla \boldsymbol{g} = 0 \qquad \text{“}\boldsymbol{g}\text{ と }\nabla\text{ の両立性”} \tag{13.19}$$

を要求することである．任意の座標系の言葉で述べると，この要求は

$$g_{\alpha\beta;\gamma} \equiv \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma} g_{\mu\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma} g_{\alpha\mu} = 0 \tag{13.19$'$}$$

となる．この共変的な要求がすべての座標系で満たされることは，1 つの座標系すなわち局所 Lorentz 系での妥当性から出る（この式の第 1 項と，最後の 2 項は，点 $\mathcal{P}_0$ での局所 Lorentz 系でそれぞれゼロになることが要求される．そして**物理学**によってゼロになることが要求される）．$\nabla \boldsymbol{g} = 0$ から，抽象的な鎖則

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}) = (\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\cdot(\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}) \tag{13.20}$$

*15 （練習問題 13.4），および（1）計量係数 $g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{e}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}_{\beta}$ と（2）その系の共変交換係数

$$c_{\alpha\beta\gamma} \equiv c_{\alpha\beta}{}^{\mu} g_{\mu\gamma} \equiv \langle \boldsymbol{\omega}^{\mu}, [\boldsymbol{e}_{\alpha}, \boldsymbol{e}_{\beta}] \rangle g_{\mu\gamma} \tag{13.21}$$

による，**任意の**系での接続係数に対する以下の式との両方を導くことができる（練習問題 13.4 をみよ）．

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta\gamma} \qquad (\Gamma_{\mu\beta\gamma}\text{の定義}) \tag{13.22}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\beta\gamma} &= \frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\gamma} + c_{\mu\beta\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} + c_{\mu\gamma\beta} - g_{\beta\gamma,\mu} - c_{\beta\gamma\mu}) \\ &= \frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}) \qquad (\text{任意の座標系で})\end{aligned} \tag{13.23}$$

式 (13.23) は，曲がった時空の測地線を局所 Lorentz 幾何学の直線と一致させるために要求される接続係数である．そしてそれらは一義的に固定される，接続係数の他の選択では役に立たないだろう！

---

*14　調和が再定式化される：$\nabla \boldsymbol{g} = 0$

*15　計量で表された $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$

要約：局所 Lorentz 計量をもつ曲がった時空では，以下の見かけ上異なる陳述は実際同等である．(1) 曲がった時空の測地線は局所 Lorentz 幾何学の直線と一致する，(2) すべての局所 Lorentz 系 [$g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}_0) = \eta_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\gamma}(\mathcal{P}_0) = 0$ をもつ座標] は局所慣性系 [$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(\mathcal{P}_0) = 0$] である，(3) 計量と共変微分は両立性の条件 $\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{g} = 0$ を満たす，(4) 共変微分は鎖則 (13.20) に従う，(5) 接続係数は式 (13.23) と同じに計量によって定まる．次章で導かれる 6 番目の同等な陳述は，(6) 曲がった時空の測地線は極値的な固有時間の世界線と一致する，となる．

[練習問題]

13.3 局所 Lorentz 系の数学的な表示

定義により，与えられた事象 $\mathcal{P}_0$ での局所 Lorentz 系は，そこでは包括的な Lorentz 系にもっとも近いものである．こうして，それは，$g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0) = \eta_{\mu\nu}$，および $\mathcal{P}_0$ でゼロになるできる限り多くの $g_{\mu\nu}$ の微分をもつ座標系であるはずである．$g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0) = \eta_{\mu\nu}$ そして $g_{\mu\nu,\rho}(\mathcal{P}_0) = 0$，しかし $g_{\mu\nu,\rho\sigma}(\mathcal{P}_0)$ は一般にゼロになりえない座標が存在することを証明せよ．したがって，このような座標は局所 Lorentz 系の数学的な表示である．[ヒント：$\{x^{\alpha'}(\mathcal{P})$ は任意であるがしかし特別な座標系，そして $\{x^{\mu}(\mathcal{P})\}$ は局所 Lorentz 系であり，ともに $\mathcal{P}_0$ に原点をもつとする．両者の間の座標変換を x^{μ} のべきで展開し

$$x^{\alpha'} = M^{\alpha}{}_{\mu} x^{\mu} + \frac{1}{2} N^{\alpha}{}_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} + \frac{1}{6} P^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho} x^{\mu} x^{\nu} x^{\rho} + \cdots$$

そして変換行列 $L^{\alpha'}{}_{\mu} \equiv \partial x^{\alpha'}/\partial x^{\mu}$ を用いて $g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0)$, $g_{\mu\nu,\rho}(\mathcal{P}_0)$，および $g_{\mu\nu,\rho\sigma}(\mathcal{P}_0)$ を，$g_{\alpha'\beta'}$ とその微分および定数 $M^{\alpha}{}_{\mu}, N^{\alpha}{}_{\mu\nu}, P^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho}$ によって得る．$g_{\alpha'\beta'}$ が何であれ ($g_{\alpha'\beta'}$ が特異性をもたない限り，$g^{\alpha'\beta'}$ は存在する!)，16 個の定数 $M^{\alpha}{}_{\mu}$ を選んで $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ とすることができる (10 個の条件)，$4{\times}10 = 40$ 個の定数 $N^{\gamma}{}_{\mu\nu}$ を選んで $10{\times}4 = 40$ 個の $g_{\mu\nu,\rho}(\mathcal{P}_0)$ をゼロにすることができる，しかし一般に $4{\times}20 = 80$ 個の $P^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho}$ を選んで $10{\times}10 = 100$ 個の $g_{\mu\nu,\rho\sigma}$ をゼロにすることはできない.]

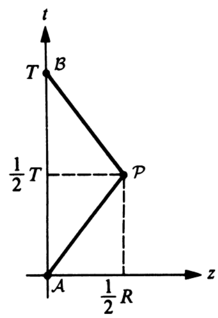
13.4 $\boldsymbol{g}$ と $\boldsymbol{\nabla}$ との間の両立性の結果

(a) 両立性の条件 $\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{g} = 0$ から，鎖則 (式 13.20) を導け．(b) 両立性の条件 $\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{g} = 0$ と式 (13.21) および (13.22) から，接続係数に対する式 (13.23) を導け．[答え：練習問題 8.15 をみよ.]

13.4 極値的な固有時間の世界線としての測地線

局所 Lorentz 系では，直線である世界線を直線でない世界線から区別することは容易である．Lorentz 系を置いて世界線の出発点 $\mathcal{A}$ は原点に，そして終点 $\mathcal{B}$ は，$x = 0$, $y = 0$,

$z=0,\ t=T$ に存在するようにLorentz系を位置づける．直線でない世界線の例として，一様な速度で $\mathcal{A}$ から座標 $(\frac{1}{2}T;0,0,\frac{1}{2}R)$ をもつ点 $\mathcal{P}$ まで進み，そしてそこから再び一様な速度で点 $\mathcal{B}$ へ進む場合を考える．出発から終わりまでの固有時間の経過（"世界線の長さ"）は



$$\tau=(T^2-R^2)^{1/2}$$

である．こうして固有時間の経過は直線の値より減少し，R の任意の選択に対して，ゼロすなわち直線の値 $R=0$ を除いて，さらに減少する．この単純な直線でない曲線に対するのと同じように，任意の他の直線でない
*16 曲線に対しても，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ との間の固有時間の経過は直線での経過よりも小さい（練習問題 6.3）．こうして，平坦な時空では，世界線の長さが極値をとることは，直線であることを示す指標となる．

実在の物理学的世界の曲がった時空における任意の局所領域は，性質として Lorentz で
*17 ある．この局所 Lorentz 幾何学では，Lorentz 座標を設定して，ちょうど直線と非直線とを区別する概略が述べられた，極値的長さの解析を遂行することは容易である．

$$\begin{aligned}\tau&=\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}d\tau=\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(-\eta_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu)^{1/2}\\&=(\text{直線の任意の変形と比較して，直線に対して最大である})\end{aligned}\tag{13.24}$$

直線性に対するこのようなテストは世界線に沿う各局所 Lorentz 領域でそれぞれ遂行することができる．あるいは，より大きな効率で，それは多くの局所 Lorentz 領域にわたって，すなわち，非常に遠く離れた両端 $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ をもち，ただ 1 つの Lorentz 系ではそれらをともに含むことができないような領域にわたっても同時に遂行することができる．解析を遂行するには，局所 Lorentz 座標を放棄しなければならない．したがって一般的な曲線座標系を導入して

$$\begin{aligned}\tau&=\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}d\tau=\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(-g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu)^{1/2}\\&=\begin{pmatrix}\text{この世界線の任意の“近傍”変形に比較して，}\\\text{その経路に沿う各局所 Lorentz 系で直線であ}\\\text{る時間的な世界線に対して極値である}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{13.25}$$

実在の世界では，極値的な τ の経路は，すべての局所 Lorentz 系で直線であり，時空の測地線でなければならない．

式 (13.24) での“最大”という言葉は陳述 (13.25) では“極値”によって置き換えられていることに注意せよ．$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が遠く離れているときには，それらは固有時間の異なる経過をもついくつかの異なる測地線によって結ばれているだろう（図 13.2）．各時間的な測地線は自らの近傍での変形について τ を極値化するが，極値は最大である必要はない．いく

*16　平坦な時空では，直線は極値的な長さをもつ
*17　曲がった時空での極値的な長さ

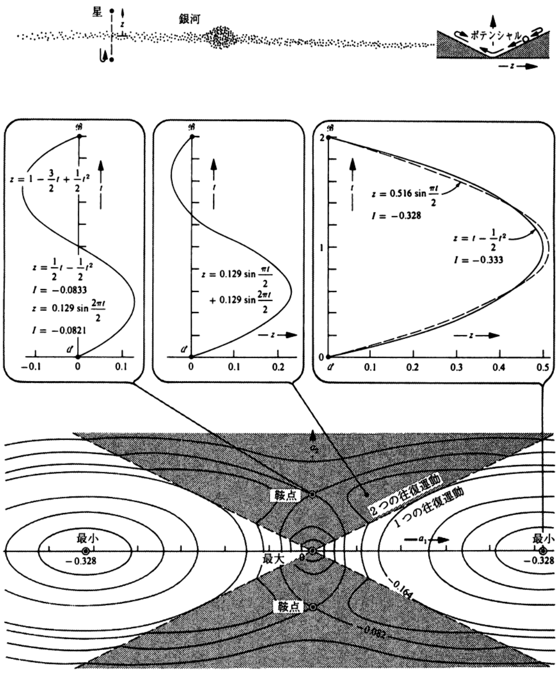


図 13.2　2 個の事象 $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ が 1 個以上の測地線によって結ばれうる状況の一例として，円盤状の銀河の平面を横切って前後に振動している星を考える．上段左：近傍の "円盤状の星" の一般的な運行に参加し共運動している局所系に参照された，問題の星の経路を示している（破線），縁に接してみられる銀河．上段右：星が感じる有効ポテンシャルは，Newton の重力理論によれば，1 つの斜面を転がり落ち別な斜面を転がり上がる球によって経験される有効ポテンシャルのようなものである（ここで用いられている単位で加速度 $g = 1/2$ で "星雲の平面に向かう自由落下"）．3 個の重要な形：2 個の与えられた事象 $\mathcal{A}$（$t = 0$ での銀河の平面）および $\mathcal{B}$（$t = 2$ での銀河の平面）を結ぶ可能な世界線と不可能な世界線．中段右：星を星雲の平面から十分な速度で投げ上げると星はちょうど $t = 2$ に平面に戻る．中段左：星を半分の速度で投げ上げると星は半分の時間で戻るだろう（単振動の振る舞いにまったく逆であるが，しかし銀河の v 字型のポテンシャルに一致している!），こうして $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の間で割り当てられた時間内で 2 つの往復運動をなしうる．中段中央：考えられる世界線（ロケット推進と一致して考えられる）．下段：これらの経路と形式

$$z = a_1 \sin(\pi t/2) + a_2 \sin(2\pi t/2)$$

で近似されうる任意の別な経路との比較．ここで 2 個の調整可能なパラメータ a_1 および a_2 は，2 次元の "関数空間" を与える（$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ を結ぶすべての考えられる世界線を描くのに要求される無限次元の関数空間への近似．1 項の Fourier 近似と自由落下の厳密な，放物線の法則との間の，中段右の系における比較に注意せよ．同様に，2 個の曲線が図上で分離して示されるにはあまりに密接に一致している，中段左の系における比較に注意せよ）．詳細：一般相対論の背景で，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ を結ぶ任意の世界線をとり，固有時間の経過を見積もり，別な世界線に対して繰り返し，そして与えられた世界線に対して固有時間がすべての近傍の世界線について極値であるときに，この世界線は可能な運動である（"測地線"）と言う．Newton の近似では，固有時間の経過と座標時間の経過 $(t_{\mathcal{B}} - t_{\mathcal{A}})$ との間の差が，"作用積分"（"単位質量あたりの基準" に基づく）

$$I = \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} [(\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャルエネルギー})]\, dt = \int \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - |z|\right] dt$$

の形式において，気をつけるすべてである（固有時間における最大値，あるいは別な極値は最小値，あるいは作用 I における，対応する別な極値を意味する）．積分は $|a_2| < \frac{1}{2}|a_1|$ に対して（1–往復運動），

$$I = (\pi^2 a_1^2/8) - (4|a_1|/\pi) + (\pi^2 a_2^2/2)$$

を与え，そして $|a_2 > \frac{1}{2}|a_1|$ に対して（2–往復運動），

$$I = (\pi^2 a_1^2/8) + (\pi^2 a_2^2/2) - (4|a_2|/\pi) - (a_1^2/\pi|a_2|)$$

を与える．1–往復運動は作用を最小化する（固有時間の経過を最大化する）．2–往復運動は作用を極値化するがしかし作用を最小化しない（"鞍点"，地形図における "山の峠"）．Choquard（1955）は 1 個以上の極値が存在する力学の問題の別な例を与える．Morse（1934）および Morse and Cairns（1969）は多数の最大値および最小値をもつ種々の型の鞍点の集団を結ぶ定理を与える（"大規模な変化の計算法の臨界点定理"）．

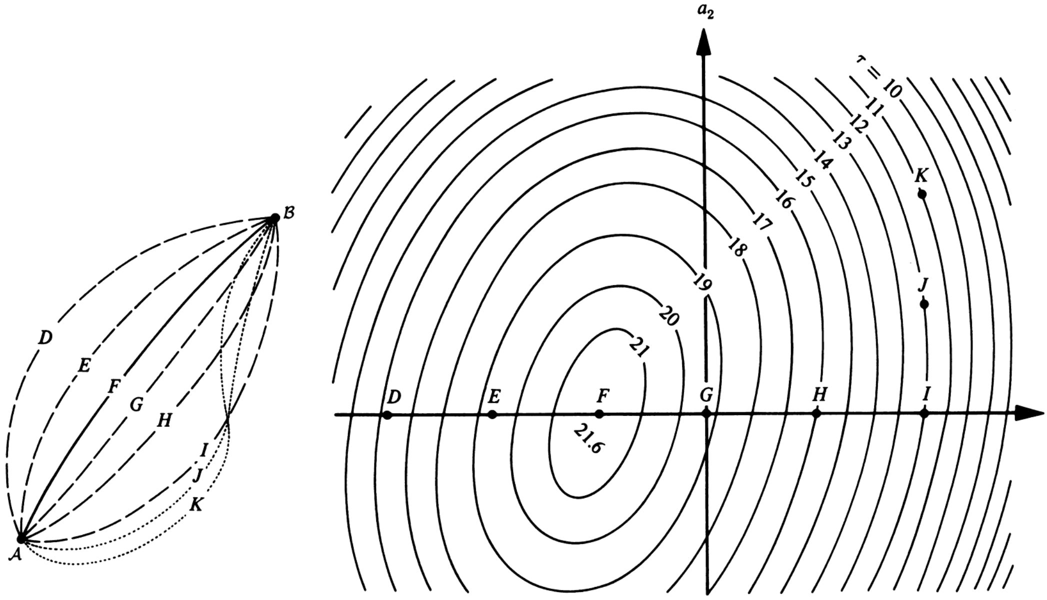


図 13.3　世界線の適切な選択によって固有時間の経過を極値化すること．左：時空; $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への固有時間 τ の経過を極値化する世界線 F が別な世界線と比較されている．図に描かれている特別な世界線は基準の世界線 G から 2 個の "Fourier 振幅"a_1 および a_2 によって区別される．

$$\delta a^\mu(\lambda) = a_1 \sin(\pi\lambda) + a_2 \sin(2\pi\lambda)$$

ここで λ の任意の尺度，および λ のゼロは，$\lambda(\mathcal{A}) = 0, \lambda(\mathcal{B}) = 1$ であるように調整される．

右："経路空間." この空間における座標は Fourier 振幅 a_1 および a_2 である．これら 2 個の振幅のみが（"2 次元"），$\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ を結びつける一般的な時間的な世界線を表すのに必要である，原理的に無限に多く存在する（"無限次元の経路空間"）振幅のなかから示されている．任意の与えられた輪郭曲線は，すべてのそれらの点（経路空間における）を通り抜ける．それらの点に対しては対応する世界線（時空における）は固有時間 τ の示されている経過を得る．このような前述の記述は古典的である．量子力学によれば，$\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ を結びつけるすべての時間的な世界線は同じ確率振幅で起こり（"履歴の民主主義の原理"），1 つの世界線と別な世界線の唯一の差はこの複素数の確率振幅 $\exp(-im\tau/\hbar)(m =$ 粒子の質量, $\hbar =$ 角運動量の量子) の位相である．しかし，これらの確率振幅にわたる和において，破壊的な干渉は，最適のあるいは古典的な履歴からあまりにも大きく異なるようなすべての履歴からの寄与を打ち消す（"Fresnel の波動帯"，"履歴にわたる和という Feynman の原理"，Feynman and Hibbs,1965 をみよ）．物理学の世界の機構がいかに正常に機能するかを示すこの波動力学の背景を利用することで，コラム 25.3 は測地線を定めることに対して Hamilton–Jacobi の方法（"量子力学の短波長の極限"），"測地線に対する通常の 2 次の微分方程式" (10.27) よりも，大抵の応用に対して相当により好都合な方法をわかりやすく説明する．

つかの異なる測地線が 2 つの事象を結ぶとき，代表的なものは図 13.2 あるいは 13.3 のような図での局所最大（"山頂"）でなくて鞍点（"山の峠"）である．

局所的な直線（極値的な τ の線）と曲がった時空の測地線との一致は，時間的な測地線が極値的な固有の長さをもつことを要求する．もしそうならば，τ を極値化する，$\mathcal{A}$（そこでは $\lambda = 0$）および $\mathcal{B}$（そこでは $\lambda = 1$）間の任意の曲線 $x^\mu(\lambda)$ は測地線の方程式を満

*18　たすべきである．時間を比較することによって極値性をテストするために，測地線らしいと思われる曲線をとり，それをわずかであるが任意に変形する．

$$\begin{aligned} &\text{元の曲線,} \quad x^\mu = a^\mu(\lambda), \\ &\text{変形された曲線,} \quad x^\mu = a^\mu(\lambda) + \delta a^\mu(\lambda) \end{aligned} \tag{13.26}$$

*18　極値的な長さの曲線は測地線であるという証明

いずれの曲線に沿っても固有時間の経過は

$$\tau=\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}d\tau=\int_0^1\left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)^{1/2}d\lambda \qquad (13.27)$$

である．固定された λ で，計量係数 $g_{\mu\nu}[x^\alpha(\lambda)]$ は 1 つの曲線から他の曲線へ

$$\delta g_{\mu\nu}\equiv g_{\mu\nu}[a^\alpha(\lambda)+\delta a^\alpha(\lambda)]-g_{\mu\nu}[a^\alpha(\lambda)]=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\delta a^\sigma(\lambda) \qquad (13.28)$$

だけ異なり，接線ベクトルの成分 $dx^\nu/d\lambda$ は

$$\delta\left(\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)\equiv\frac{d(a^\nu+\delta a^\nu)}{d\lambda}-\frac{da^\nu}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}(\delta a^\nu) \qquad (13.29)$$

だけ異なる．固定された λ での $g_{\mu\nu}$ および $dx^\nu/d\lambda$ についてのこれらの変化は，式 (13.27) における固有時間の経過について，対応する変化を生み出す．

$$\delta\tau=\int_0^1\left\{\frac{-g_{\mu\nu}(da^\mu/d\lambda)d(\delta a^\nu)/d\lambda-\frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\sigma}\delta a^\sigma)(da^\mu/d\lambda)(da^\nu/d\lambda)}{[-g_{\gamma\delta}(da^\gamma/d\lambda)(da^\delta/d\lambda)]^{1/2}}\right\}d\lambda$$

第 1 項を部分積分する．両端項を削除する，なぜなら 2 つの経路は $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$（$\lambda=0$ および $\lambda=1$ で $\delta a^\mu=0$）を通過しなければならないからである．こうして

$$\delta\tau=\int_{\lambda=0}^{\lambda=1}f_\sigma(\lambda)\delta a^\sigma\left[-g_{\gamma\delta}\frac{da^\gamma}{d\lambda}\frac{da^\delta}{d\lambda}\right]^{1/2}d\lambda \qquad (13.30)$$

を見出す．ここに被積分関数内の f_σ（“力の項”）は 4 個の表現

$$f_\sigma(\lambda)=\frac{1}{\left[-g_{\gamma\delta}\frac{da^\gamma}{d\lambda}\frac{da^\delta}{d\lambda}\right]^{1/2}}\frac{d}{d\lambda}\frac{g_{\sigma\nu}\frac{da^\nu}{d\lambda}}{\left[-g_{\gamma\delta}\frac{da^\gamma}{d\lambda}\frac{da^\delta}{d\lambda}\right]^{1/2}}-\frac{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\frac{da^\mu}{d\lambda}\frac{da^\nu}{d\lambda}}{\left[-g_{\gamma\delta}\frac{da^\gamma}{d\lambda}\frac{da^\delta}{d\lambda}\right]} \qquad (13.31)$$

に対する略語である．極値が達成される．そして 1 次の変化 $\delta\tau$ は，最善の経路 $x^\sigma=a^\sigma(\lambda)$ からのすべての 1 次の変形 $\delta a^\sigma(\lambda)$ に対して，δa^σ に掛かる 4 個の量 f_σ がすべてゼロになるときに，ゼロになる．こうして極値的な世界線を定めるための 4 個の条件

$$f_\sigma(\lambda)=0 \qquad (13.32)$$

に到達する（極値化についての代わるべき観点は図 13.3 にわかりやすく説明されている）．

これら 4 個の式は十分であるが，それらは “ビーズ議論”（存在する世界線に沿って，ビーズのように，たんに点を滑らせる変化の任意の組に対して $\delta\tau$ が自動的にゼロになる）の理由で独立でない．単なる “ビーズの滑り” の操作は自明な変化

$$\delta a^\sigma(\lambda)=h(\lambda)\frac{da^\sigma}{d\lambda} \qquad (13.33)$$

を意味する，ここに $h(\lambda)$ は世界線に沿う任意の位置の関数である（“そこでよりもここでより滑る”）．この操作は τ を変えることができないことがすでにわかっており，式 (13.30) の被積分関数は，式 (13.33) を δa^σ に対して挿入するときゼロにならなければならない．

さらに，任意の“滑りの大きさ”の因子 $h(\lambda)$ に対してどのような選択がなされようと，ゼロにならなければならないことが保証される．この要求はスカラー積 $f_\sigma da^\sigma/d\lambda$ が自動的にゼロにならなければならないことを意味し，そして要求する．あるいは，別な言葉で述べると，

$$f_\sigma \frac{da^\sigma}{d\tau} = 0 \tag{13.34}$$

議論は妥当であり，そしてこの式は最善の世界線を取り扱っていようがいまいが成り立つ．この型の式は，世界線が自由な試験粒子に対して許される軌道（固有時間の極値的な軌道）であろうとなかろうと成り立つ**恒等式**として知られる．式 (13.34) は，時空の測地線の領域で重要な恒等式であり，15 章の Bianchi 恒等式，すなわち時空曲率の領域でのもっとも重要な恒等式に対する適切な先駆けである．

“世界線に沿う滑り λ–値” がもつ自由度は，任意のパラメータ λ を固有時間そのもの，

$$d\tau = \left[-g_{\gamma\delta}\frac{da^\gamma}{d\lambda}\frac{da^\delta}{d\lambda}\right]^{1/2} d\lambda \tag{13.35}$$

の物理学的により興味あるパラメータで置き換えるために利用することができる．そのすべての変形を観点から除いて，特別な世界線 $x^\mu = a^\mu(\lambda)$ に焦点を合わせる．いたるところで $a^\mu(\lambda)$ を $x^\mu(\lambda)$ で置き換えてよろしい．そうすると極値的世界線に対する微分方程式 (13.32) は

$$g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{13.36}$$

に帰着する．脇に離れて，恒等式 (13.34) は今や式

$$g_{\sigma\nu}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + 1 = 0 \tag{13.37}$$

の（τ についての）一度の微分で出る．こうして恒等式は，任意の世界線（極値的であろうとなかろうと）に対して 4–速度および 4–加速度は直交するということと解釈されるべきである．さて式 (13.36) に戻って，$g^{\beta\sigma}$ で添字を上げ，それによって局所 Lorentz 幾何学の直線に対する式を

$$\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} + g^{\beta\sigma}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{13.38}$$

の形に導く．“計量以前の幾何学” での測地線に対する式の標準形

$$\frac{d^2x^\beta}{d\lambda^2} + \Gamma^\beta{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{13.39}$$

と比較せよ．計量以前の幾何学の測地線は，次の 2 つの条件が満たされる場合に限り，局所 Lorentz 幾何学の直線と一致するだろうと結論される．(1) 測地線，共変微分，そして平行移動を定義する 40 個の接続係数 $\Gamma^\beta{}_{\mu\nu}$ が，10 個の計量係数 $g_{\mu\nu}$（“Einstein 重力ポテンシャル”）で以前に導かれた式 (13.22) および (13.23) によって与えられなければなら

ない．そして（2）測地線パラメータ λ は，ゼロ点の任意の規格化と任意であるがしかし一定のスケール因子を除いて，固有時間 τ と一致せねばならない．こうして

$$\lambda = a\tau + b$$

（形式については"いたるところで一様に流れる"Newton の宇宙時間 t に対して何の類似点もない．むしろ各測地線に対して別々の固有時間 τ が存在する）．1 段階で極値的世界線とその線についての正しいパラメータ化の両方を与える他の変分原理については，コラム 13.3 をみよ．

この段階で，曲がった空間の幾何学についての概念は，測地線に基づいた基礎から計量に基づいた基礎への移行を完了した．生ずる幾何学は，つねにそしていたるところで，Newton–Cartan の幾何学はけっしてしなかったしまたできなかったけれども，"局所 Lorentz 性質" の原理に定着する．

［練習問題］

13.5　1 度時間的，つねに時間的

1 つの事象で時間的である時空の測地線はいたるところで時間的であることを示せ．同様に，最初空間的な測地線はいたるところで空間的であり，そして最初ヌルである測地線はいたるところでヌルであることを示せ．［ヒント：これは本書の中でもっともやさしい練習問題である！］

コラム 13.2　"測地線" 対 "極値的世界線"

接続係数 $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ が，Einstein の重力ポテンシャル $g_{\mu\nu}$ の言葉で式 (13.22) および (13.23) によって表されたから，今そしてこれから本書で用いられるように（"Riemann 的あるいは計量幾何学"），"測地線" という 1 つの言葉に，これまで異なっていた次の 2 つの概念を含めることは許されるし，また適切である．（1）測地線の方程式

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

を満たすパラメータ化された世界線と，（2）2 つの事象 $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ の間で固有時間を極値化する世界線（あるいは，もし空間的であるならば，固有距離を極値化する曲線）．混乱の 1 つの源は以下のとおりである．（1）正当にパラメータ化された曲線（たとえば，10 章で平行移動に対して用いられた Schild のはしご構成で本質的であったように）を前提条件とする．それに対して（2）時空を通過する世界線の経路についてのみ関心をもち，どのようなパラメータ化が使われるかあるいは何らかのパラメータ

化がそもそも導入されているかどうかについて無関心である．これは，極値的な曲線に沿って，すべてのパラメータの中でもっとも自然でありそして容易に求められるもの，固有時間そのものを“後で記しづけること”の可能性を否定することでない．(2) の極値曲線上ではどこでも (1) の測地線の方程式を満たす．あいまいさは適切なパラメータ化を主張することによって避けられる．今後“曲線”という言葉はパラメータ化された曲線を意味し，“測地線”という言葉は適切にパラメータ化された測地線を意味する．

コラム 13.3　測地線に対する“力学的な”変分原理

もし極値的長さの原理

$$\tau = \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \left[-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right]^{1/2} d\lambda = \text{極値} \tag{1}$$

がパラメータ化の選択に重要でなく [(1) で“$d\lambda$”は相殺する]．そしてもし測地線の方程式が適切なパラメータ化を関心事とするならば，正しい曲線と正しいパラメータの両方を 1 組として与えるような，他の極値化の原理を探すことが適当であるだろう．基本的な力学との類似によって，第 1 項が“$\ddot{x}$”という形をもつ運動方程式［測地線の方程式

$$d^2x^\mu/d\lambda^2 + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}(dx^\alpha/d\lambda)(dx^\beta/d\lambda) = 0]$$

は，第 1 項“$\frac{1}{2}\dot{x}^2$”（“運動エネルギー”，“力学的な”項）をもつ Larangian から導くことができる．$\frac{1}{2}\dot{x}^2$ のもっとも単純な座標に不変な一般化は

$$\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(dx^\mu/d\lambda)(dx^\nu/d\lambda)$$

である．こうして極値的長さの“幾何学的”原理の代わりに，新しい“力学的”極値原理

$$I = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda = \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} L\left(x^\sigma, \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\right) d\lambda = \text{極値} \tag{2}$$

を試みるべく導かれる（以前の変分原理での平方根を 1 次のべきで置き換える）．極値に対する条件は，ここでは前と同じく［式 (13.30) から (13.32) まで］いわゆる Euler–Lagrange の“関数微分”をゼロと置くことである．

$$0 = \frac{\delta I}{\delta x^\sigma} \equiv \begin{pmatrix} \delta I \text{ の被積分関数} \\ \text{内の } \delta x^\sigma \text{ の係数} \end{pmatrix} = \frac{\partial L}{\partial x^\sigma} - \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial(\frac{dx^\sigma}{d\lambda})} \tag{3}$$

あるいは，すべてを詳細に書くと，

$$g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0 \tag{4}$$

あるいは計量の逆行列を掛けた後には,

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2}+g^{\alpha\sigma}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0 \tag{5}$$

それは測地線の方程式

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2}+\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0 \tag{6}$$

に移行する.

こうして,新しい“力学的な”表現 (2) は実際,測地線曲線に対して極値である.そして,固有長との対照によって,(1) それは測地線がアフィン的にパラメータ化されるときに初めて極値である.[“Euler–Lagrange 方程式” (6) はパラメータ変化 $\lambda_{新}=a\lambda_{旧}+b$ (それはパラメータをアフィンに留める) のもとでのみ満たされ続ける.対照的に,“固有長の原理” に対する Euler–Lagrange 方程式 (13.31) および (13.32) はパラメータのどのような変化に対しても満たされ続ける.]

13.6 空間的な測地線は極値的な長さをもつ

2 つの事象 $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ をつなぐ任意の空間的な曲線は,それが固有長

$$s=\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu)^{1/2}$$

を極値化する場合に限り測地線であることを示せ.[ヒント:もし時間的な測地線に対する類似の定理をすでに証明しておれば,これは練習問題 13.5 とほとんど同じく容易である.]

13.7 光信号と自由粒子によって測定される計量テンソル [Kuchař]

(a) 時間的な測地線を固有時間 τ でパラメータ化せずに,任意のパラメータ μ でパラメータ化せよ.

$$\tau=F(\mu)$$

測地線の方程式を μ パラメータ化で書け.

(b) さて,座標時間 t をパラメータとして用いよ.自由粒子の集団を異なる“速度”$v^i=dx^i/dt$ で投げてそれらの“加速度”$a^i=d^2x^i/dt^2$ を観測せよ.アフィン接続 $\Gamma^l{}_{\kappa\lambda}$ の成分のどのような組合せをこの方法で測定できるかを議論せよ (τ を測定する標準的な時計は利用できないと仮定せよ!).

(c) 共形計量 $\bar{g}_{l\kappa}$,すなわち,計量テンソル $g_{l\kappa}$ の成分の,与えられた成分 (たとえば,g_{00}) に対する比

$$\bar{g}_{l\kappa}=\Lambda g_{l\kappa},\qquad \Lambda\equiv(-g_{00})^{-1}$$

を,ヌル測地線 $g_{l\kappa}\,dx^l dx^\kappa=0$ に沿って動く光信号のみを用いて計測できることを示せ.

(d) ここで (b) および (c) の結果を結合せよ．$\Gamma^l{}_{\kappa\lambda}$ が計量テンソルで，式 (13.22), (13.23) によって，座標系 x^l で生成されると仮定せよ．Λ を 1 つの事象で定める（時間の単位を固定することと同等である）ならば，いたるところで Λ を定めることができることを示せ．

13.5 *Riemann* の計量に誘起される性質

Newton 的時空で，Einstein の実在の物理学的な時空で—実際，共変微分をもつ任意の
*19 多様体で—Riemann 曲率テンソルは，次のような対称性（練習問題 11.6）をもっている．

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} \equiv R^\alpha{}_{\beta[\gamma\delta]} \quad \text{（最後の 2 個の添字について反対称）} \tag{13.40}$$

$$R^\alpha{}_{[\beta\gamma\delta]} \equiv 0 \quad \text{（完全に反対称な部分はゼロである）} \tag{13.41}$$

さらに，それは微分恒等式（練習問題 11.10）を満たす．

$$R^\alpha{}_{\beta[\gamma\delta;\epsilon]} \equiv 0 \quad \text{（“Bianchi 恒等式”）} \tag{13.42}$$

（幾何学的な意味に対しては 15 章をみよ．）

*20 計量が舞台にもたらされると，Einstein 時空であろうと他のところであろうと，それは ***Riemann*** に付加的な対称性（練習問題 13.8）を付与する．

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv R_{[\alpha\beta]\gamma\delta} \quad \text{（最初の 2 個の添字について反対称）} \tag{13.43}$$

これは，式 (13.40) および (13.41) とともに，***Riemann*** に対して対称性の完全な組をつくる．これらから導かれる他の対称性（練習問題 13.10）は

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \quad \text{（対交換のもとでの対称性）} \tag{13.44}$$

そして

$$R_{[\alpha\beta\gamma\delta]} = 0 \quad \text{（完全に反対称部分はゼロである）} \tag{13.45}$$

である．これらの対称性は ***Riemann*** の独立成分の数を $4\times4\times4\times4 = 256$ から 20 に減らす（練習問題 13.9）．

計量が存在すると，***Riemann*** からいろいろな新しい曲率テンソルを構成することができる．後に重要な役割を演ずるいくつかのものは以下のようである．

---

*19　計量が存在しない場合における ***Riemann*** の対称性
*20　計量によって課される新しい対称性

*21 (1) ***Riemann*** の二重双対, $\boldsymbol{\mathcal{G}} \equiv {}^*\boldsymbol{Riemann}^*$ (***Maxwell*** $\equiv {}^*$***Faraday*** の類似), それは成分をもつ (練習問題 13.11).

$$\mathcal{G}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} \frac{1}{2}\epsilon_{\rho\sigma\gamma\delta} = -\frac{1}{4}\delta^{\alpha\beta\mu\nu}_{\rho\sigma\gamma\delta} R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} \tag{13.46}$$

*22 (2) **Einstein 曲率テンソル**, それは対称である (練習問題 13.11).

$$G^{\beta}{}_{\delta} \equiv \mathcal{G}^{\mu\beta}{}_{\mu\delta}, \qquad G_{\beta\delta} = G_{\delta\beta} \tag{13.47}$$

*23, *24 (3) **Ricci 曲率テンソル** (それは対称である).

$$\left.\begin{array}{c} R^{\beta}{}_{\delta} \equiv R^{\mu\beta}{}_{\mu\delta}, \qquad R_{\beta\delta} = R_{\delta\beta}, \\ \text{および曲率スカラー} \\ R \equiv R^{\beta}{}_{\beta} \end{array}\right\} \tag{13.48}$$

それは Einstein テンソルに

$$R^{\beta}{}_{\delta} = G^{\beta}{}_{\delta} + \frac{1}{2}R\delta^{\beta}{}_{\delta} \tag{13.49}$$

によって関係している (練習問題 13.12).

*25 (4) **Weyl 共形テンソル** (練習問題 13.13)

$$C^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} - 2\delta^{[\alpha}{}_{[\gamma}R^{\beta]}{}_{\delta]} + \frac{1}{3}\delta^{[\alpha}{}_{[\gamma}\delta^{\beta]}{}_{\delta]}R \tag{13.50}$$

*26 Bianchi 恒等式 (13.42) は二重双対 $\mathcal{G}$ で書き直されるとき, とくに単純な形をとる

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}{}_{;\delta} \equiv 0 \qquad (\text{“Bianchi 恒等式”}) \tag{13.51}$$

(練習問題 13.11). そしてそれは次の明白な結果をもつ.

$$G_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta} \equiv 0 \qquad (\text{“縮約された Bianchi 恒等式”}) \tag{13.52}$$

15 章では, これらの Bianchi 恒等式の深い幾何学的な意味が説明されるだろう.

---

*21 曲率テンソル $\mathcal{G}$
*22 Einstein テンソル
*23 Ricci テンソル
*24 曲率スカラー
*25 Weyl の共形テンソル
*26 Bianchi 恒等式

[練習問題]

13.8　最初の 2 つの添字について反対称な *Riemann*

(a) 反対称性の条件式 (13.43) を導け．［ヒント：抽象的な計算によって任意のベクトル場 $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ は $0 = \mathcal{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{s}\cdot[\mathcal{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}] + \boldsymbol{w}\cdot[\mathcal{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{s}]$ を満たすことを証明せよ．そうしてこれから式 (13.43) を推論せよ．］

(b) 幾何学的な言葉でこの反対称性の意味を説明せよ．

13.9　*Riemann* の独立成分の数

(a) 計量が存在しない場合に，***Riemann*** に対する対称性条件の完全系は $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta]}$ および $R^{\alpha}{}_{[\beta\gamma\delta]} = 0$ である．4 次元時空でこれらは独立成分の数を $4\times4\times4\times4 = 256$ から $4\times4\times6 - 4\times4 = 96 - 16 = 80$ に減らすことを示せ．

(b) 計量をもたない n 次元多様体で，独立成分の数は

$$\frac{n^3(n-1)}{2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n^2(n^2-1)}{3} \tag{13.53}$$

であることを示せ．

(c) 計量が存在する場合に，対称性の完全な組は $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]}$，および $R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0$ である．4 次元時空で，これらは独立成分の数を $6\times6 - 4\times4 = 36 - 16 = 20$ に減らすことを示せ．

(d) 計量をもつ n 次元多様体で，独立成分の数は

$$\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2 - \frac{n^2(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n^2(n^2-1)}{12} \tag{13.54}$$

であることを示せ．

13.10　対交換について対称な *Riemann*，完全に反対称な部分はゼロである

計量が存在する場合での対称性の完全な組，$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]}$ および $R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0$ から，(a) 対交換のもとでの対称性，$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$，および (b) 完全に反対称な部分はゼロである，$R_{[\alpha\beta\gamma\delta]} = 0$ を導け．それから (c) 以下は対称性の完全な組をつくることを示せ．

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}, \qquad R_{[\alpha\beta\gamma\delta]} = 0 \tag{13.55}$$

13.11　*Riemann* の二重双対，*Einstein*

(a) $\boldsymbol{\mathcal{G}} \equiv {}^{*}\boldsymbol{Riemann}^{*}$ は正確に ***Riemann*** と同じ量の情報を含み，そして対称性の正確に同じ組を満たす［式 (13.40), (13.41), (13.43) から (13.45) まで］ことを示せ．

(b) $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ の対称性から，***Einstein***［式 (13.47) で定義されている］は対称である ($G_{[\beta\delta]} = 0$) ことを示せ．

(c) Bianchi 恒等式 (13.42) は，$\boldsymbol{\mathcal{G}}$ を使って書くと，式 (13.51) (“ゼロ発散” $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{G}} = 0$) の形をとることを示せ．

(d) Bianchi 恒等式 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{G}=0$ を縮約して，$\boldsymbol{G}\equiv\boldsymbol{Einstein}$ はゼロ発散をもつ［式(13.52)］ことを示せ．

13.12 ***Ricci*と*Einstein*は関係している**

(a) ***Riemann*** の対称性から，***Ricci*** は対称である（$R_{[\beta\delta]}=0$）ことを示せ．

(b) ***Ricci*** は ***Einstein*** に式 (13.49) で関係していることを示せ．

13.13 Weyl 共形テンソル

(a) Weyl 共形テンソル (13.50) は Riemann テンソルと同じ対称性［式 (13.40), (13.41), (13.43) から (13.45) まで］をもつことを示せ．

(b) Weyl テンソルは完全に“ゼロトレース”である．すなわち，

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}\text{の, 投入口の任意の対についての縮約はゼロである} \tag{13.56}$$

ことを示せ．こうして，$C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は ***Riemann*** のゼロトレース部分とみなされ，そして $R_{\alpha\beta}$ は ***Riemann*** のトレースとみなされうる．***Riemann*** はそのゼロトレース部分 $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ とそのトレース $R_{\alpha\beta}$ によって完全に定まる［式 (13.50) をみよ，そして $R=R^{\alpha}{}_{\alpha}$ を思い出せ］．

(c) 時空で Weyl テンソルは 10 個の独立成分をもつことを示せ．

(d) n 次元多様体で ***Weyl***［式 (13.56) を保持するような (13.50) の修正によって定義される］の独立成分の数は

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12}-\frac{n(n+1)}{2}\quad(n\geq 3\text{ に対して}),\qquad 0\quad(n\leq 3\text{ に対して}) \tag{13.57}$$

であることを示せ．こうして，1, 2, あるいは 3 次元の多様体で，Weyl テンソルは恒等的にゼロである．そして Ricci テンソルは完全に Riemann テンソルを定める．

13.6 加速された観測者の固有の基準系

ジェット機内で実験を行う物理学者（たとえば，赤外線天文学実験）はいくつかの異なる座標系を同時に用いるだろう．しかしとくに有用な座標系は，機内の床や壁にボルトで締められているすべての器具に相対的に静止しているものである．この“固有の基準系”は機内の壁に結ばれた直交“$\hat{x},\hat{y},\hat{z}$”格子，および格子内で静止している 1 個あるいはより多くの時計をもつ．この固有の基準系が局所 Lorentz 系に対して加速されていることは，物理学者は機内で自分自身が自由に浮かぶことができないことから，あるいはより正確に，加速度計による測定から知る．彼の固有の基準系が局所 Lorentz 系に対して回転していることは，彼が感ずる Coriolis の力から，あるいはより正確に，機内の壁に対する慣性を指し示すジャイロスコープの回転から知る．

*27 物理学的に記述される固有の基準系

練習問題 6.8 はこのような加速された，回転しているが，しかし平坦な時空での局所直交基準系の数学的な取り扱いを与えた．この節では曲がった時空で同じことをする．空間内の格子の原点 $x^{\hat{j}}=0$ のごく近傍（曲率効果が無視できるほど小さい空間の広がりをもつ領域）で，座標系の様相が時空が曲がっているかあるいは平坦であるかどうかを明らかにすることはとてもできない．したがって，練習問題 6.8 のすべての詳細は曲がった時空で成立し続けなければならない．にもかかわらず，これらの詳細と，若干の新しいことを，最後の数章で強力な数学を用いて再吟味することは教訓的である．

使用されるべき座標格子をより正確にすることから始めよう．以下はおそらく格子を設定するもっとも自然な方法である．

*28 (1) τ を加速された観測者の時計（上の例での機内の中心に置かれた時計）で測定される固有時間とする．$\mathcal{P}=\mathcal{P}_0(\tau)$ を図 13.4(a) に示されているように，観測者の世界線とする．

(2) 観測者は直交テトラッド $\{\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}}\}$ [図 13.4(a)]，ここに

$$\boldsymbol{e}_{\hat{0}}=\boldsymbol{u}=d\mathcal{P}_0/d\tau=(\text{観測者の 4–速度}) \tag{13.58}$$

（$\boldsymbol{e}_{\hat{0}}$ は観測者の “時間方向” を指し示す），そして

$$\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}}\cdot\boldsymbol{e}_{\hat{\beta}}=\eta_{\alpha\beta} \tag{13.59}$$

（直交性），を自らもち運ぶとする．

*29 (3) テトラッドは観測者の世界線に沿い，平行移動に対して点から点へ変化する．

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}}=-\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}} \tag{13.60}$$

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mu\nu}=a^{\mu}u^{\nu}-u^{\mu}a^{\nu}+u_{\alpha}\omega_{\beta}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}=\text{“無限小 Lorentz 変換の生成子”} \tag{13.61}$$

この移動則は曲がった時空で平坦な時空と同じ形（6.5 節および練習問題 6.8）をもつ．なぜなら曲率は，“ベクトルの最初の時間変化率” に含まれる無限小の距離にわたってでなく，有限の距離にわたってはじめて感じられうるからである（等価原理）．練習問題 6.8 におけるように，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}=(\text{観測者の 4–加速度}),\\ \boldsymbol{\omega}&=\begin{pmatrix}\text{Fermi–Walker 移動されたベクトルに対して，}\\ \text{すなわち，慣性を示すジャイロスコープに対}\\ \text{して，空間基底ベクトル } \boldsymbol{e}_j \text{ の回転の角速度}\end{pmatrix},\\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega}=0\end{aligned} \tag{13.62}$$

もし $\boldsymbol{\omega}$ がゼロであったら，観測者は彼のテトラッドを Fermi–Walker 移動（ジャイロスコープ型の移動）をするだろう．もし $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{\omega}$ がゼロであったら，彼は自由落下（測地線運動）するだろう．そして彼のテトラッドを平行移動するだろう，$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}}=0$

*28　固有の系に対する座標格子の 6 段階構成

*29　観測者のテトラッド（tetrad，四つ組）に対する移動則

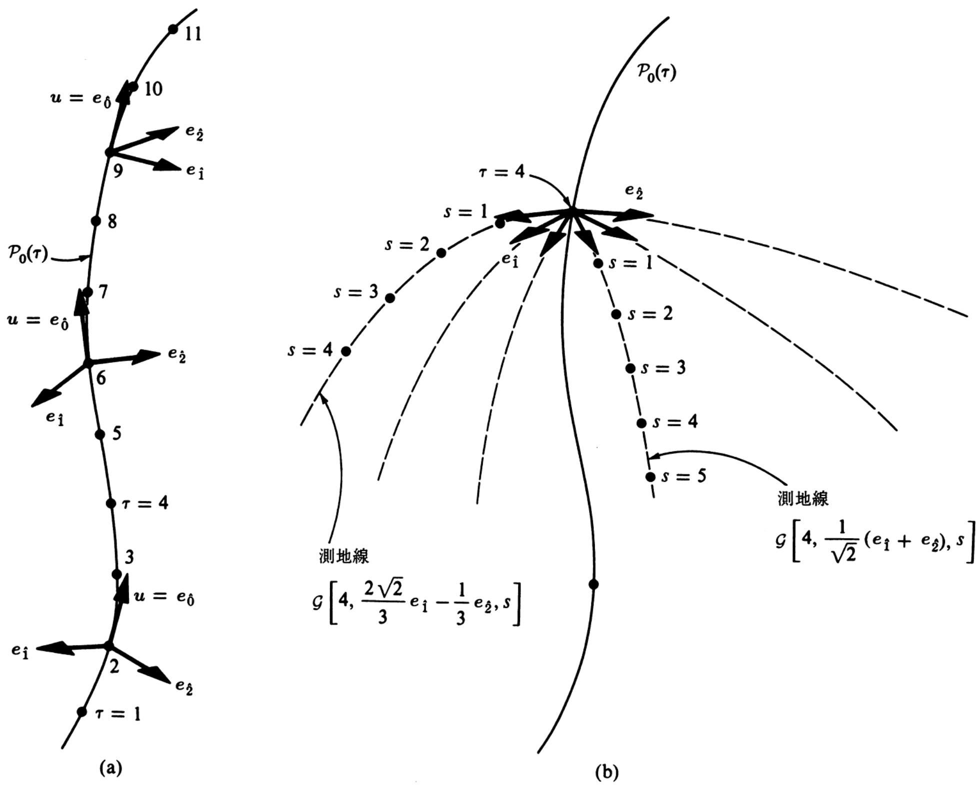


図 13.4　加速された観測者の固有の基準系．図 (a) は観測者の直交するテトラッド $\{e_{\hat{\alpha}}\}$ が観測者の世界線 $\mathcal{P}_0(\tau)$ に沿って移動されることを示す［移動則 (13.60)］．図 (b) は観測者の世界線上の任意の事象 $\mathcal{P}_0(4)$ から垂直に充満している測地線を示す．おのおのの測地線は (1) 自らが始まる固有時間 τ，および (2) 方向（単位の接線ベクトル $\boldsymbol{n} = d/ds = n^{\hat{j}}\boldsymbol{e}_{\hat{j}}$，それに沿って測地線が出る）によって一義的に指定される．測地線上の与えられた事象は $\tau, \boldsymbol{n}$, および測地線の出発点からの固有の距離 s によって指定される．したがって与えられた事象に対して記号

$$\mathcal{P} = \mathcal{G}[\tau, \boldsymbol{n}, s]$$

観測者の固有の基準系はこの与えられた事象に座標

$$x^{\hat{0}}(\mathcal{G}[\tau, \boldsymbol{n}, s]) = \tau, \qquad x^{\hat{j}}(\mathcal{G}[\tau, \boldsymbol{n}, s]) = sn^{\hat{j}}$$

を与える．

(4) 観測者は彼の固有の基準系（局所座標系）を 11.6 節の Riemann 規準構成に類似した方法で構成する．彼の世界線上の各事象 $\mathcal{P}_0(\tau)$ から，彼は固有長に等しいアフィンパラメータをもつ，純粋に空間的な測地線（$\boldsymbol{u} = d\mathcal{P}_0/d\tau$ に直交する測地線）を送り出す．

$$\mathcal{P} = \mathcal{G}[\tau, \boldsymbol{n}, s] \tag{13.63}$$

- τ：［固有時間，測地線の“出発点”を示す］
- $\boldsymbol{n}$：［出発点での測地線に対する接線ベクトル，“どの”測地線であるかを示す］
- s：［出発点から測地線に沿った固有長，測地線上の“どこ”にあるかを示す］

(図 13.4(b) をみよ.) 接線ベクトルは単位長をもっている．なぜなら選ばれるアフィンパラメータは固有長であるからである．

$$\boldsymbol{n} = (\partial \mathcal{G}/\partial s)_{s=0}, \qquad n^{\mu} = (dx^{\mu}/ds) \text{（測地線に沿って）}$$
$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = g_{\mu\nu}\left(\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)\left(\frac{dx^{\nu}}{ds}\right) = \frac{ds^2}{ds^2} = 1 \tag{13.64}$$

(5) 観測者の世界線近くの各事象は正確に 1 つの測地線 $\mathcal{G}[\tau, \boldsymbol{n}, s]$ によって横切られる．[遠く離れたところでは，これは真実でない．測地線は交差するだろう．図 6.3 におけるように，観測者の加速度の，あるいは時空の曲率（“測地線のずれ”）のいずれかのゆえに.]

(6) 観測者の世界線の近くの事象 $\mathcal{P}$ をとれ．特別な時間 τ に観測者の世界線上を出発点として $\mathcal{P}$ を通過する測地線は，元の方向 $\boldsymbol{n} = n^{\hat{j}}\boldsymbol{e}_{\hat{j}}$ をもったし，また $\mathcal{P}$ に達するまでに距離 s 延長することを要した．したがって，4 つの数

$$(x^{\hat{0}}, x^{\hat{1}}, x^{\hat{2}}, x^{\hat{3}}) \equiv (\tau, sn^{\hat{1}}, sn^{\hat{2}}, sn^{\hat{3}}) \tag{13.65}$$

は事象 $\mathcal{P}$ を同定する自然な方法である．これらは観測者の固有基準系での $\mathcal{P}$ の座標である．

(7) より抽象的に述べ直すと，

$$x^{\hat{0}}(\mathcal{G}[\tau, \boldsymbol{n}, s]) = \tau,$$
$$x^{\hat{j}}(\mathcal{G}[\tau, \boldsymbol{n}, s]) = sn^{\hat{j}} = sn_{\hat{j}} = s\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_{\hat{j}} \tag{13.65$'$}$$

平坦な時空ではこの構成過程および生ずる座標 $x^{\hat{\alpha}}(\mathcal{P})$ は練習問題 6.8 の過程および生ずる座標 $\xi^{\alpha'}(\mathcal{P})$ に同等である．

計算での有用性のために座標系のみならず，計量係数および接続係数を必要とする．幸いに $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ および $\Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}$ は観測者の世界線に沿ってのみ必要とされ，それらはとくに単純である．馬鹿な観測者のみが彼の世界線から離れた彼自身の固有基準系を用いようと試みるだろう．その格子は直交しなくなり，その測地線の格子の曲線は交差さえするかもしれない！(6.3 節をみよ.)

すべては観測者の世界線 $\mathcal{P}_0(\tau)$ に沿ってのことであり，彼の座標格子の基底ベクトルは（構成により）彼の直交テトラッドに同等である．

$$\partial/\partial x^{\hat{\alpha}} = \boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}} \tag{13.66}$$

したがってその計量係数は

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}}\cdot\boldsymbol{e}_{\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta} \qquad \text{（すべて } \mathcal{P}_0(\tau) \text{ に沿って）} \tag{13.67}$$

*30　接続係数の若干は観測者の直交テトラッドに対する移動則（式 13.60）によって定まる．

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}} = \boldsymbol{\nabla}_{\hat{0}}\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}} = \boldsymbol{e}_{\hat{\beta}}\Gamma^{\hat{\beta}}{}_{\hat{\alpha}\hat{0}}$$
$$= -\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}} = -\boldsymbol{e}_{\hat{\beta}}\Omega^{\hat{\beta}}{}_{\hat{\alpha}}$$

*30　観測者の世界線に沿っての接続係数

こうして

$$\Gamma^{\hat\beta}{}_{\hat\alpha\hat0} = -\Omega^{\hat\beta}{}_{\hat\alpha} \qquad （すべて\ \mathcal{P}_0(\tau)\ に沿って） \tag{13.68}$$

$\boldsymbol{\Omega}$ は式 (13.61) の形をもち，そして観測者の 4–速度および 4–加速度は，観測者自身の固有系で成分 $u_{\hat0} = -1, u_{\hat j} = 0, a_{\hat0} = 0$ をもつから，これらの接続係数は，

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma^{\hat0}{}_{\hat0\hat0} = \Gamma_{\hat0\hat0\hat0} = 0,\\
&\Gamma^{\hat0}{}_{\hat j\hat0} = -\Gamma_{\hat0\hat j\hat0} = +\Gamma_{\hat j\hat0\hat0} = +\Gamma^{\hat j}{}_{\hat0\hat0} = a^{\hat j},\\
&\Gamma^{\hat j}{}_{\hat k\hat0} = \Gamma_{\hat j\hat k\hat0} = -\omega^{\hat i}\epsilon_{\hat0\hat i\hat j\hat k},
\end{aligned}\right\} \qquad （すべて\ \mathcal{P}_0(\tau)\ に沿って） \tag{13.69a}$$

残りの接続係数は，観測者の世界線から生ずる測地線 $\mathcal{G}[\tau, \boldsymbol{n}, s]$ に対する測地線の方程式から読み取れる．式 (13.65) によれば，おのおののこのような測地線の座標表示は

$$x^{\hat0}(s) = \tau = 一定, \qquad x^{\hat j}(s) = n^{\hat j}s$$

したがって，測地線に沿ってすべて $d^2x^{\hat\alpha}/ds^2 = 0$，そして測地線の方程式は

$$0 = \frac{d^2x^{\hat\alpha}}{ds^2} + \Gamma^{\hat\alpha}{}_{\hat\beta\hat\gamma}\frac{dx^{\hat\beta}}{ds}\frac{dx^{\hat\gamma}}{ds} = \Gamma^{\hat\alpha}{}_{\hat j\hat k}n^{\hat j}n^{\hat k}$$

となる．この式はすべての空間測地線（すべての $n^{\hat j}$）に対する観測者の世界線上で

$$\Gamma^{\hat\alpha}{}_{\hat j\hat k} = \Gamma_{\hat\alpha\hat j\hat k} = 0 \qquad （すべて\ \mathcal{P}_0(\tau)\ に沿って） \tag{13.69b}$$

である場合に限り満たされる．

接続係数の値 (13.69) は，計量係数の偏微分を一義的に定める［式 (13.19′) をみよ］．

$$\left.\begin{aligned}
&g_{\hat\alpha\hat\beta,\hat0} = 0, &&g_{\hat j\hat k,\hat l} = 0,\\
&g_{\hat0\hat0,\hat j} = -2a_{\hat j}, &&g_{\hat0\hat j,\hat k} = -\epsilon_{\hat0\hat j\hat k\hat l}\omega^{\hat l};
\end{aligned}\right\} \qquad （すべて\ \mathcal{P}_0(\tau)\ に沿って） \tag{13.70}$$

*31 そしてこれらは，直交条件 $g_{\hat\alpha\hat\beta}[\mathcal{P}_0(\tau)] = \eta_{\alpha\beta}$ と合わせて，観測者の世界線近くの線要素は

$$\begin{aligned}
ds^2 = &-(1 + 2a_{\hat j}x^{\hat j})dx^{\hat0^2} - 2(\epsilon_{\hat j\hat k\hat l}x^{\hat k}\omega^{\hat l})dx^{\hat0}dx^{\hat j}\\
&+\delta_{\hat j\hat k}\,dx^{\hat j}dx^{\hat k} + O(|x^{\hat j}|^2)dx^{\hat\alpha}dx^{\hat\beta}
\end{aligned} \tag{13.71}$$

であることを意味する．この線要素のいくつかの特徴は，以下のように，注目に値する．

(1) 観測者の世界線 $\mathcal{P}_0(\tau)$—すなわち，$x^{\hat j} = 0$—上で $ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\,dx^{\hat\alpha}\,dx^{\hat\beta}$，

(2) 観測者の加速度は $g_{\hat0\hat0}$ への補正項に現れる

$$\delta g_{\hat0\hat0} = -2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} \tag{13.72a}$$

それは加速度の方向に沿った距離に比例する．この補正項の平坦な時空での導出に対しては，6.6 節をみよ．

*31 固有基準系の計量と，その物理学的な解釈

(3) 慣性を示すジャイロスコープに相対的な観測者の回転は $g_{\hat{0}\hat{j}}$ に対する補正項に現れる．それは 3–ベクトル記号で書き直せる．

$$\delta g_{\hat{0}\hat{j}}\boldsymbol{e}_{\hat{j}} = -\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\omega} = +\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x} \tag{13.72b}$$

(4) 線要素に対するこれらの 1 次補正は時空曲率の影響を受けないし，また曲率についての情報を含まない．2 次，$O(|x^{\hat{j}}|^2)$ においてのみ曲率は現れ始めるだろう．

(5) **ゼロ加速度およびゼロ回転（$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} = 0$）の特別な場合には，観測者の固有基準系は彼の測地線の世界線に沿ってすべて，局所 Lorentz 系**（$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta}, \Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}} = 0$）**に帰着する！** 対照的に，本書ですでに構成された局所 Lorentz 座標系（8.6 節の“一般的な”局所 Lorentz 座標，11.6 節の“Riemann”規準座標）はただ 1 つの事象でのみ局所 Lorentz である．

ゼロ回転およびゼロ加速度の場合には，$|x^{\hat{j}}|$ について 2 次まで正確な，計量に対する以下の表現を導くことができる．

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & (-1 - R_{\hat{0}\hat{l}\hat{0}\hat{m}}x^{\hat{l}}x^{\hat{m}})dt^2 - \left(\frac{4}{3}R_{\hat{0}\hat{l}\hat{j}\hat{m}}x^{\hat{l}}x^{\hat{m}}\right)dt\,dx^{\hat{j}} \\ & + \left(\delta_{\hat{i}\hat{j}} - \frac{1}{3}R_{\hat{i}\hat{l}\hat{j}\hat{m}}x^{\hat{l}}x^{\hat{m}}\right)dx^{\hat{i}}dx^{\hat{j}} + O(|x^{\hat{j}}|^3)dx^{\hat{\alpha}}\,dx^{\hat{\beta}} \end{aligned} \tag{13.73}$$

[たとえば，Manasse and Misner (1963) をみよ．] ここに $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ は世界線 $x^{\hat{j}} = 0$ に沿った Riemann テンソルの成分である．このような座標は“Fermi 規準座標”とよばれる．

[練習問題]

13.14　慣性力と Coriolis の力

加速された観測者は，自由落下する粒子が彼の固有基準系の原点を通過するとき，粒子の経路を調べる．もし

$$\boldsymbol{v} \equiv (dx^{\hat{j}}/dx^{\hat{0}})\boldsymbol{e}_{\hat{j}} \tag{13.74}$$

が粒子の通常の速度であるならば，観測者の固有基準系に相対的な粒子の通常の加速度は

$$\frac{d^2x^{\hat{j}}}{dx^{\hat{0}2}}\boldsymbol{e}_{\hat{j}} = -\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} + 2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} \tag{13.75}$$

$-\boldsymbol{a}$：[慣性加速度]　$-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$：[Coriolis の加速度]　$2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$：[慣性加速度に対する相対論的な補正]

である．ここに $\boldsymbol{a}$ は観測者自身の 4–加速度であり，そして $\boldsymbol{\omega}$ は彼の空間基底ベクトル $\boldsymbol{e}_{\hat{j}}$ が回転している角速度である［式 (13.62) をみよ］．［ヒント：粒子の軌道点 $x^{\hat{j}} = 0$ での測地線の方程式を用いよ．**注**：この結果は異なる方法を用いて練習問題 6.8 で平坦な時空において導かれた．］

13.15 回転群：計量

（練習問題 9.13, 9.14, 10.17 および 11.12 の継続.）回転群の多様体$SO(3)$に対して共変微分 $\boldsymbol{\nabla}$ と両立する計量 $\boldsymbol{g}$ が存在することを示せ．計量成分を生成子の非座標基底 $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ で明確に示して存在を証明せよ．［**答え**：

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \tag{13.76}$$

言葉で述べ直す．もし（1）回転群の多様体が局所 Euclid 的である，（2）無限小回転の生成子 $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ は直交する，$\boldsymbol{e}_\alpha\cdot\boldsymbol{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$，そして（3）$\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ が標準的な回転群の交換関係

$$[\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta] = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{e}_\gamma \tag{13.77}$$

に従うならば，$SO(3)$の生ずる測地線は練習問題 10.17 で選ばれた測地線と一致する.］

14章 曲率の計算

[本章は完全にトラック–2である．4章（微分形式）と10, 11, および13章（微分幾何学）は14.5–14.6節に対する必要な準備である．本章は15章（Bianchi恒等式）に対する準備として必要とされる．それは重力理論の多くの応用（23–40章）に役立つだろう.]

14.1 物理学を理解するための道具としての曲率

基本的な物理学は，曲率のどのような体系化された計算（試験粒子の振動数，引力の中心近くの潮汐を生み出す加速度，閉じた3–球模型の宇宙の曲率，平行移動のジャイロスコープあるいはベクトルに対する影響，図1.1, 1.10, および1.12, そしてコラム1.6と1.7）も回避できることがときどきある．しかし他の場合には，曲率の計算は物理学へのもっとも速い道である．本章はこのような場合に対して意図されている．ここでは曲率を計算する3つの方法を記述し，そして平面重力波に対して（コラム14.4, 式(5)），宇宙のFriedmann幾何学に対して，（コラム14.5），そして静的な（練習問題14.13）および動的な（練習問題14.16）Schwarzschild幾何学に対して，Einstein曲率テンソルの成分を与える．曲率のこれらおよび他の計算は，他のところで“曲率テンソル”のもとで示されている．

以下のような複雑な4–幾何学に対する表現［Harrison（1959）］

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &-(x/3^{1/2}L + y^2/12L^2)^{-3^{1/2}} \left(\int \frac{v\,dz}{z}\right)^{-1} (-z/L)^{3^{-1/2}} dt^2 \\
&+(x/3^{1/2}L + y^2/12L^2)^{1+3^{1/2}} \left(\int \frac{v\,dz}{z}\right)^{1+2/3^{1/2}} (-z/L)^{-1+3^{-1/2}} dx^2 \\
&+(x/3^{1/2}L + y^2/12L^2)^{2+3^{1/2}} \left(\int \frac{v\,dz}{z}\right)^{1+2/3^{1/2}} (-z/L)^{-3^{-1/2}} dy^2 \\
&+(x/3^{1/2}L + y^2/12L^2)^{3+3^{1/2}} \left(\int \frac{v\,dz}{z}\right)^{1+2/3^{1/2}} (-z/L)^{-2-3^{-1/2}} \\
&\times \left(\frac{v^2-1}{-1-z/L}\right) dz^2
\end{aligned}
\tag{14.1}
$$

[*1] をみれば，もし曲率がなんであるかを知ることで物理学的な状況をよりよく理解できるだろうと悟るのに十分である．Einsteinの方程式を解くことから生ずる，あるいは文献で十

[*1] 曲率を計算しなければならない状況

分理解されずに現れる，計量に対するどのような他の複雑な表現についても同様である．このような場合に適当な方法は，しばしば，第 1 に曲率，第 2 に理解である．

曲率は幾何学的な性質の中でもっとも単純な局所的基準である（コラム 14.1 をみよ）．したがって曲率は問題の時空のより包括的な描写へのよい 1 歩である．

ときどき，第 1 に時空の計量の表現をもち，そしてそれから時空を理解するために曲率の計算をする．しかしよりしばしば，物理学的に興味ある計量［星（23–26 章まで），模型宇宙論（27–30 章まで），崩壊とブラックホール（31–34 章まで），そして重力波（35–37 章まで)］の表現に到達する手助けとして，空間と時間について指定された対称性の条件に支配されている，曲率の計算をする．

*2 基礎的な“曲率を計算するための標準的な手続き”はコラム 14.2 に例示されている．すでに導かれている，コラム 14.2 の 2 つの公式は連続して用いられる．第 1［式 (1) および (2)］は形 $\Gamma \sim g\,\partial g$ をもち $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu}$ を与える．他［式 (3)］は形 $R \sim \partial\Gamma + \Gamma^2$ をもち曲率成分 $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ を与える．

*3 曲率成分が計算された後に，結果を表示する有用な方法がある．(1) Ricci テンソル $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$ およびスカラー曲率 $R = R^{\mu}{}_{\mu}$ をつくる．(2) $R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}$ のような他の不変量をつくる．(3) 賢明に選ばれた直交系 $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\alpha}} = L^{\hat{\alpha}}{}_{\beta}\boldsymbol{d}x^{\beta}$ で成分 $R^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ をつくり，(4) $R^{[\hat{\mu}\hat{\nu}]}{}_{[\hat{\alpha}\hat{\beta}]}$ を 6×6 行列（4 次元で，3 次元では 3×3 行列）としてみせる．ここに $[\hat{\mu}\hat{\nu}] = [\hat{0}\hat{1}], [\hat{0}\hat{2}], [\hat{0}\hat{3}], [\hat{2}\hat{3}], [\hat{3}\hat{1}], [\hat{1}\hat{2}]$ は行を示し，そして $[\hat{\alpha}\hat{\beta}]$ は列を示す（練習問題 14.14 と 14.15)．(5) 最後に，しかし一般相対性理論にとってはるかにもっとも重要であるが，Einstein テンソル $G^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}$ を 14.2 節に記述されているようにつくる．

上に要約されコラム 14.2 でより詳細に記述されている計算方法は，標準的な方法を用いる方がよりよい方法を学んだりあるいは考案するよりもより速い場合には，どこでも用いられる．標準的な方法は，物理学的な直感が技術的な容易さよりも高い優位をもつ短い過
*4 程では，つねに学生にとって望ましい．それは，しかし，鈍い方法であって，人々によりも計算機により適している．代数さえも計算機で処理されうる（コラム 14.3 をみよ）．

［練習問題］

14.1　2 次元双曲面の曲率

$ds_3{}^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2$ をもつ 2+1 Minkowski 時空で双曲面 $t^2 - x^2 - y^2 = T^2 =$ 一定 の曲率を求めよ．まずこの 2 次元曲面内での距離は双曲面上で座標の適当な選択 α, ϕ によって形 $ds^2 = T^2(d\alpha^2 + \sinh^2\alpha\, d\phi^2)$ で表されうることを示せ．

14.2　2 および 3 次元で Ricci 曲率で表される Riemann 曲率

2 次元では，ただ 1 つの独立な曲率成分，R_{1212} が存在する．明らかに 1 つのスカラー

---

*2　曲率を計算するための“標準的な手続き”
*3　曲率の公式をみせる方法
*4　計算機を用いる曲率の計算

量 R は同じ情報をもたねばならない．2 次元の恒等式 $R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}R(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha})$ は，R および計量だけから構成され，正しい縮約値 $R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = R$ をもつ，R の線形関数として，$R_{\mu\nu\alpha\beta}$ を与えるただ 1 つのテンソル公式であると注意することによって達成される．Ricci テンソル R_{jk} および計量で，R_{ijkl} を表す，対応する 3 次元の恒等式を導け．

14.3　直交系での 3–球の曲率

3–球

$$ds^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \tag{14.2}$$

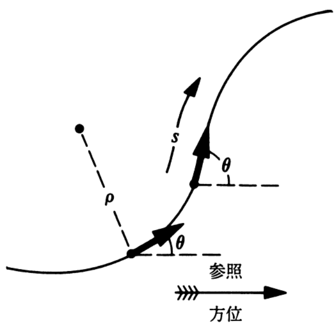
あるいは 3–双曲面

$$ds^2 = a^2[d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \tag{14.3}$$

に対する曲率テンソルを計算せよ．座標に基づいた成分 $R^{i}{}_{jkl}$ を，対応する直交基底，$R^{\hat{i}}{}_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}$ に変換せよ．$R^{\hat{i}\hat{j}}{}_{\hat{k}\hat{l}} = R^{[\hat{i}\hat{j}]}{}_{[\hat{k}\hat{l}]}$ を適当に表示された行と列をもつ 3×3 行列として表せ．

コラム 14.1　曲率についての概観

1. 歴史的な出発点：平面上の曲線．線そのもの（“に内在の”）に閉じ込められた測定で線の曲率を定義する方法は存在しない．たとえば，平面内で固定された方向に対する接線ベクトルの方位角の振る舞い θ を，曲線に沿って測られた固有長 s の関数として $\theta = \theta(s)$ を必要とする．それから曲率 κ およびその逆数，曲率半径 ρ は，$\kappa(s) = 1/\rho(s) = d\theta(s)/ds$ で与えられる．代わりに，接線から垂直方向へ測定された逸脱 y をその接線に沿って測られた距離 x の関数として考察できる．そうすると $\kappa = 1/\rho = d^2y/dx^2$．



2. この概念は後に平坦な（Euclid 的）3–空間内にはめ込まれた曲面に拡張された．滑らかな曲面の，与えられた点での接平面からの逸脱 z は，その点の近傍で 2 次表現

$$z = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2$$

で記述される．適当な角度 α だけ軸を回転すると，

$$x = \xi\ \cos\ \alpha + \eta\ \sin\ \alpha,$$
$$y = -\xi\ \sin\ \alpha + \eta\ \cos\ \alpha$$

となり，2 次表現を

$$z = \frac{1}{2}\kappa_1\xi^2 + \frac{1}{2}\kappa_2\eta^2$$

に変える．ここで

$$\kappa_1 = 1/\rho_1$$

そして

$$\kappa_2 = 1/\rho_2$$

は曲面の 2 つの“主曲率”を表す．

3. Gauss（1827）は完全に曲面に閉じ込められた（“蟻の社会”）測定によって曲率を定義する概念を抱いた．曲面上の与えられた点 $\mathcal{P}$ から完全に曲面内で測定された固有の距離 ϵ に対して曲面上の測地線上を進む．元の点を出発するがしかし他の方向に進むことを繰り返す．無限個の点を得る．それらは“輪”を描く．再び完全に曲面に閉じ込められた測定によって，その周りの固有の長さを定める．はめ込みの観点に対応する計量

$$\begin{aligned} ds^2 &= dz^2 + d\xi^2 + d\eta^2 && \text{(Euclid 的 3–空間)} \\ &= [(\kappa_1\xi\, d\xi + \kappa_2\eta\, d\eta)^2 + (d\xi^2 + d\eta^2)] && \begin{pmatrix}\text{曲がった 2–幾何学} \\ \text{に内在する計量}\end{pmatrix} \end{aligned}$$

を用いて，このような“内在的な測定”の結果を計算できる．周りの長さは Euclid 的値 $2\pi\epsilon$ と，ϵ に比例する微小な補正だけ異なると計算する．

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{6}{\epsilon^2}\left(1 - \frac{\text{周りの長さ}}{2\pi\epsilon}\right) = \kappa_1\kappa_2 = \frac{1}{\rho_1\rho_2} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}$$

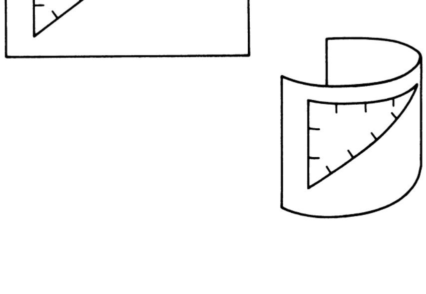
とくに最初の等式記号に注意せよ．Gauss は，完全に曲面内での測定で定義される何かが，定義に対して曲面の外部からの測定をそれぞれ必要とする 2 つの量 κ_1 と κ_2 の積と一致することを発見した喜びをあらわにした．

4. “外在的な”曲率と“内在的な”曲率との対照は術語

$$\text{(外在的な曲率)} = \kappa = (\kappa_1 + \kappa_2)(\text{cm}^{-1}),$$

$$\text{(内在的なあるいは Gauss 曲率)} = \kappa_1\kappa_2(\text{cm}^{-2})$$

に要約される（後者は 2–幾何学のスカラー曲率不変量，R の半分と同等である）．1 枚の平坦な紙の上に 3:4:5 三角形を描いて，その後，紙を巻き上げよ．1 枚の紙に内在的な Euclid 的 2–幾何学はこの湾曲によって保存される．表面に内在的な Gauss 曲率は不変のままである，

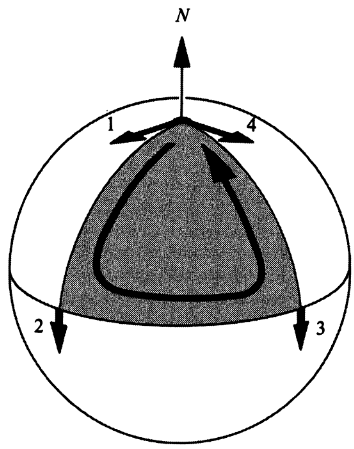


それは Euclid 的値をゼロに保つ（ゼロでない κ_2，ゼロの κ_1，ゆえに積，$\kappa_1\kappa_2 = 0$）．しかし，外在的な曲率は $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$ からゼロでない値 $\kappa_1 + \kappa_2 \neq 0$ に変わる．

5. 本章で取り扱われる曲率は時空に内在的な曲率である．すなわち，どのような仮定的な高次元の平坦な多様体へのいかなるはめ込みも一切使わず，またすべてのそのような考えを排除して定義される曲率（幾何学は物理学への力学的な参加者であって，物質とエネルギーの戦いに優先して神が与えた何か完全な物でないという，Riemann, Clifford, および Einstein の概念）である．

6. 時空の幾何学の曲率は，曲率をどのような空間的な層（3–幾何学，“初期値の超曲面”）にもその時空を通して課する（幾何力学の初期値問題については，21 章の “Gauss と Codazzi の関係” をみよ）．

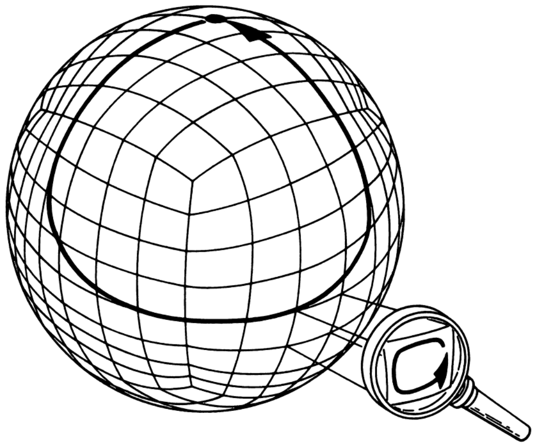
7. 閉じたループの周りを自らに平行に移動されるベクトルの回転は，曲率の定義を 4 および 3 次元で，2 次元におけるように有用なものとして与える（曲がった 2 次元の幾何学で，1 つの点にはただ 1 つの平面が存在する．したがってただ 1 つの数がそこでの Gauss 曲率を記述するのに要求される．3 および 4 次元では，点を通過する，より多くの独立な平面が存在する．したがってより多くの数が曲率を記述するのに要求される）．図では，位置 1（北極）でベクトルをもって出発する．そのベクトルを自らに平行に（位置 2, 3, ⋯）90°–90°–90° 球面三角形の周りを移動する．そのベクトルは 90° 回転して出発点（位置 4）に戻る．



$$(\text{Gauss 曲率}) = \frac{(\text{回転した角度})}{(\text{1 周した面積})} = \frac{(\pi/2)}{(1/8)(4\pi a^2)} = \frac{1}{a^2}$$

（正：回転の向きは 1 周回った向きと同じ）．

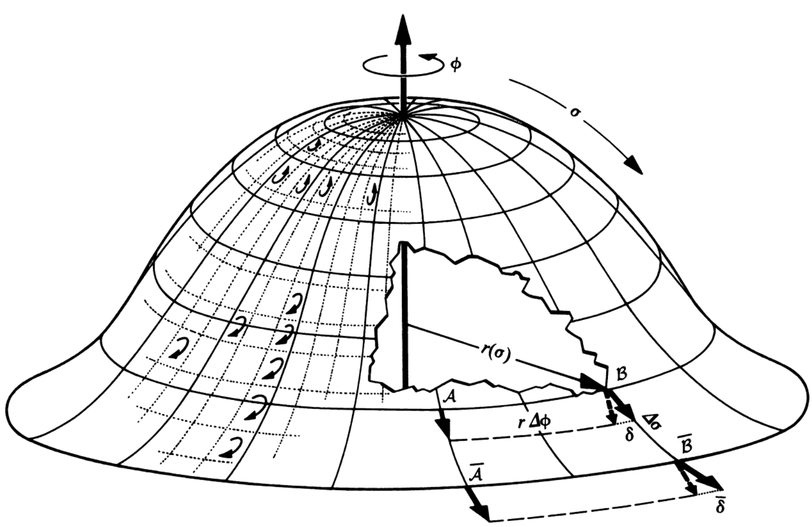
8. なお簡単のために曲がった 2 次元多様体に留まって，2–曲面の曲率を全曲面上で定義された 2–形式（“箱状構造”）として記述する．任意の与えられたルートで取り囲まれた箱の数は，そのルートに沿って自らに平行に運ばれたベクトルによって回られた，ラジアンで表された角度（あるいは，細分割の選ばれた細かさに応じて 1 ラジアンの 1/10 あるいは 1/100 など）をただちに与える．与えられた箱の寄与は，その上に印された矢の向き（拡大された図をみよ）がルートを回る向きと一致するかしないかに応じて正あるいは負として数えられる．



9. 計量 $ds^2 = d\sigma^2 + r^2(\sigma)d\phi^2$ をもつ，回転対称性の例示された曲面（“ピスヘルメット”）に対する曲率 2–形式は

$$\text{曲率} = -\frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\sigma^2}\boldsymbol{d}\sigma\wedge r\boldsymbol{d}\phi \tag{1}$$

である（図の左側に示されている “2–形式の箱” での矢の向きで示されているように，ヘルメットの頂部で正，つばの周りで負）．r の “意味” は，視覚化に便利なように，曲面を Euclid 的 3–空間へはめ込むことによって例示されている．しかしはめ込みなしに，曲面に内在的な測定によって定義される 2–幾何学の概念はより重要である．



10. 長さ（“計量”）がいかに曲率を定量的な詳細さで定めるかは，この 2 次元の例，4 次元時空内での 1–形式および 2–形式について本章でなされた数学的な計算で “舞台の背後ですすんでいるもの” に対する模型以上には，明瞭にどこにも示されていない．

a. 面要素 $\mathcal{AB\bar{B}\bar{A}A}$ の周囲を回るときの正味の回転は $\delta - \bar{\delta}$ である（子午線 $\mathcal{A\bar{A}}$ あ

るいは $\mathcal{B}\bar{\mathcal{B}}$ に沿ってベクトルを移動するときにベクトルの左へのあるいは右への回転はない）.

b. $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ へ行くときに，座標系（子午線の方向）に相対的なベクトルの回転は

$$(\text{角度 } \delta) = \frac{\text{弧}}{\text{長さ}} = \frac{r(\sigma + d\sigma)\Delta\phi - r(\sigma)\Delta\phi}{d\sigma} = \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)_{\sigma} \Delta\phi$$

である.

c. $\bar{\mathcal{A}}$から$\bar{\mathcal{B}}$ へ行くときにベクトルの回転は同様に

$$(\text{角度 } \bar{\delta}) = \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)_{\sigma+\Delta\sigma} \Delta\phi$$

である.

d. こうして正味の回転は

$$\delta - \bar{\delta} = -\left(\frac{d^2 r}{d\sigma^2}\right)_{\sigma} \Delta\sigma\Delta\phi$$

である.

e. 形式として表すと，これはただちに式 (1) を与える.

f. 概念と計算は 4 次元ではより複雑である．おもに問題の点で考察されるべき曲面の方向づけに対して異なる選択を取り扱わなければならないからである.

11. これらの幾何学的な概念の, 形式の言葉への翻訳はこの 2 次元の例に留まるときはもっとも直接的である．面要素の境界の周りを運ばれる見本のベクトル $A^i = (A^1, A^2)$ は，わずかに方向を変えてその出発点に戻る.

$$-(\, A^i \text{についての変化}\,) = \mathcal{R}^i{}_j A^j \tag{2}$$

a. より明確にするために，基底 1–形式として $\boldsymbol{\omega}^{\hat{1}} = \boldsymbol{d}\sigma$ および $\boldsymbol{\omega}^{\hat{2}} = r\,\boldsymbol{d}\phi$ を取り，そして $A^{\hat{1}}$ を増大する σ の方向に沿う $\boldsymbol{A}$ の成分とし，$A^{\hat{2}}$ を増大する ϕ の方向に沿う $\boldsymbol{A}$ の成分とすると好都合である．行列 $\mathcal{R}^{\hat{i}}{}_{\hat{j}}$ は回転行列であり，方向の変化を生み出すが，長さの変化を生み出さない（ゼロ対角成分）．こうしてここに

$$\|\mathcal{R}^{\hat{i}}{}_{\hat{j}}\| = \left\| \begin{matrix} 0 & \mathcal{R}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}} \\ -\mathcal{R}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}} & 0 \end{matrix} \right\| \tag{3}$$

この例で，$\mathcal{R}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}}$ は明らかにベクトル $\boldsymbol{A}$ が面要素の周りを自らに平行に移動されるとき，回転する角度を表す.

b. ここまでのところ回転は “漠然” としている．なぜなら面要素の大きさがいまだ指定されていないからである．それはもっとも好都合に 2 つのベクトル（“バイベクトル” (bivector)）によって定義される，基本的な平行四辺形として考えられる．こうして $\mathcal{R}^{\hat{i}}{}_{\hat{j}}$, あるいは，特別に考えられる 1 つの要素 $\mathcal{R}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}}$（“回転角”）は，2 つの投入口をもつ数学的な対象（“2–形式”）とみなされねばならない．こ

の投入口にこれら 2 つのベクトルが挿入され，定まった数（ラジアンで表された角度）を得る．ピスヘルメットの例では，式 (1) から

$$\mathcal{R}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}} = -\frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\sigma^2}\boldsymbol{\omega}^{\hat{1}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{2}} \tag{4}$$

を得る．こうして本書の中の $\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu}$ は “曲率 2–形式” とよばれる．

c. 本書はこのような表現から Riemann 曲率テンソルの成分を読み取る方法を述べる．たとえばここで，

$$R^{\hat{1}}{}_{\hat{2}\hat{1}\hat{2}} = -R^{\hat{1}}{}_{\hat{2}\hat{2}\hat{1}} = (-1/r)(d^2r/d\sigma^2)(\boldsymbol{\omega}^{\hat{1}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{2}} \text{ あるいは } \boldsymbol{\omega}^{\hat{2}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{1}} \text{の係数})$$

d. 4 次元に拡張して，$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ を，これに 3 つの数を掛けて 4 番目の数を得る因子と理解する．得られる数はベクトルが，たとえば，2 つのベクトル $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ からつくられる平行四辺形によって定義された，閉曲線の周りを自らに平行に移動されるとき，そのベクトルの α 成分に生ずる変化（逆符号をもつ）である．$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ に掛けられる因子は，(1) ベクトル $\boldsymbol{A}$ の β 成分および (2,3) 平行四辺形の広がりの $\mu\nu$ 成分，$(u^{\mu}v^{\nu} - u^{\nu}v^{\mu})$ である．こうして

$$\delta A^{\alpha} = -R^{\alpha}{}_{\beta|\mu\nu|}A^{\beta}(u^{\mu}v^{\nu} - u^{\nu}v^{\mu})$$

コラム 14.2　簡明な曲率の計算（球に対する例示）

Riemann 曲率テンソルの成分 $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ を計算するための基本的で一般的に適用できる方法は座標基底での計量成分 $g_{\mu\nu}$ から出発し，以下のスキームで進む．

$$g_{\mu\nu} \xrightarrow{\ \Gamma\sim\partial g\ } \Gamma_{\mu\alpha\beta} \longrightarrow \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \xrightarrow{\ R\sim\partial\Gamma+\Gamma\Gamma\ } R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$$

これら 3 段階に対して要求される公式は

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\right) \tag{1}$$

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha\beta} \tag{2}$$

そして

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial\Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\alpha} \tag{3}$$

である．

半径 a の球の 2 次元の表面の計量は

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{4}$$

である．標準的な方法で曲率を計算するには，ds^2 に対する公式を g_{kl} の値の表として用いる．それは $g_{\theta\theta} = a^2$，$g_{\theta\phi} = 0$，$g_{\phi\phi} = a^2\sin^2\theta$ を示す．6 個の可能な異なる $\Gamma_{jkl} = \Gamma_{jlk}$（4 次元では 40 個存在するだろう）を公式 (1) から計算する．こうして

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\phi\phi} &= -a^2 \sin\theta \cos\theta = -\Gamma_{\phi\phi\theta}, \\ \Gamma_{\theta\theta\theta} &= \Gamma_{\phi\phi\phi} = 0, \\ \Gamma_{\theta\theta\phi} &= \Gamma_{\phi\theta\theta} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

最初の添字を上げる．

$$\begin{aligned} \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} &= -\sin\theta \cos\theta, \\ \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} &= \cot\theta, \\ \Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta} &= \Gamma^{\theta}{}_{\theta\phi} = 0 = \Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta} = \Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi} \end{aligned} \tag{6}$$

適当な曲率成分を選ぶ（基本的な対称性 $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{[\mu\nu][\alpha\beta]}$ によって自動的にはゼロでなく，また $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$ によるように前もって別な形で計算されていない）．この 2 次元の例では，ただ 1 つの選択（4 次元での 21 個のこのような計算に比べて）がある．それは

$$\begin{aligned} R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} &= \frac{\partial \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}}{\partial\theta} - \frac{\partial \Gamma^{\theta}{}_{\phi\theta}}{\partial\phi} + \Gamma^{\theta}{}_{k\theta}\Gamma^{k}{}_{\phi\phi} - \Gamma^{\theta}{}_{k\phi}\Gamma^{k}{}_{\phi\theta} \\ &= \frac{\partial \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}}{\partial\theta} - 0 + 0 - \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} \\ &= \sin^2\theta - \cos^2\theta + \sin\theta \cos\theta \cot\theta \end{aligned}$$

である．したがって

$$R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} = \sin^2\theta \tag{7}$$

あるいは

$$R^{\theta\phi}{}_{\theta\phi} = \frac{1}{a^2} \tag{8}$$

である．縮約は Ricci テンソルの成分，

$$R^{\theta}{}_{\theta} = R^{\phi}{}_{\phi} = \frac{1}{a^2}, \qquad R^{\theta}{}_{\phi} = 0 \tag{9}$$

を与える．そしてさらなる縮約は曲率スカラー

$$R = 2/a^2 \tag{10}$$

を与える．この多様体での好都合な直交系は

$$\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} = a\,\boldsymbol{d}\theta, \qquad \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} = a\,\sin\,\theta\,\boldsymbol{d}\phi \tag{11}$$

である．さらに一般的に $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\alpha}} = L^{\hat{\alpha}}{}_{\beta}\,\boldsymbol{d}x^{\beta}$ と書く．曲率テンソルを対角計量のこの単純であるが啓蒙的な例での直交成分に変換することは，テンソルについての各添字に対するただ 1 つの規格化の因子を必要とする．こうして $v^{\hat{\theta}} = av^{\theta}$，$v^{\hat{\phi}} = a\,\sin\,\theta v^{\phi}$，$v_{\hat{\theta}} = a^{-1}v_{\theta}$，$v_{\hat{\phi}} = (a\,\sin\,\theta)^{-1}v_{\phi}$．同様に，$R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} = \sin^2\theta$ から曲率テンソルの成分，

$$R^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = \frac{1}{a^2} = R^{\hat{\theta}\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}\hat{\phi}} \tag{12}$$

を直交系で見出す．

コラム 14.3　コンピュータに基づいた解析的な計算

重力物理学および一般相対性理論での研究には，ときどき，与えられた計量に対する Einstein および Riemann 曲率テンソル，あるいは与えられたストレス–エネルギーテンソルの発散，あるいは与えられた代数的な仮定のもとでの Newmann–Penrose テトラッド（tetrad，四つ組）の式のような量の，きわめて厳密な注意を要する長い計算がつきまとう．このような計算は十分簡明であり論理的な構造について演繹的であるのでコンピュータで取り扱うことができる．1966 年以来，コンピュータは一般にこのような仕事を引き継いできた．

研究者が解析的な計算をプログラムできるいくつかの言語がある．コンピュータの専門家は LISP（たとえば，Fletcher（1966）や Hearn（1970）の仕事をみよ）のような機械に適応した言語で仕事をすることを希望するだろう．しかし，相対論のたいていの応用者は，REDUCE [Hearn（1970）によってつくられ，IBM 360 と 370，および PDP 10 コンピュータに利用できる]，ALAM [D'Invero（1969）によってつくられ，Atlas コンピュータで利用できる]，CAMAL [Barton, Bourne, and Fitch（1970）によってつくられ，Atlas コンピュータで利用できる]，そして FORMAC [Tobey たち（1967）によってつくられ，IBM 7090, 7094 360, および 370 で利用できる] のような利用者に適応した言語を好むだろう．この分野での活動の調査に対しては，Barton and Fitch（1971）をみよ．ここではわれわれは FORMAC のみを記述する．それは言語の中でもっとも広く利用できそして広く用いられているものである．しかしおそらくもっとも強力でない [たとえば，D'Inverno（1969）をみよ]．FORMAC の解析的な仕事に対する状況は FORTRAN の最初のそしてもっとも素朴なバージョンの数値的な仕事に対するもののようである．

FORMAC は，1/3 のような数値的定数，x あるいは u のような記号的な定数，$\sin(u)$

あるいは exp(x) のような特別な基本的関数，そして $f(x,u)$ あるいは $g(u)$ のようないくつかの変数の記号的な関数，を含む代数的な表現を操作する．たとえば，$ax+bx^2$ を $2x+(3+b)x^2$ に加えて $(a+2)x+(3+2b)x^2$ を得ることができる．あるいはそれは，$x^2uf(x,u)+\cos(x)$ の x についての偏微分をとって

$$2xuf(x,u)+x^2u\,\partial f(x,u)/\partial x-\sin(x)$$

を得ることができる．それは人間がなしうるどのような代数的あるいは微分学的計算も，間違いをせずに，することができる！ 不幸にも，それは解析的に積分することができない，積分は演繹的な論理ではなく帰納的な論理を必要とする．

PL/1 は，FORMAC と同時に，あるいはそれと独立に用いられうる言語である．PL/1 は符号の連続，たとえば，"Z/1×29−+/" を処理する．それは記号の論理を知っており，2 つの列が同等であるかどうかを述べることができ，新しい符号を列の中へ挿入したりあるいは古い符号を取り除くことができる．しかしそれは代数あるいは微分学の法則を知らない．こうして，その第 1 の使用は FORMAC への付属物としてである（コンピュータ系の観点からは FORMAC は PL/1 の付属物であるけれども）．

Einstein のテンソルを，与えられた計量成分で求めたり他の計算をするための FORMAC プログラムは，多くの過去の使用者［たとえば，Fletcher, Clemens, Matzner, Thorne, and Zimmerman（1967），Ernst（1968），Harrison（1970）をみよ］から得ることができる．しかし，FORMAC でプログラムをつくることは十分単純であるので，通常与えられた仕事をするのに，自らのプログラムをつくるのも困難でない．もし困難が生ずるとすれば，それは解析的な計算がコンピュータのコアを使い尽くすからであるだろう．大きすぎる表現を，半ページの長さの表現をもついくつかに分割することによって，存在するどのようなコンピュータのコアにも適するようにつくることは容易である！

FORMAC の使用者は，コアの使い尽くしが起こったときに，彼らの問題を解くいくつかの方法を考案した．1 つの方法はプログラムおよび FORMAC 系の必要でない部分をコアから取り除くことである．PURGE および KILL とよばれるルーチンは Clemens and Matzner (1967) によってこの目的のために展開された．他のルーチンは，取り扱い可能な大きさの単位で与えられた計算への答えをつくりコンピュータのコアからそのディスクへ，これらの単位を出力することである．それからこれらの単位をすべて加え合わさなければならない (FORMAC のみでは，あるいは FORMAC+PL/1 を用いても不可能な仕事である)．しかし James Hartle が FORMAC, PL/1, および SORT とよばれる IBM データ処理ルーチンを組み合わせて用いることで解いた仕事である［Hartle and Thorne（1974）をみよ］．

14.2 Einstein テンソルをつくる

空間での物質の分布は，Einstein によれば，すぐには空間の局所的な曲率のすべての詳細を述べない．ストレス–エネルギーテンソルは Riemann 曲率テンソルの成分のある組合せ，Einstein テンソルをつくり上げる組合せについてのみ情報を与える．13 章では，
[*5] Einstein テンソルを計算する 2 つの同等な方法を記述した．(1) Riemann テンソルの連続的な縮約によって

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}, \qquad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu},$$
$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{14.4}$$

[式 (13.48) および (13.49)]，(2) Riemann テンソルの双対をつくりそれから縮約することによって

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} \equiv ({}^{*}R^{*})_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}R^{|\mu\nu|}{}_{|\rho\sigma|}\epsilon^{\rho\sigma\gamma\delta} = -\delta^{\rho\sigma\gamma\delta}{}_{\alpha\beta\mu\nu}R^{|\mu\nu|}{}_{|\rho\sigma|} \tag{14.5a}$$
$$G_{\beta}{}^{\delta} = \mathcal{G}_{\alpha\beta}{}^{\alpha\delta} \tag{14.5b}$$

[式 (13.46) および (13.47)]．3 番目の方法は，これらのどれよりも通常すぐれている，式 (14.5a)，(14.5b) を結びつけて見出される．

$$G_{\beta}{}^{\delta} = G^{\delta}{}_{\beta} = -\delta^{\delta\rho\sigma}{}_{\beta\mu\nu}R^{|\mu\nu|}{}_{|\rho\sigma|} \tag{14.6}$$

[注：どのような系でも，直交していてもいなくても，置換テンソル $\delta^{\delta\rho\sigma}{}_{\beta\mu\nu}$ は成分

$$\delta^{\delta\rho\sigma}{}_{\beta\mu\nu} = \delta_{\beta\mu\nu}{}^{\delta\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & (\text{もし } \delta\rho\sigma \text{ が } \beta\mu\nu \text{ の偶置換ならば}) \\ -1 & (\text{もし } \delta\rho\sigma \text{ が } \beta\mu\nu \text{ の奇置換ならば}) \\ 0 & (\text{それ以外では}) \end{cases}$$

をもつ．これをみるには，単純に $\delta^{\delta\rho\sigma}{}_{\beta\mu\nu}$ を，定義 (3.50h) を用いそして $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ および $\epsilon^{\rho\sigma\gamma\delta}$ の成分 (8.10) を用いて求めよ．] Einstein テンソルに対する式 (14.6) は，明確に書くと，

$$\begin{aligned} G^{0}{}_{0} &= -(R^{12}{}_{12} + R^{23}{}_{23} + R^{31}{}_{31}), \\ G^{1}{}_{1} &= -(R^{02}{}_{02} + R^{03}{}_{03} + R^{23}{}_{23}), \\ G^{0}{}_{1} &= R^{02}{}_{12} + R^{03}{}_{13}, \\ G^{1}{}_{2} &= R^{10}{}_{20} + R^{13}{}_{23} \end{aligned} \tag{14.7}$$

となり，他の成分はすべて，添字の明白な置換によって得られる，同様な公式で与えられる．

[*5] Einstein テンソルを Riemann テンソルから計算する 3 つの方法

14.3　より有効な計算

もし問題に対する答えあるいは計算の結果が単純でないならば，それを得る単純な方法は存在しない．しかし長い計算が短い答えを与えるときは，よりよい方法と考えられる．一
*6 般相対性理論のよく知られた応用の多くは成分，$g_{\mu\nu}, \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ および $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ の多くがゼロであるような計量形式をもつ応用を提示する．それらに対しては曲率の標準的な計算（コラム 14.2）ははるかに “無駄な” 努力を含む．ゼロであることがわかる多くの $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ を計
*7 算する．ゼロであったり，あるいは他の項と相殺してゼロを与える $-\Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu}$ のような和で多くの項を点検する．2 つの択一的な手続きはこの “無駄” を若干消去するのに利用できる．“測地線の Lagrangian” の方法は $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ を一覧表で表す経済的な方法を与える．“曲率 2–形式” の方法は初めから終わりまでの記述を認識して，接続と曲率の両方を計算する．

*8 測地線の Lagrangian の方法は標準的な方法に加えるゆるやかな改善にすぎない．しかしそれはまた変分の計算での適度な投資，数学および物理学の世界における他の状況での
*9 どのような場合にも支払う投資を要求するだけである．対照的に，曲率 2–形式の方法は効果的である．しかし，相対論のような入門的な概説に対して誰もが通常必要とするであろうよりもより重い投資を，1–形式および 2–形式の数学で要求する．しかし，数日かかる曲率の計算をしなくてはいけない者は誰でも，曲率 2–形式の演算法を学ぶことをよしとするだろう．

14.4　測地線の Lagrangian の方法

接続係数 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ は，測地線の式

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = 0 \tag{14.8}$$

を書く前に知られていなければならないと，通常は考える（これ以降，点はアフィンパラメータ，λ についての微分を表す）．しかし，議論は逆にすることができる．測地線の式が書き下ろされると，それらから接続係数を読み取ることができる．たとえば，コラム 14.2 で取り扱われているように 2–球上で，測地線の式は

$$\ddot{\theta} - \sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\phi}^2 = 0 \tag{14.9θ}$$

$$\ddot{\phi} + 2\,\cot\theta\,\dot{\phi}\dot{\theta} = 0 \tag{14.9ϕ}$$

である．第 1 の式はここでは $\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$ を示す．第 2 の式は $\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} = \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \cot\theta$ を示す．そして他の項がいずれも存在しないことは，すべての他の $\Gamma^{i}{}_{jk}$ はゼロであ

*6　曲率を計算する標準的な方法は浪費的である
*7　“無駄” を避ける方法
*8　(1) 測地線の Lagrangian の方法
*9　(2) 曲率 2–形式の方法

ることを示す．

第 1 の本質的な原理はこうして明白である．測地線の式を明確に書き出すことはすべての接続係数 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ の表の作成と同等である．

第 2 の原理はより多くを述べる．$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ を計算してしまうことなく測地線の式を書き出すことができる．測地線に対する式に到達するためには（コラム 13.3 をみよ），測地線は積分

$$I = \frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\, d\lambda \tag{14.10}$$

を

*10

$$\delta I = 0$$

の意味で極値化する，パラメータ化された曲線であることを思い出しさえすればよい．

*11 この変分原理の実際の応用では，**最初の段階は，式 (14.10) に，手元にある問題に対する $g_{\mu\nu}$ の明確な値を挿入して，もっとも単純な形に書き直すことである．**もし関心が測地線そのものに結びついているならば，変分をまったく行わなくても多くの運動定数を確認できる（Schwartzschild 幾何学での測地線の運動については 25 章を，とくに保存則と運動定数については 25.2 節をみよ）．$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ を計算するため，各座標を交互に変え続けて，4 つの式を得る．次にこれらの式を，それらの第 1 項が $\ddot{x}^{\mu}$ であるように配列し直す．この形でそれらは正確に測地線の式 (14.8) でなければならない．したがって，$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ はこれら 4 式での係数としてただちに利用できる．この方法で曲率を計算する最後の段階としては，標準的な方法と，標準的な方法で取り扱われる（コラム 14.2）$R \sim \partial\Gamma + \Gamma\Gamma$ という型の公式に戻る．そして各 Γ に対して順に必要が生ずるとき，測地線の式を調べてそれを見つける．手続きは例に従うことによってもっともよく理解される．コラム 14.4 は一例を与える．

（欄外 *12, *13, *14 は本文中の各段階の行に対応）

[練習問題]

14.4 測地線の Lagrangian の方法を用いて計算された閉じた Friedmann 宇宙に対する Einstein 方程式

ここで興味ある線要素は以下である（27 章をみよ）．

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)]$$

(a) この計量での測地線に対する変分積分 (14.10) を設定せよ．それから順次に t, χ, θ, および ϕ を変化させて，Γ を式 (14.8) の形で表して，若干の再調整の後に，4 つの式

*10 4 段階での測地線の Lagrangian の方法

*11 (1) I を単純な形に書く

*12 (2) I を変えて測地線の式を得る

*13 (3) $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ を読み取る

*14 (4) $R^{\mu}{}_{\beta\gamma\delta}$ 他を標準的な方法で計算する

$0 = \ddot{t} + \cdots, 0 = \ddot{\chi} + \cdots$, 他を求めよ．

(b) この表示を Γ の表として用い，$R^t{}_{\chi\mu\nu}$ および $R^\chi{}_{\theta\mu\nu}$ を計算せよ．その中で $R^t{}_{\chi t\chi}$ および $R^\chi{}_{\theta\chi\theta}$ のみがゼロでない（$\chi\theta\phi$ 球へのすべての接線方向の完全な同等性の結果である）．

(c) $\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} = \boldsymbol{d}t, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}} = a\,\boldsymbol{d}\chi, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} = ?, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} = ?$ をもつ直交系に変換して $R^{\hat{t}\hat{\chi}}{}_{\hat{t}\hat{\chi}}$ および $R^{\hat{\chi}\hat{\theta}}{}_{\hat{\chi}\hat{\theta}}$ をリストせよ．すべての他の成分は対称性によりこれら 2 つでわかる理由を説明せよ．

(d) 式 (14.7) を用いて，Einstein テンソル $G^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}$ のすべての独立な成分を計算せよ．［答え：コラム 14.5 をみよ．］

コラム 14.4　測地線の Lagrangian の方法はいくつかの曲率の計算を短縮する

目的：線要素

$$ds^2 = L^2(e^{2\beta}\,dx^2 + e^{-2\beta}\,dy^2) - 2du\,dv \tag{1}$$

に対する曲率を計算せよ．ここに L および β は u のみの関数である．［この計量は 35.9–35.12 節で重力波の例として議論される．］

方法：$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ を変分原理［式 (14.10)］から推測されるものとして，測地線の式から得よ．それからコラム 14.2 におけるように $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} \sim \partial\Gamma + \Gamma^2$ を計算せよ．

段階 1：変分積分を述べよ．考察されている計量に対して，式 (14.10) は

$$I = \int \left[\frac{1}{2}L^2(e^{2\beta}\dot{x}^2 + e^{-2\beta}\dot{y}^2) - \dot{u}\dot{v}\right] d\lambda \tag{2}$$

に対して $\delta I = 0$ を要求する．この積分を極値化する世界線は測地線である．

段階 2：世界線の座標を，1 つずつ，それらの λ 依存性について変化せよ．まず関数 $y(\lambda), u(\lambda)$, および $v(\lambda)$ を固定したまま $x(\lambda)$ を変えよ．そうすると

$$\delta I = \int (L^2 e^{2\beta}\dot{x})\delta\dot{x}\,d\lambda = -\int (L^2 e^{2\beta}\dot{x})^{\cdot}\,\delta x\,d\lambda$$

この変分（他の変分に混じって）に対する $\delta I = 0$ という要求は

$$0 = (L^2 e^{2\beta}\dot{x})^{\cdot} = L^2 e^{2\beta}\ddot{x} + \dot{x}\dot{u}\frac{\partial}{\partial u}(L^2 e^{2\beta})$$

を与える．y, u, v, を変化させると，同様に

$$0 = (L^2 e^{-2\beta}\dot{y})^{\cdot} = L^2 e^{-2\beta}\ddot{y} + \dot{y}\dot{u}\frac{\partial}{\partial u}(L^2 e^{-2\beta}),$$

$$0 = \ddot{v} + \frac{1}{2}\dot{x}^2 \frac{\partial}{\partial u}(L^2 e^{2\beta}) + \frac{1}{2}\dot{y}^2 \frac{\partial}{\partial u}(L^2 e^{-2\beta}),$$
$$0 = \ddot{u}$$

を得る．

段階 3：$\ddot{x}^\mu$ 先頭項を得るために整理し直す． もしこの段階が簡明でないならば，この方法は時間を節約しないだろう．そしてコラム 14.2 あるいはコラム 14.5 のいずれかの方法がより適当だろう．ここの例では，$\partial/\partial u$ に対して $'$ を用いて，素早く書く．

$$0 = \ddot{x} + 2(L^{-1}L' + \beta')\dot{x}\dot{u} \tag{3x}$$

$$0 = \ddot{y} + 2(L^{-1}L' - \beta')\dot{y}\dot{u} \tag{3y}$$

$$0 = \ddot{v} + (L^2 e^{2\beta})(L^{-1}L' + \beta')\dot{x}^2 + (L^2 e^{-2\beta})(L^{-1}L' - \beta')\dot{y}^2 \tag{3v}$$

$$0 = \ddot{u} \tag{3u}$$

段階 3$'$：これらの式を $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ の表の作成として解釈せよ． 式 (3) は測地線，

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$$

に対する標準的な式である．したがって任意の求める Γ の値を見出すためにはそれらを綿密に調べれば十分である．たとえば $\Gamma^x{}_{yu}$ は $\ddot{x}$ に対する式での $\dot{y}\dot{u}$ 項の係数 $(\Gamma^x{}_{yu} + \Gamma^x{}_{uy}) = 2\Gamma^x{}_{yu}$ に現れなければならない．しかし式 (3x) に $\dot{y}\dot{u}$ 項は現れない．したがって $\Gamma^x{}_{yu}$ はこの例ではゼロである．式 (3) はわずかな項を含むという意味で単純であることに注意せよ．したがって $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ の多くはゼロでなければならない．たとえば，式 (3u) からすべての 10 個の $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ はゼロであることが出る．唯一のゼロでない Γ は式 (3x) から，$\Gamma^x{}_{xu} = \Gamma^x{}_{ux} = (L^{-1}L' + \beta')$ であり，式 (3y) から $\Gamma^y{}_{yu} = \Gamma^y{}_{uy} = (L^{-1}L' - \beta')$ であり，そして式 (3v) から $\Gamma^v{}_{xx} = L^2 e^{2\beta}(L^{-1}L' + \beta')$ および $\Gamma^v{}_{yy} = L^2 e^{-2\beta}(L^{-1}L' - \beta')$ である．

段階 4：各 $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ 他を計算せよ． コラム 14.2 から式 (3) を体系的に適用するときにルーチンからの軽減はほとんどない．対称性 $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}$ の何によっても関係づけられない 21 個の成分 $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ のリストをつくり，おのおのを計算しなければならない．ここの例では，$\Gamma^u{}_{\alpha\beta} = 0$ は $R^u{}_{\alpha\beta\gamma} = -R_{v\alpha\beta\gamma} = 0$ を意味することに注意する．したがって 21 個のリスト中 15 個はすぐにゼロになる．リストはそうすると

$$R_{v\alpha\beta\gamma} = -R^u{}_{\alpha\beta\gamma} = 0,$$
$$R_{uxux} = -R^v{}_{xux} = -(\Gamma^v{}_{xx})' + \Gamma^v{}_{xx}\Gamma^x{}_{xu}$$
$$= -(L^2 e^{2\beta})\left(\frac{L''}{L} + \beta'' + 2\frac{L'}{L}\beta' + \beta'^2\right),$$

$$
\begin{aligned}
R_{uxxy} &= -R^{v}{}_{xxy} = 0,\\
R_{uxyu} &= -R^{v}{}_{xyu} = 0,\\
R_{uyuy} &= -R^{v}{}_{yuy} = -(\Gamma^{v}{}_{yy})' + \Gamma^{v}{}_{yy}\Gamma^{y}{}_{yu}\\
&\qquad = -(L^2 e^{-2\beta})\left(\frac{L''}{L} - \beta'' - 2\frac{L'}{L}\beta' + \beta'^2\right),\\
R_{uyxy} &= -R^{v}{}_{yxy} = 0,\\
R_{xyxy} &= (L^2 e^{2\beta})R^{x}{}_{yxy} = 0
\end{aligned} \tag{4}
$$

である．今や Einstein テンソルを式 (14.7) によって計算できる．しかし，ここの例では，Ricci テンソルを簡明な縮約 $R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta}$ によってまずつくることは同様に単純である．$\mu = x$ および $\mu = y$ のみがどのような寄与も与える．なぜなら上つき添字は u でありえないし，また下つき添字は v でありえないからである．こうして

$$
\begin{gathered}
R_{uu} = -2[L^{-1}L'' + \beta'^2],\\
\text{すべての他の } R_{\alpha\beta} = 0
\end{gathered} \tag{5}
$$

そして

$$
R = 0 \tag{6}
$$

を得る．この最後の結果から，ここに求める Einstein テンソルは Ricci テンソルと同じであることが出る．

14.5　曲率 2–形式

電気力学で抽象的な記号

$$
\boldsymbol{F} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{A}
$$

は明確な記号

$$
\begin{gathered}
F_{31} = \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1},\\
F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2},\\
\cdots,\ \text{etc. (6 個の式)}
\end{gathered}
$$

に比べて場所を節約する．幾何学の力学を取り扱うときにも同様の節約を避ける理由はない．Cartan は上にみられるように，微分形式（そこでは単純な対象が 4 成分を一覧にする代わりをする．こうして，$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{\mu}\, \boldsymbol{d}x^{\mu}$），および外微分 $\boldsymbol{d}$ の決定的な概念を導入した．[*15] 彼は曲率テンソルの 21 個の成分 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ を 6 個の曲率 2–形式，

*15　曲率 2–形式の方法に対して要求される概念

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = -\mathcal{R}^{\nu\mu}$$

にまとめるべく進んだ（1928, 1946）．純粋に記号としてみなすと，これらの 2–形式は自動的に利益を生み出す．それらは，答えをもった後にその答えを一覧にするために要求される紙の上での仕事の負担を軽減する．それらはまた “幾何学的な対象としての曲率” についてより深い洞察へのルートを与える．それは本章での直接の関心事の目的でないけれども．

Cartan の外微分 $\boldsymbol{d}$ は自動的に曲率の計算で多くの相殺をもたらす．それはしばしば計算を必要とする前に，項を相殺する．

Cartan の計算法の，電磁気学および他の応用（4 章）から曲率の解析（本章）への拡張は，形式と外微分という武器に 2 つの些細な付加を必要とする．(1) ベクトル値（あるいはテンソル値）の外微分形式，および (2) 外微分 $\boldsymbol{d}$ の対応する一般化．本節は重要な公式 (14.18), (14.25), (14.31), および (14.32) を導くとき，これらの道具をともに用いる．しかし，これらの公式が導かれると，それらはすべての応用および曲率のすべての計算（14.6 節およびコラム 14.5）に対して標準的な外微分以外は必要としない．

*16 拡張された外微分は，適用される最初の 2 つの状況，スカラー関数（“0–形式”）およびベ
*17 クトル場（“ベクトル値 0–形式”）では何も新しいものを与えない．そこでまず，任意の関数 f をとる．その指定されていない方向への微分が 1–形式である，あるいはすぐに意味をもつようになるであろう新しい特質，“スカラー値 1–形式” をつくることである．方向を指定して，その方向への微分が生ずるようにする（“投入口に 1–形式を満たす”）．それによって外微分が関数に適用されるとき，通常の微分を得る．

$$\langle \boldsymbol{d}f, \boldsymbol{u}\rangle = \partial_{\boldsymbol{u}} f \tag{14.11}$$

*18 次に任意のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ をとる．その指定されていない方向への共変微分は “ベクトル値 1–形式” である．方向 $\boldsymbol{u}$ を指定して，その方向への微分が生ずるようにする（“投入口を 1–形式で満たす”）．それによって共変微分を得る．

$$\langle \boldsymbol{d}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle \equiv \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} \tag{14.12a}$$

この対象もまた新しくはない．それはベクトル $\boldsymbol{u}$ の方向にとられたベクトル $\boldsymbol{v}$ の共変微分である．微分方向 $\boldsymbol{u}$ の任意の特別な選択から抽象化するときには，“ベクトル値 1–形式” という，新しい名前ではなかったけれども，すでに遭遇したことのある表現を見出す．この表現はベクトル $\boldsymbol{v}$ の指定されていない方向（“方向に対する投入口はいまだ満たされていない”）への共変微分を選ぶ．式 (14.12a) をみれば，この拡張された外微分は $\boldsymbol{v}$ に適用されると，$\boldsymbol{u}$ に関係なく，

$$\boldsymbol{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} \tag{14.12b}$$

*16 拡張された外微分
*17 (1) スカラーに作用する外微分
*18 (2) ベクトルに作用する外微分

である．同様に任意の“テンソル値0–形式”［すなわち $\binom{n}{0}$ テンソル］$\boldsymbol{S}$ に対しては，$\boldsymbol{dS} \equiv \boldsymbol{\nabla S}$ である．

テンソルの外微分（すぐに“反対称”と記される）についてさらに進む前に，形式の積の（反対称）外微分に対する公式（練習問題14.5をみよ）を書き下ろす．

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{d\alpha})\wedge\boldsymbol{\beta} + (-1)^p\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{d\beta} \tag{14.13a}$$

ここに $\boldsymbol{\alpha}$ は p–形式であり，$\boldsymbol{\beta}$ は q–形式である．

*19 さて外微分を基本的な形式から，テンソル値 p–形式 $\boldsymbol{S}$ と任意の通常の q–形式，$\boldsymbol{\beta}$ との外積に拡張する．こうして

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{S}\wedge\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{dS}\wedge\boldsymbol{\beta} + (-1)^p\boldsymbol{S}\wedge\boldsymbol{d\beta} \tag{14.13b}$$

この式は拡張された外微分の一般的な定義とみなされうる．たとえば，もし $\boldsymbol{S}$ がテンソル値2–形式，$\boldsymbol{S} = S^{\alpha\beta}{}_{|\gamma\delta|}\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta\boldsymbol{d}x^\gamma\wedge\boldsymbol{d}x^\delta$ であるならば，式(14.13b)は

$$\boldsymbol{dS} = \boldsymbol{d}[(\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta S^{\alpha\beta}{}_{|\gamma\delta|})\wedge(\boldsymbol{d}x^\gamma\wedge\boldsymbol{d}x^\delta)] = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta S^{\alpha\beta}{}_{|\gamma\delta|})\wedge(\boldsymbol{d}x^\gamma\wedge\boldsymbol{d}x^\delta)$$

を示す．他の例として，式(14.13b)を用いて $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{u\sigma})$ を計算する，ここに $\boldsymbol{u}$ はベクトル値0–形式（ベクトル）そして $\boldsymbol{\sigma}$ はスカラー値1–形式（1–形式）である．

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{u\sigma}) = (\boldsymbol{du})\wedge\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{d\sigma}$$

もし以前の章の慣例に従っていたならば，ここで $\boldsymbol{u\sigma}$ と書いているものは，$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{\sigma}$ と書き，そして $\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{d\sigma}$ の代わりに $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{d\sigma}$ と書き，そして $\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta$ の代わりに $\boldsymbol{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{e}_\beta$ と書いたであろう．しかし，記号についての過剰な複雑さを避けるために，すべてのこのようなテンソル積の記号は，これ以降では省略される．

式(14.12)および(14.13)は（拡張された）外微分 $\boldsymbol{d}$ を定義する以上のことを行い，計算に外微分を用いる方法を与える．それらはまた反対称化された2階微分，たとえば，$\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{v}$ を定義しそして計算することを可能にする．関係

$$\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\mathcal{R}v}$$

は，ここに $\boldsymbol{v}$ はベクトルであるとすると，“演算子値”あるいは“$\binom{1}{1}$ テンソル値”曲率2–形式 $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ を導入するだろう．拡張された外微分の記号は，基底ベクトルおよび平行移動の古い方法を新しくみて，曲率2–形式 $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ を計算する方法を可能にする．

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ のある場で展開されるとしよう．こうして

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_\mu v^\mu$$

となる．そうするとこのベクトルの外微分は

$$\boldsymbol{dv} = \boldsymbol{de}_\mu v^\mu + \boldsymbol{e}_\mu \boldsymbol{d}v^\mu$$

*19　(3) 一般に定義される外微分

である．代表的なベクトル値 1–形式 $\boldsymbol{d}\boldsymbol{e}_\mu$ を

*20
$$\boldsymbol{d}\boldsymbol{e}_\mu = \boldsymbol{e}_\nu \boldsymbol{\omega}^\nu{}_\mu \tag{14.14}$$

の形に展開する．ここに $\boldsymbol{d}\boldsymbol{e}_\mu$ の展開での “成分” $\boldsymbol{\omega}^\nu{}_\mu$ は 1–形式である．式 (10.13) から代表的な $\boldsymbol{\omega}^\nu{}_\mu$ は接続係数に

$$\boldsymbol{\omega}^\nu{}_\mu = \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}\boldsymbol{\omega}^\lambda \tag{14.15}$$

によって関係していることを思い出せ．したがって “ベクトル”（実際には “ベクトル値 1–形式”）の展開は

$$\boldsymbol{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{d}v^\mu + \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu v^\nu) \tag{14.16}$$

である．さてもう一度微分して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{d}\boldsymbol{e}_\alpha\wedge(\boldsymbol{d}v^\alpha + \boldsymbol{\omega}^\alpha{}_\nu v^\nu) + \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{d}^2v^\mu + \boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu v^\nu - \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu\wedge\boldsymbol{d}v^\nu)\\ &= \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\alpha\wedge\boldsymbol{d}v^\alpha + \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\alpha\wedge\boldsymbol{\omega}^\alpha{}_\nu v^\nu + \boldsymbol{d}^2v^\mu + \boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu v^\nu - \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\alpha\wedge\boldsymbol{d}v^\alpha)\end{aligned}$$

を見出す．ここでなされた単純化は，(1) 式 (14.14) を 2 度目に用い，そして (2) 積の法則 (14.13a) を用いて，最後の項での負の符号を導入し，それがただちに第 1 項と相殺する，というふうになされた．さて，項 $\boldsymbol{d}^2v^\mu$ を考える．任意の与えられた成分，たとえば，v^3 は通常の位置のスカラー関数である（$\boldsymbol{v}$ あるいは $\boldsymbol{e}_3$ あるいは $\boldsymbol{e}_3v^3$ に対照的に）ことを思い出せ．したがってスカラー関数に適用されたときの標準的な外微分（4 章）は $\boldsymbol{d}$ が $\boldsymbol{d}^2v^\mu$ において意味しうるすべてである．しかし 2 度適用された標準的な外微分に対しては，自動的に $\boldsymbol{d}^2v^\mu = 0$（コラム 4.1 B，コラム 4.4）である．この事情は $\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{v}$ に対する
*21 展開を

*22
$$\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_\mu\mathcal{R}^\mu{}_\nu v^\nu \tag{14.17}$$

の形に帰着する，ここに $\mathcal{R}^\mu{}_\nu$ は**曲率 2–形式**に対する省略形である

*23
$$\mathcal{R}^\mu{}_\nu \equiv \boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu + \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\alpha\wedge\boldsymbol{\omega}^\alpha{}_\nu \tag{14.18}$$

通常，式 (14.18) は曲率 2–形式を計算するためのすべての他の既知の方法よりも効率がよい．

式 (14.17) の注目すべき形はコメントに値する．左辺に 2 つの $\boldsymbol{d}$ が現れ，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ を 2 度微分したことを気づかせる．しかし右辺に，微分の結果として，問題の点にベクトル場 $\boldsymbol{v}$ のみを微分されずにもつ．$\boldsymbol{v}$ が場所から場所へいかに変化するかは答えに少しも入

---

*20 $\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu$ の定義
*21 曲率 2–形式 $\mathcal{R}^\mu{}_\nu$
*22 (1) $\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{v}$ によって
*23 (2) $\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu$ によって

らない．重要なのは，すべて幾何学が場所から場所へいかに変化するかである．ここで曲率が姿を現す．それはベクトル場 $\boldsymbol{v}$ のいかなる特徴にも無関係に姿を現す．なぜなら演算 $\boldsymbol{d}^2$ は反対称化された共変微分であるからである．[すでに展開された抽象的な言葉で表されたこの反対称化された共変微分と，式 (11.8) を比較せよ．そして映像の形で表された舞台の背後で進んでいるものに対してコラム 11.2 および 11.6 をみよ．] 要約すると，$\boldsymbol{v}$ に 2 度 $\boldsymbol{d}$ を作用する結果は $\boldsymbol{v}$ への代数的な線形演算である．こうして

*24
$$\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{v} = \mathcal{R}\boldsymbol{v} \tag{14.19}$$

ここに $\mathcal{R}$ は "$\binom{1}{1}$ テンソル値 2–形式" に対する省略である．

$$\mathcal{R} = \boldsymbol{e}_\mu \otimes \boldsymbol{\omega}^\nu \mathcal{R}^\mu{}_\nu \tag{14.20}$$

もし $\boldsymbol{d}$ が "その中に投入口" をもつ微分であり，そこにベクトルを挿入するとどの方向に微分が進められるべきかを述べるならば，$\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{w} = \mathcal{R}\boldsymbol{w}$ の $\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{w}$ は 2 つの投入口をもちそして 2 つのベクトル，たとえば，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ を要求する．これら 2 つのベクトルは平面を定義し，その中で式 (14.19) の反対称化された外微分が求められるべきである（$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ で定義された要素的な経路の周りを回り出発点に戻ったときの，$\boldsymbol{w}$ での変化，コラム 11.6 および 11.7）．投入口へのベクトルのこの挿入を明確にわかりやすく説明するために，まずより単純な背景に戻り，そして両ベクトル $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$ に対して "求められた" 1–形式の外微分（それ自身 2–形式）（"2 つのベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ で定義された平行四辺形–型の領域上での蜂の巣のようなセルの総数"）をみて，そして交換子，

$$\langle \boldsymbol{d\alpha}, \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\rangle = \partial_{\boldsymbol{u}}\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v}\rangle - \partial_{\boldsymbol{v}}\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{u}\rangle - \langle\boldsymbol{\alpha},[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]\rangle \tag{14.21}$$

として表された評価（練習問題 14.6）の結果をみる．この結果は任意の階数のテンソル値 1–形式 $\boldsymbol{S}$ に明白な方法で一般化される．こうして

$$\langle \boldsymbol{dS}, \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\rangle = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\langle\boldsymbol{S},\boldsymbol{v}\rangle - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\langle\boldsymbol{S},\boldsymbol{u}\rangle - \langle\boldsymbol{S},[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]\rangle \tag{14.22}$$

この結果をベクトル値 1–形式 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{dw}$ に適用する．方向微分に対する表現，$\langle\boldsymbol{dw},\boldsymbol{u}\rangle = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w}$ を思い出せ．こうして結果

$$\langle \boldsymbol{d}^2\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\rangle = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]}\boldsymbol{w} = \mathcal{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} \tag{14.23}$$

*25
を見出す，ここに $\mathcal{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ はすでに 11 章で定義された曲率演算子 (11.8) である．結論は単純である．バイベクトル（"平行四辺形"）$\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$ に基づいて求められた，式 (14.19) の $\binom{1}{1}$ テンソル値 2–形式 $\mathcal{R}$ は，すでに導入された曲率演算子 $\mathcal{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ と同等である．こうして

$$\langle\mathcal{R}, \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\rangle = \mathcal{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \tag{14.24}$$

---
*24　テンソル値曲率 2–形式 $\mathcal{R}$

*25　曲率 2–形式 $\mathcal{R}$ の曲率演算子 $\mathcal{R}$ との関係

さて，抽象的な演算子の表現から成分を示し始める表現へいこう．左辺に表現 (14.20) をそして右辺に式 (11.11) からの曲率演算子の値を代入する．そして式 (14.24) を形

$$\boldsymbol{e}_\mu \otimes \boldsymbol{\omega}^\nu \langle \mathcal{R}^\mu{}_\nu, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{e}_\mu \otimes \boldsymbol{\omega}^\nu R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} u^\alpha v^\beta$$

に書き直す．比較して代表的な個々の曲率 2–形式は公式

*26
$$\mathcal{R}^\mu{}_\nu = R^\mu{}_{\nu|\alpha\beta|} \boldsymbol{\omega}^\alpha \wedge \boldsymbol{\omega}^\beta \tag{14.25}$$

によって与えられると結論する（α, β についての和は $\alpha < \beta$ に制限される．したがって各添字の対は一度だけ現れる）．

式 (14.25) によって，21 個の曲率成分の約束された組合せは，6 個の曲率 2–形式になる．そして式 (14.18) は，これらの曲率 2–形式を計算する素早い手段を与える．重要な計算式 (14.18) を忠実にとる，あるいは拡張された外微分に精通してそれらを証明したりあるいは用いることは必要でない．任意の $\boldsymbol{d}$ について一言も言わなくても，それらは 4 章の標準的な外微分 $\boldsymbol{d}$ を除いて成り立つ．これらの重要な式は，さらに座標系で作業することによって詳細に確かめられうる（練習問題 14.8）．基底 1–形式 $\boldsymbol{\omega}^\alpha = \boldsymbol{d}x^\alpha$ をとる．式 (14.15) から $\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu = \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\, \boldsymbol{d}x^\lambda$ を用いるべく進む．このようにして“曲率に対する標準的な公式”［式 (11.12) およびコラム 14.2 の式 (3)］を標準的な方法で得る．

要約すると，形式および外微分の計算法は

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \longrightarrow R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$$

という計算を

$$\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu \longrightarrow \mathcal{R}^\mu{}_\nu$$

という計算に帰着させる．さて計量から曲率にいたる系列に，別な連係を見てみよう．まず

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$$

であるはずである．しかし今や“接続 1–形式”の計算に帰着し，次のようになる

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu$$

*27
2 つの原理が曲率計算でのこの最初の段階を支配する．(1) 共変微分の対称性，そして (2) 共変微分の計量との両立性である．条件 (1) の対称性は，

*28
$$\boldsymbol{d}^2 \mathcal{P} = 0 \tag{14.26}$$

という原理のなかに隠れている外観に現れる．ここで，“点に対する $\mathcal{P}$”という記法は Cartan から直接に出る．彼はベクトルを，1 つの点の無限小に近い別な点への運動によって定義

*26　$\mathcal{R}$ の ***Riemann*** の成分との関係
*27　共変微分の対称性
*28　(1) $\boldsymbol{d}^2\mathcal{P} = 0$ として表される

されるものと考えた．$\boldsymbol{d}\mathcal{P}$ と書くことは，したがって，“点の微分” をとる［“削除された点”（ベクトルの後尾）と “近傍に再挿入された点”（ベクトルの先端）で構成する］ことであった．$\boldsymbol{d}\mathcal{P}$ における微分 $\boldsymbol{d}$ の方向は不定である．言い換えると，$\boldsymbol{d}\mathcal{P}$ は “投入口” を含んでいる．この投入口に明確なベクトル $\boldsymbol{v}$ を挿入して初めて $\boldsymbol{d}\mathcal{P}$ は Cartan のベクトルに対して明確な答えを与える．$\boldsymbol{d}\mathcal{P}$ がそのとき与えるベクトルは何であるか？　それは $\boldsymbol{v}$ そのものである．“$\boldsymbol{v}$ である運動というのは，点 $\mathcal{P}$ が，$\boldsymbol{v}$ である運動を再現することを述べている”．具体的な記号で書けば，

$$\langle \boldsymbol{d}\mathcal{P}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{v} \tag{14.27}$$

この式の内容をより形式的な言葉に表現する．量 $\boldsymbol{d}\mathcal{P}$ は $\binom{1}{1}$ テンソルである

$$\boldsymbol{d}\mathcal{P} = \boldsymbol{e}_\mu \boldsymbol{\omega}^\mu \tag{14.28}$$

それは本来の $\binom{1}{1}$ テンソル

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{e}_\mu T^\mu{}_\nu \boldsymbol{\omega}^\nu$$

からその成分の特別な値

$$T^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$$

によって区別される．この意味でそれは “単位テンソル” という名に値する．このテンソルを $\boldsymbol{S}$ の代わりに式 (14.22) に代入して結果

$$\langle \boldsymbol{d}^2\mathcal{P}, \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{\nabla_u v} - \boldsymbol{\nabla_v u} - [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = 0 \tag{14.29}$$

を得る．右辺のゼロは式 (10.2a)，あるいはコラム 10.2 で “共変微分の対称性” とよばれた，図での “ベクトル図の閉じること” を改めて述べたものである．任意の $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に対して右辺がゼロになることは左辺の $\boldsymbol{d}^2\mathcal{P}$ がゼロになることを要求する．そして逆に，$\boldsymbol{d}^2\mathcal{P}$ がゼロになることは共変微分の対称性を要求する．次につづく計算に基本的な他の原理は

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{d}\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{d}\boldsymbol{v}) \tag{14.30}$$

の形で表されるように，“共変微分の計量との両立性” である．共変微分がゼロになることを計量（“点（·）”）のせいにすることは，ここでは本質的である．こうして

$$\boldsymbol{d}(\cdot) = 0$$

式 (14.26) および (14.30) において，基底ベクトル（そして適当な場合にはこれらの基底ベクトルに双対な基底 1–形式）を用いて，共変微分の対称性と両立性を利用しよう．こうして

$$\boldsymbol{d}\mathcal{P} = \boldsymbol{e}_\mu \boldsymbol{\omega}^\mu$$

から

$$0 = \boldsymbol{d}^2\mathcal{P} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{e}_\mu \wedge \boldsymbol{\omega}^\mu + \boldsymbol{e}_\mu \boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^\mu = \boldsymbol{e}_\mu(\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu \wedge \boldsymbol{\omega}^\nu + \boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^\mu)$$

を計算し，そして $\boldsymbol{e}_\mu$ の係数はゼロでなければならないと結論する．あるいは

*29
$$0 = \boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^\mu + \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu \wedge \boldsymbol{\omega}^\nu \qquad (\text{“対称性”}) \tag{14.31a}$$

次に，式 (14.30) に一般的な $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ の代わりに特別な $\boldsymbol{e}_\mu$ および $\boldsymbol{e}_\nu$ をそれぞれ挿入する．そして

*30
$$\boldsymbol{d}g_{\mu\nu} = \boldsymbol{\omega}_{\mu\nu} + \boldsymbol{\omega}_{\nu\mu} \qquad (\text{“両立性”}) \tag{14.31b}$$

を見出す．ここに

$$\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\alpha}\boldsymbol{\omega}^\alpha{}_\nu = \Gamma_{\mu\nu\alpha}\boldsymbol{\omega}^\alpha \tag{14.31c}$$

式 (14.31) で，計量と接続形式との間のもっとも簡潔な方法で表された関係が導かれた．

14.6 外微分形式を用いた曲率の計算

*31 曲率の計算に対する微分形式の使用は，コラム 14.5 で例示されている．本節では方法を要約する．3 つの主要な段階がある．$\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu$ を計算する，$\mathcal{R}^\mu{}_\nu$ を計算する，そして $G^\mu{}_\nu$ を計算
*32 する．より特別に，まず計量および基準系を選ぶ．それによって基底形式 $\boldsymbol{\omega}^\mu = L^\mu{}_{\alpha'}\boldsymbol{d}x^{\alpha'}$
*33 および $\boldsymbol{ds}^2 = g_{\mu\nu}\boldsymbol{\omega}^\mu \otimes \boldsymbol{\omega}^\nu$ での計量成分 $g_{\mu\nu}$ を固定する．それから接続形式 $\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu$ を定める，そしてそれらを式

$$0 = \boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^\mu + \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu \wedge \boldsymbol{\omega}^\nu \tag{14.31a}$$

$$\boldsymbol{d}g_{\mu\nu} = \boldsymbol{\omega}_{\mu\nu} + \boldsymbol{\omega}_{\nu\mu} \tag{14.31b}$$

の解として，一義的に定める．これらの式に対する解を見出す “推測と検査” の方法（コラム 14.5 に記述され，例示される）は，しばしば素早く容易である．[練習問題 14.7 は，Christoffel の式 (14.36) は座標系での一義的な解であると示すことによって，解はつねに存在することを示している．] $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ をもつ直交系（あるいは $g_{\mu\nu} =$ 一定であるようなある別な単純な系，たとえば，ヌル系）を用いることは通常もっとも好都合である．それから $\boldsymbol{d}g_{\mu\nu} = 0$ および式 (14.31b) は $\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu} = -\boldsymbol{\omega}_{\nu\mu}$ を示す．したがって 4 次元では，解かれるべき 6 個の $\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu}$ のみが存在する．

もし推測することが容易でないならば，式 (14.31) を直交系あるいは $\boldsymbol{d}g_{\mu\nu} = 0$ である任意の他の系で解く体系的な方法が存在する．$\boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^\mu$ を計算してそれらを

$$\boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^\alpha = -c_{|\mu\nu|}{}^\alpha \boldsymbol{\omega}^\mu \wedge \boldsymbol{\omega}^\nu \tag{14.32}$$

という書式に整理する．このように 24 個の “交換係数” $c_{\mu\nu}{}^\alpha$ を表示する．これらの量は，公式

---

*29 (2) $\boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^\mu + \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu \wedge \boldsymbol{\omega}^\nu = 0$ として表される

*30 $\boldsymbol{d}g_{\mu\nu} = \boldsymbol{\omega}_{\mu\nu} + \boldsymbol{\omega}_{\nu\mu}$ として表される $\boldsymbol{g}$ および $\boldsymbol{\nabla}$ の両立性

*31 4 段階での曲率 2–形式の方法

*32 (1) 計量および基準系を選ぶ

*33 (2) 接続 1–形式 $\boldsymbol{w}^\mu{}_\nu$ を計算する

$$\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(c_{\mu\nu\alpha} + c_{\mu\alpha\nu} - c_{\nu\alpha\mu})\boldsymbol{\omega}^{\alpha} \tag{14.33}$$

を用いて 6 個の $\boldsymbol{\omega}^{\mu}{}_{\nu}$ を与える（練習問題 14.12）.

*34　$\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu}$ がわかると，曲率形式 $\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu}$ ($\mathcal{R}^{\mu\nu} = -\mathcal{R}^{\nu\mu}$ から，4 次元では再び 6 個のみ) を公式

$$\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^{\mu}{}_{\nu} + \boldsymbol{\omega}^{\mu}{}_{\alpha}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\alpha}{}_{\nu} \tag{14.34}$$

を用いて計算する．この表から，同定の体系

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = R^{\mu\nu}{}_{|\alpha\beta|}\boldsymbol{\omega}^{\alpha}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\beta} \tag{14.35}$$

*35　を用いて曲率テンソルの各成分を読み取る．

Einstein テンソル $G^{\mu}{}_{\nu}$ は，$\mathcal{R}^{\mu\nu}$ 表示を綿密に調べて公式 (14.7) で使う適当な $R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$ 成分を見出して計算される．

コラム 14.5　外微分形式を用いて計算される曲率（Friedmann 宇宙に対する計量）

Friedmann の計量

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)]$$

（コラム 27.1）は，一定の t をもつ各超曲面は固有の周囲 $2\pi a(t)$ の 3 次元超球であるような時空を表している．直交基底はこの時空で容易に見出される．こうして

$$\boldsymbol{ds}^2 = -(\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}})^2 + (\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}})^2 + (\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}})^2 + (\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}})^2$$

ここに

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} &= \boldsymbol{d}t, \\
\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}} &= a\boldsymbol{d}\chi, \\
\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} &= a \sin\chi\, \boldsymbol{d}\theta, \\
\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} &= a \sin\chi \sin\theta\, \boldsymbol{d}\phi
\end{aligned} \tag{1}$$

A. 接続の計算

式 (14.31b) は，$\boldsymbol{d}g_{\mu\nu} = \boldsymbol{d}\eta_{\mu\nu} = 0$ であるから，まさに

$$\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu} = -\boldsymbol{\omega}_{\nu\mu} \tag{2}$$

を与える．したがってただ 6 個の 1–形式 $\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu}$ が見出されなければならない．2 番目

*34　(3) 曲率 2–形式 $\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu}$ を計算せよ
*35　(4) 曲率テンソルの成分を計算せよ

の基礎方程式 (14.31a) に向かう．ゲームは今や式 $0 = \boldsymbol{d\omega}^{\mu} + \boldsymbol{\omega}^{\mu}{}_{\nu}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\nu}$ に対する解を**推測する**ことである（なぜならこれは体系的な方法を用いるよりもきわめてしばしば素早いから）．ここに $\boldsymbol{\omega}^{\nu}$ したがってまた $\boldsymbol{d\omega}^{\mu}$ は既知であり，そして $\boldsymbol{\omega}^{\mu}{}_{\nu}$ は未知である．**解**：$\boldsymbol{\omega}^{\mu}{}_{\nu}$ は一義的であることが知れているから，推測することは（もしそれが何らかの解にいたるならば）正しい答えを与えうるのみである．

もっとも単純なこのような式から始める．$\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} = \boldsymbol{dt}$ から，

$$\boldsymbol{d\omega}^{\hat{t}} = 0$$

を計算する．これを $\boldsymbol{d\omega}^{\hat{t}} = -\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}{}_{\mu}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\mu}$，あるいは（$\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu} = -\boldsymbol{\omega}_{\nu\mu}$ によって，$\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}{}_{\hat{t}} = -\boldsymbol{\omega}_{\hat{t}\hat{t}} = 0$ であるから）

$$\boldsymbol{d\omega}^{\hat{t}} = -\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}{}_{k}\wedge\boldsymbol{\omega}^{k} = 0$$

と比較する．この式は $\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}{}_{k} \propto \boldsymbol{\omega}^{k}$ をもつことによって，あるいは異なる項の間で相殺するより複雑な方法で，あるいはより単純に $\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}{}_{k} = 0$ によって満たされるだろう．あるゼロでない $\boldsymbol{\omega}^{\mu}{}_{\nu}$ が要求されるまでは，困難を予期せずに進む．$\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}} = a\,\boldsymbol{d}\chi$ から

$$\boldsymbol{d\omega}^{\hat{\chi}} = \dot{a}\boldsymbol{dt}\wedge\boldsymbol{d}\chi = (\dot{a}/a)\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}} = -(\dot{a}/a)\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}$$

これを

$$\boldsymbol{d\omega}^{\hat{\chi}} = -\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}}{}_{\mu}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\mu} = -\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}}{}_{\hat{t}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} - \boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}}{}_{\hat{\theta}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} - \boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}}{}_{\hat{\phi}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}$$

と比較する．第 1 項から $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}}{}_{\hat{t}} = (\dot{a}/a)\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}}$ と推測する．そして他の項はゼロであるとしよう（これは $\boldsymbol{d\omega}^{\hat{t}}$ 式で $\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}{}_{\hat{\chi}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}} = -\boldsymbol{\omega}_{\hat{t}\hat{\chi}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}} = \boldsymbol{\omega}_{\hat{\chi}\hat{t}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}} = 0$ を認めることになることを注意する）．$\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} = a\sin\chi\,\boldsymbol{d}\theta$ をみる，そして

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d\omega}^{\hat{\theta}} &= (\dot{a}/a)\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} + a^{-1}\cot\chi\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}\\ &= -\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{t}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} - \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\chi}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}} - \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}\end{aligned}$$

と書く．すでに書かれた式との一致から，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{t}} &= \boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}{}_{\hat{\theta}} = (\dot{a}/a)\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}},\\ \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\chi}} &= -\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}}{}_{\hat{\theta}} = a^{-1}\cot\chi\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}\end{aligned}$$

と推測する．最後に

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d\omega}^{\hat{\phi}} &= (\dot{a}/a)\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} + a^{-1}\cot\chi\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} + (a\sin\chi)^{-1}\cot\theta\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}\\ &= -\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{t}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} - \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\chi}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}} - \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}\end{aligned}$$

から $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{t}}, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\chi}}$，および $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}}$ の値を推論する．これらは $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}$ のような項はゼロである（$\boldsymbol{d\omega}^{\hat{\theta}}$ 式で）という先の仮定と矛盾したものではない．したがって実際，接続

形式 $\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu$ の組に対する $\boldsymbol{d\omega}^\mu = -\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu \wedge \boldsymbol{\omega}^\nu$ を，以下のように解いたことになる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^k{}_{\hat{t}} &= \boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}{}_k = (\dot{a}/a)\boldsymbol{\omega}^k, \\ \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\chi}} &= -\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}}{}_{\hat{\theta}} = a^{-1}\cot\,\chi\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} = \cos\,\chi\,\boldsymbol{d}\theta, \\ \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\chi}} &= -\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}}{}_{\hat{\phi}} = a^{-1}\cot\,\chi\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} = \cos\,\chi\,\sin\,\theta\,\boldsymbol{d}\phi, \\ \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}} &= -\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}} = (a\,\sin\,\chi)^{-1}\cot\,\theta\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} = \cos\,\theta\,\boldsymbol{d}\phi \end{aligned} \tag{3}$$

もちろん，$\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu$ を見出す行き当たりばったりの方法が，ある問題で容易にうまくいかないならば，式 (14.32) および (14.33) を単純に用いてよい．

B. 曲 率 計 算

曲率計算は，上の式 (3) から，式 (14.34) に $\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu$ を直接代入して，

$$\mathcal{R}^\mu{}_\nu = \boldsymbol{d\omega}^\mu{}_\nu + \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\alpha \wedge \boldsymbol{\omega}^\alpha{}_\nu$$

となる．この式は十分短いので，対応する $R = \partial\Gamma + \Gamma^2$ の式 [コラム 14.2 の式 (3)] での 10 個の項とは対照的に，和を書き出すことができる．

$$\mathcal{R}^{\hat{t}}{}_{\hat{\chi}} = \boldsymbol{d\omega}^{\hat{t}}{}_{\hat{\chi}} + \boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}{}_{\hat{\theta}} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\chi}} + \boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}{}_{\hat{\phi}} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\chi}}$$

警告！：$\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}{}_{\hat{\chi}} = (\dot{a}/a)\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}}$ から，$\boldsymbol{d\omega}^{\hat{t}}{}_{\hat{\chi}} = (\dot{a}/a)^{\cdot}\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}}$ と計算してはいけない．項 $(\dot{a}/a)\boldsymbol{d\omega}^{\hat{\chi}}$ が欠けている．代わりに $\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}{}_{\hat{\chi}} = (\dot{a}/a)\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}} = \dot{a}\,\boldsymbol{d}\chi$ と書く．それから $\boldsymbol{d\omega}^{\hat{t}}{}_{\hat{\chi}} = \ddot{a}\,\boldsymbol{d}t \wedge \boldsymbol{d}\chi = (\ddot{a}/a)\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}}$ を見出す．基本的な注意をしながら，式 (3) から $\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu$ を $\mathcal{R}^\mu{}_\nu$ に対する式に正しく代入して，

$$\mathcal{R}^{\hat{t}}{}_{\hat{\chi}} = (\ddot{a}/a)\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}}$$

そして

$$\mathcal{R}^{\hat{\chi}}{}_{\hat{\theta}} = (1 + \dot{a}^2)a^{-2}\boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}$$

を見出す．この等方的な模型宇宙では，直交系 $\boldsymbol{\omega}^\mu$ ですべての空間方向は代数的に同等であるから，これは $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ の計算を完成する．したがって $\mathcal{R}^\mu{}_\nu$ の完全な一覧として

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\hat{t}}{}_k &= (\ddot{a}/a)\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} \wedge \boldsymbol{\omega}^k, \\ \mathcal{R}^k{}_l &= a^{-2}(1 + \dot{a}^2)\boldsymbol{\omega}^k \wedge \boldsymbol{\omega}^l \end{aligned} \tag{4}$$

と書ける．特別な成分，

$$R^{\hat{t}}{}_{\hat{\chi}\hat{t}\hat{\chi}} = \ddot{a}/a, \qquad R^{\hat{t}}{}_{\hat{\chi}\hat{t}\hat{\theta}} = 0, etc.$$

あるいは

$$R^{\hat{t}}{}_{\hat{\theta}\hat{\chi}\hat{\phi}} = 0, \qquad R^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = a^{-2}(1 + \dot{a}^2)$$

のようなものは，$\mathcal{R}^\mu{}_\nu$ のこの表示から容易に読み出される．

C. 縮　　約

式 (14.7) から,

$$G^{\hat{t}\hat{t}} = +3a^{-2}(1+\dot{a}^2) \tag{5a}$$

$$G^{\hat{t}\hat{\chi}} = G^{\hat{t}\hat{\theta}} = G^{\hat{t}\hat{\phi}} = 0 = G^{\hat{\chi}\hat{\theta}} = G^{\hat{\theta}\hat{\phi}} = G^{\hat{\phi}\hat{\chi}} \tag{5b}$$

$$G^{\hat{\chi}\hat{\chi}} = G^{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G^{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -[2a^{-1}\ddot{a} + a^{-2}(1+\dot{a}^2)] \tag{5c}$$

および

$$R = -G^{\mu}{}_{\mu} = 6[a^{-1}\ddot{a} + a^{-2}(1+\dot{a}^2)] \tag{6}$$

を見出す.

[練習問題]

14.5　形式の積の外微分

低い次数の形式から高い次数の形式へ帰納的に作業して, 式 (14.13a) を導け. [ヒント: 式 (4.27) から, p–形式

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_{|\mu_1\cdots\mu_p|}\boldsymbol{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{d}x^{\mu_p}$$

に対して外微分は

$$\boldsymbol{d\alpha} = \frac{\partial\alpha_{|\mu_1\cdots\mu_p|}}{\partial x^{\mu_0}}\boldsymbol{d}x^{\mu_0}\wedge\boldsymbol{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{d}x^{\mu_p}$$

で定義されることを思い出せ. 2 つの 1–形式の積 $\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}$ に適用されると, この式は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}) &= \boldsymbol{d}[(\alpha_\lambda\boldsymbol{d}x^\lambda)\wedge(\beta_\mu\boldsymbol{d}x^\mu)]\\
&= \boldsymbol{d}\left[(\alpha_\lambda\beta_\mu)\left(\boldsymbol{d}x^\lambda\wedge\boldsymbol{d}x^\mu\right)\right]\\
&= \frac{\partial(\alpha_\lambda\beta_\mu)}{\partial x^\kappa}\boldsymbol{d}x^\kappa\wedge\boldsymbol{d}x^\lambda\wedge\boldsymbol{d}x^\mu\\
&= \left(\frac{\partial\alpha_\lambda}{\partial x^\kappa}\boldsymbol{d}x^\kappa\wedge\boldsymbol{d}x^\lambda\right)\wedge\beta_\mu\boldsymbol{d}x^\mu - (\alpha_\lambda\boldsymbol{d}x^\lambda)\wedge\left(\frac{\partial\beta_\mu}{\partial x^\kappa}\boldsymbol{d}x^\kappa\wedge\boldsymbol{d}x^\mu\right)\\
&= (\boldsymbol{d\alpha})\wedge\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}\wedge(\boldsymbol{d\beta})
\end{aligned}$$

を与える. 推論を高次の形式に拡張せよ.]

14.6　外微分と交換子との間の関係

公式 (14.21) を, (a) 右辺は $\boldsymbol{u}$ の代数的な線形関数でありそして $\boldsymbol{v}$ の代数的な線形関数であること, そして (b) 式は $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ が座標基底ベクトル, $\boldsymbol{u} = \partial/\partial x^k, \boldsymbol{v} = \partial/\partial x^l$ であるとき成り立つことを示すことによって, 導け.

14.7　接続形式から導かれる Christoffel の式

座標系 $\boldsymbol{\omega}^\mu = \boldsymbol{d}x^\mu$ で, 式 (14.31a) は $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}$ を要求すること, そしてこの対称性が確立されると, 式 (14.31b) は $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\alpha$ に対する表現を与え, 解くことができて

Christoffel の式

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right) \tag{14.36}$$

を与えることを示せ．

14.8　曲率形式に関連した Riemann–Christoffel の曲率公式

$\boldsymbol{\omega}^{\mu}{}_{\nu} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}\, \boldsymbol{d}x^{\lambda}$ を式 (14.18) に代入し，その結果から，式 (14.25) によって，成分 $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ に対するコラム 14.2 の古典的な公式 (3) を導け．

14.9　Cartan の構造式の吟味のための行列記号

$e \equiv (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ は行行列で，その要素は基底ベクトルとする，そして ω を基底 1–形式 $\boldsymbol{\omega}^{\mu}$ の列とする．同様に，$\Omega = \|\boldsymbol{\omega}^{\mu}{}_{\nu}\|$ そして $\mathcal{R} = \|\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu}\|$ を 1–形式および 2–形式の要素をもつ正方形行列とする．これは $\boldsymbol{d}\boldsymbol{e}_{\mu} = \boldsymbol{e}_{\nu}\boldsymbol{\omega}^{\nu}{}_{\mu}$ および $\boldsymbol{d}\mathcal{P} = \boldsymbol{e}_{\mu}\boldsymbol{\omega}^{\mu}$ の簡潔な記号を与え，それぞれ

$$\boldsymbol{d}e = e\Omega \quad \text{および} \quad \boldsymbol{d}\mathcal{P} = e\omega \tag{14.37}$$

と解される．

(a) 式 (14.37) および $\boldsymbol{d}^2\mathcal{P} = 0$ から，式 (14.31a) を

$$0 = \boldsymbol{d}\omega + \Omega \wedge \omega \tag{14.38}$$

の形で導け．［解：$\boldsymbol{d}^2\mathcal{P} = \boldsymbol{d}e \wedge \omega + e\, \boldsymbol{d}\omega = e(\Omega \wedge \omega + \boldsymbol{d}\omega)$］

(b) 定義 (14.18),

$$\mathcal{R} = \boldsymbol{d}\Omega + \Omega \wedge \Omega \tag{14.39}$$

に対する動機として，$\boldsymbol{d}^2 e$ を計算せよ．

(c) $\boldsymbol{d}^2\omega = 0$ から，$\mathcal{R} \wedge \omega = 0$ を導け．それから記号を通常の形に緩和して反対称性の関係 $R^{\mu}{}_{[\alpha\beta\gamma]} = 0$ を得よ．

(d) 式 (14.39) から $\boldsymbol{d}\mathcal{R}$ を計算し，それを Bianchi 恒等式 $R^{\mu}{}_{\nu[\alpha\beta;\gamma]} = 0$ に関係づけよ．

(e) $v = \{v^{\mu}\}$ を 1 列の関数とする．したがって $\boldsymbol{v} = ev = \boldsymbol{e}_{\mu}v^{\mu}$ はベクトル場である．簡潔な記号で，$\boldsymbol{d}\boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{v}$ を計算し，$\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{v} = e\mathcal{R}v$（それは式 (14.17) である）を示せ．

14.10　簡潔な記号での接続形式に対する変換則

前の練習問題の記号を用いて $\boldsymbol{e}_{\mu'} = \boldsymbol{e}_{\nu}A^{\nu}{}_{\mu'}$ の代わりに $e' = eA$，そして同様に系の変化を表すために，$\omega' = A^{-1}\omega$ と書く．$\boldsymbol{d}\mathcal{P} \equiv e\omega = e'\omega'$ を示せ．$e' = eA$ を $\boldsymbol{d}e' = e'\Omega'$ に代入して変換則

$$\Omega' = A^{-1}\Omega A + A^{-1}\boldsymbol{d}A \tag{14.40}$$

を導け．これを形 $\Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\beta'} = (?)$ の式として，$A^{\nu}{}_{\mu'} = \partial x^{\nu}/\partial x^{\mu'}$ をもつ座標系に対する通常の形に緩和された記号で書き直せ．

14.11　曲率がゼロであれば空間は平坦である（11.5 節をみよ）

すべての直線 $(d^2x^\mu/d\lambda^2 = 0)$ が測地線であるような座標が存在すれば，空間は平坦であるという．明らかに，この場合には式 (14.8) およびコラム 14.2 での式 (3) によって，すべての $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ および $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ はゼロになる．逆にもし $\mathcal{R} = 0$ ならば，このような座標が存在することを示せ．前問の結果を用いて $\Omega' = 0$ であるような基底 e' への変換 A に対する微分方程式を見出せ．これらの方程式の完全な積分可能性に対する条件は何か？［$\boldsymbol{d}f_K = F_K(x, f)$ は，もし元の方程式を除いて $\boldsymbol{d}^2 f_K = 0$ が成り立つならば完全に積分可能であることに注意せよ．］なぜこの新しい系での基底形式 $\boldsymbol{\omega}^{\mu'}$ は座標微分 $\boldsymbol{\omega}^{\mu'} = \boldsymbol{d}x^{\mu'}$ であるか？

14.12　直交系での接続形式の系統だった計算

式 (14.21) を基底ベクトルに適用し，式 (8.14) を用いて $c_{\mu\nu}{}^\alpha$ を定義して式 (14.32) を導け．それから直交系（あるいは $g_{\mu\nu} =$ 一定 をもつ任意の系）で，式 (14.33) は，$\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu$ を定義する式 (14.31) の解を与えることを示せ［また式 (8.24b) を参照せよ］．

14.13　Schwartzschild の曲率形式

Schwartzschild の計量

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{14.41}$$

（ここに Φ および Λ は r のみの関数である）に対する明白な直交系 $\boldsymbol{w}^{\hat{t}} = e^\Phi \boldsymbol{d}t, \boldsymbol{\omega}^{\hat{r}} = e^\Lambda \boldsymbol{d}r, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} = r\boldsymbol{d}\theta, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} = r\sin\theta \boldsymbol{d}\phi$ を用いて，曲率形式 $\mathcal{R}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}$ そして Einstein テンソル $G^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}$ を，コラム 14.5 の方法で計算せよ．［**答え：**$\mathcal{R}^{\hat{t}\hat{r}} = E\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{r}}, \mathcal{R}^{\hat{t}\hat{\theta}} = \bar{E}\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}, \mathcal{R}^{\hat{t}\hat{\phi}} = \bar{E}\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}, \mathcal{R}^{\hat{\theta}\hat{\phi}} = F\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}, \mathcal{R}^{\hat{\phi}\hat{r}} = \bar{F}\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{r}}, \mathcal{R}^{\hat{r}\hat{\theta}} = \bar{F}\boldsymbol{\omega}^{\hat{r}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}$, ここに

$$\begin{aligned}
E &= -e^{-2\Lambda}(\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda'),\\
\bar{E} &= -\frac{1}{r}e^{-2\Lambda}\Phi',\\
F &= \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\Lambda}),\\
\bar{F} &= \frac{1}{r}e^{-2\Lambda}\Lambda'
\end{aligned} \tag{14.42}$$

そしてそれから

$$\begin{aligned}
G^{\hat{t}}_{\hat{t}} &= -(F + 2\bar{F}),\\
G^{\hat{r}}_{\hat{r}} &= -(F + 2\bar{E}),\\
G^{\hat{\theta}}_{\hat{\theta}} &= G^{\hat{\phi}}_{\hat{\phi}} = -(E + \bar{E} + \bar{F}),\\
G^{\hat{t}}_{\hat{r}} &= G^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} = G^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} = 0 = G^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} = G^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} = G^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}}\,]
\end{aligned} \tag{14.43}$$

14.14　Riemann テンソル成分の行列表示

Riemann テンソルの対称性を用いて直交系でのその成分を

$$R^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \begin{array}{c} 01 \\ 02 \\ 03 \\ 23 \\ 31 \\ 12 \end{array} \left(\begin{array}{c|c} E & H \\ \hline -H^T & F \end{array} \right) \tag{14.44}$$

の形で表すことを正当化せよ．ただし行は，示されているように添字対 $\hat{\mu}\hat{\nu} = 01, 02$, 他でラベルをつけ，そして列 $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ も同様にする．ここに E, F, および H はおのおの 3×3 行列であり，

$$E = E^T, \qquad F = F^T, \qquad \text{トレース } H = 0 \tag{14.45}$$

である．ただし E^T は E の逆行列である（なぜか?）．

14.15　ゼロの Einstein テンソルをもつ Riemann 行列

空の空間の Einstein 方程式 $G^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} = 0$ は，式 (14.14) での行列は

$$R^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \left(\begin{array}{c|c} E & H \\ \hline -H & E \end{array} \right) \tag{14.46}$$

の形に単純化されることを可能にする．ただし今や，この形が意味する等式 $E = F$ の他に，さらなる条件

$$\text{トレース } E = 0, \quad H = H^T \tag{14.47}$$

が成り立つことを示せ．

14.16　脈動するあるいは崩壊する星に対する曲率の計算

自ら重力を及ぼしている物体の球対称な運動は 26 章と 32 章で議論される．このような状況でしばしば採用される計量形式は

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dT^2 + e^{2\Lambda} dR^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{14.48}$$

である．ただし今や Φ, Λ, および r は 2 つの座標 R および T の各関数である．この計量に対する曲率 2–形式と Einstein テンソルを，コラム 14.5 の方法を用いて計算せよ．$\boldsymbol{\omega}^{\mu}{}_{\nu}$ を推測すると，たいていの項は練習問題 14.13 での対応する計算からすでに明白であろう．

[**答え**：明白な直交系 $\boldsymbol{\omega}^{\hat{T}} = e^{\Phi} \boldsymbol{d}T, \boldsymbol{\omega}^{\hat{R}} = e^{\Lambda} \boldsymbol{d}R, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} = r \boldsymbol{d}\theta, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} = r \sin\theta \boldsymbol{d}\phi$ で

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\hat{T}}{}_{\hat{R}} &= E \boldsymbol{\omega}^{\hat{T}} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\hat{R}}, \\ \mathcal{R}^{\hat{T}}{}_{\hat{\theta}} &= \bar{E} \boldsymbol{\omega}^{\hat{T}} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} + H \boldsymbol{\omega}^{\hat{R}} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}, \\ \mathcal{R}^{\hat{T}}{}_{\hat{\phi}} &= \bar{E} \boldsymbol{\omega}^{\hat{T}} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} + H \boldsymbol{\omega}^{\hat{R}} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}, \\ \mathcal{R}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}} &= F \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}, \\ \mathcal{R}^{\hat{R}}{}_{\hat{\theta}} &= \bar{F} \boldsymbol{\omega}^{\hat{R}} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} - H \boldsymbol{\omega}^{\hat{T}} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}, \\ \mathcal{R}^{\hat{R}}{}_{\hat{\phi}} &= \bar{F} \boldsymbol{\omega}^{\hat{R}} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} - H \boldsymbol{\omega}^{\hat{T}} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} \end{aligned} \tag{14.49}$$

それは，練習問題 14.14 の行列表示で

$$R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} E & . & . & . & . & . \\ . & \bar{E} & . & . & . & H \\ . & . & \bar{E} & . & -H & . \\ \hline . & . & . & F & . & . \\ . & . & H & . & \bar{F} & . \\ . & -H & . & . & . & \bar{F} \end{array}\right) \begin{array}{c} \hat{T}\hat{R} \\ \hat{T}\hat{\theta} \\ \hat{T}\hat{\phi} \\ \hat{\theta}\hat{\phi} \\ \hat{\phi}\hat{R} \\ \hat{R}\hat{\theta} \end{array} \tag{14.50}$$

を与える．ここに

$$\begin{aligned} E &= e^{-2\Phi}(\ddot{\Lambda} + \dot{\Lambda}^2 - \dot{\Lambda}\dot{\Phi}) - e^{-2\Lambda}(\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda'), \\ \bar{E} &= \frac{1}{r}e^{-2\Phi}(\ddot{r} - \dot{r}\dot{\Phi}) - \frac{1}{r}e^{-2\Lambda}r'\Phi', \\ H &= \frac{1}{r}e^{-\Phi-\Lambda}(\dot{r}' - \dot{r}\Phi' - r'\dot{\Lambda}), \\ F &= \frac{1}{r^2}(1 - r'^2e^{-2\Lambda} + \dot{r}^2e^{-2\Phi}), \\ \bar{F} &= \frac{1}{r}e^{-2\Phi}\dot{r}\dot{\Lambda} + \frac{1}{r}e^{-2\Lambda}(r'\Lambda' - r'') \end{aligned} \tag{14.51}$$

Einstein テンソルは

$$\begin{aligned} G^{\hat{T}\hat{T}} &= -G^{\hat{T}}{}_{\hat{T}} = F + 2\bar{F}, \\ G^{\hat{T}\hat{R}} &= G^{\hat{T}}{}_{\hat{R}} = 2H, \\ G^{\hat{T}}{}_{\hat{\theta}} &= G^{\hat{T}}{}_{\hat{\phi}} = 0, \\ G^{\hat{R}}{}_{\hat{R}} &= -(2\bar{E} + F), \\ G^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\theta}} &= G^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\phi}} = -(E + \bar{E} + \bar{F}), \\ G^{\hat{R}}{}_{\hat{\theta}} &= G^{\hat{R}}{}_{\hat{\phi}} = G^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}} = 0 \end{aligned} \tag{14.52}$$

である．]

14.17 $\boldsymbol{d}\mathcal{R} = 0$ 形式での Bianchi 恒等式

Riemann テンソルをバイベクトル値 2–形式，

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_\mu \wedge \boldsymbol{e}_\nu \mathcal{R}^{\mu\nu} \tag{14.53}$$

として定義し，そして $\boldsymbol{d}\mathcal{R}$ を求めて $\boldsymbol{d}\mathcal{R} = 0$ を明らかにせよ．

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \boldsymbol{d\omega}^{\mu\nu} - \boldsymbol{\omega}^{\mu}{}_{\alpha} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\nu\alpha} \tag{14.54}$$

を用いよ．それは直交系（$\boldsymbol{d}\mathcal{R} = 0$ を証明するのに適切である），あるいは（熟練のテストとして）$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \mathcal{R}^{\mu}{}_{\alpha}g^{\alpha\nu}$ および $\boldsymbol{d}g^{\mu\alpha} = -g^{\mu\alpha}(\boldsymbol{d}g_{\alpha\beta})g^{\beta\nu}$（なぜか？）が成り立つ一般系で容易に導かれる．[**注意**：形式間のくさび積（ベクトル間のくさび積でない）のみが $\boldsymbol{d}$ に対する積則，式 (14.13) で符号を固定するのに重要である．]

14.18　エネルギーと運動量の局所的な保存：$\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{T}=0$ は $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}=0$ を意味する

コラム 4.1 で外微分形式に対して定義された双対演算子 $*$ を，形式に作用させる．しかし反変ベクトルへ作用させるのではない．その形式は，ストレス–エネルギーテンソル $\boldsymbol{T}$ あるいは Einstein テンソル $\boldsymbol{G}$ が混合 $\binom{1}{1}$ テンソル

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{e}_\mu T^\mu{}_\nu \boldsymbol{\omega}^\nu$$

あるいは

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{e}_\mu G^\mu{}_\nu \boldsymbol{\omega}^\nu$$

として書かれるときに現れるものである．

(a) 基底ベクトルおよび形式で展開された $^*\boldsymbol{T}$（あるいは $^*\boldsymbol{G}$）に対する表現を与えよ．

(b) $^*\boldsymbol{T}=\boldsymbol{e}_\mu T^{\mu\nu}d^3\Sigma_\nu$ を示せ．ここに $d^3\Sigma_\nu=\epsilon_{\nu|\alpha\beta\gamma|}\boldsymbol{\omega}^\alpha\wedge\boldsymbol{\omega}^\beta\wedge\boldsymbol{\omega}^\gamma$ [コラム 5.4 および式 (8.10) をみよ]．

(c) 一般化された外微分 $\boldsymbol{d}$ を用いて $\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{T}$ を計算せよ．

$$\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{T}=\boldsymbol{e}_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu}\sqrt{|g|}\boldsymbol{\omega}^0\wedge\boldsymbol{\omega}^1\wedge\boldsymbol{\omega}^2\wedge\boldsymbol{\omega}^3$$

を見出せ．

15章 Bianchi恒等式および境界の境界

[本章は完全にトラック–2である．準備として，(1) 4章（微分形式）および (2) 14章（曲率の計算）を扱っておくことを必要とする．本章を読むには9–11および13章が役立つだろう．後のどの章に対する準備としても必要でないが，17章で役立つだろう（Einsteinの場の方程式）．]

15.1 Bianchi恒等式の概要

幾何学は物質に指示を与えるが，物質はいかにして幾何学に指示を与えるよう取り計らうことができるだろうか？ 幾何学は，“固有時の極値的な経過の世界線（測地線）を追跡する”，という単純な操作で物質に指示を伝える．物質が幾何学に作用を返しうる方法は何であるか？ RiemannおよびEinsteinの計量幾何学が興味深い特徴を記録するとき，いかに正しい方法を同定できるか？ 物理学は捜すべきものを述べる．**重力（時空の曲率）と源（物質，ストレス–エネルギーテンソル $\boldsymbol{T}$）間の結合の仕組み，それは源の自動的な保存 ($\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}=0$) を保証するだろう**．物理学はしたがって数学にたずねる．“幾何学のどのようなテンソル的特徴が自動的に保存されるだろうか？” 数学は“Einsteinテンソル”という答えを返す．物理学は質問する“いかにしてこの保存は起こるか？” 数学は，Élie Cartanの代理として答える，“‘境界の境界はゼロである’という原理を通して”と（コラム15.1）．

実際，曲率の2つの特徴は自動的に保存される．あるいは，言い換えれば，曲率は2つのBianchi恒等式，本章の題目，を満たす．曲率の両方の特徴，両方の“幾何学的な対象”は図，さらにいえば，“境界の境界はゼロである”という原理を作用で示す図での表示に荷担する．この点について，時空の幾何学はMaxwellの電気力学の場に，驚くべき類似性を示す．

*1 電気力学では4つのポテンシャルが存在して，1–形式 $\boldsymbol{A}\equiv A_\mu\,\boldsymbol{d}x^\mu$ に統一されている．
*2 この量から微分によって ***Faraday***, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{dA}$ が導かれる．この場は恒等式 $\boldsymbol{dF}=0$（恒等式かといえばそうであるし，保存される源の定義に荷担する恒等式かといえばそうではない）を満たす．

重力では10個のポテンシャル (計量係数 $g_{\mu\nu}$) があって計量テンソル $\boldsymbol{g}=g_{\mu\nu}\,\boldsymbol{d}x^\mu\otimes\boldsymbol{d}x^\nu$ に統一されている．この量から2つの微分によって曲率演算子

---

*1 恒等式と源の保存：電磁気学と重力が比較される

*2 $\boldsymbol{dF}\equiv 0$

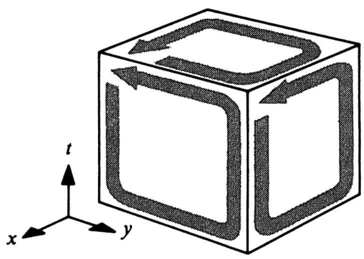
$$\mathcal{R}=\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_\mu\wedge\boldsymbol{e}_\nu R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{d}x^\alpha\wedge\boldsymbol{d}x^\beta$$

*3 が出る．この曲率演算子は Bianchi 恒等式 $\boldsymbol{d}\mathcal{R}=0$ を満たす．ここに今や "$\boldsymbol{d}$" は Cartan の外微分の拡張であり，14 章でより完全に記述されている（さらに恒等式であるが，保存される源の定義に関係しないものである）．

電磁気学では，源 $\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F}=4\pi{}^*\boldsymbol{J}$ に取り組む方法を与えてくれる場の何らかの特徴を得
*4 るために，双対 ${}^*\boldsymbol{F}$ を扱わなければならない．源の保存 $\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{J}=0$ は，恒等式 $\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F}=0$ の結果として，あるいは，推論から言い直すと（コラム 15.1），境界の境界はゼロである結果として現れる．

コラム 15.1　境界の境界はゼロである

A. 1–2–3 次元形式での考え方



方向づけられた立方体あるいは立方体（3 次元）への近似から始める．その境界は 6 個の方向づけられた面からなっており，そのおのおのは 2 次元である．各面の方向は矢印で示されている．任意の 1 つの方向づけられた面の境界は 4 個の方向づけられた縁あるいは矢印，おのおのの 1 次元からなっている．どの縁も 1 つの面を他の面と結びつける．それ自身で孤立している縁はない．すべてのこれらの縁について，符号に十分考慮して "和をとる"．このときどの与えられた縁も 2 度数えられることがわかる．1 回は 1 つの方向に進み，もう 1 回は逆の方向に進む．3 次元立方体の 2 次元の境界の 1 次元の境界は恒等的にゼロであると結論される．

B. 2–3–4 次元形式での考え方

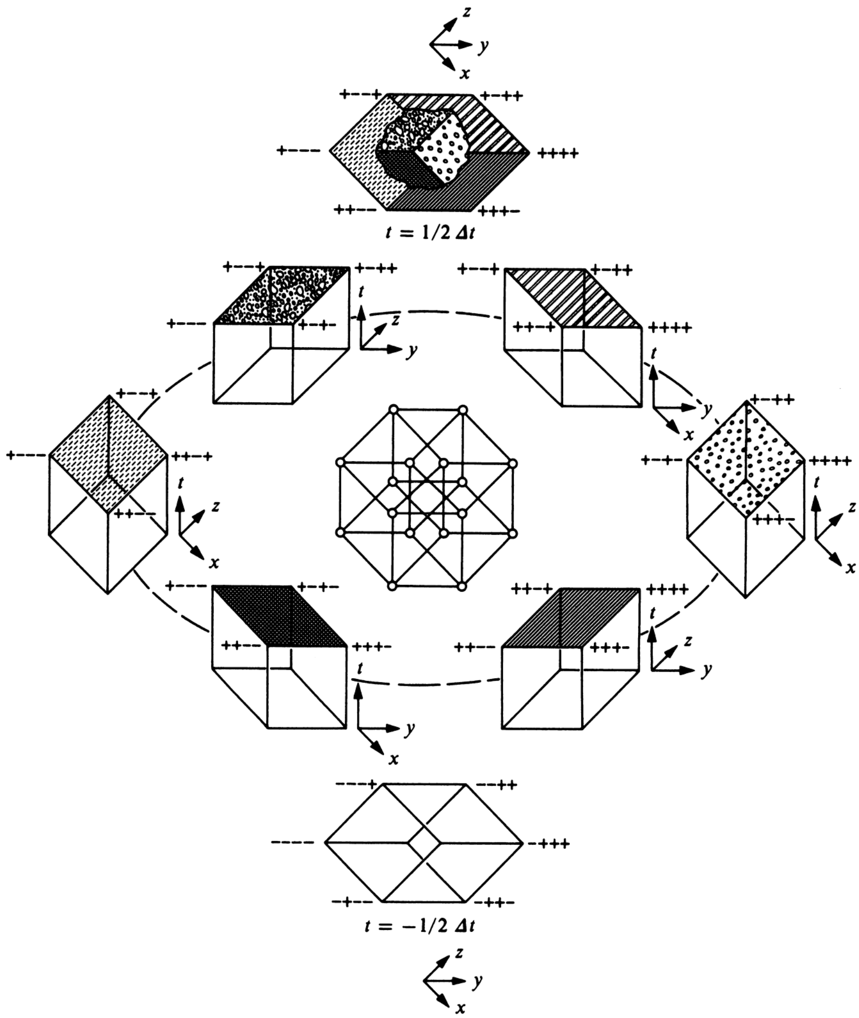
方向づけられた 4 次元立方体あるいはそれへの近似から始める．4–立方体の代表的な角の座標は（$t_0\pm\frac{1}{2}\Delta t, x_0\pm\frac{1}{2}\Delta x, y_0\pm\frac{1}{2}\Delta y, z_0\pm\frac{1}{2}\Delta z$）ととれるだろう．したがって，ある角を見本にとると，明確に簡略化して，好都合に＋－－＋と短縮して表される．これらの角は 16 個ある．4–立方体自身よりも外観がより複雑でないのは 3 次元の面であり，それらは次の図の周囲の領域に "分解され"，詳細に調べることができる．

4–立方体の境界は 8 個の方向づけられた超面からなり，そのおのおのは 3 次元である（たとえば，広がり $\Delta x\Delta y\Delta z$ をもつ頂上の超面，広がり $\Delta t\Delta y\Delta z$ をもつ "正面の" 超面など）．

---

*3　$\boldsymbol{d}\mathcal{R}\equiv 0$

*4　$\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F}\equiv 0$ および Maxwell の方程式$\Longrightarrow\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{J}=0$



任意の 1 つの超面（“立方体”）の境界は 6 個の方向づけられた面からなり，おのおのは 2 次元である．

どの面（たとえば，下の左隅の平行線で陰影をつけられた面 $\Delta x \Delta y$）も 1 つの超面を他の超面と結びつける（この例では，下の左隅の “3–立方体側面” $\Delta t \Delta x \Delta y$ を “3–立方体頂面” $\Delta x \Delta y \Delta z$ と）．自分だけで孤立して存在する面はない．4–立方体の 3 次元の境界は外部の世界に対して 2–面をさらさない．それは**面**なしである．

すべてのこれらの面について，方向づけを正しく考慮して “和をとる”．どの与えられた面も，1 回は 1 つの方向で，1 回は逆の方向で 2 度勘定される．4 次元の立方体の 3 次元の境界の 2 次元の境界は恒等的にゼロであると結論される．

C. 一般的な抽象的形式での考え方

$\partial\partial = 0$（境界の境界はゼロである）．

D. 重力および電磁気学への適用の背後にある考え方

1 つの重要な点は保存則（電荷の保存，運動量–エネルギーの保存）である．

他の重要な点はこの保存則が“自動的に満たされる”ことである．

“自動的な保存”は源が場所から場所へそして各瞬間任意に変化できる主体でないことを要求する．

源はそれ自身の自由度をもつけれども，源が保存則を自動的に満たすことを十分に保証するためには，もしそれがなかったら源の任意の自由度を減らすようなあるものへの結びつきを必要とする．このあるものに“場”という名前を与える．

この場を定義しそして，源の保存が“境界のゼロ境界”の自動的な結果となるように源に“場を結ぶ”． あるいは，より明白に，保存は図に示されている 4 次元の立方体内で源の創造あるいは破壊がないことを要求する．同等に，この 4 次元の領域について“創造事象”の積分（電荷に対して $\boldsymbol{d}^{*}\boldsymbol{J}$ の積分，エネルギー運動量に対して $\boldsymbol{d}^{*}\boldsymbol{T}$ の積分）がゼロであることが要求される．

この 4 次元領域についての創造の積分はこの領域の 3 次元の境界についての源密度流れ（$^{*}\boldsymbol{J}$ あるいは $^{*}\boldsymbol{T}$）の積分に翻訳できる．この境界は 8 個の超面からなり，おのおのは方向づけについて十分な考慮が払われる．上の超面（“$\Delta x\Delta y\Delta z$”）についての積分は後の時点に存在する源の量を与える．下の超面についての積分は以前に存在した源の量を与える．“$\Delta t\Delta x\Delta y$”のような超面についての積分は時間の中間的な段階についての源の流出を与える．保存はこれら 8 個の 3 次元積分の和がゼロになるはずであることを要求する（詳細は 5 章にある）．

この 3 次元積分の和がゼロになることは保存の要求を述べている．しかしこの要求を満たす“自動的に”（あるいは，数学的な言葉で，“恒等的に”）という言葉に対する仕組みを与えていない．そのために，“境界の境界はゼロである”という原理に向かおう．

任意の方向づけられた超面 $\mathcal{V}$（3 次元領域，“立方体”）について源の密度流れの積分はこの“立方体”の面（各面は適切な方向づけをもちそして立方体は無限小である）についての場の積分に等しいはずであると要求する．

$$4\pi\int_{\mathcal{V}}{}^{*}\boldsymbol{J}=\int_{\partial\mathcal{V}}{}^{*}\boldsymbol{F},\qquad 8\pi\int_{\mathcal{V}}{}^{*}\boldsymbol{T}=\int_{\partial\mathcal{V}}(\text{回転のモーメント})$$

この立方体の 6 個の面について和をとり，そしてすべての 8 個の立方体の面が覆われるまで和をとり続ける．任意の与えられた面（たとえば，図の平行線で陰影をつけられた面）は，1 回は 1 つの方向で，もう 1 回は逆の方向で，2 度勘定されることを見出す（“境界の境界はゼロである”）．こうして源の保存は保証される．4 次元領域の 3 次元の境界について源の密度流れの積分は自動的にゼロであり，あの 4 次元領域の内部についての創造の積分もまた恒等的にゼロになる．

あの 4 次元領域の 1 つの局所でわずかにずらした境界について計算を繰り返す［朝

永（1946）および Schwinger（1948）の“泡微分”]．そして，4 次元領域全体においてばかりでなく，その内部のどの点においても，さらに拡張して，時空内のいたるところで，保存は保証されると結論する．

E. 源の場に対する関係

1 つの観点：源が根本的である．場は他の任務をもつだろうが，その根本的な任務は源の“奴隷”として仕えることである．源の保存が第 1 に来る．場はしたがって自らを調整せねばならない．

他の観点：場が根本的である．場は源が保存則に従うように取りはからう責任をとる．源は場が存在しなければなすべきことを知らないだろうし，存在すらしないだろう．源は場から“つくられる”．源の保存はこの構成の結果である．

この観点を基本的な背景で例示する 1 つの模型：“古典的な”電荷を“多重連結空間のトポロジーにとらえられた電気力線”以外の何ものでもないとする概念 [Weyl (1924b), Wheeler（1955), Misner and Wheeler（1957)]．

どんな観点に基づいても，任意の 3 次元領域（上の単純化された解析での“立方体”）について源の密度流れの積分はこの領域の境界（上の立方体の 6 個の面）についての場の積分に等しい．場の法則と保存則との間の相関を理解する方法は他にはまったく見出されていない．

F. 模型としての電磁気学：いかに源を場に“結んで”源の自動的な保存を 2–3–4 次元形式での“$\partial\partial = 0$”を通して与えるか

保存は電荷のゼロ創造（4 次元領域 Ω でのゼロ創造）を意味する．

保存はしたがってこの体積の 3 次元の境界についての電荷密度電流の積分に対するゼロ値を要求する．こうして，3 および 5 章のトラック–1 の言葉で

$$0 = \int_\Omega \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} d^4\Omega = \int_{\partial\Omega} J^\mu d^3\Sigma_\mu$$

同等に，4.3–4.6 節の座標によらない抽象的な言葉で，

$$0 = \int_\Omega \boldsymbol{d}^*\boldsymbol{J} = \int_{\partial\Omega} {}^*\boldsymbol{J}$$

をもつ．ここに

$$\begin{aligned} {}^*\boldsymbol{J} = {}& {}^*J_{123}\, \boldsymbol{d}x^1\wedge \boldsymbol{d}x^2\wedge \boldsymbol{d}x^3 + {}^*J_{023}\, \boldsymbol{d}x^0\wedge \boldsymbol{d}x^2\wedge \boldsymbol{d}x^3 \\ & + {}^*J_{031}\, \boldsymbol{d}x^0\wedge \boldsymbol{d}x^3\wedge \boldsymbol{d}x^1 + {}^*J_{012}\, \boldsymbol{d}x^0\wedge \boldsymbol{d}x^1\wedge \boldsymbol{d}x^2 \end{aligned}$$

（電荷密度と電流密度の 3–形式の“卵の木枠のような構造”）．

この保存の要求を“境界の境界はゼロである”という原理を通して，$4\pi\, {}^*\boldsymbol{J} = \boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F}$

と書いて，自動的に（“恒等的に”）満たす．こうして，

$$4\pi \int_{\partial\Omega} {}^*\boldsymbol{J} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F} = \int_{\partial\partial\Omega(\text{ゼロ！})} {}^*\boldsymbol{F} \equiv 0$$

あるいは，トラック–1 の言葉で，$4\pi J^{\mu} = F^{\mu\nu}{}_{;\nu}$ と書き，そして

$$4\pi \int_{\partial\Omega} J^{\mu} d^3\Sigma_{\mu} = \int_{\partial\Omega} F^{\mu\nu}{}_{;\nu} d^3\Sigma_{\mu} = \int_{\partial\partial\Omega(\text{ゼロ！})} F^{\mu\alpha} d^2\Sigma_{\mu\alpha} \equiv 0$$

となる．言い換えれば，よく知られた平坦な空間での形式で表された Maxwell の方程式の半分

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \nabla\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{curl} \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{B} = \dot{\boldsymbol{E}} + 4\pi\boldsymbol{J}$$

は，源の保存則が直接 “$\partial\partial\Omega = 0$” から出るように，源を場に “結ぶ．”

G. 電磁気学はまた 1–2–3 次元形式で “$\partial\partial = 0$” を用いる（“磁荷は存在しない”）

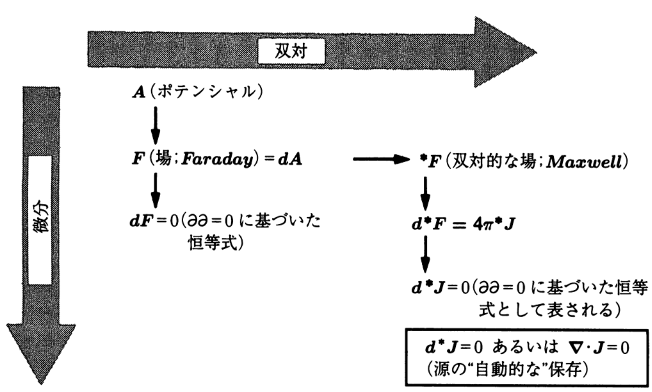
磁荷は $4\pi\boldsymbol{J}_{\text{mag}} = \boldsymbol{dF}$ を通して場とつながっている（この簡潔なトラック–2 の言葉を同等なトラック–1 の表現へ翻訳するには上の論点 **F** をみよ）．どのような磁荷も存在しないことは任意の 3–体積 $\mathcal{V}$ についての $\boldsymbol{J}_{\text{mag}}$ の積分は必然的にゼロであることを述べている．あるいは（“部分積分，” 一般化された Stokes の定理）

$$0 = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{dF} = \int_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{F} = (\partial\mathcal{V}\ \text{を通して存在する全磁束})$$

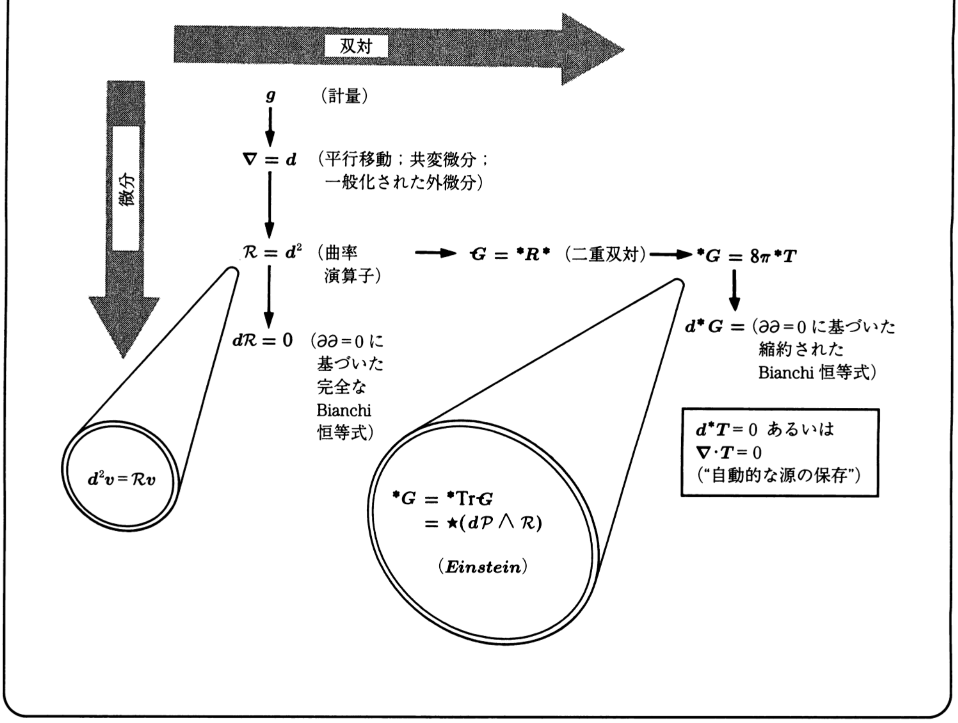
この要求を “境界の境界はゼロである” という原理を通して “自動的に” 満たすために，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{dA}$（“4–ポテンシャルでの場の表現”）と書き，そして

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{F} = \int_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{dA} = \int_{\partial\partial\mathcal{V}(\text{ゼロ！})} \boldsymbol{A} \equiv 0$$

H. 電気力学の構造の輪郭



I. 幾何力学の構造の輪郭



重力物理学では，"二重双対"（交互に起こる添字の 2 つの対，双対をとるべき 2 つの場所），$\boldsymbol{\mathcal{G}} = \boldsymbol{Riemann}$ の $^{*}\boldsymbol{R}^{*}$ へ行かねばならない，この二重双対は源に取り組む方法を与える場の特徴をもつ．

$$\boldsymbol{G} = \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\mathcal{G}} = \boldsymbol{Einstein} = 8\pi\boldsymbol{T} = 8\pi\times(\text{エネルギー運動量の密度})$$

源 $\boldsymbol{T} \equiv \boldsymbol{e}_\mu T^\mu{}_\nu \boldsymbol{\omega}^\nu$ の保存は $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 0$ と述べることができる．しかし現在の目的に対してより適当なのは次形式（14 章および練習問題 14.18 をみよ）に書くことである．

*5
$$\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{T} = 0$$

ここに

$$^*\boldsymbol{T} \equiv \boldsymbol{e}_\mu T^\mu{}_\nu(^*\boldsymbol{\omega}^\nu) = \boldsymbol{e}_\mu T^{\mu\nu} d^3\Sigma_\nu$$

である．この保存則は "縮約された Bianchi 恒等式"，$\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{G} = 0$ の結果として生じ，再び境界の境界はゼロであることによって解釈できる．

*5 $\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{G} \equiv 0$ および Einstein の場の方程式$\Longrightarrow \boldsymbol{d}^*\boldsymbol{T} = 0$

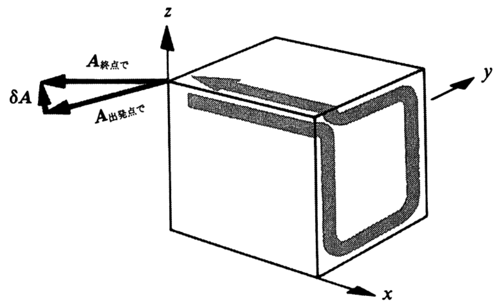


図 15.1　例示されている 3–体積の 6 個の面のおのおのに関係する回転を組み合わせて正味ゼロ回転で終わる（完全な “Bianchi 恒等式”）．理由：任意の面の寄与はその面の周囲を回る平行移動で運ばれる試験ベクトル $\boldsymbol{A}$ の変化によって測定される．すべての面の寄与を組み合わせ，1 回は 1 つの方向に，1 回は逆の方向へと 2 度，行きつ戻りつする各稜で終わる［示されている 3 次元図の境界（2 次元）の境界（ここでは 1 次元）はゼロである］．詳細：示されている位置に存在するベクトル $\boldsymbol{A}$ は示されている面へ平行移動される．それからその面の周囲を回る．平行移動によって運ばれ，その過程でその面に関係する時空曲率によって測定される回転を経験し，それから最初の位置に平行移動で戻される．小さい量の適切な最低次まで演算子記号で

$$(\boldsymbol{A}\text{ における変化}) = -\Delta y \Delta z \mathcal{R}(\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)\boldsymbol{A}$$

と書くことができる．あるいは座標の言葉で

$$-\delta A^\alpha = R^\alpha{}_{\beta yz}(x+\Delta x \text{ において}) A^\beta \Delta y \Delta z$$

と書くことができる．

15.2　“境界の境界=0” の表示としての Bianchi 恒等式 $\boldsymbol{d}\boldsymbol{\mathcal{R}}=0$

このようなものが 2 つの Bianchi 恒等式の輪郭形式での説明である．さて詳細に書き表
*6 すのが適切である．図 15.1 は完全な Bianchi 恒等式，$\boldsymbol{d}\boldsymbol{\mathcal{R}} = 0$（練習問題 14.17 をみよ）を例示する．約言すれば，“任意の要素的な立方体の 6 個の面と結びついた，曲率によって引き起こされる回転の和はゼロである” ことを述べている．示された面の周囲の周りの移動と結びついたベクトル $\boldsymbol{A}$ での変化は，小さい量の適切な最低次まで求めると，

$$-\delta A^\alpha = R^\alpha{}_{\beta yz}(x+\Delta x \text{ において}) A^\beta \Delta y \Delta z \tag{15.1}$$

で与えられる．反対側の面は同様の寄与を与える．ただ今度は符号が逆になりそして評価は $x+\Delta x$ でよりもむしろ x で行われる．2 つの面からの寄与の組合せは，Riemann 規準座標が用いられるときは

$$\frac{\partial R^\alpha{}_{\beta yz}}{\partial x} A^\beta \Delta x \Delta y \Delta z \tag{15.2}$$

を与える．このような座標で，すべての 6 個の面による寄与の全体 $-\delta A^\alpha$ がゼロになることは

$$R^\alpha{}_{\beta yz;x} + R^\alpha{}_{\beta zx;y} + R^\alpha{}_{\beta xy;z} = 0 \tag{15.3}$$

を意味する．ここにセミコロン（共変微分）がコンマ（常微分）の代わりに挿入できるし，そして挿入されている．なぜなら 2 つは Riemann 規準座標の背景では同等であるからで

*6　Bianchi 恒等式，$\boldsymbol{d}\boldsymbol{\mathcal{R}} \equiv 0$，は立方体の 6 個の面の周りの平行移動で解釈される

ある．そして共変バージョン (15.3) は任意の曲線座標に拡張される．xyz 立方体から座標軸の任意の組で定義される立方体へ向かい，そして Bianchi の恒等式を

$$R^{\alpha}{}_{\beta[\lambda\mu;\nu]} = 0 \tag{15.4}$$

の形に書く（この恒等式の抽象的な座標によらない形式，$\boldsymbol{d}\mathcal{R} = 0$ での 1 つの再表現に対しては練習問題 14.17 をみよ，そして他の再表現に対しては 15.3 節をみよ）．この恒等式は,

$$F_{[\lambda\mu,\nu]} = F_{[\lambda\mu;\nu]} = 0 \tag{15.5}$$

電磁気学での恒等式 $\boldsymbol{dF} = \boldsymbol{ddA} \equiv 0$ が占めるのと同じほど多くの場所を重力物理学において，占める．

15.3　回転のモーメント：縮約された Bianchi 恒等式への鍵

縮約された Bianchi 恒等式，“源に連結する取り手 (handle)” を与える恒等式は “回転のモーメント” を取り扱うことが，Élie Cartan によって示された [Cartan (1928), Wheeler (1964b), Misner and Wheeler (1972)]．モーメントは基本的な力学でよく知られている．剛体はそれに作用するすべての力の和がゼロになる，すなわち

$$\sum_i \boldsymbol{F}^{(i)} = 0 \tag{15.6}$$

でなければ，静止し続けられないだろう．この条件は必要であるけれども，十分でない．これらの力のある点 $\mathcal{P}$ についてのモーメントの和もまたゼロでなければならない．

$$\sum_i (\mathcal{P}^{(i)} - \mathcal{P}) \wedge \boldsymbol{F}^{(i)} = 0 \tag{15.7}$$

厳密にこれらのモーメントがどの点についてとられるかは，幸いにも問題でない．そしてこれは単純な理由のためである．ベクトル積 (15.7) での任意点は係数に対して量 $\sum_i \boldsymbol{F}^{(i)}$ をもち，それはすでにゼロになることが要求されている．事情は図 15.1 の要素的な立方体でも同様である．ここでは与えられた面と結びついている回転は，力学における力 $\boldsymbol{F}^{(i)}$ の類似物である．これらの回転の和は，立方体のすべての 6 個の面について広げられるときはゼロになることは，力 $\boldsymbol{F}^{(i)}$ の和がゼロになることの類似物である．

力学で出会う力のモーメントの曲率に対する類似物は何であるか？　それは**立方体の与えられた面と結びついている回転のモーメント**である．任意の個々のモーメントの値は基
*7　準点 $\mathcal{P}$ に依存する．しかし，立方体のすべての 6 個の面についてとられたこれらのモーメントの和は，力学の場合と同じ理由のために，基準点 $\mathcal{P}$ によらない値をもつだろう．したがって $\mathcal{P}$ は要素的な立方体の内部にあろうと外部にあろうと，望むところにとることが

*7　立方体のすべての 6 個の面についての回転の正味のモーメント

*8 できる．さらに，立方体は時空を通して薄く切り取られた超面の一部分とみてよい．したがって $\mathcal{P}$ は薄片上にあるのと同じ位わずかに薄片から離れて存在しうる．含まれるすべての距離が，局所的な Riemann 規準座標系でモーメントおよびモーメントの和を計算する際に要求される精度を得るにたるだけ短いことだけが要求される．こうして問題の立方体と結びついた $\mathcal{P}$ によらない合計された回転のモーメント（必ずしもゼロでない，重力は力学でない!）に到達する．

*9 こうしていまや“境界の境界はゼロである”という奇術に行きつく．個々の面と結びついた個々の回転のモーメントの和をとって求められた，立方体のこの正味の回転のモーメントを，3–立方体の内部についての源の密度–流れ（エネルギー運動量テンソル $^*\boldsymbol{T}$）の積分と同一視する．この同一視を 1 つの 3–立方体に対してだけでなく，コラム 15.1 における 4 次元の立方体の境界をなすすべての 8 個の 3–立方体（超面）に対して行う．積分された源の密度–流れ $^*\boldsymbol{T}$ を 4–立方体の 1 つの超面に対してだけでなく，すべての 8 個の超面に対して和をとる．こうして

$$
\begin{aligned}
\int_{\text{4–立方体}} (\text{源の創造 } \boldsymbol{d}^*\boldsymbol{T}) &= \int_{\substack{\text{この 4–立方体}\\ \text{の 3–境界}}} (\text{源の密度–流れ，} {}^*\boldsymbol{T}) \\
&= \sum_{\substack{\text{これら 8 個の}\\ \text{境界をなす}\\ \text{3–立方体}}} \begin{pmatrix} \text{指定された立方体と結びついて} \\ \text{いる正味の回転のモーメント} \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\sum_{\substack{\text{8 個の境界}\\ \text{をなす 3–立}\\ \text{方体}}} \sum_{\substack{\text{与えられた}\\ \text{3–立方体の}\\ \text{境界の 6 個}\\ \text{の面}}}}_{(\text{ゼロ!})} \begin{pmatrix} \text{指定された立方体の指定} \\ \text{された面と結びついてい} \\ \text{る回転のモーメント} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\qquad (15.8)
$$

*10 をもつ．回転のモーメントは，1 個の立方体の 6 個の面に対してばかりでなく，すべての立方体のすべての面に対して，1 つのそして同じ点 $\mathcal{P}$ についてとられるとする．任意の与えられた面は 2 つの立方体あるいは超面をつないでいることを思い出せ（コラム 15.1）．回転のモーメントはしたがって，面の勘定で 2 度現れる．1 回は 1 つの方向で（“回転を求める平行移動での一周の向き”）そしてもう 1 回は逆の方向で．したがって二重和は恒等的にゼロになる（境界の境界はゼロである!）この恒等式は，新しい幾何学的な対象，曲率の特徴の存在を確立する．その特徴は保存され，したがって源をつなぐべき取り手を与える．求めるべき結果は達成された．今やこの結果を標準的な数学に翻訳せねばならない!

15.4 回転のモーメントの計算

任意の要素的な 3–体積にかかわる，この保存される Cartan の回転のモーメントのテン

---

*8　(1) 記述される

*9　(2) 立方体の内部についての，源の積分 $\int {}^*\boldsymbol{T}$ に等しくされる

*10　(3) 保存される

*11 ソル的な特徴と値を見出すことが残っている．図 15.1 での立方体の正面の面 $\Delta y \Delta z\, \boldsymbol{e}_y \wedge \boldsymbol{e}_z$ と結びついた回転は $\mathcal{P}_{\text{正面}} = (t - \frac{1}{2}\Delta t, x + \Delta x, y + \frac{1}{2}\Delta y, z + \frac{1}{2}\Delta z)$ に位置するバイベクトル

$$(\text{正面の } \Delta y \Delta z \text{ 面と結びついた回転}) = \boldsymbol{e}_\lambda \wedge \boldsymbol{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{yz} \Delta y \Delta z \qquad (15.9)$$

によって表されるだろう．この式は Riemann 規準座標を用いる．$|\lambda\mu|$ におけるように，縦線で囲まれた添字は制限 $\lambda < \mu$ つきで加えられる．点 $\mathcal{P}$ についてのこの回転のモーメントはトライベクトル（trivector）で表されるだろう．

$$\begin{pmatrix} \text{正面の} \Delta y \Delta z \text{ 面と} \\ \text{結びついた回転の} \\ \text{モーメント} \end{pmatrix} = (\mathcal{P}_{\text{正面の面の中心}} - \mathcal{P}) \wedge \boldsymbol{e}_\lambda \wedge \boldsymbol{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{yz} \Delta y \Delta z \quad (15.10)$$

ここで $\mathcal{P}_{\text{正面の中心}}$ も $\mathcal{P}$ も，何らのベクトルとしてのよく定義された意味をもたない．しかしそれらの差は無限小の分離の極限でベクトル，$\Delta\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{正面の中心}} - \mathcal{P}$ である．背後の面とは同様の回転のモーメントが，反対の符号で，そして $\mathcal{P}_{\text{正面の中心}}$ が $\mathcal{P}_{\text{背後の中心}}$ で置き換えられて，結びついている．2 項間の差では，因子 $\mathcal{P}$ は興味がない，なぜならそれは相殺するであろうことをすでに確信しているからである [Bianchi 恒等式 (15.4)，力学での $\sum \boldsymbol{F}^{(i)} = 0$ の類似物]．差 $\mathcal{P}_{\text{正面の中心}} - \mathcal{P}_{\text{背後の中心}}$ は値 $\Delta x \boldsymbol{e}_x$ をもつだろう．すべての 6 個の面について和をとると，

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \text{立方体あるいは超面 } \Delta x \Delta y \Delta z \text{ と結び} \\ \text{ついた正味の回転のモーメント} \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_\lambda \wedge \boldsymbol{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{yz} \Delta x \Delta y \Delta z \ (\text{正面と背後}) \\ &\quad + \boldsymbol{e}_y \wedge \boldsymbol{e}_\lambda \wedge \boldsymbol{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{zx} \Delta y \Delta z \Delta x \ (\text{側面}) \\ &\quad + \boldsymbol{e}_z \wedge \boldsymbol{e}_\lambda \wedge \boldsymbol{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{xy} \Delta z \Delta x \Delta y \ (\text{頂上と底}) \end{aligned} \qquad (15.11)$$

をもつ．この和を 3–形式

$$\boldsymbol{e}_\nu \wedge \boldsymbol{e}_\lambda \wedge \boldsymbol{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{|\alpha\beta|} \boldsymbol{d}x^\nu \wedge \boldsymbol{d}x^\alpha \wedge \boldsymbol{d}x^\beta$$

の（体積要素 $\boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_y \wedge \boldsymbol{e}_z \Delta x \Delta y \Delta z$ についての）値と認める．さらにこの 3–形式は点で定義され，そして正確に定義される．それに対して式 (15.11) は，広がった領域に当てはまり，同時に簡潔で正確な解析に適していない．したがって 3–形式を支持して式 (15.11) を見合わせる．解釈するときになると，この 3–形式は "立方体" $\boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_y \wedge \boldsymbol{e}_z \Delta x \Delta y \Delta z$ に対して求められるべきであるとだけ記憶せよ．今や "トライベクトル値の回転のモーメント 3–形式" はまた

*12
$$(\text{回転のモーメント}) = \boldsymbol{d}\mathcal{P} \wedge \mathcal{R} = \boldsymbol{e}_\nu \wedge \boldsymbol{e}_\lambda \wedge \boldsymbol{e}_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{|\alpha\beta|} \boldsymbol{d}x^\nu \wedge \boldsymbol{d}x^\alpha \wedge \boldsymbol{d}x^\beta \qquad (15.12)$$

*11 (4) 求められる
*12 (5) 抽象化されて $\boldsymbol{d}\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}$ を与える

と書ける．ここに

$$d\mathcal{P} = e_\sigma dx^\alpha \tag{15.13}$$

は Cartan の $\binom{1}{1}$ 単位テンソルである．$\mathcal{R}$ もまたバイベクトル値 2–形式

$$\mathcal{R} = e_\lambda \wedge e_\mu R^{|\lambda\mu|}{}_{|\alpha\beta|} dx^\alpha \wedge dx^\beta \tag{15.14}$$

として取り扱われる．

式 (15.11) におけるように成分の言葉を用いて，あるいは式 (15.12) で導入された抽象的な言葉を用いてトライベクトルを取り扱っていることがわかる．まったく別な状況で，4–空間内の超面上の 3–体積の要素がトライベクトルとして残されうるように，トライベクトルはトライベクトルとして残されうる．しかし，双対表示をとり，体積の要素をベクトルとして述べることがより好都合である．反変ベクトル，トライベクトルなどに対してのみ（しかし形式に対してでない）作用する双対演算子を $\star$ で記せ．そうすると Lorentz 系で $\star(e_1\wedge e_2\wedge e_3) = e_0$，しかし $\star(dx^3) = dx^3$．より一般的に，

$$\star(e_\nu \wedge e_\lambda \wedge e_\mu) = \epsilon_{\nu\lambda\mu}{}^\sigma e_\sigma \tag{15.15}$$

[*13] この記号で，“ベクトル値の回転のモーメント 3–形式” は

$$\begin{aligned}(\text{回転のモーメント}) = \star(d\mathcal{P}\wedge\mathcal{R}) &= e_\sigma \epsilon_{\nu\lambda\mu}{}^\sigma R^{|\lambda\mu|}{}_{|\alpha\beta|} dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \\ &= e_\sigma ({}^*R)_\nu{}^\sigma{}_{|\alpha\beta|} dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta\end{aligned}$$

である．あるいは，1 段階進めて，

$$(\text{回転のモーメント}) = \star(d\mathcal{P}\wedge\mathcal{R}) = e_\sigma ({}^*R^*)_\nu{}^{\sigma\nu\tau} d^3\Sigma_\tau \tag{15.16}$$

ここに $d^3\Sigma_\tau$ は，コラム 5.4 におけるように，基底 3–形式に対する記号である．こうして，

$$dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta = \epsilon^{\nu\alpha\beta\tau} d^3\Sigma_\tau \tag{15.17}$$

（局所 Lorentz 系では，$dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 = d^3\Sigma_0$）．

公式 (15.16) 以上に曲率の解析に中心的なものはない．それは 3–体積の要素で出発しその 3–体積での回転のモーメントを与えて終わる．出発の体積を最終のモーメントと結びつけるテンソル，***Riemann*** の “縮約された二重双対” は，非常に重要であるのでそれはそれ自身の名前，$\boldsymbol{G}$ ≡ ***Einstein*** に値しそれを受ける．こうして

$$(\text{Einstein})^{\sigma\tau} \equiv G^{\sigma\tau} = \boldsymbol{G}_\nu{}^{\sigma\nu\tau} = ({}^*R^*)_\nu{}^{\sigma\nu\tau} \tag{15.18}$$

このテンソルには，13.5 および 14.2 節で，そしてまた 14 章の終わりでの例で注目した．***Einstein*** によって 3–体積の要素と “ベクトル値の回転のモーメント” との間の関係は

[*13]　(6) 抽象化されて $\star(d\mathcal{P}\wedge\mathcal{R}) = e_\sigma G^{\sigma\tau} d^3\Sigma_\tau$ を与える

$$(\text{回転のモーメント}) = \star(\boldsymbol{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R}) = \boldsymbol{e}_\sigma G^{\sigma\tau} d^3\Sigma_\tau \tag{15.19}$$

である．

3–体積 $d^3\Sigma_\mu$ の要素に含まれる“ベクトル値の回転のモーメント”の量は一般相対性理論によってその3–体積に含まれるエネルギー運動量の量と同一視される．しかし，この同一視を今のところひとまずおいておく．代わりにこの回転のモーメントの保存の性質に注目する．それらを一度，原理“$\partial\partial \equiv 0$”の結果として，積分計算の公式でみる．それから2度目はそれらを“$\boldsymbol{dd} \equiv 0$”の結果として微分形式でみる．

15.5 “境界の境界はゼロである”からみた，回転のモーメントの保存

*14 **回転のモーメントは自動的に保存量を定義する**．言い換えると，Δt 時間後の要素的な3–体積 $\Delta x\Delta y\Delta z$ に対する回転のモーメントの値は，その時間間隔に3–体積の6個の面についての回転のモーメントの流入（$\Delta y\Delta z\Delta t$，他に比例する量）で補正された，その時間
*15 の初めにおける同じ3–体積に対する回転のモーメントの値に等しい．さてこの回転のモーメントの保存を“境界の境界”の言葉で確かめる．式(15.8)のパターンに従うが，項目ごとに言葉を式に翻訳する．要素的な4–立方体 Ω で創造された回転のモーメントの量を求めて，次式を見出す．

$$\text{“創造”} \underset{\uparrow\ \text{定義}}{\equiv} \int \begin{pmatrix}\text{時空の要素的な4–立方体}\ \Omega\ \text{での} \\ \text{“回転のモーメントの創造”}\end{pmatrix} \underset{\uparrow\ \text{定義}}{=} \int_\Omega \boldsymbol{d}{}^*\boldsymbol{G},$$

$$\int_\Omega \boldsymbol{d}{}^*\boldsymbol{G} \underset{\uparrow\ \text{段階 1}}{=} \int_{\partial\Omega} {}^*\boldsymbol{G} \underset{\uparrow\ \text{段階 2}}{=} \int_{\partial\Omega} \star(\boldsymbol{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R})$$

$$\underset{\uparrow\ \text{段階 3}}{=} \sum_{\substack{\Omega\ \text{の境界をなす} \\ 8\ \text{個の}\ 3\text{–立方体}}} \star \begin{pmatrix}\text{指定された3–立方体と結び} \\ \text{ついた回転のモーメント} \\ \int_{3\text{–立方体}}(\boldsymbol{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R})\end{pmatrix} \underset{\uparrow\ \text{段階 4}}{=}$$

---

*14 正味の回転のモーメントの保存

*15 (1) “$\partial\partial = 0$” から導かれる

$$= \underbrace{\sum_{\substack{\text{8 個の境界をな}\\ \text{す 3–立方体}}}}_{\uparrow\ \text{段階 4}} \ \sum_{\substack{\text{与えられた 3–立方体}\\ \text{の境界の 6 個の面}}} \star \begin{pmatrix} \text{与えられた立方体} \\ \text{の指定された面と} \\ \text{結びついている回} \\ \text{転のモーメント} \\ \int_{\text{面}}(\mathcal{P}\wedge\mathcal{R}) \end{pmatrix} \underbrace{\equiv 0}_{\uparrow\ \text{段階 5}} \tag{15.20}$$

ここで段階 1 は Stokes の定理である．段階 2 は式 (15.19) で確立された，Einstein テンソルと回転のモーメントとの間の同一視である．段階 3 は全境界 $\partial\Omega$ についての積分をこの境界を構成する個々の 3–立方体についての積分に分解する．さらに，すべてのこれらの積分で，星 $\star$ は定数として取り扱われ積分記号の外にとられる．このような取り扱いに対する理由は単純である．双対演算子 $\star$ は計量のみを含み，そして計量は積分が遂行される境界についての無限小 4–立方体を通して局所的に定数である．段階 4 は公式

$$\boldsymbol{d}(\mathcal{P}\wedge\mathcal{R}) = \boldsymbol{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R} + \mathcal{P}\wedge\boldsymbol{d}\mathcal{R} = \boldsymbol{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R} \tag{15.21}$$

および Stokes の定理を用いて各 3–立方体の積分をその立方体の 2 次元の境界についての $\mathcal{P}\wedge\mathcal{R}$ の積分として表す．最後の段階は 5 である．それは積分とは何の関係もない．それはただ原理 $\partial\partial \equiv 0$ に依存する．

要するに，回転のモーメントの保存は 2 つの事情から出る．(1) 任意の要素的な 3–立方体と結びついている回転のモーメントは定義により，その立方体の 6 個の面と結びついている 6 個の回転のモーメントを加えることによって得られる，正味の値である．(2) 式 (15.20) で，要素的な 4–立方体 Ω の境界である，すべての 8 個の 3–立方体に対するこれらの正味の値を加えるときに，与えられた 2–面の寄与を 2 回勘定する．1 回は 1 つの符号でそしてもう 1 回は反対の符号で．“境界の境界はゼロである” という原理のおかげで，回転のモーメントの保存はこうして恒等式である．

15.6　微分形式で表された，回転のモーメントの保存

*16　積分形式で述べられているどの保存則も微分形式で改めて記述される，そして回転のモーメントの保存則も例外でない．計算は簡潔である．回転のモーメントの一般化された外微分を 3 段階で求め，そしてそれがゼロになることを見出す．こうして

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}^{*}\boldsymbol{G} &= \boldsymbol{d}[\star(\boldsymbol{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R})] \\ &= \star[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R})] \\ &= \star[\boldsymbol{d}^2\mathcal{P}\wedge\mathcal{R} - \boldsymbol{d}\mathcal{P}\wedge\boldsymbol{d}\mathcal{R}] \\ &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\}\ \text{段階 1} \\ &\}\ \text{段階 2} \\ &\}\ \text{段階 3} \end{aligned}$$

*16　(2) “$\boldsymbol{dd} = 0$” から導かれる

段階 1 は関係 $\boldsymbol{d}\star = \star\boldsymbol{d}$ を用いる．星印の双対および一般化された外微分は交換する．なぜなら $\boldsymbol{d}$ が反変ベクトルに適用されるときは，それは共変微分として作用し，そして $\star$ が共変ベクトルあるいは 1–形式に適用されるときは，それは影響を与えないからである．段階 2 は，テンソル値形式の積への $\boldsymbol{d}$ の作用に対して標準的な法則を適用する［式 (14.13b) をみよ］．段階 3 は 2 項を取り扱う．第 1 項はゼロである．なぜならその最初の因子がゼロであるからである．こうして，$\boldsymbol{d}^2\mathcal{P} = 0$［Cartan の構造式，共変微分の“ゼロねじれ”を表している，式 (14.26) をみよ］．第 2 項もまた，この場合ゼロである．なぜならその 2 番目の因子がゼロになるからである．こうして，$\boldsymbol{d}\mathcal{R} = 0$（完全な Bianchi 恒等式）．こうして簡潔に回転のモーメントの保存が達成される．

コラム 15.2　重力の源と回転のモーメント：それらに対する 2 つの重要な量ともっとも有用な数学的な表示

	重力の源としてのエネルギー運動量（時空の曲率）	幾何学の自動的に保存される特徴としての回転のモーメント
ベクトル値 3–形式としての表示，座標によらない幾何学的対象	どれだけのエネルギー運動量が要素的な 3–体積内に含まれているかを述べる機械 $^{*}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{e}_\sigma T^{\sigma\tau} d^3\Sigma_\tau$（“ストレス–エネルギーテンソルの双対”）	どれだけの正味の回転のモーメント（ベクトルとして表される）が，要素的な 3–立方体の 6 個の面と結びついている 6 個の回転のモーメントを加えることによって得られるかを述べる機械 $\star(\boldsymbol{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R}) = {}^{*}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{e}_\sigma G^{\sigma\tau} d^3\Sigma_\tau$（“Einstein の双対”）
$\binom{2}{0}$ テンソルとしての表示（また座標によらない幾何学的対象）	ストレス–エネルギーテンソルそのもの $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{e}_\sigma T^{\sigma\tau} \boldsymbol{e}_\tau$	Einstein そのもの $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{e}_\sigma G^{\sigma\tau} \boldsymbol{e}_\tau$
成分の言葉での表示（値は座標系の選択に依存する）	$T^{\sigma\tau}$	$G^{\sigma\tau}$
成分の言葉での保存則	$T^{\sigma\tau}{}_{;\tau} = 0$	$G^{\sigma\tau}{}_{;\tau} \equiv 0$
$\binom{2}{0}$ テンソルに対する，抽象的な言葉での保存	$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 0$	$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{G} \equiv 0$

双対テンソルの外微分（ベクトル値 3–形式）に翻訳されたとき，抽象的な言葉での保存	$\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{T}=0$	$\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{G}\equiv 0$ あるいは $\boldsymbol{d}\star(\boldsymbol{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R})\equiv 0$
4–体積 Ω の要素に対する積分形式で表された同じ保存則	$\int_{\partial\Omega}{}^*\boldsymbol{T}=0$	$\int_{\partial\Omega}{}^*\boldsymbol{G}\equiv 0$　あるいは $\star\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R})\equiv 0$　あるいは $\star\int_{\partial\partial\Omega}(\mathcal{P}\wedge\mathcal{R})\equiv 0$

15.7　回転のモーメントの保存から Einstein の幾何力学へ：予告

*17　質量，あるいは質量–エネルギーは，重力の源である．質量–エネルギーはエネルギー運動量 4–ベクトルの 1 つの成分である．エネルギーおよび運動量は保存される．3–体積 $d^3\boldsymbol{\Sigma}$ の要素内のエネルギー運動量の量は

$$^*\boldsymbol{T}=\boldsymbol{e}_\sigma T^{\sigma\tau}d^3\Sigma_\tau \tag{15.22}$$

（コラム 15.2 をみよ）．要素的な 4–立方体 Ω に対するエネルギー運動量の保存は

$$\int_{\partial\Omega}{}^*\boldsymbol{T}=0 \tag{15.23}$$

の形式で表される．この保存は偶然でない．Einstein および Cartan によれば，それは“自動的”である．そして，さらに，エネルギー運動量と幾何学の自動的に保存される特徴との間が厳密に同等である結果として，自動的である．この特徴は何か？　それは回転のモーメントであり，自動的な保存則

$$\int_{\partial\Omega}{}^*\boldsymbol{G}=0 \tag{15.24}$$

を満たす．言い換えると，運動量–エネルギーの保存は以下の規則によって，特徴については幾何学的に，そして作用については自動的にされねばならない．**ストレス–エネルギーテンソルを**（因子 8π，あるいは $8\pi G/c^4$，あるいは単位の選択に依存する他の因子を除いて）**回転のモーメントと同一視する**．こうして，

$$\star(\boldsymbol{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R})={}^*\boldsymbol{G}=8\pi\,{}^*\boldsymbol{T} \tag{15.25}$$

あるいは同等のことであるが（依然ベクトル値 3–形式の言葉で）

$$(\text{回転のモーメント})=\star(\boldsymbol{d}\mathcal{P}\wedge\mathcal{R})=\boldsymbol{e}_\sigma G^{\sigma\tau}d^3\Sigma_\tau=8\pi\boldsymbol{e}_\sigma T^{\sigma\tau}d^3\Sigma_\tau \tag{15.26}$$

*17　Einstein の場の方程式が，（正味の回転のモーメントの保存）⇒（源の保存）という要求から“導かれる”

あるいは，テンソルの言葉で，

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{e}_\sigma G^{\sigma\tau} \boldsymbol{e}_\tau = 8\pi \boldsymbol{e}_\sigma T^{\sigma\tau} \boldsymbol{e}_\tau = 8\pi \boldsymbol{T} \tag{15.27}$$

あるいは，成分の言葉で，

$$G^{\sigma\tau} = 8\pi T^{\sigma\tau} \tag{15.28}$$

(Einstein の場の方程式，より詳細に，そしてより一義的な問題について 17 章で見出されるだろう．またコラム 15.3 をみよ)．こうして一般相対性理論のすべては単純に境界の境界はゼロであるという原理に結びついている．運動量とエネルギーの保存の原理に対してより強要的な基礎を発見した者はかつていない．物質の空間に対する，そして空間の物質に対する，重力とよぶあの作用を，より深くみた者はかつていない．

要約すれば，**Einstein 理論はエネルギー運動量の保存を恒等式“境界の境界はゼロである”として理解する．**

コラム 15.3　曲率によって満たされる他の恒等式

(1) 重力の源はエネルギー運動量である．(2) エネルギー運動量はベクトル値 3–形式（“単位の 3–体積あたりのエネルギー運動量”）としてのストレス–エネルギーテンソルで（あるいはその双対で）表される．(3) この源は保存される（要素的な時空 4–立方体内での創造はない）．

これらの原理は Bianchi 恒等式の本章での調査に対する背景を形成する．それが，2 つのさもなければもっとも興味ある恒等式［Allendoerfer and Weil (1943), Chern (1955, 1962)］が考慮から省かれる理由である．一方では 4–形式

$$\Pi = \frac{1}{24\pi^2} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \mathcal{R}_{\alpha\beta} \wedge \mathcal{R}_{\gamma\delta} \tag{1}$$

を取り扱い，他方では 4–形式

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi^2 |\det g_{\mu\nu}|^{1/2}} (\mathcal{R}_{12} \wedge \mathcal{R}_{30} + \mathcal{R}_{13} \wedge \mathcal{R}_{02} + \mathcal{R}_{10} \wedge \mathcal{R}_{23}) \tag{2}$$

を取り扱う．両方の量はテンソル的な“曲率 2–形式”

$$\mathcal{R}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} R_{\alpha\gamma\beta\delta} \boldsymbol{d}x^\beta \wedge \boldsymbol{d}x^\delta \tag{3}$$

からつくられる．4 次元領域 Ω についていずれの量の 4 次元積分も，(1) スカラーである，(2) 恒等的にはゼロに等しくない，(3) 積分が延長される時空の領域の境界に依存する，しかし (4) その面内の時空の幾何学についてなされるいかなる変化にも（これらの変化がその領域内の 4–幾何学の連続性を放棄しないしまた接続性を変えない限り）よらない値をもつ．性質 (1) は積分，スカラーをエネルギー運動量，4–ベク

トルと同一視するいかなる可能性も消滅させる．性質 (2) は保存則の目的に対するいかなる可能性も消滅させる．なぜなら性質 (2) は Ω 内でのゼロでない創造を意味するからである．

曲率テンソル，および他のテンソル（たとえば，Synge (1962) をみよ）から双一次的につくられる Bel–Robinson テンソル（練習問題 15.2 をみよ）もまたここでは省略される．

これらの性質の 1 つあるいはすべては重要な物理学的な内容をもつことがいつか見出されるであろう．式 (2) の 4–形式 Γ の全多様体についての積分は，積分および整数がよく定義されているときはつねに数，多様体のいわゆる Euler–Poincaré 指標を与える．この結果は 2 次元幾何学の背景で広く知られた Gauss–Bonnet の積分，

$$\int \begin{pmatrix} \text{Riemann 的なスカラー曲率不変量} \\ (\text{半径 } a \text{ の球に対しては値 } 2/a^2) \end{pmatrix} g^{1/2} d^2x$$

の 4 次元への一般化である．この積分は，任意の閉じた，方向づけられた 2–球のトポロジーをもつ 2 次元多様体に対しては，いかにひどくひずめられていようとも値 8π をもつ．そして任意の 2–トーラスに対しては，再びいかに波立たされそして捻られていようとも値 0 をもつ．そして他のトポロジーに対しては他と同様に特別な値をもつ．

[練習問題]

15.1　4–シンプレックスの境界の境界

すべての対称性を欠く幾何学の時間発展の解析で，コンピュータに頼ることを強要されるとき，1 つの選択として 4–幾何学をシンプレックス [2 次元の三角形の 4 次元的な類似物，3 次元の四面体．“中心的なシンプレックス” の頂点は，たとえば，好都合に $(t, x, y, z) = (0,1,1,1), (0,1,-1,-1), (0,-1,1,-1), (0,-1,-1,1), (5^{1/2},0,0,0)$ にあると考えられる] に分解することができる．シンプレックスの頂点の数は十分な数であり，そしておのおのの頂点は十分に小さいので，おのおのの内部の幾何学は平坦（Lorentz 的）と理想化されうる．すべての曲率は単体間の接合点に集中している（42 章での Regge 計算法を通して幾何学の力学の議論をみよ）．このようなシンプレックスの境界（3 次元）を定めよ（“その数学的な記述を与えよ”）．この境界の一片をとり，その境界（2 次元）を定めよ．この 2 次元の境界の一片に対して，境界の境界についての簿記で正確に 1 つの場所だけに，それを相殺するもう 1 つの 2 次元の一片が存在すること（シンプレックスの 3–境界の “面なし”）を確かめよ．

15.2 Bel–Robinson テンソル [Bel (1958, 1959, 1962), Robinson (1959b), Sejnowski (1973); また Pirani (1957) および Lichnerowicz (1962) をみよ].

Bel–Robinson テンソルを

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\rho\gamma\sigma}R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\delta}{}^{\sigma} + {}^{*}R_{\alpha\rho\gamma\sigma}{}^{*}R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\delta}{}^{\sigma} \tag{15.29}$$

によって定義せよ．空の時空でこのテンソルは

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\rho\gamma\sigma}R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\delta}{}^{\sigma} + R_{\alpha\rho\delta\sigma}R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\gamma}{}^{\sigma} - \frac{1}{8}g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}R_{\rho\sigma\lambda\mu}R^{\rho\sigma\lambda\mu} \tag{15.30a}$$

として書き直されうることを示せ．また空の時空で

$$T^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta;\alpha} = 0 \tag{15.30b}$$

$T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は添字のすべての対について対称であり，ゼロトレースである

(15.30c)

ことを示せ．

議論：空の時空内の重力場に対する Einstein の "正準エネルギー運動量擬テンソル" (20.3 節) は，2 次微分をもつことがわかる．それは Riemann 規準座標系で

$$t_{\mathrm{E}\alpha\beta,\gamma\delta} = -\frac{4}{9}\left(T_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{4}S_{\alpha\beta\gamma\delta}\right) \tag{15.31a}$$

である．ここに $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は完全に対称な Bel–Robinson テンソルであり，そして $S_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv R_{\alpha\delta\rho\sigma}R_{\beta\gamma}{}^{\rho\sigma} + R_{\alpha\gamma\rho\sigma}R_{\beta\delta}{}^{\rho\sigma} + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{15.31b}$$

で定義される．$S_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は空の空間の共変波動方程式

$$\Delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv -R_{\alpha\beta\gamma\delta;\mu}{}^{;\mu} + R_{\alpha\beta\rho\sigma}R_{\gamma\delta}{}^{\rho\sigma} + 2(R_{\alpha\rho\gamma\sigma}R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\delta}{}^{\sigma} - R_{\alpha\rho\delta\sigma}R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\gamma}{}^{\sigma}) = 0 \tag{15.31c}$$

に現れる．ここに Δ はこの波動方程式を

$$\Box R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} \equiv R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}{}_{;\mu}{}^{;\mu} = 2S_{[\alpha}{}^{[\gamma}{}_{\beta]}{}^{\delta]} \tag{15.31d}$$

と書き直したときの Lichnerowicz–de Rham の波動演算子 [Lichnerowicz (1964)] の変形である．

パート IV

Einsteinの幾何学的な重力理論

ここで読者は，すべての中でもっとも優雅な誘惑の女—幾何力学—との結婚に誘い込まれ，彼女から宇宙を支配する魔法の一服と呪文を学ぶ.

16 章
等価原理と“重力場”の測定

重力のある 1 つの大域的な系よりもむしろ，重力のない多くの局所的な系をもて．

STEPHEN SCHUTZ (1966)

16.1 概　　観

いまや確かに手にした曲がった時空の数学を用いて，Einstein の場の方程式の詳細な研究に猛然と突進したいと思うだろう．しかしこのような誘惑はより短い時間の間に抵抗さ
*1 れねばならない．場の方程式を完全に理解するためには，平坦な時空から曲がった時空への推移で，古典物理学の法則がいかに変化し，あるいは変化しないか（16.2 および 16.3 節）をまず理解しなければならない．そして“重力場”（計量，共変微分，時空曲率，⋯）がいかに“測定”されうるかを理解しなければならない（16.4 および 16.5 節）．

16.2 曲がった時空での物理学の法則

どこに存在しようともまたいつ検査しようとも，すべての試験粒子が直線に沿って動くような局所慣性系を，そのときそしてそこで，導入できることを見出す．さらに，この局所慣性系はまた局所 Lorentz 系であり，そこでは光の速度は標準的な値をもち，光線は，試験粒子の世界線のように，直線である．しかし，物理学や物理学の解析が求めるものは，試験粒子や光線の運動の記述だけにとどまらない．Maxwell の方程式，流体力学の法則，原子構造の原理，そして物理学の残りのすべてに“強力な重力場”の影響のもとでは，何が生ずるか？

*2 答えは単純である．**局所 Lorentz 系ではどのような，そしてすべての，宇宙内のどこでもそしていつでも，すべての（非重力的な）物理学の法則はよく知られた特殊相対性理論の形をとらなければならない．**同等のことであるが，時空の無限に小さい領域に限定された実験によって，時空の 1 つの領域での局所 Lorentz 系を，同じあるいは任意の他の領域での任意の他の局所 Lorentz 系から区別する方法は存在しない．これが Einstein のもっとも強い形での等価原理—哲学的にもまた実験的にも強要する原理である（重要な実験的テストに対しては，38.6 節をみよ）．

---

*1　本章の目的
*2　Einstein の等価原理

*3 等価原理は偉大な力をもっている．それを用いて物理学の特殊相対性理論的な法則をすべて曲がった時空へ一般化できる．そして曲率は小さい必要はない．それは中性子星の中心での曲率ほど大きくてよいし，ブラックホールの縁での曲率ほど大きくてよいし，実際あるいはほとんどそうであるように，任意に大きくてよい．重力崩壊の終点および"ビッグバン"の初めの瞬間でのみ，すなわち，"時空の特異点"でのみ，等価原理の直接の適用に対して必要とされる条件が壊れるだろう（28.3, 34.6, 43.3, 43.4 節，および 44 章をみよ）．それ以外のすべてのところで等価原理はすべての非重力的な物理学の法則を重力とかみ合わせる道具として作用する．

例："局所的なエネルギー運動量保存の法則"，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}=0$ を重力とかみ合わせる．**解：**
（1）抽象的な幾何学的形式で書かれた，平坦な時空での法則は

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}=0 \tag{16.1a}$$

である．

（2）平坦な時空の包括的な Lorentz 系で書き直すと，それは

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0 \tag{16.1b}$$

である．

（3）等価原理の適用は曲がった時空の局所的な Lorentz 系で同じ方程式

$$T^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{,\hat{\nu}}=0 \qquad (\text{局所 Lorentz 系の原点で}) \tag{16.1c}$$

を与える．接続係数は局所 Lorentz 系の原点でゼロであるから，これは

$$T^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{;\hat{\nu}}=0 \qquad (\text{局所 Lorentz 系の原点で}) \tag{16.1d}$$

と書き直すことができる．

（4）曲がった時空での幾何学的法則（上式はその局所的な Lorentz 成分）は

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}=0 \tag{16.1e}$$

であり，任意の基準系でのその成分公式は

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0 \tag{16.1f}$$

である．

曲がった時空での抽象的な幾何学的法則 (16.1e) を，平坦な時空での対応する法則 (16.1a) と比較する．それらは同じである！　これが偶然でないことは，物理学の任意の他の法則（たとえば，Maxwell の方程式 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}=4\pi\boldsymbol{J}$）に対して上の 4 段階の議論の跡をたどることによって，容易に理解することができる．**物理学の法則は，抽象的な幾何学的形式で書**

---

*3　非重力的な法則を重力とかみ合わせる道具としての等価原理

かれると，曲がった時空と平坦な時空との間でまったく何も異ならない． これは等価原理によって保証され，そして実際，等価原理のたんなる言い換えである．

法則 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}=0$ について，曲がった時空での任意の系で書かれた成分形式 (16.1f) を平坦な時空の包括的な Lorentz 系での成分形式 (16.1b) と比較する．それらはただ 1 つの点で異なる．コンマ（偏微分，平坦な時空の勾配）がセミコロン（共変微分，曲がった時空の勾配）で置き換えられている．式を書き換えるためのこの手続きは普遍的に適用できる．

*4 **物理学の法則は，成分形式で書かれている場合，平坦な時空から曲がった時空への移行のとき，すべてのコンマをセミコロンにたんに変換することで変化する**（物理学的にあるいは幾何学的にまったく変化がない．Lorentz から非 Lorentz への基準系についてのスイッチのみによる変化!）．この陳述は，抽象的な幾何学的な法則の不変のように，等価原理を別の形に言い直したものにすぎない．

平坦な時空から曲がった時空への形式についての変化は，上に要約されたように遂行されるときはとるにたらない過程である．しかしそれが意味するところは重要である．それは重力をすべての物理学の法則とかみ合わせる．重力は，以下の練習問題で明白にみるように，曲がった時空の共変微分を通して本質的な方法で入る．

［練習問題］

16.1　弱い重力場内の流体力学

(a) 18.4 節で，適当なほとんど包括的な Lorentz 座標系で解析された，ほとんど Newton 的な系に対して計量は

$$ds^2=-(1+2\Phi)dt^2+(1-2\Phi)(dx^2+dy^2+dz^2) \tag{16.2a}$$

という形をもつことが示されるであろう，ここに Φ は Newton 的ポテンシャル $(-1\ll\Phi<0)$ である．ほとんど Newton 的な完全流体［ストレス–エネルギーテンソルは

$$T^{\alpha\beta}=(\rho+p)u^\alpha u^\beta+pg^{\alpha\beta}\qquad(p\ll\rho) \tag{16.2b}$$

コラム 5.1 および 5.10 節をみよ］を考える．それは通常の速度

$$v^j\equiv dx^j/dt\ll 1 \tag{16.2c}$$

でこのような時空内を動いているとする．この系に対する式 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ は，よく知られた Newton の質量保存の法則，および重力場内での流体に対する Newton の運動方程式

$$\frac{d\rho}{dt}=-\rho\frac{\partial v^j}{\partial x^j},\qquad \rho\frac{dv^j}{dt}=-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}-\frac{\partial p}{\partial x^j} \tag{16.3a}$$

に帰着することを示せ．ここに d/dt は物質とともに動く時間微分

---

*4　“コンマがセミコロンに変わる” 法則

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{16.3b}$$

である．

(b) これらの式を用いて地球の大気圏内で圧力勾配を，温度と圧力の関数として計算せよ．計算には，非相対論的な関係 $\rho = n_M \mu_M$ を用いよ．ここに n_M は分子の数密度であり，そして μ_M は分子あたりの平均静止質量である．理想気体の状態方程式

$$p = n_M kT \qquad (k = \text{Boltzmann 定数})$$

を用いよ．そして地球の Newton ポテンシャルに対して，球対称な形，$\Phi = -M/r$ を用いよ．もし海の水準での圧力が $1.01 \times 10^6 \text{dyne/cm}^2$ であるならば，エベレスト山の頂上（標高 8,840 m）での圧力は近似的にどれくらいか？（大気圏の温度分布について適度な仮定をせよ）．

16.2 光子の世界線

平坦な時空で自由に動いている光子の 4–運動量に対する保存則は

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{p} = 0 \tag{16.4a}$$

と書かれうることを示せ．等価原理によれば，この式は曲がった時空でも成り立たなければならない．これは，光子が，4–運動量に

$$\boldsymbol{p} = d/d\lambda \tag{16.4b}$$

で結びついているアフィンパラメータ λ をもち，曲がった時空のヌル測地線に沿って動くことを意味することを示せ．練習問題 18.6 でこの結果は，光の太陽による偏りを計算するのに用いられるだろう．

16.3 等価原理での因子の順序づけの問題

5 平坦な時空での物理学から曲がった時空での物理学に到達するために等価原理を適用するに際して，古典力学から量子力学への推移につきまとう "因子の順序づけの問題" に類似した問題に遭遇する．例：電気力学のベクトルポテンシャルに対する式 (3.56) は曲がった時空へいかに翻訳されるべきか？ もし平坦な時空の方程式が

$$-A^{\alpha,\mu}{}_{\mu} + A^{\mu}{}_{,\mu}{}^{\alpha} = 4\pi J^{\alpha}$$

* 量子力学的な因子の順序づけの問題の議論に対しては，たとえば，Merzbacher (1961)，pp.138–139 and 334–335，また Pauli (1934) をみよ．

*5 因子の順序づけの問題と曲率との結びつき

と書かれるならば，その推移（“コンマがセミコロンに移る”）は

$$-A^{\alpha;\mu}{}_{\mu} + A^{\mu}{}_{;\mu}{}^{\alpha} = 4\pi J^{\alpha} \tag{16.5}$$

である．しかし，もし平坦な時空の方程式がその偏微分の 2 つが交換されたものをもって書かれているならば，

$$-A^{\alpha,\mu}{}_{\mu} + A^{\mu,\alpha}{}_{\mu} = 4\pi J^{\alpha}$$

その翻訳は

$$-A^{\alpha;\mu}{}_{\mu} + A^{\mu;\alpha}{}_{\mu} = 4\pi J^{\alpha}$$

である．それは

$$-A^{\alpha;\mu}{}_{\mu} + A^{\mu}{}_{;\mu}{}^{\alpha} + R^{\alpha}{}_{\mu}A^{\mu} = 4\pi J^{\alpha} \tag{16.5$'$}$$

と書くことができる（Ricci テンソルが共変微分を交換する結果として現れる．練習問題 16.3 をみよ）．式 (16.5) あるいは式 (16.5′) のうち，いずれの方程式が正しいか？　ちょうど量子論の類似の因子の順序づけ問題が無意味でないように，この問題は無意味でない．これおよびたいていの因子の順序づけ問題を解くという経験から得たやり方に対しては，コラム 16.1 をみよ．これらの法則によれば，式 (16.5′) は正しくそして式 (16.5) は間違っていることがわかる（コラム 16.1 および 22.4 節をみよ）．

[練習問題]

16.3　共変微分の非可換

$\boldsymbol{B}$ をベクトル場そして $\boldsymbol{S}$ を 2 階のテンソル場とする．

$$B^{\mu}{}_{;\alpha\beta} = B^{\mu}{}_{;\beta\alpha} + R^{\mu}{}_{\nu\beta\alpha}B^{\nu} \tag{16.6a}$$

$$S^{\mu\nu}{}_{;\alpha\beta} = S^{\mu\nu}{}_{;\beta\alpha} + R^{\mu}{}_{\rho\beta\alpha}S^{\rho\nu} + R^{\nu}{}_{\rho\beta\alpha}S^{\mu\rho} \tag{16.6b}$$

を示せ．式 (16.6a) から，

$$B^{\mu;\alpha}{}_{\mu} = B^{\mu}{}_{;\mu}{}^{\alpha} + R^{\alpha}{}_{\mu}B^{\mu} \tag{16.6c}$$

を示せ．［トラック–1 の計算に対するヒント：局所 Lorentz 系で作業する．そこでは $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 0$ しかし $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\delta} \neq 0$. 左辺を Christoffel の記号と偏微分で展開せよ．そして Riemann テンソルに対して式 (8.44) を用いよ．代わりのトラック–2 の計算は，$\boldsymbol{\nabla}_{\beta}\boldsymbol{\nabla}_{\alpha}\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{e}_{\alpha}$ について線形でない．そして $B^{\mu}{}_{;\alpha\beta}$ はその成分でない．むしろ

$$B^{\mu}{}_{;\alpha\beta} \equiv \underbrace{\boldsymbol{\nabla\nabla B}}_{\text{[3 階のテンソル]}}(\boldsymbol{\omega}^{\mu}, \boldsymbol{e}_{\alpha}, \boldsymbol{e}_{\beta}) \tag{16.7}$$

に注意する．計算はそうすると以下のように進む．

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\omega}^\mu, \boldsymbol{\nabla}_\beta \boldsymbol{\nabla}_\alpha \boldsymbol{B}\rangle &= \langle \boldsymbol{\omega}^\mu, \boldsymbol{\nabla}_\beta(\boldsymbol{e}_\alpha\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B})\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{\omega}^\mu, (\boldsymbol{\nabla}_\beta \boldsymbol{e}_\alpha)\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{e}_\alpha\cdot(\boldsymbol{\nabla}_\beta\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B})\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{\omega}^\mu, \Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\nu\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B}(\cdots, \boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta)\rangle \\ &= B^\mu{}_{;\nu}\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} + B^\mu{}_{;\alpha\beta}\end{aligned}$$

したがって式 (16.6a) と一致して

$$\begin{aligned}B^\mu{}_{;\alpha\beta} - B^\mu{}_{;\beta\alpha} &= \langle \boldsymbol{\omega}^\mu, [\boldsymbol{\nabla}_\beta, \boldsymbol{\nabla}_\alpha]\boldsymbol{B}\rangle - B^\mu{}_{;\nu}(\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\nu{}_{\beta\alpha}) \\ &= \langle \boldsymbol{\omega}^\mu, [\boldsymbol{\nabla}_\beta, \boldsymbol{\nabla}_\alpha]\boldsymbol{B}\rangle - \langle \boldsymbol{\omega}^\mu, \boldsymbol{\nabla}_{(\boldsymbol{\nabla}_\beta \boldsymbol{e}_\alpha - \boldsymbol{\nabla}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta)}\boldsymbol{B}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{\omega}^\mu, ([\boldsymbol{\nabla}_\beta, \boldsymbol{\nabla}_\alpha] - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{e}_\beta, \boldsymbol{e}_\alpha]})\boldsymbol{B}\rangle = \langle \boldsymbol{\omega}^\mu, \mathcal{R}(\boldsymbol{e}_\beta, \boldsymbol{e}_\alpha)\boldsymbol{B}\rangle \\ &= R^\mu{}_{\nu\beta\alpha}B^\nu\end{aligned}$$

注意：抽象的な記号でのわずかなあいまいさのために，上の計算での各段階について注意深く考えなければならない．それと対照的に成分記号は，完全に明瞭である．]

16.4　春分（あるいは秋分）の歳差運動

(a) 曲がった時空での地球の固有角運動量ベクトル S^α の移動則は

$$\frac{DS^\alpha}{D\tau} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} I\!\!\!-_{\beta\mu} R^\mu{}_{\nu\gamma\zeta} u_\delta u^\nu u^\zeta \tag{16.8}$$

であることを示せ．ここに $d/d\tau = \boldsymbol{u}$ は地球の世界線に沿う 4–速度である．$I\!\!\!-_{\beta\mu}$ は，地球の局所 Lorentz 系で

$$I\!\!\!-_{\hat{0}\hat{0}} = I\!\!\!-_{\hat{0}\hat{j}} = 0, \qquad I\!\!\!-_{\hat{j}\hat{k}} = \int \rho(x^{\hat{j}} x^{\hat{k}} - \frac{1}{3}\hat{r}^2\delta_{jk})d^3\hat{x} \tag{16.9}$$

によって定義された，地球の“約分された四重極モーメント”（質量分布の 2 次のモーメントのトレースゼロの部分）であり，そして $R^\mu{}_{\nu\gamma\zeta}$ は，月，太陽，そして惑星によって地球の位置につくられる Riemann 曲率である．[**ヒント**：地球による時空曲率を無視して，地球の局所 Lorentz 系でこの結果を導け（この本質的に Newton 的な状況では，地球，太陽，月，そして惑星による曲率成分 $R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}$ は線形的に重ね合わされる．“重力は非線形であるには弱すぎる”）．潮汐重力によって地球の質量中心周りにつくられる回転のモーメントを積分せよ（“測地線のずれ”）．

$$\begin{pmatrix}\text{潮汐重力によってつくられるが，地球の内部ス}\\ \text{トレスによって部分的に相殺される，質量中心}\\ (x^{\hat{j}}=0)\ \text{に対する，}x^{\hat{j}}\text{での加速度}\end{pmatrix} = \left(\frac{d^2x^{\hat{k}}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{測地線のずれ}}$$

$$= -R^{\hat{k}}{}_{\hat{0}\hat{l}\hat{0}}x^{\hat{l}} \quad [\text{式 } (1.8') \text{ をみよ}],$$

$$\begin{pmatrix}\text{質量中心に対するこの加速度}\\ \text{による単位体積あたりの力}\end{pmatrix}^{\hat{k}} = \underbrace{\rho}_{\text{質量密度}}\frac{d^2x^{\hat{k}}}{d\hat{t}^2} = -\rho R^{\hat{k}}{}_{\hat{0}\hat{l}\hat{0}}x^{\hat{l}},$$

$$\begin{pmatrix}\text{質量中心に対する単位体積}\\ \text{あたりの回転のモーメント}\end{pmatrix}_{\hat{i}} = \epsilon_{\hat{0}\hat{i}\hat{j}\hat{k}} x^{\hat{j}} (-\rho R^{\hat{k}}{}_{\hat{0}\hat{l}\hat{0}} x^{\hat{l}}),$$

$$\left(\text{質量中心周りの全回転のモーメント}\right)_{\hat{i}} = \int [\epsilon_{\hat{0}\hat{i}\hat{j}\hat{k}} x^{\hat{j}} (-\rho R^{\hat{k}}{}_{\hat{0}\hat{l}\hat{0}} x^{\hat{l}})] d^3\hat{x}$$

この表現を $I_{\hat{j}\hat{l}}$ を含む公式に代入し，それを $dS_{\hat{i}}/d\tau$ に等しく置く，それからそれを系によらない成分記号で再表現する．結果は式 (16.8) であるはずである．]

(b) 式 (16.8) を地球の局所 Lorentz 系で，Newton 的重力ポテンシャルによって書かれた ***Riemann*** の成分に対する式

$$R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}} = \partial^2 \Phi / \partial x^{\hat{j}} \partial x^{\hat{k}}$$

を用いて書き直せ（Einstein 理論への Newton 的な近似．トラック–2 の読者はこの式に 12 章で遭遇しているし，トラック–1 の読者は 17.4 節でそれに出会うだろう）．

(c) $dS^{\hat{j}}/d\hat{t}$ を，初めから Newton の重力理論を用いて計算せよ．答えは Einstein の理論を用いてパート（b）で得られる答えに，同等であるはずである．

(d) 月および太陽を質点と理想化して，それらが地球の回転軸上に生み出す時空曲率の長期間の効果を計算せよ．パート（b）の結果を，重要な太陽系のパラメータに対する適度に正確な数値とともに用いよ．[**答え：**地球の回転軸はその局所 Lorentz 系の軸に相対的に歳差運動をする（“春分（あるいは秋分）の歳差運動”，“一般的な歳差運動”）．歳差運動の周期は 26,000 年である．計算の詳細は天体力学のどのような教科書にも載っているだろう．]

コラム 16.1　等価原理の適用における因子の順序づけと曲率の結合

問　　題

“コンマのセミコロンへの移行規則” を適用するときに，微分はどのような順序で書かれるべきか？　微分を交換することは平坦な時空では差異を生じない．しかし曲がった時空ではそれは曲率に結びつく項を生み出す．たとえば，任意のベクトル場に対して $2B^{\alpha}{}_{;[\gamma\beta]} \equiv B^{\alpha}{}_{;\gamma\beta} - B^{\alpha}{}_{;\beta\gamma} = R^{\alpha}{}_{\mu\beta\gamma} B^{\mu}$（練習問題 16.3 をみよ）となる．したがって，問題は次のように再陳述することができる．**コンマのセミコロンへの移行規則は，いつ曲率に結びつく項によって拡張されなければならないか？**

解：

一般的に解はない．しかしたいていの場合に，以下のような型の数学的なそして物理学的な推論は，問題を明瞭に解決する．

A. 数学的に，曲率項はほとんどつねに共変微分の非可換から生ずる． したがって，二重の共変微分（たとえば，$-A^{\alpha,\mu}{}_{\mu} + A^{\mu}{}_{,\mu}{}^{\alpha} = 4\pi J^{\alpha}$）を含む任意の方程式で，あるいは二重の共変微分を含むより基本的な法則（たとえば以下の例 B (3) での $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S} = 0$）から導かれる任意の方程式で，曲率項を心配する必要がある．しかしそれ以外のどこでも曲率結合を無視できる（たとえば，Maxwell の 1 次方程式で）．

B. 確かに曲率との結合は，ある物理学的な理由なしに起こりえない． したがって，もしコンマのセミコロンへの移行規則を物理学的に測定可能な量にのみ適用するならば（たとえば，電磁場に適用し，しかしベクトルポテンシャルにはしない），曲率との結合がありそうであるかどうかを“直感的に知る”ことができる．

例：

(1) **局所的なエネルギー運動量の保存．** 式 $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ で，たとえば，この式を $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}T^{\beta\gamma}u^{\delta}$ で置き換えて，曲率と結合することはまったく意味をなさないだろう．局所慣性系では $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}T^{\beta\gamma}u^{\delta}$ のような項はただ 1 つの点で曲率によってつくられる力と解釈されるだろう．しかし有限の領域にわたらないで曲率を感じることは可能であるはずがない（測地線のずれ，など）！ 別な言い方をすれば，重力ポテンシャル（計量）の 2 階微分は点で正味の力をつくることはほとんどできない．それらはただ潮汐力をつくるだけである！

(2) 電磁場のテンソルに対する **Maxwell の方程式．** ここでもまた曲率項を導入することは不自然であるだろう．それらは，曲率は存在するが電荷は存在しない点で電気力線および磁力線が終わるという意味で，電荷の保存の崩壊を引き起こすだろう．電荷の保存を維持するには，Maxwell の方程式 (3.32) および (3.36) を曲がった時空へ翻訳するときに曲率結合を省略する．

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 4\pi J^{\alpha}, \qquad F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0$$

さらに，$F_{\mu\nu}$ を，式 (3.54′) の曲がった時空への移行によって，ベクトルポテンシャルから生ずるとみなし続ける．

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$$

これらの点が認められると，Maxwell の方程式の 2 番目は自動的に満たされること，そしてまた 1 番目は

$$-A^{\alpha;\mu}{}_{\mu} + A^{\mu}{}_{;\mu}{}^{\alpha} + R^{\alpha}{}_{\mu}A^{\mu} = 4\pi J^{\alpha}$$

である限り満たされることを確かめることができる（より完全な議論と導出に対しては 22.4 節をみよ）．

(3) **地球の角運動量ベクトルに対する移動則**．もし地球が平坦な時空内にあったら，任意の他の孤立した物体のように，その角運動量ベクトル $\boldsymbol{S}$ を質量中心の直線的な世界線に沿って平行移動するだろう．$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S} = 0$（“角運動量の保存”）．この平行移動を曲がった時空（地球は実際そこに内在している）に翻訳するとき，曲率結合を無視できるか？　イイエ！　月および太陽による時空の曲率は地球内に潮汐を生み出す重力をつくる．そして地球は赤道のふくらみをもっているから，潮汐力は地球の質量中心周りにゼロでない正味の回転のモーメントを生み出す（Newton 的な言葉で，月にもっとも近いふくらみの部分は月からもっとも離れているふくらみの部分よりも，より大きな力で，したがってより大きな回転のモーメントで引っ張られる）．こうして，曲がった時空内で

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S} = (\text{Riemann テンソル})\times(\text{地球の四重極モーメント})$$

の形をもつ移動則を予想する．この曲率結合の回転のモーメントは，26,000 年ごとに 1 度楕円面内での完全な円を通して地球の回転軸の歳差運動を生み出す（“一般的な歳差運動”，“春分（あるいは秋分）の歳差運動”，紀元前 150 年頃 Hipparchus によって発見された）．曲率結合項の正確な形は練習問題 16.4 で導かれている．

16.4　空間および時間間隔を測定するために用いられる，物差しと時計

今や注意を，重力が存在するときの物理学の法則から，これらの法則に現れる長さおよび時間間隔を測定するために用いるべき物差しと時計の性質に向ける．

固有長 s はある型の物差し（たとえば，プラチナのメートル棒）で測定されるとか，あるいは固有時間 τ はある型の時計（たとえば，水素メーザー時計）で測定されると仮定する必要はない．そして実際してはならない！　むしろ，物理学の法則そのものがどのような
*6 型の物差しと時計が機能するかを問わなければならない．別な言い方をすれば，**“理想的な”物差しあるいは時計**は，$ds = (g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta)^{1/2}$ で与えられるときの固有長あるいは $d\tau = (-g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}$（1.5 節での物理学的な議論によって導かれたような種類の時計）
*7 で与えられるときの固有時間を測定するものであると**定義する**．そうすると，与えられた物差しあるいは時計は，物理学の法則を用いてその振る舞いを解析することによって，与えられた状況のもとで理想的である精度を定めなければならない．

*8 明白な例として，振り子時計を考える．もしそれが地球表面上に静止して置かれるならば，もしそれが十分小さくて一端から他端への赤方偏移効果および振動速度による時間の遅れの効果が無視できるならば，そしてもし要求される精度が十分小さくて地球潮汐によ

*6　“理想的な”物差しと時計が定義される
*7　現実の時計はいかに理想的であるか？
*8　(1) 振り子時計

る局所的な重力加速度での時間変化が無視できるならば，物理学の法則は振り子時計は“理想的”であると報告する（コラム 16.2）．しかし，任意の他の状況では（たとえば，月へのロケット旅行については），振り子時計は理想から離れているはずである．めちゃくちゃに変化する加速度，あるいは加速度がまったく存在しない場合は，振り子時計を価値のないものとするだろう！

*9　いろいろな種類の原子時計および原子核時計はより興味がある．このような時計が自由落下しているならばもっとも容易に解析される．そのときは量子論の標準的な方程式を用いて，その局所 Lorentz 系で調べることができる．そして，もちろん，その構成に用いられた技術の精度内で（$\Delta t/t \sim 10^{-9}$ から 10^{-14} まで）固有時間の測定ができるだろう．しかし，測定者は彼の原子時計が自由落下することをまれにしか認めないだろう（地球表面との衝突は費用がかかる！）．それにもかかわらず，地球表面上で“$1\,g$” $= 980\,\mathrm{cm/sec^2}$ で加速されるときでも，また空中衝突（コラム 16.3）を避けようと努める定期旅客機で“$2\,g$”で加速されるときでも，原子時計は，もし頑丈につくられているならば，自由落下しているときとほとんど同じ精度までその世界線に沿って固有時間 $d\tau = (-g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta)^{1/2}$ を依然として測定するだろう．これを発見するために実験を行うことができる．その代わりに，時計を，Fermi–Walker 移動された基底ベクトルをもつ，それ自身の“固有の基準系”（13.6 節）で，加速された系に適応されたときの量子力学の標準的な局所 Lorentz 法則（局所 Lorentz 法則と“慣性力”，それは一様な勾配をもつポテンシャルによるものとして取り扱われうる）を用いて解析できる．

もちろん，どのような時計も“破壊点”をもち，それを越えると正当に機能することを止めるだろう（コラム 16.3）．しかしその破壊点は完全に時計の構成に依存する．そして“時間の進行についての加速度の普遍的な影響”にまったく依存しない．速度は普遍的な時間の遅れを生み出し，加速度は生み出さない．

*10　人間の体が老化することは，原子や分子での周期性および準位遷位を支配するのと同じ電磁気学の法則および量子力学の法則によって支配されている．したがって，老化することは，原子過程のように，もちろん，タバコを吸うような他のことにも結びついているけれども，計量によって支配される固有時間に結びついている．

*11　原理的には，自由落下する試験粒子と光子の測地線の世界線から理想的な物差しと時計をつくることができる（コラム 16.4 をみよ）．言い換えると，物質や非重力的な場が存在しなくても，時空は自らの中につくられる自分自身の物差しと時計をもつ！

---

*9　(2) 原子時計

*10　(3) 人間の時計

*11　測地線の世界線から構成される理想的な物差しと時計

コラム 16.2　地球表面上で静止している振り子時計は理想的であることの証明

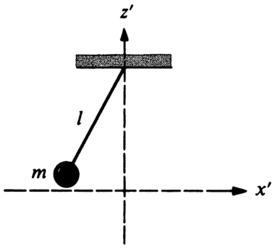
それは地球表面上で静止している時計は間隔 $d\tau = (-g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta)^{1/2}$ を測定するという証明である.

A. 振り子についての制限

振り子は時空曲率と結びつかないほど小さくなければならない．すなわち，地球の重力場は振り子の近傍で一様にみえるほど，振り子は小さくなければならない．そして振り子の球の速度は光の速度に比べてまったく無視できるほどでなければならない.

B. 座標系と計量

(1) 一般座標系：地球の場はほとんど Newton 的であるから，"線形化された理論" の座標を導入できる (18.4 節；地球の点に達するまでは信頼してこの理論をとらなければならない)．この理論では



$$ds^2 = -(1+2\Phi)dt'^2 + (1-2\Phi)(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)$$

ここに Φ は Newton 的ポテンシャルである.

(2) 座標原点を振り子の平衡点に置き，振り子は x', z'–面内で振動するように位置づける.

(3) 座標を規格化してそれらが平衡点で固有長および固有時間を測定するようにする.

$$t = [1+2\Phi(0)]^{1/2}t', \qquad x^j = [1-2\Phi(0)]^{1/2}x^{j\prime}$$

そうすると振り子の近くでは (場についての不均一性は無視される !)

$$\Phi = \Phi(0) + gz, \qquad g = \text{“重力加速度”} \tag{1}$$

$$ds^2 = -(1+2gz)dt^2 + (1-2gz)(dx^2+dy^2+dz^2) \tag{2}$$

C. 振り子運動の解析

(1) 振り子の全質量 m はその球にあるとする (棒の質量は無視できる)．棒は固有長 l をもつとする.

(2) 振り子の球の 4–加速度 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla_u u}$ を d^2x^α/dt^2 で，速度条件 $v \lll 1$ および $dt/d\tau \approx 1$ を用いて，計算する.

$$\begin{aligned} a^x &= d^2x/d\tau^2 + \Gamma^x{}_{00}(dt/d\tau)^2 = d^2x/dt^2 + \Gamma^x{}_{00} = d^2x/dt^2, \\ a^z &= d^2z/d\tau^2 + \Gamma^z{}_{00}(dt/d\tau)^2 = d^2z/dt^2 + \Gamma^z{}_{00} = d^2z/dt^2 + g \end{aligned} \tag{3}$$

(3) この4–加速度は棒内の力によって生み出されなければならない．そして上向きに棒の方向を向かねばならないから（$x \ll l$ したがって $g \gg d^2z/dt^2$ に対して）

$$d^2x/dt^2 = a^x = -(x/l)a^z = -(g/l)x \tag{4}$$

(4) この微分方程式を解いて

$$x = x_0 \cos(t\sqrt{g/l}) \tag{5}$$

を得る．

(5) こうして振り子は t について周期的であり，t は球の平衡位置で固有時間である［式 (2) をみよ］と結論する．このことは**振り子は地球表面で静止しているときに理想的な時計である**ことを意味する．

注意：上の解析は地球の回転を無視している．回転を含む他の解析に対して，振り子の“固有基準系”の原点で同様の計算を遂行できる［13.6 節，線要素 (13.71)］．答えは同じである．しかし今や“g”は“重力加速度”と“地球の回転によって生み出される向心加速度”との重ね合わせである．

コラム 16.3　時計の加速度および潮汐重力に対する反応

振動数がある原子的なあるいは分子的な過程によって固定された，たとえば，アンモニア分子の“かさ振動”［Feynman *et al.* (1964) をみよ］によって固定された原子時計を考える．十分強い加速度あるいは潮汐力を受けるときに，このような時計は標準的な精度をもつ固有時間を測定することを停止するだろう．2 つの型の影響が“理想”からのこのような離脱に通じうるだろう．

A. 加速度あるいは潮汐力の，振動数を固定させる原子的な過程に対する影響．例：もし潮汐力が数オングストロームの距離にわたって重要であるならば（たとえば，重力崩壊を終わらせる時空の“特異点”の近くで），潮汐力はアンモニア分子をひずませることができるし，そのかさ振動の規則性を破壊でき，それによって**どのような**アンモニア原子時計がいかに構成されていようとも，それを機能しないようにする．同様に，もしアンモニア分子がその内部の原子的な加速度（$a \sim 10^{12}$“g” $\sim 10^{15}\mathrm{cm/sec^2}$）に匹敵する大きさの加速度，すなわちそれは“かさ”振動の周期程度の時間での変化を受けるならば，アンモニア原子分子時計は規則正しく振動することを停止しなければならない．そしてその振動に基づくどのような時計も壊れなければならない．時計の理想についてのこのような原理の限界は 1 つの原子的な過程から他の原始的な過程へと変化するだろう．しかし，それらの限界は，1973 年においては，時計の構成につい

ての限界的な要素から遠く離れている．今日はるかに重要なのは次のことである．

B. 加速度あるいは潮汐力の時計の巨視的な構造—現在の技術によって定まる構造—に対する影響． 周期的な信号の出力を生み出す結晶振動子は，原子的な過程をある方法で調節できるように固定されなければならない．固定装置は適度な加速度によって妨げられるだろう．航空機の時計の製造に対するもっとも厳しい仕事は，たとえ航空機が他の航空機あるいはミサイルとの衝突を避けるために危機的に位置を変えるときでも正確な固定装置が保持されるであろうことを保証することである．1972 年にはしっかりとつくられたルビジウム時計は，50“g” までであるいはそれ以上の定常的な加速度のもとで，明白な安定さの低下なしに

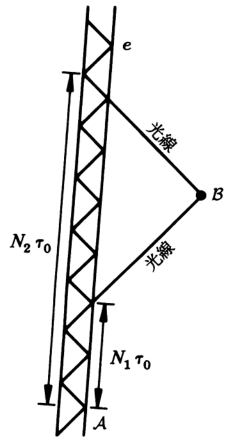
$$\Delta t/t \sim 10^{-12}(1\,\text{秒}/t)^{1/2} \qquad (1\,\text{秒} \lesssim t \lesssim 10^3\text{秒に対して})$$

その固定装置を保持するだろう．しかし，固定装置の閉回路の有限の帯域幅（代表的に $\Delta\nu \sim 20$ から 50Hz）のために，加速度の突然の変化は，時計の安定性を固定装置のない結晶振動子の安定性まで低下させて（加速度 a は約 $(a/1$ “g”$)$ $\times 10^{-9}$ の振動数での変化を生み出す)，一時的に固定装置を破壊するだろう．しかし標準的なルビジウムに対する固定装置は素早く回復し $(\delta t \sim 1/\Delta\nu)$，時計をその正常な高度に安定な振る舞いに戻すだろう *.

潮汐力は太陽系では非常に小さいので時計の製造業者はそれを無視できる．しかし，1973 年の原子時計は，時空の特異点近くの潮汐加速度を受けると，潮汐力が原子過程そのものに影響するほど強くなるはるか前に，その原子過程に対する“固定装置”を破壊するはずである．

* ルビジウム時計の加速度に対する反応についてのこの知識に対して，われわれは General Radio Company, Concord, Massachusetts の H. P. Stratemeyer に感謝する．

コラム 16.4　測地線の世界線からつくられる理想的な物差しと時計*



標準的な間隔. 特別な時間的間隔，2つの特別な近傍の事象 $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ 間の間隔が標準的な間隔として選ばれ，そして単位長と指定される．それは $\mathcal{A}$ を通過する巨大な集合をなす測地線の時計の目盛りを定めるのに用いられる．

各**測地線の時計**は以下のように構成されそして目盛りを定められる．

(1) 時間的な測地線 $\mathcal{AC}$（自由落下する粒子の経路）は $\mathcal{A}$ を通過する．

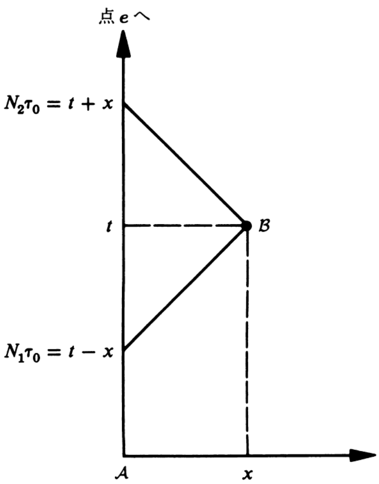
(2) いたるところで $\mathcal{AC}$ に平行な（そしてこうして測地線でない）近傍の世界線は，測地線のみに依存する Schild のはしごの方法（コラム 10.2）によって構成される．

(3) 光線（ヌル測地線）はこれらの平行な世界線の間を前後にはね返る．各往復旅行は 1 つの "チック"（tick, 時計のカチカチいう音）を構成する．

(4) チック間の固有時間の経過 τ_0 は間隔 $\mathcal{AB}$ に

$$-1 \equiv (\mathcal{AB})^2 = -(N_1\tau_0)(N_2\tau_0)$$

で関係している．ここに N_1 および N_2 は図に示されている事象間のチックの数である．[**証明**：右の図をみよ.]



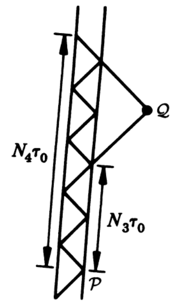
測地線の時計の局所 Lorentz 静止系で

$$(N_1\tau_0)(N_2\tau_0) = (t - x)(t + x) = t^2 - x^2 = -(\mathcal{AB})^2$$

時空はこのような測地線の時計で満たされている．$\mathcal{A}$ を通過するものは標準間隔 $\mathcal{AB}$ に反して上のように目盛りを定められる．そして次にそれらが遭遇するすべての他の時計の目盛りを定める．

測地線の時計の世界線に沿う任意の間隔 $\mathcal{PQ}$ は時計の目盛りを定めるのに用いられたのと同じ方法で測定されうる．間隔 $\mathcal{PQ}$ は時間的，空間的，あるいはヌルでありうる．すべての 3 つの場合でのその 2 乗された長さは

$$(\mathcal{PQ})^2 = -(N_3\tau_0)(N_4\tau_0)$$



であるだろう．測定の精度を $1/N$（ここに N はある大きい数である）までによく達成するには 2 つの用心をする．

(1) 間隔 $\mathcal{AB}$ および $\mathcal{PQ}$ は時空の曲率のスケールに比べて十分小さい．あるいは明確に，

$$R^{(AB)}(\mathcal{AB})^2 \ll 1/N$$

および

$$R^{(PQ)}(\mathcal{PQ})^2 \ll 1/N$$

を要求する．ここに $R^{(AB)}$ および $R^{(PQ)}$ は問題の 2 つの領域での曲率テンソルのもっとも大きい重要な成分である．

(2) 用いられる測地線の時計の時間スケール τ_0 は，$\mathcal{AB}$ および $\mathcal{PQ}$ に比べてそれぞれ小さいことが要求される．こうして，

$$\tau_0 \ll \mathcal{AB}/N,$$
$$\tau_0 \ll \mathcal{PQ}/N$$

時空は Riemann 幾何学によって記述されるという Einstein の原理は，“1,000” 個のテストによって破壊にさらされている．こうして，基準の間隔 $\mathcal{AB}$ から測定のもとにある間隔 $\mathcal{PQ}$ まで “20” 個の相互比較の経路があり，それらのすべては比 $\mathcal{PQ}/\mathcal{AB}$ に対して同じ値を与えなければならない．さらに，同じ種類のテストが適用されうる “50” 個の間隔 $\mathcal{PQ}$ を容易に選び出すことができる．このようなテストは将来に対するすべての事項でない．

ある 5×10^9 年前，電子が異なる経路で共通の位置，地球の中心核内の与えられた鉄の原子に達した．この鉄の原子は崩壊しない．Pauli の排他律は電子がすべて K 軌道に落ちることを阻止する．もし電子が同一でなかったらあるいはほとんど同一でなかったら Pauli の原理は適用しないだろう．この事情から重要な結論を引き出すことが可能と思われる (Marzke and Wheeler)．各電子には標準的な長さ，その Compton 波長 $\hbar/mc$ が関連している．もしこれらの長さが出発の初めから異なっていたら，あるいは異なる経路に沿って異なる量だけ変化したら，そしてもし生ずる性質についての相違が

$$\sim (5\times10^9\text{年})\times(3\times10^7\text{秒/年})\times(5\times10^{18}\text{回転/秒}) \sim 10^{36}$$

分の 1 ほど大きかったら，今までにこの相違ははっきりみえたであろうし，変化した電子は K 軌道に落下しただろう．そして地球は今ある姿とは異なって，崩壊しただろう．

Marzke–Wheeler の構成は，時空の任意の場所で，任意に小さい間隔 $\mathcal{PQ}$ を 1.5 節の “幾何力学的な標準のセンチメートル” であると明確にとられてよい間隔，基準の間隔 $\mathcal{AB}$，によって表している．この構成はこうして Riemann 幾何学の観念に鮮明な意味を与える．

M–W 構成は原子的な組成の物差しと時計にどのような訴えもしない．この事情は以下の理由のために重要である．通常のプラチナのメートル棒の長さは Bohr の原子半径のある倍数，$N_1(\hbar^2/me^2)$ である．同様に，Kr^{86} 線の波長は，原子的な定数にまったく異なる方法で依存する 2 番目の基本的な長さのある倍数，$N_2(\hbar c/e^2)(\hbar^2/me^2)$ である．こうして，もし次元をもたない比，$\hbar c/e^2 = 137.038$ に時間とともに何らかの変化があれば，これらの原子的な長さの基準の 1 つ，あるいは片方，あるいは両方は幾何力学的な基準のセンチメートルと調和しなくなるに違いない．この場合には一般相対論は“幾何力学的な基準のセンチメートルに固執せよ”と述べる．

Hermann Weyl は最初は光線によってのみ長さを比較できるだろうと考えた．しかし H. A. Lorentz は測定過程で試験粒子でないあるいは光線でもないものの測地線で遂行できることを指摘したが，Weyl も Lorentz もその構成を与えなかった [Marzke and Wheeler (1964) における文献]．Ehlers, Pirani, and Schild (1972) は測定過程でアフィン接続，計量の共形部分，および完全な計量によってそれぞれなされる役割のより深い解析を与えた．

* Marzke and Wheeler (1964) に基づいている

16.5 重力場の測定

“私は電磁場を試験電荷を用いて測定する方法を知っている．重力場を測定するための類似の手続きは何か？” この質問は，多くの答えをもつと同時に答えをもたない．

*12 それは答えをもたない．なぜなら“重力場”という術語の明確な定義はどこにも与えられていないし，そしてまた与えられないだろう．多くの異なる数学的な実体が重力と結びついている．計量，Riemann 曲率テンソル，Ricci 曲率テンソル，曲率スカラー，共変微分，接続係数など．これらのおのおのは重力理論で重要な役割を演ずるが，一方何ものも“重力場”という名前に値するほど，他のものより中心的ではない．こうして本書を通して“重力場”という術語および“重力”は，漠然とした，集合的な種類の方法でこれらの実体のすべてに関係するものとして使われる．それらに対して用いられる別な，同等の術語は“時空の幾何学”である．

“重力場を測定する”ことは，そうすると，“時空の幾何学のいろいろな性質を実験的に探求する”ことを意味する．関心をもつ時空の幾何学的な性質に依存する，異なる種類の測定をする．しかし，すべてのこのような測定は時空の幾何学の（すなわち，重力の），粒子，物質，あるいは非重力的な場に対する効果の吟味を含まなければならない．

たとえば，与えられた事象近くの計量を“測定”するには，通常は物差しと時計の格子（曲率効果が無視できるほど十分小さい局所的な直交系）を陳列し，それを用いて近傍の事

*12 重力の多くの面，そしていかにそれらを測定するか

象間の間隔を定める．1 つの事象近くの Riemann 曲率テンソルを測定するには，曲率が種々の近傍の試験粒子の世界線の間に生み出す測地線のずれ（相対加速度）を調べる．代わりに，もし曲率が静的であるあるいはゆるやかに変化しているならば，"重力グラジオメーター（gradiometer）"（コラム 16.5）で測定をする．あるいはもし曲率が急速に揺らいでいるならば重力波アンテナ（37 章）で測定する．時空の大域的曲率を調べるには，惑星および衛星の軌道，あるいは太陽の重力場による光の屈曲のような，重力の大域的効果を吟味する．

しかし重力のどのような様相を測定しようとも，またどのようにそれを測定しようとも，時空の幾何学を調べているのである．

[練習問題]

16.5　重力グラジオメーター

コラム 16.5 の重力グラジオメーターは曲がった時空内を加速された世界線に沿って動く．グラジオメーターの 1 つの腕の他の腕に相対的な振動の振幅と位相を計算せよ．[**ヒント**：グラジオメーターの "固有基準系"（13.6 節）で Fermi–Walker 移動された基底ベクトルを用いて計算を実行せよ．2 つの腕の相対的な角加速度に対する方程式として

$$2ml^2(\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}/\tau_0 + {\omega_0}^2\alpha) = \begin{pmatrix}\text{Riemann 曲率によって生み} \\ \text{出される駆動モーメント}\end{pmatrix}$$

を用いよ．ここに

$$\begin{aligned}
&2ml^2 = (\text{1 つの腕の慣性モーメント}), \\
&\alpha = (\text{1 つの腕の平衡からの角度のずれ}), \\
&\frac{\pi}{2} + 2\alpha = (\text{2 つの腕の間の角度}), \\
&2ml^2{\omega_0}^2 = (\text{ねじれバネ定数}), \\
&\omega_0 = (\text{自由振動の角振動数}), \\
&\tau_0 = (\text{内部摩擦力によって自由振動が減衰する崩壊時間})
\end{aligned}$$

もし $\boldsymbol{\xi}$ をグラジオメーターの質量中心から質量 1 へのベクトルとすれば，

$$\begin{pmatrix}\text{曲率によって生み出される，} \\ \text{グラジオメーターの中心に相} \\ \text{対的な質量 1 の加速度}\end{pmatrix}_{\hat{k}} = \left(\frac{D^2\xi_{\hat{k}}}{d\tau^2}\right)_{\text{測地線のずれ}} = -R_{\hat{k}\hat{0}\hat{l}\hat{0}}\xi_{\hat{l}},$$

$$\begin{pmatrix}\text{グラジオメーターの中心に相対的な質量} \\ \text{1 に対して作用する回転のモーメント}\end{pmatrix}_{\hat{i}} = \epsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}\xi_{\hat{j}}(-mR_{\hat{k}\hat{0}\hat{l}\hat{0}}\xi_{\hat{l}})$$

質量 4 に対する回転のモーメントはこれ（$\boldsymbol{\xi}$を $-\boldsymbol{\xi}$ で置き換えよ）に同等である，したがって腕 1–4 に対する全回転のモーメントはこれの 2 倍である．***Riemann***の成分 $R_{\hat{k}\hat{0}\hat{l}\hat{0}}$ は 3×3

対称行列の成分とみなされうる．基準系の空間軸の適当な方向づけ（$R_{\hat{k}\hat{0}\hat{l}\hat{0}}$ の“主軸”に沿う方向づけ）によって $R_{\hat{k}\hat{0}\hat{l}\hat{0}}$ をある時間の初期値で対角型にすることができる

$$R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}}\neq 0, \qquad R_{\hat{y}\hat{0}\hat{y}\hat{0}}\neq 0, \qquad R_{\hat{z}\hat{0}\hat{z}\hat{0}}\neq 0, \qquad \text{すべての他の成分はゼロである}$$

Riemann はグラジオメーターの世界線に沿って十分ゆるやかに変化するので，実験中 $R_{\hat{j}\hat{0}\hat{k}\hat{0}}$ は対角型で一定にとどまると仮定せよ．簡単のために，グラジオメーターを $\hat{x}$，$\hat{y}$ 面内に置くと，それは $\hat{z}$ 軸周りに角速度 $\omega \approx \frac{1}{2}\omega_0$ で回転する．

$$(\hat{x}\text{ 軸に対する腕 1–4 の角度}) = \omega t$$

生ずる振動の方程式は

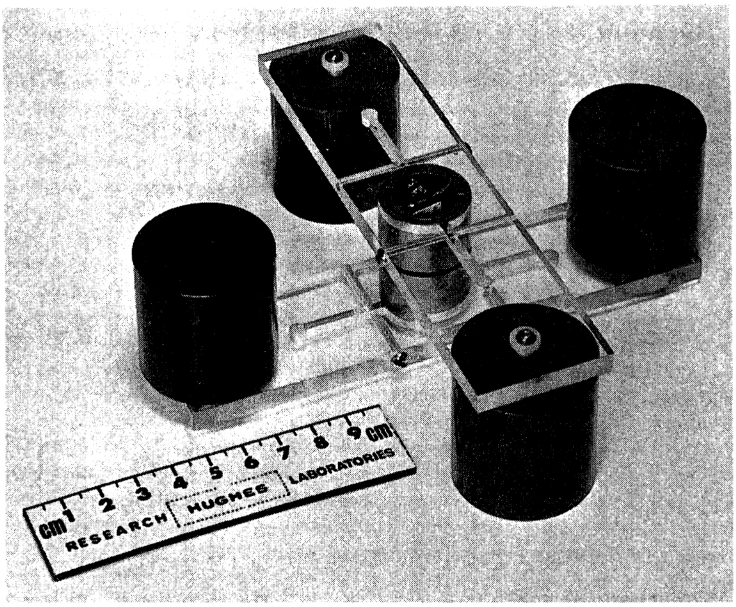
$$\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}/\tau_0 + {\omega_0}^2\alpha = \frac{1}{2}(R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}} - R_{\hat{y}\hat{0}\hat{y}\hat{0}})\sin 2\omega t$$

であり，定常状態の振動は

$$\alpha = Im\left\{\frac{\frac{1}{2}(R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}} - R_{\hat{y}\hat{0}\hat{y}\hat{0}})}{2\omega_0(\omega_0 - 2\omega + i/2\tau_0)}e^{i2\omega t}\right\}$$

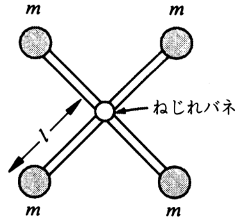
であることを示せ．こうして，固定された ω（たとえば，$2\omega = \omega_0$）に対して振動の振幅と位相を測定することによって，$R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}} - R_{\hat{y}\hat{0}\hat{y}\hat{0}}$ の大きさと符号を知ることができる．他の差，$R_{\hat{y}\hat{0}\hat{y}\hat{0}} - R_{\hat{z}\hat{0}\hat{z}\hat{0}}$ および $R_{\hat{z}\hat{0}\hat{z}\hat{0}} - R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}}$ はグラジオメーターの回転軸をそれぞれ $\hat{x}$ および $\hat{y}$ 軸に沿って置くことにより測定することができる．]

コラム 16.5　時空の Riemann 曲率を測定するための重力グラジオメーター

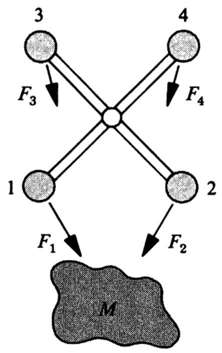


この重力グラジオメーターは Robert M. Forward および Hughes Research Laboratories, Malibu, California での彼の協力者によって考案され制作された．それは近傍の質量によって生み出される時空の Riemann 曲率を測定する．このようなグラジオメーターのより高度なものを，地表上での飛行機内で飛ばして，変化する地質学的な構造による地表下の質量変化を測定できるはずである．地球軌道を回る人工衛星内で，このようなグラジオメーターは地球の重力的な多重極モーメントを測定できるだろう．グラジオメーターの技術的な詳細は Forward (1972)，および Bell, Forward, and Williams (1970) の論文に詳しく説明されている．その操作の原理を以下に要約する．

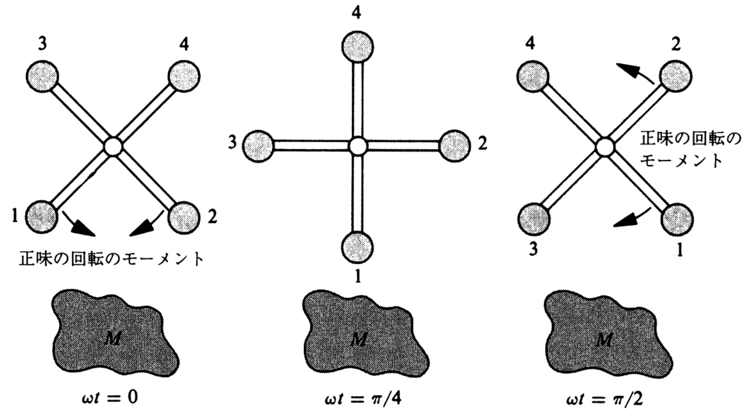
グラジオメーターは両端に質量 m をもち，中心でねじれバネによって結ばれた 2 つの直交する腕からなる．腕は直交する整列からねじれるとき，振動する．圧電気的なひずみ変換器は振動の振幅を測定するのに用いられる．



外部質量，M の近くに置かれると，グラジオメーターは回転のモーメントを体験する．なぜなら M の重力場の勾配のために（すなわち，M によって生み出される時空の曲率のために），Newton 的力 F_1 および F_2 は F_3 および F_4 より大きい．そのために正味の回転のモーメントは質量 1 と 2 を互いの方



向に引き合わせ，そして 3 と 4 を互いの方向に引き合わせる．［**注意**：力 F_1, F_2, F_3, F_4 はグラジオメーターが自由落下している（測地線の運動，$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} = 0$）か，あるいは加速された世界線上を動いているかに依存する．しかし正味の回転のモーメントは加速度によって影響を受けない．加速度はすべての4つの質量に等しいNewton的力を生み出し，正味の回転のモーメントはゼロである．］操作中グラジオメーターは角速度 ω でその中心周りを回転する．回転しているとき，その腕に対する回転のモーメントは振動する．



$\omega t = 0$ で正味の回転のモーメントは 1 と 2 を互いに押し合う，
$\omega t = \pi/4$ で正味の回転のモーメントはゼロである，
$\omega t = \pi/2$ で正味の回転のモーメントは 1 と 2 を互いに引き離す

振動する回転のモーメントの角振動数は 2ω である．もし 2ω が $\omega_0 \equiv$（腕の自由振動の振動数）に等しく調整されるならば，振動する回転のモーメントは腕を共鳴振動に駆り立てる．生ずる振動の振幅は，グラジオメーターの 1970 年の原型では，

$$\text{大きさ} \gtrsim 0.0002 \left[\frac{2(\text{地球の質量})}{(\text{地球の半径})^3}\right] \sim 1\times 10^{-30}\text{cm}^{-2} \sim 0.01\text{g/cm}^3$$

$\sim$ ［2 km の高さの山が，2 km の高さの立方体として理想化されたとき，この山によって 15 km の距離のところに生み出される Riemann 曲率（この理想化では山の隆起領域で地球表層部の密度の均衡および任意の低下は無視される）．］

の重力の勾配（Riemann 曲率）に対して容易に測定できた．グラジオメーターの数学的な解析に対しては，練習問題 16.5 をみよ．

17章
質量–エネルギーはいかに曲率を生成するか

物理学の世界は4次元連続体として表される．もしこの中にRiemann計量を採用して，このような計量が満たしうるもっとも単純な法則を求めるならば，私は空の空間の相対論的な重力理論に達する．もしこの空間内にベクトル場，あるいはそれから導かれる反対称テンソル場を採用して，このような場が満たしうるもっとも単純な法則を求めるならば，私は自由空間に対するMaxwellの方程式に達する．…任意の与えられた時点で，すべての想像できる構成から，ただ1つのものがすべての残りのものよりも絶対的にすぐれていることがつねに証明された…

ALBERT EINSTEIN (1934, p.18)

17.1 場の方程式の定式化における中心的な概念としての源の自動的な保存

*1 さて物質の幾何学に対する反応（測地線上の中性試験粒子の運動，物質および場の力学に対する“コンマのセミコロンへの移行法則”）から向きを変えて，幾何学の物質に対する反応を解析する．

質量は重力の源である．4–速度 $\boldsymbol{u}$ をもつ任意の観測者に測定される質量–エネルギーの密度は

$$\rho = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u} = u^\alpha T_{\alpha\beta} u^\beta \tag{17.1}$$

である．したがってストレス–エネルギーテンソル $\boldsymbol{T}$ は，系によらない“幾何学的な対象”であり，重力の源として作用しなければならない．

この源，この幾何学的な対象は，任意の対称テンソルでない．それはゼロ発散をもたなければならない．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 0 \tag{17.2}$$

なぜなら運動量–エネルギーの保存則はただそのようにだけ満たされる．

*2 この源 $\boldsymbol{T}$ を，重力の生成に対する式の右辺に置く．左辺には重力を特徴づける幾何学的な対象が位置するだろう．その対象は，$\boldsymbol{T}$ のように，対称なゼロ発散のテンソルでなければ

*1 本節は“Einstein の場の方程式”を導く

*2 物質はいかに重力を生成するかを記述する式は形 $\boldsymbol{G} = \kappa\boldsymbol{T}$ をもたねばならない．ここに $\boldsymbol{T}$ はストレス–エネルギーテンソルである

ばならない．そしてもしそれが重力を特徴づけるべきであるならば，それは時空の幾何学からつくられ，そしてその幾何学そのものでなければならない．この対象に名前“Einstein テンソル”を与えて $\boldsymbol{G}$ で表す．したがって重力の生成に対する方程式は

$$\boldsymbol{G} = \kappa \boldsymbol{T} \tag{17.3}$$

↑［比例因子，後に求められる］

となる（$\boldsymbol{G}$ は 8, 13, 14, および 15 章で遭遇したものと同じ Einstein テンソルと仮定しないこと，それは以下に証明されるだろう!）．

*3 発散 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{G}$ がゼロになることは $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 0$ の結果とみなされるべきでない．むしろ，すべての物質と場が保存則 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 0$ に従うことは，(1) それらが時空の幾何学に結ばれている．そしてそれゆえ物理学的であろうとなかろうと (2) 任意の滑らかな Riemann 的時空に対して成り立つ**自動的な**保存則，あるいは**恒等式**，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{G} \equiv 0$ によって要求され，そして強要されるものとみなされるべきである（より完全な議論については 15 章をそしてより完全な正当化については以下の 17.2 節をみよ）．したがって，以下の意味で“時空の曲率の，自動的に保存される度量である”対称テンソル $\boldsymbol{G}$ を求めよ．

(1) 時空が平坦であるとき $\boldsymbol{G}$ はゼロである．

(2) $\boldsymbol{G}$ は Riemann 曲率テンソルと計量とから構成され，以外の何ものからも構成されない．

(3) $\boldsymbol{G}$ は $\boldsymbol{Riemann}$ と $\boldsymbol{g}$ からつくられうる他のテンソルと次の点で異なる．(i) それは曲率の任意の自然な度量にふさわしいものとして $\boldsymbol{Riemann}$ について線形であるという要求，(ii) $\boldsymbol{T}$ のように対称であり，2 階であるという要求，(iii) それは自動的なゼロ発散，

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{G} \equiv 0 \tag{17.4}$$

をもつという要求である．

*4 掛け算の定数を除いて，曲率について線形で，自動的に保存され，2 階のテンソルであり，時空が平坦なときにゼロであるというこれらの要求を満たすただ 1 つのテンソルが存在する（練習問題 17.1）．それは Einstein 曲率テンソル $\boldsymbol{G}$ であり，Ricci 曲率テンソルを用いて 8 章で表されている．

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu},$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{17.5}$$

この量は，“曲率の回転のモーメント”あるいは，より簡単に，Riemann 曲率テンソルの二重双対

---

*3 テンソル $\boldsymbol{G}$ がもたなければならない性質

*4 $\boldsymbol{G}$ は 8 章の Einstein 曲率テンソルでなければならないという証明

$$\boldsymbol{G} =^{*} \boldsymbol{Riemann}^{*} \tag{17.6a}$$

をとり，それからこの二重双対を縮約すること

$$G_{\mu\nu} = \boldsymbol{G}^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \tag{17.6b}$$

によって構成される，“回転のモーメント”として，15 章で鮮明な意味を与えられた．15 章で $\nabla\cdot\boldsymbol{G}$ がゼロであることが，“境界の境界はゼロである”というトポロジーの基本的な原理の結果として出ることが示された．

*5　“Einstein の場の方程式” $\boldsymbol{G} = \kappa\boldsymbol{T}$ における比例定数 κ を求めるために，よくテストされた Newton の重力理論と比較できる．比較を容易にするために，一様な密度 ρ の理想化された地球内に挿入された管（図 1.12）を落下する粒子の相対加速度（測地線のずれ）を吟味する．Newton によれば，相対加速度は密度によって支配される．Einstein によれば，それは時空の Riemann 曲率によって支配される．Newton の予言と Einstein の予言とを Newton 的な座標（そこでは $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$）を用いて直接比較すると，関係式

$$R_{00} \equiv R^{\alpha}{}_{0\alpha0} = 4\pi\rho \tag{17.7}$$

が示される（導出の詳細に対しては 1.7 節をみよ．この式を用いた Newton の重力の広大な議論に対しては 12 章をみよ）．地球内部に適用されるときは Einstein の場の方程式 $\boldsymbol{G} = \kappa\boldsymbol{T}$ はこうして $R_{00} = 4\pi\rho$ に帰着せねばならない．成分形式では，Einstein の場の方程式は

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}$$

となる．そのトレースは

$$-R = R - 2R = \kappa T$$

となる．したがって，それは

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2}g_{00}R + \kappa T_{00} = \frac{1}{2}\kappa(2T_{00} - \underbrace{g_{00}}_{-1}T) \\ &= \frac{1}{2}\kappa[2T_{00} + (-T_{00} + T^{j}{}_{j})] \\ &= \frac{1}{2}\kappa(T_{00} + T^{j}{}_{j}) \end{aligned}$$

を予言し，地球に対しては，任意のほとんど Newton 的な系に対するように，ストレス T_{jk} は質量–エネルギーの密度 $T_{00} = \rho$ に比べて非常に小さいこと

$$\frac{|T_{jk}|}{T_{00}} \sim \frac{\text{圧力}}{\text{密度}} \sim \frac{dp}{d\rho} \sim (\text{音速})^2 \ll 1$$

を思い出すと，

---

*5　Newton の重力理論との比較によって κ($\boldsymbol{G} = \kappa\boldsymbol{T}$における) を求める

$$R_{00} = \frac{1}{2}\kappa\rho \tag{17.8}$$

に帰着する．式 $R_{00} = 4\pi\rho$（Newton 理論と Einstein 理論における相対加速度を比較して導かれる）および式 $R_{00} = \frac{1}{2}\kappa\rho$（Einstein の場の方程式から直接導かれる）は，比例定数 κ が 8π である場合に限り一致できる．

*6 こうして，Einstein の場の方程式は，質量–エネルギーによる曲率の生成を記述して，

$$\boldsymbol{G} = 8\pi \boldsymbol{T} \tag{17.9}$$

とならなければならない．左辺（"曲率"）は単位 cm^{-2} をもつ．なぜなら曲率テンソルは線形機械であって，それに変位（単位：cm）を挿入しそして相対加速度（単位：$\mathrm{cm/sec^2} \sim \mathrm{cm/cm^2} \sim \mathrm{cm}^{-1}$）を得る．右辺はまた次元 cm^{-2} をもつ．なぜならそれは線形機械であって，それに 4–速度（次元なし）を挿入し，質量密度［単位：$\mathrm{g/cm^3} \sim \mathrm{cm/cm^3} \sim \mathrm{cm}^{-2}$，式 (1.12) およびコラム 1.8 から $1\mathrm{g} = (1\mathrm{g})\times(G/c^2) = (1\mathrm{g})\times(0.742\times10^{-28}\mathrm{cm/g}) = 0.742\times10^{-28}\mathrm{cm}$ を思い出せ］を得る．

これは，手に入った Einstein の場の方程式のもっとも単純な導出を結論し，そして Newton 的な条件のもとでの Newton の重力理論との対応を確立する．その対応は式 (17.9) の右辺上の因子 $\kappa = 8\pi$ を定めるために実行されなければならなかった．この因子を除けば，導出での中心点は恒等的なゼロ発散をもつ曲率 $\boldsymbol{G}$ の一義的なテンソル的な度量に対する要求と，そしてその存在であった．

［練習問題］

17.1 Einstein テンソルの一意性

(a) ***Riemann*** および $\boldsymbol{g}$ から構成され，そして ***Riemann*** について 1 次のもっとも一般的な 2 階の，対称テンソルは，

$$aR_{\alpha\beta} + bRg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = aR^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} + bR^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} \tag{17.10}$$

であることを示せ．ここに a, b, および Λ は定数である．

(b) このテンソルは $b = -\frac{1}{2}a$ である場合に限り，自動的に発散がゼロとなることを示せ．

(c) さらに，このテンソルは $\Lambda = 0$ である場合に限り，すなわち，それが Einstein テンソル $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$ の倍数である限り，平坦な時空でゼロであることを示せ（$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{G} \equiv 0$ を証明しようと悩むことはない，それを 13 章からの帰結として仮定せよ）．

17.2 計量の 1 階微分から構成できるテンソルは存在しない

10 個の計量係数 $g_{\alpha\beta}$ およびそれらの 40 個の 1 階微分 $g_{\alpha\beta,\mu}$ から構成できる成分をもつテンソル—計量テンソル $\boldsymbol{g}$，およびそれと自分自身との積，たとえば，$\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{g}$ を除いて—は存在しないことを示せ．［ヒント：ある他のこのようなテンソルが存在すると仮定して，その仮定された局所慣性系での成分を吟味せよ．］

*6 結果："Einstein の場の方程式" $\boldsymbol{G} = 8\pi\boldsymbol{T}$

17.3　計量の 2 階微分から構成でき，そして線形である唯一のテンソルとしての *Riemann*

(1) ***Riemann***，(2) $\boldsymbol{g}$，そして (3) ***Riemann*** および $\boldsymbol{g}$ からつくられるが ***Riemann*** について線形であるテンソル（たとえば，***Ricci***）は，(a) 10 個の $g_{\alpha\beta}$，40 個の $g_{\alpha\beta,\mu}$，そして 100 個の $g_{\alpha\beta,\mu\nu}$ から構成でき，そして (b) $g_{\alpha\beta,\mu\nu}$ について線形である，唯一のテンソルであることを示せ．[ヒント：ある他のこのようなテンソルが存在すると仮定し，そして直交する，Riemann 規準座標系で，その仮定された成分を吟味せよ．式 (11.30) から (11.32) までを用いよ.]

17.4　Einstein テンソルの一意性

(a) Einstein テンソル，$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$ は，(1) $g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}, g_{\alpha\beta,\mu\nu}$ のみから構成できる成分をもつ，(2) $g_{\alpha\beta,\mu\nu}$ について線形の成分をもつ，(3) 自動的なゼロ発散，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{G} = 0$ をもつ，そして (4) 平坦な時空でゼロである，唯一の 2 階の対称テンソルであることを示せ．これは場の方程式 $\boldsymbol{G} = 8\pi\boldsymbol{T}$ の左辺として Einstein テンソルを選ぶための付加的な動機を与える．

(b) 条件 (4) が落とされるとき，もっとも一般的なテンソルは $\boldsymbol{G} + \Lambda\boldsymbol{g}$ であることを示せ．ここに Λ は定数である（この意味に対しては 17.3 節をみよ）.

17.2　源の自動的な保存：力学的な必然性

答え $\boldsymbol{G} = 8\pi\boldsymbol{T}$ は今や手元にある．しかし質問は何か？ Einstein–Cartan の“回転のモーメント”$\boldsymbol{G}$ をストレス–エネルギーテンソル $\boldsymbol{T}$ と結びつける式は導かれた．しかしこの式をまず第 1 に求める目的は何か？ もし幾何学は物質がいかに動くかを述べ，そして物質は幾何学がいかに曲がるかを述べるならば，Gordius の結び目を手の中にもっているのではないか？ そしていかにそれをほどくことができるか？

*7　話は幾何学の力学に対して，力学の他の分野に対するよりも少しも性格的に異ならない．未来を予言するには，“初期”の“同時”超曲面上ですべての粒子の位置と速度，および 2 次の波動方程式に従うすべての場の振幅と時間変化率をまず指定しなければならない．それから粒子と場をそれらの力学的方程式によって時間を進めることができる．同様に，もし Einstein の場の方程式が完全な系，粒子，場，幾何学の未来への時間発展を完全にそして決定論的に予言することができるならば，“初期”の超曲面上で幾何学およびその 1 次時間変化率について情報を与えなければならない（詳細に対しては 21 章をみよ).

もし予言が幾何学についてなされるべきであるとすれば，いかほどの情報がこの目的のために与えられなければならないか？ 時空の幾何学は計量によって記述される．

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(\mathcal{P})dx^\alpha\, dx^\beta$$

---

*7　Einstein の場の方程式は時空の幾何学の展開を支配する

すなわち，10 個の時空内の位置 $\mathcal{P}$ の関数 $g_{\alpha\beta}$ によって記述される．10 個の関数が予言されなければならない．そしてもしそうならば，仕事に対して 10 個の方程式を必要とするようにみえる．そうでない．座標変換

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(x^{\bar{\mu}})$$

によって新しい座標 $x^{\bar{\mu}}$ の組を導入し，そしてすべての同じ隆起，谷，そして波をもち，完全に新しい計量係数 $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\mathcal{P})$ の組で記述される，同じ時空の幾何学を見出す．

*8 もし，"初期値超曲面" 上の適当なデータから，未来に向かって，すべての 10 個の関数 $g_{\alpha\beta}(\mathcal{P})$ に対する値を計算する方法が与えられるならば，その方法は Einstein の "幾何力学の法則" $\boldsymbol{G} = 8\pi \boldsymbol{T}$ の本分だけでなく，その力を越えるだろう．すべての 10 個の関数を予言することは座標の選択を前提とするだろう．そして座標系の中で選択をすることは，正確に，幾何力学の法則がなしえないものであり，そしてなす力をもってはならないものである．その選択は必然的に幾何学を研究する者に内在し，幾何学をつくる自然に内在しない．幾何学は，自動車の泥よけのように，本質的にそして単独で，座標に無関係である．座標は人間の作品である．

したがって場の方程式の 10 個の成分 $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ は，計量のすべての 10 個の成分 $g_{\alpha\beta}$ を，完全にそして一義的に定めてはならない．逆に，$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ は，10 個の $g_{\mu\nu}(\mathcal{P})$ に，ただ 6 個の独立な拘束を課さなければならない，4 個の任意の関数は，4 個の座標の関数 $x^{\alpha}(\mathcal{P})$ の人間による限定で調整されるのに任せられる．

*9 これはいかにしてそうなりうるのか？　いかにして 10 個の方程式 $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ が，実際にはただ 6 個でありうるか？　**答え**："源の自動的な保存のおかげである．" より明確に，恒等式 ${G^{\alpha\beta}}_{;\beta} \equiv 0$ は，10 個の方程式 $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ が 4 個の "保存則" ${T^{\alpha\beta}}_{;\beta} = 0$ を含むことを保証する．これらの 4 個の保存則は，他の方程式とともに，源の展開を支配する．それらはいかなる方法でも幾何学の展開を拘束しない．幾何学は，$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ における 6 個の残りの，独立な方程式によってのみ拘束される．

このように眺めるとき，"源の自動的な保存" はたんに哲学的に魅力的な原理でない．それは，実際，絶対的な "源の自動的な保存" がなければ，10 個の $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ は 10 個の $g_{\alpha\beta}$ に 10 個の拘束を課し，こうして幾何学とともに座標系を固定するだろう．"自動的な保存" で，10 個の $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ は源に 4 個の拘束（エネルギーおよび運動量の局所的な保存）を課し，そして 10 個の $g_{\alpha\beta}$ に 6 個の拘束を課して，$g_{\alpha\beta}$ の 4 個は座標系の調整によって調整されるべく残す．

---

*8　$\boldsymbol{G} = 8\pi \boldsymbol{T}$ はただ 6 個の計量成分を定めなければならない：他の 4 個は座標変換によって適合される

*9　$\boldsymbol{G} = 8\pi \boldsymbol{T}$ は計量の 4 個の成分を自由に残す，なぜならそれは 4 個の恒等式 $0 \equiv \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{G} = 8\pi\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}$ を満たすからである（"源の自動的な保存"）

17.3 宇宙定数

*10　Einstein が彼の一般相対性理論を展開した 1915 年には，宇宙の永続性は西洋哲学での固定された真理であった．“天は永遠から永遠へ存続する．” こうして，Einstein の幾何力学の法則 $\boldsymbol{G} = 8\pi \boldsymbol{T}$ が，**永遠**でない宇宙，動的な宇宙，“ビッグバン” 爆発から始まった宇宙，あるいは究極的には収縮によって無限大の密度へ崩壊するだろう宇宙，あるいは両方を予言することを見出すに至ること（27 章）は，彼を大いに悩ました．彼の理論と当時の確固たる哲学的な信念との間のこの矛盾に直面して，Einstein は悩み，彼の理論を修正した．

理論の構造をあまり変えずに唯一の考えられうる修正は，幾何力学の法則 $\boldsymbol{G} = 8\pi \boldsymbol{T}$ の左辺を変えることである．左辺は以下の 3 つの仮定によって，Einstein テンソル，$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$ であることを**余儀なくされる**ことを思い出そう．

(1) $\boldsymbol{G}$ は時空が平坦であるときゼロである．

(2) $\boldsymbol{G}$ は Riemann 曲率テンソルおよび計量から構成され，これら以外の何ものからも構成されない．

(3) $\boldsymbol{G}$ は ***Riemann*** および $\boldsymbol{g}$ からつくられうる他のテンソルと，次の点で区別される．(1) 曲率の任意の自然な度量にふさわしいものとして ***Riemann*** について線形である，(2) $\boldsymbol{T}$ のように，対称であり，2 階である，(3) 自動的なゼロ発散，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{G} \equiv 0$ をもつ．

新しい，修正された左辺を “$\boldsymbol{G}$” で記し，標準的な Einstein テンソルとの混乱を避けるために引用符をつける．$\boldsymbol{\nabla}\cdot$“$\boldsymbol{G}$” $\equiv 0$ を放棄することは力学の根拠に基づいて不可能である（17.2 節をみよ）．“$\boldsymbol{G}$” の対称性あるいは階数を変えることは数学的な根拠に基づいて不可能である．なぜなら “$\boldsymbol{G}$” は $\boldsymbol{T}$ と等しくされなければならないからである．“$\boldsymbol{G}$” を ***Riemann*** について非線形にすることは，理論を大いに複雑にするだろう．“$\boldsymbol{G}$” を ***Riemann*** および $\boldsymbol{g}$ 以外の何かから構成することは，“$\boldsymbol{G}$” をもはや時空幾何学の度量でなくし，したがって理論の精神を破るだろう．非常な苦悩の後に，理論の美しさと精神に対する最小の損傷で落としてもよいであろう仮定は，時空が平坦であるときに “$\boldsymbol{G}$” はゼロであるという，仮定 (1) であると結論される．しかしこの仮定を落とすことさえも苦痛をもたらす．(1) “$\boldsymbol{G}$” は依然としてある意味で幾何学の度量であるだろうけれども，それはもはや曲率の度量でありえない．そして (2) 平坦で，空の時空はもはや幾何力学の法則と共存できないだろう（$\boldsymbol{T} = 0$ の平坦で，空の空間で $\boldsymbol{G} \neq 0$）にもかかわらず，これらの結果は Einstein にとって動的な宇宙よりも少ない苦痛であった．

条件 (2) および (3) [(1) は放棄されている] を満たす唯一のテンソルは Einstein テンソルに計量の倍数を加えたものである．

$$“G”_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \Lambda g_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

（練習問題 17.1，また練習問題 17.4 をみよ）．こうして Einstein (1917) は彼の修正され

*10　宇宙定数を導入するための Einstein の動機

た場の方程式

*11
$$G + \Lambda g = 8\pi T \tag{17.11}$$

に導かれた．定数 Λ を彼は "宇宙定数" とよんだ．それは次元 cm^{-2} をもつ．

修正された場の方程式は，元の方程式と対照的に，静的な，変化しない宇宙を 1 つの特解
*12 として認める（コラム 27.5 をみよ）．この理由のために，Einstein は 1917 年には修正された方程式に信頼を置くように傾いた．しかし 13 年後，Hubble が宇宙の膨張を発見した．もはや宇宙定数は必要でなくなった．Einstein は，宇宙定数を "私の人生の最大の失敗" とよんで，それを放棄して元の幾何力学の法則，$G = 8\pi T$ に帰った [Einstein (1970)].

Λ は実際偉大な過ちだった！ —少なからぬ理由は，もし Einstein が彼の元の方程式を固く守っていたら，彼は彼の重力理論のもっとも成功をおさめた予言として宇宙の膨張を主張できたであろう．

いたずら好きな妖精は，ひとたび瓶から出ると，容易には再び閉じ込められないだろう．宇宙論についての多くの研究者は宇宙定数を放棄することを好まない．彼らは，宇宙論的な観測が，それが無視できるほど小さいことを明らかにした後に，初めて放棄されるべきで
*13 あると主張する．宇宙定数を残すための現代の動機として，ときどき修正された場の方程式を

$$G = 8\pi[T + T^{(VAC)}] \tag{17.12a}$$

$$T^{(VAC)} \equiv -(\Lambda/8\pi)g \tag{17.12b}$$

の形式に書き直し，$T^{(VAC)}$ を真空と結びついたストレス–エネルギーテンソルとして解釈する．この観点は，場の量子論の真空変極は真空にゼロでないストレス–エネルギーテンソル (17.12b) を与え，それは重力効果による以外完全に観測できないと推測する [Zel'dovich (1967)]．不幸にも，今日の場の量子論は $T^{(VAC)}$ の計算を第一原理から与えるには素朴すぎる（練習問題 17.5 をみよ）．

宇宙定数が真空に寄与する質量–エネルギー密度は

$$\rho^{(VAC)} = T^{(VAC)}_{\hat{0}\hat{0}} = +\Lambda/8\pi \tag{17.13}$$

*14 である．もし $\Lambda \neq 0$ であるならば，それは少なくとも非常に小さくなければならず，Newton の重力理論が観測に対する適切な説明を与える場所ではどこでも，$\rho^{(VAC)}$ は無視できるほど小さい重力効果をもっている [$|\rho^{(VAC)}| < \rho^{(MATTER)}$]．ある程度の（大きくはないけれども）成功で Newton の理論を適用できる最低密度の系は，銀河の小さい集団 (cluster) である．したがって，限界

$$|\rho^{(VAC)}| = |\Lambda|/8\pi \lesssim \rho^{(CLUSTER)} \sim 10^{-29} g/cm^3 \sim 10^{-57} cm^{-2} \tag{17.14}$$

---

*11 宇宙定数をもつ Einstein の場の方程式
*12 Einstein が宇宙定数を放棄した理由
*13 宇宙定数に対する現代の動機：真空変極
*14 宇宙定数に対する観測による限界

*15　を宇宙定数の値に置くことができる．たとえ $\Lambda \neq 0$ であっても，明らかに，Λ は非常に小さいので，それは銀河，惑星，人間あるいは原子のスケールではまったく重要でない．したがって時折宇宙論を議論するとき（27–30 章）を除いて，Einstein の元の幾何力学の法則（$\boldsymbol{G} = 8\pi\boldsymbol{T}, \Lambda = 0$）にとどまることは理にかなっている．

[練習問題]

17.5　宇宙定数の大きさ

(a) もし $\Lambda \sim 10^{-57}\mathrm{cm}^{-2}$ であるならば，太陽系の天体力学に対する宇宙定数の影響の大きさの程度はいくらか？

(b) Λ の可能な最大の値に対応する真空の質量–エネルギー密度 $\rho^{(\mathrm{VAC})} = \Lambda/8\pi \sim 10^{-29}\mathrm{g/cm}^3$ は，非常に大ざっぱな大きさで

$$\frac{\text{素粒子の静止質量}}{(\text{粒子のコンプトン波長})^3} \times (\text{重力の微細定数}) = \frac{m}{(\hbar/m)^3}\frac{m^2}{\hbar} = \frac{m^6}{\hbar^4}$$

と一致することを示せ［Zel'dovich（1967, 1968)］．この数占いは示唆に富んでいるが，真空に対するストレス–エネルギーテンソルのいかなる信じうる導出にも達していない．

17.4　Newton 的極限

ちょうど量子力学が大きい作用の “対応極限”, $I \gg \hbar$ で古典力学に帰着するように，一般相対論は弱い重力と遅い速度の “対応極限” で Newton 的理論に帰着する（“対応極限” についてはコラム 17.1 をみよ)．本節は少し数学的な詳細さで，一般相対論と Newton 的理論との間の対応を説明する．それは重力の “受動的な” 観点（物質の重力に対する反応）に始まり，それから “能動的な” 観点（物質による重力の生成）に向かう．

孤立した系，たとえば，太陽系，を考える．そこでは Newton 的理論が高度に正確である．特殊相対論的な効果が目立たないためには，質量中心に相対的なそしてまた Newton 的な座標に，相対的な系内でのすべての速度は，光速に比べて小さくなければならない．すなわち

*16

$$v \ll 1 \tag{17.15a}$$

粒子が系の外部領域から内部領域へ落下するにつれて，重力は粒子を運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2 \sim |m\Phi|_{\text{最大}}$ まで加速する［ここに $\Phi < 0$ は Newton の重力ポテンシャルであり，$\Phi(\infty) = 0$ であるように規格化されている］．生ずる速度は

*15　宇宙論の場合を除いてどこでも宇宙定数を無視する理由
*16　Newton の重力理論が正確であるために系が満たさねばならない条件

$$|\Phi| \ll 1 \tag{17.15b}$$

である場合に限り小さいだろう．系での内部ストレスもまた運動を生み出す．たとえば，音波である．このような波は $|T^{ij}/T_{00}|^{1/2}$ の程度の特徴的な速度をもつ．たとえば，完全流体での音速は

$$v = (dp/d\rho)^{1/2} \sim (p/\rho)^{1/2} \sim |T^{ij}/T^{00}|^{1/2}$$

である．これらの速度が光速に比べて小さいためには，すべてのストレスは質量–エネルギーの密度に比べて小さくなければならない．

$$|T^{ij}|/T^{00} = |T^{ij}|/\rho \ll 1 \tag{17.15c}$$

コラム 17.1 対応原理

A. 一般的な注意と特別な例

1. 物理学が発展しそして拡大するときには，それを通してより単純な理論は，より複雑であるがより正確な理論との連係によってその存続力を保持し，対応原理の網状組織によってその統合は保持される．

a. 物理光学は，新しい回折および干渉の現象すべてを説明したにもかかわらず，また，鏡やレンズの古くて基本的な幾何光学を説明しなければならなかったし，そして説明した．幾何光学は，物理学的な系の他のすべての関連した次元と比較して波長が無限に小さくされる，数学的な“対応原理の極限”で，物理光学から生き返らされる．

b. Newton 力学は，すべての関連した速度が光速に比べて無視できるほど小さい数学的な“対応原理の極限”で，特殊相対論の力学から生き返らされる．

c. 熱力学は，圧力，粒子数，および他の物理量についての揺らぎが系のこれらのパラメータの平均値に比べて無視できるほど多くの粒子が考慮される数学的な“対応原理の極限”で，後継理論である統計力学から，生き返らされる．

d. 古典力学は，問題の量子状態の量子数が非常に大きく，あるいは関係する作用量が $\hbar$ に比べて非常に大きく，波動現象および回折現象が標準的な決定論的な古典力学の予言に対して無視できる変化しかつくらないような“対応原理の極限”で，量子力学から生き返らされる．Niels Bohr は，どのような正しい量子論も完成しないうちに，すでにこの対応原理を定式化し，そして利用した．彼はそれを用いて原子のエネルギー準位とスペクトル線の強度の近似的な値を予言した．彼はまた量子論の正しい形式を求めるときに，またそれが発見された後にこの理論の内容を解明するときに，すべての物理学者への指針として対応原理を詳述した．

2. すべてのこれらの例および他の例で，より新しい，より複雑な理論はその前の理論よりも“さらによい”．なぜならそれは物理学のより拡張された領域のよい記述を与

える，あるいは同じ領域のより正確な記述を与える，あるいはその両方であるからである．

3. より新しい理論とその前の理論との間の対応は，(a) より古い理論をより新しい理論から生き返らせる力を与え，(b) 簡明な数学によって示すことができ，そして (c) 歴史的な記録によれば，しばしばより新しい理論の発展を導いた．

B. 一般相対論の対応構造

1. Einstein の重力理論は別個の極限的な場合として (a) 特殊相対論，(b) “線形化された重力理論”，(c) Newton の重力理論，そして (d) ポスト Newton の重力理論をもつ．こうして，それはとくに豊富な対応構造をもつ．

a. **特殊相対論との対応**：一般相対論は特殊相対論と 2 つの異なる種類の対応をもつ．第 1 はいたるところでゼロの重力場（ゼロ曲率）の極限である．この極限で大域的な慣性系を導入し，$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ と置き，そして完全にまた正確に特殊相対性理論を導入することができる．第 2 は大域的よりもむしろ局所的である．それは局所慣性系ではすべての物理学の法則はそれらの特殊相対論の形をとるという要求（“対応原理”，“等価原理”）である．16 章でみられたように，これは計量に制限を置かない（局所慣性系で $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ および $g_{\mu\nu,\alpha} = 0$ を除いて）．しかしそれは重力が存在する場合には物質と場の振る舞いに厳しい制限を置く．

b. **Newton の理論との対応**：弱い重力場，遅い速度，そして小さい圧力の極限で，一般相対論は Newton の重力理論に帰着する．対応構造は 17.4 節の本文で数学的に解説されている．

c. **ポスト Newton の理論との対応**：Newton の理論が近似的に成り立つが，しかし “1 次の相対論的な補正” が重要であるときには，しばしば “ポスト Newton の重力理論” を用いる．39 章は，ポスト Newton の理論と，その一般相対論および Newton の理論の両方との対応とを詳述する．

d. **線形化された理論との対応**：弱い重力場であるが，しかし場合として大きい速度と圧力（$v \sim 1$, $T_{jk} \sim T_{00}$）の極限で，一般相対論は “線形化された重力理論” に帰着する．この対応は 18 章で解説される．

条件 (17.15) が成り立つ場合に限り，研究したい系が Newton の理論で正確に記述できることが期待できる．一般相対論の重力に対する Newton の理論との対応は，受動的には，自由落下する粒子の測地線の世界線が Newton 的な世界線に帰着することを要求する．

$$d^2x^i/dt^2 = -\partial\Phi/\partial x^i \tag{17.16}$$

さらに，それらは，源と試験粒子は遅い速度 $v \ll 1$ をもち，そして座標の長さと座標の時間は Newton 的な座標の長さと時間—それは今度は物差しと時計によって測定された固有長および固有時間である—にきわめて近く一致するような，**任意の**相対論的な座標系で，この形に帰着しなければならない．こうして，適切な座標（**“Galilei 的な”** あるいは **“Newton**

*17 **的な" 座標とよばれる)** は

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \qquad |v^j| = |dx^j/dt| \ll 1 \qquad (17.17)$$

であるような座標である（弱い重力場，ほとんど慣性座標，遅い速度）．このような座標系では，試験粒子の測地線の世界線は以下の形をもつ．

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x^i}{dt^2} &= \frac{d^2x^i}{d\tau^2} && (|h_{\mu\nu}| \ll 1 \text{ および } |v^j| \ll 1 \text{ のとき，} dt/d\tau \approx 1 \text{ であるから}) \\
&= -\Gamma^i{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} && (\text{測地線の方程式}) \\
&= -\Gamma^i{}_{00} && (dt/d\tau \approx 1 \text{ および } |dx^j/d\tau| \ll 1 \text{ であるから}) \\
&= -\Gamma_{i00} && (g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} \text{ であるから}) \\
&= \frac{1}{2}h_{00,i} - h_{0i,0} && (g_{\alpha\beta,\gamma} \text{ を用いた } \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \text{ の式}) \\
&= \frac{1}{2}h_{00,i} && \begin{pmatrix}\text{すべての速度は } c \text{ に比べて小さい，これは時間微分は空間微} \\ \text{分に比べて小さい．すなわち，} h_{\alpha\beta,0} \sim v h_{\alpha\beta,i} \text{ を意味する}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

これらの測地線の世界線は，もし同等化

$$\Gamma^i{}_{00} = -\frac{1}{2}h_{00,i} = \Phi_{,i} \qquad (17.18)$$

*18 をすれば，実際，Newton 理論の測地線の世界線に帰着する [式 (17.16)]．境界条件 $\Phi(r = \infty) = 0$ および $h_{\mu\nu}(r = \infty) = 0$（座標は源から離れたところで Lorentz である）とともに，この同定は $h_{00} = -2\Phi$ を意味する．すなわち，

$$g_{00} = -1 - 2\Phi \quad (\text{Newton 的座標でほとんど Newton 的な系に対して}) \qquad (17.19)$$

この対応はほとんど Newton 的な系に対して h_{00} の形を述べるが，しかし計量の摂動の他の成分の形を述べないことに注意する．実際，他の $h_{\mu\nu}$ は，ゆっくりと動く粒子の世界線に影響を及ぼすことなく，十分完全に $h_{00} \sim \Phi$ と同じ程度の大きさであるだろう．なぜならそれらはつねに，小さい数 v あるいは v^2 が掛けられて，あるいは x^i よりもむしろ t で微分されて，測地線の式に入るからである．他の $h_{\mu\nu}$ の形および Newton 的な運動へのそれらの小さい補正は，18, 39, および 40 章で解説されるだろう．

*19 **関係 $g_{00} = -1 - 2\Phi$ は重力の受動的な様相に対する一般相対性理論と Newton 理論との間の対応の数学的な具体化である．**"妥当性の条件" (17.15)，(17.17) とともに，それは基礎であり，それから関係

$$R^i{}_{0j0} = \partial^2\Phi/\partial x^i \partial x^j \qquad (17.20)$$

を含む，"受動的な重力" に対する対応のすべての他の様相を導くことができる（練習問題 17.6）．代わりに，この対応のすべての他の様相は，Newton の予言と Einstein の予言と

---

*17 Newton 的座標が定義される

*18 Newton 的座標で，$g_{00} = -1 - 2\Phi$ である場合に限り，Einstein 重力は Newton 重力に帰着する

*19 重力のすべての "受動的な" 様相に対する Einstein 理論と Newton 理論との間の対応

の直接の比較によって導かれうる．たとえば，式 (17.20) を導くには，2 つの試験粒子，1 つは $x^i+\xi^i$ に存在しそして他は x^i に存在する，の相対的な加速度を吟味する．Newton によれば

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2}=\frac{d^2(x^i+\xi^i)}{dt^2}-\frac{d^2x^i}{dt^2}=-\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\right|_{x^i+\xi^i\text{で}}+\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\right|_{x^i\text{で}}=\frac{-\partial^2\Phi}{\partial x^i\partial x^j}\xi^j$$

比較のために，Einstein は（測地線のずれの式）

$$\frac{D^2\xi^i}{d\tau^2}\underset{\uparrow}{=}\frac{d^2\xi^i}{dt^2}=-R^i{}_{0j0}\xi^j$$

[条件 (17.15) および (17.17) によって]

を予言する．直接の比較は関係 (17.20) を与える．

*20 さて重力の受動的な様相に対する対応から能動的な様相に対する対応へ向かう．Einstein によれば，質量は幾何力学的な法則 $\boldsymbol{G}=8\pi\boldsymbol{T}$ によって重力（時空の曲率）を生み出す．この法則をほとんど Newton 的な系に適用し，そして式 (17.8) に先立つ推論を続けて関係

$$R_{00}=4\pi\rho \tag{17.21}$$

を導く．式 (17.20) の縮約と結びつけて，

$$R_{00}=R^i{}_{0i0}+\underset{\substack{\uparrow\\0}}{R^0{}_{000}}=\partial^2\Phi/\partial x^i\,\partial x^i=\nabla^2\Phi$$

それによって質量による重力の生成に対する Newton の式

$$\nabla^2\Phi=4\pi\rho \tag{17.22}$$

を得る．こうして，Einstein の場の方程式は Newton 的な極限で Newton の場の方程式に帰着する．

Newton と Einstein との間の対応は，上に要約されたように明白で簡明であるけれども，Newton の重力理論が曲がった時空の Einstein の言葉で書き直されるとき，さらにより明白で簡明である（12 章，練習問題 17.7）．

[練習問題]

17.6　受動的な役割での重力に対する対応の展開

対応関係 $g_{00}=-1-2\Phi$ から，そして Newton 的物理学に対する条件 (17.15) および (17.17) から，対応関係

$$\Gamma^i{}_{00}=\partial\Phi/\partial x^i,\qquad R^i{}_{0j0}=\partial^2\Phi/\partial x^i\partial x^j$$

*20　Einstein の場の方程式の Newton 的な極限は $\nabla^2\Phi=4\pi\rho$ である

を導け．

17.7 曲がった時空の言葉での対応 ［トラック–2］

Einstein 理論と Newton 的理論の Cartan による曲がった時空での定式化との間の対応を示せ（12 章）．

17.5 Einsteinの理論を公理化する？

一般相対論に対してもっとも簡潔で妥当な公理的構造を見出しうるか？ それから公理から Einstein の場の方程式

$$\boldsymbol{G} = 8\pi \boldsymbol{T}$$

を導くことができるか？ それに取り組む方法は伝統に従うだろう．しかし，それは今日時代遅れであるだろう．1915 年 11 月 25 日以来すでに半世紀以上過ぎ去っている．もし宇宙定数を加えるという Einstein の一時の "逸脱" を無視すれば，その間，方程式は不変であった．対照的に導出は発展し，そしてますます数多くなり変化した．最初は，公理はどのような方程式が受け入れられるかを述べた．今日までに方程式はどのような公理が受け入れられるかを述べる．コラム 17.2 は種々の公理の組，および生ずる Einstein の方程式の導出の概略を述べる．[*21]

コラム 17.2 曲率とエネルギー密度は同等であるという Einstein の幾何力学の法則（"Einstein の場の方程式"）への 6 つの道

［道 1（源の自動的な保存，および Newton の理論との対応）および道 2（Hilbert の変分原理）だけがトラック–1 の読者に推薦される．そしてトラック–2 の読者にも，道 3（空間層についての物理学），道 4（超空間から Einstein の方程式に行く），道 5（"観測できない平坦な時空" の背景でのスピン 2 の場），および道 6（粒子の物理学から生ずる空間の弾性としての重力）を勉強する前に本章の残りを終わらせるよう勧める．］

1. 幾何力学を電気力学にならってつくり，そして "源の自動的な保存" と Newton の重力理論との対応を中心的な考察として取り扱う．

a. 粒子は電気力学で場に反応を示し，一般相対論で幾何学に反応を示す．

b. 電磁場に対するポテンシャルは 4–ベクトル $\boldsymbol{A}$（成分 A_μ）である．幾何学に対

---

*21 Einstein の場の方程式を導く多くの方法がある（コラム 17.2）

するポテンシャルは計量テンソル $\boldsymbol{g}$（成分 $g_{\mu\nu}$）である．

c. 電磁気学のポテンシャルは源の項（4–電流）を右辺にもつ波動方程式，

$$\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right)^{;\nu} = 4\pi j_\mu \tag{1}$$

を満たし，源の保存，$j_\mu{}^{;\mu} = 0$ は自動的である（左辺によって満たされる恒等式の結果）ように構成されている．類似によって，幾何力学のポテンシャルもまた源の項（ストレス–エネルギーテンソル）を右辺にもつ波動方程式，

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{2}$$

を満たさねばならず，源の保存 $T_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0$（16 章）は "自動的で" あるように構成されている．この保存はここでは自動的である．なぜなら方程式の左辺はテンソル（Einstein テンソル，コラム 8.6 あるいは 15 章をみよ）であって，計量成分およびそれらの 2 階微分からつくられ，恒等式 $G_{\mu\nu}{}^{;\nu} \equiv 0$ を満たすからである．

d. (1) 計量成分の 2 階微分について線形である，(2) 高次の微分をもたない，(3) 平坦な時空でゼロである，ようなテンソルで，このような恒等式を満たすものは他に存在しない．

e. 比例定数 (8π) は単位の選択［ここでは幾何学的な，コラム 1.8 をみよ］によって，および試験粒子が密度 ρ の物質の集合を通して前後に振動する，あるいは物質の集合の周りの円軌道を $\omega^2 = (4\pi/3)\rho$ で与えられる円振動数で回転する（図 1.12），という要求（"Newton の理論との対応"）によって固定される．前述のことは単純化しすぎるし，そして Einstein の一時の間違った逸脱を省略する．しかし他の点では彼が彼の場の方程式に到達する際に追求した推論を要約している．この推論は 17 章の本文でより詳細に詳しく説明される．

2. 変分原理を中心的なものとする．

a. 計量の成分から存在する唯一のスカラーを構成する．このスカラーは (1) 計量テンソルの 2 階微分について線形である，(2) より高階の微分を含まない，(3) 平坦な時空でゼロである．すなわち，Riemann スカラー曲率不変量，R である．

b. 不変積分，

$$I = \frac{1}{16\pi}\int_\Omega R(-g)^{1/2} d^4x \tag{3}$$

を構成する．

c. 4 次元領域 Ω の内部で計量係数 $g^{\mu\nu}$ について，小さい変分 $\delta g^{\mu\nu}$ をとり，この積分が量

$$\delta I = \frac{1}{16\pi}\int_\Omega G_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}(-g)^{1/2}\,d^4x \tag{4}$$

だけ変化するのを見出す.

d. I は Ω の内部領域での幾何学の選択について，極値であるべきであると要求する（任意の $\delta g^{\mu\nu}$ に対して $\delta I = 0$, “極値的な作用の原理”).

e. こうして空の空間に対する Einstein の場の方程式に到達する.

$$G_{\mu\nu} = 0 \tag{5}$$

f. 推論を続けると恒等式

$$G_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0$$

に達する. 21 章では，変分原理に基づいてより以上の詳細を与え，物質あるいは場あるいは両方が存在するときに式 (5) の右辺に付加項を立てる.

g. この研究方法は David Hilbert (1915) にさかのぼる. 場の方程式にいたるこれよりも早い手段はない. さらに，それは “すべての履歴の民主主義” という量子原理（経路積分法）と直接に結びついている（この次の項, 2′ をみよ）[Feynman (1942), Feynman and Hibbs (1965)]. 変分原理は 21 章でより詳細に説明されている.

[本章の残りはトラック–2 である. 今までのトラック–2 の教材はそれに対する準備として必要とされないし，またどの後の章に対しても必要な準備でないが，21 章（初期値の方程式と変分原理）および 39 章（重力の他の理論）で役立つだろう.]

2′. 量子物理学の，現実の世界に対する古典的な作用原理の意味についての，本題を離れた話.

a. “幾何学の履歴” H は，時空であり，すなわち，4 次元の $-+++$ Riemann 計量をもつ 4 次元多様体であり，それは (1) 1 つの空間的な超曲面（“同時的な超曲面”）上で指定された正符号の計量をもつ “初期値の 3–幾何学” A に帰着し，そして (2) 他の空間的な超曲面上でまた正符号の計量をもつ指定された “最終値の 3–幾何学” B に帰着する.

b. Hilbert の古典的な変分原理は，Arnowitt, Deser, and Misner によって定式化し直されたように，古典的に許されようがあるいは許されなかろうが，A と B を結ぶ任意の考えられうる履歴 H の力学的な経路の長さ I_H を与える（同時的な初期の超曲面上と，同時的な最終の超曲面上，および作用原理の被積分関数の選択対象の種類に対して，指定されうるものおよび指定されなければならないものに対する，より完全な陳述に対しては 21 章をみよ).

c. 古典物理学は，履歴 H がすべての近傍の履歴に比べて，力学的な経路の長さ I を極値化する場合に限り許されると述べる. 量子物理学はすべての履歴は以下の意味で，等しい確率振幅で起こると述べる. “力学的な空間の幾何学が A から B へ作用積分 I_H をもつ履歴 H を通り，そして履歴 H の指定された無限小領域 $\mathcal{D}H$ 内に存在する履歴を通って遷移する” 確率振幅は,

$$\begin{pmatrix} A \text{から} B \text{へ, 履歴} H \text{および} H \text{周} \\ \text{辺の領域} \mathcal{D}H \text{内に存在する履歴を} \\ \text{通って遷移する確率振幅} \end{pmatrix} \sim \exp(iI_H/\hbar)N\mathcal{D}H \tag{6}$$

という表現によって与えられる．ここで規格化の因子 N は，許されようが許されまいが，A から B に いたるすべての考えられうる履歴 H に対して同じである（"履歴の民主主義の原理"）．角運動量の量子，$\hbar = h/2\pi$ は，幾何学的な単位で表すと，値

$$\hbar = \hbar_{\mathrm{conv}} G/c^3 = (L^*)^2 \tag{7}$$

をもつ．ここに L^* は Planck の長さ，$L^* = 1.6 \times 10^{-33}$cm である．

d. 古典的に許される履歴は "優先権のない優先権" を受け取る．その履歴，およびそれとごくわずか異なり，$\delta I = I_H - I_{class}$ が $\hbar$ 程度およびそれより小さくなるような履歴 H は，確率振幅に建設的に干渉する寄与を与える．対照的に，破壊的な干渉は，古典的に許される履歴と，より大きく異なる履歴から生ずる（遷移に対する確率振幅への）寄与を実際上消してしまう．こうして幾何学には量子的な揺らぎが存在するが，それらは限定的な大きさの揺らぎである．$\hbar$ の小ささは，これらの揺らぎのスケールを日常の距離ではすぐには気づかないものにしている（43 および 44 章でのさらなる議論をみよ）．この意味で古典的な幾何力学は，量子物理学の実在の世界の幾何力学に対するよい近似である．

3. 再び電磁気学を模型としてもつ，"空間層あるいは同時的な超曲面上の物理学"．

a. "磁力線はけっして終わらない" と繰り返して述べ，そして Maxwell の方程式の半分が出てくる．"電気力線は電荷にのみ終わる" と繰り返して述べ，そして Maxwell の方程式の他の半分に達する．同様に，

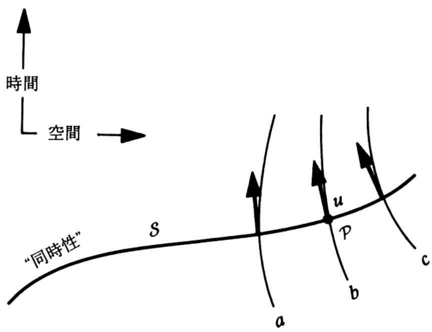
$$\begin{pmatrix} \text{内在的な曲率} \\ \text{スカラー} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{外在的な曲率} \\ \text{スカラー} \end{pmatrix} = 16\pi \begin{pmatrix} \text{質量–エネルギー} \\ \text{の局所的な密度} \end{pmatrix} \tag{8}$$

と繰り返して述べ，そして Einstein の方程式のすべての 10 個の成分で終わる．"繰り返して述べる" ということは，述べられている原理はありとあらゆる空間的な層の上で，時空のありとあらゆる事象を通して成り立つことを要求することの略語である．

b. Maxwell および Einstein の方程式のこの "空間層の定式化" を明確に詳しく説明する．時空の任意点 $\mathcal{P}$（"事象"），および $\mathcal{P}$ を通る任意の "同時性"$\mathcal{S}$（同時的な超曲面，時空を通る空間層）を考える．磁力線は $\mathcal{S}$ を通り抜けるが，しかしその 1 本の線すらどこにも終わることが許されない．"磁力線はけっして終わらない" という要求は，$\mathcal{P}$ での**すべての**基準系に課せられるときには（"同時性"$\mathcal{S}$ のすべての選択に対して），$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ だけでなく $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \partial\boldsymbol{B}/\partial t = 0$ をも保証することを思い出せ（3.4 節）．同様に（3.4 節）"電気力線は電荷以外にけっして終わらない" という要求 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi J^0$ は，$\mathcal{P}$ を通るすべての "同時性" に課せら

れるときには，残りの Maxwell の方程式 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\partial\boldsymbol{E}/\partial t+4\pi\boldsymbol{J}$ を保証する．

c. $\mathcal{P}$ を通るおのおのの同時性 $\mathcal{S}$ は，それ自身の勾配と曲率をもつ．異なる勾配（$\mathcal{P}$ での異なる局所 Lorentz 系）の可能性は束の保存の要求から，Maxwell の方程式のすべてを導くために本質的である．勾配はこのように重要であるけれども，超曲面 $\mathcal{S}$ の曲率は電磁気学の解析に対してけっして重要でない．しかし，それは電磁気学の前述の取り扱いにならってつくられた，重力の任意の解析に対して重要である．



事象 $\mathcal{P}$ を突っ切る “同時性”$\mathcal{S}$（空間的な超曲面あるいは “時空を通る薄片”）．“同時性” は 1 組の “観測者”a, b, c,⋯によって定義されると考えてよいだろう．それらの世界線は同時性と直交し，それらの時計はすべてよぎる瞬間に同じ固有時間を示す．$\mathcal{P}$ を通る他の “同時性” は，$\mathcal{P}$ で異なる曲率あるいは異なる勾配あるいは両方をもつだろう．そしてそれは他の腕時計をもつ，異なる集団の観測者によって定義される．

d. “質量–エネルギーは空間を曲げる” は重力の中心的な原理である．この原理を詳しく説明するには術語，“空間” および “空間の曲率” および “空間の与えられた領域内での質量–エネルギーの密度” を連続して吟味することが要求される．“空間” は空間的な超曲面，あるいは，より明確に，物理学が吟味されている点 $\mathcal{P}$ を含む同時性 $\mathcal{S}$ の超曲面を意味する．

e. $\mathcal{P}$ で $\mathcal{S}$ に垂直な 4–ベクトルを $\boldsymbol{u}$ で記す．そうすると $\mathcal{P}$ での空間的な超曲面 $\mathcal{S}$ 内の質量–エネルギーの密度は

$$\rho=u^{\alpha}T_{\alpha\beta}u^{\beta} \tag{9}$$

であり，5 章で与えられたストレス–エネルギーテンソルの定義と一致している．

f. この密度は時空を通って切る薄片の傾斜に依存するが，この薄片をいかに曲がった形で切るかにはよらないただ 1 個の数値である．もしそれが “空間の曲率” に等しくされるべきであるならば，その曲率もまた，薄片をいかに曲がった形で切るかに無関係でなければならない．

g. 幾何学的な量 “空間の曲率” は，(1) ただ 1 個の数値（スカラー）でなければな

らない，(2) 超曲面 $\mathcal{S}$ を構成するときに $\mathcal{P}$ で時空を通って切る傾斜 $\boldsymbol{u}$ に依存するが，(3) いかに曲がって切るかに影響されてはならない，と結論する．ここでなされる要求は逆説的であるようにみえる．曲率によらない曲率の度量を求めているようにみえる！

h. より綿密に眺めると，3 つの違った概念がここで考察されていることが明らかになる．1 つ目は $\mathcal{P}$ で超曲面 $\mathcal{S}$ に内在的な 3–幾何学のスカラー曲率不変量 ${}^{(3)}R$ である．それは超曲面によって定義され，そして超曲面内でなされる距離の測定にのみ依存する．2 つ目は包括的な時空の 4–幾何学に相対的なこの 3–幾何学の“外曲率”である（“いかに曲がって薄片を切るか”，外曲率および内曲率間の相違についてはさらにコラム 14.1 をみよ）．3 つ目は，“$\boldsymbol{u}$ に垂直”な，ある意味さらに詳しく定義されるべき，4 次元の時空そのものの曲率である．これはいかに曲がって薄片を切るかによらない量である．それが，質量–エネルギーの密度とともに，単位の選択に依存する因子を除いて，同定されるべき量である．

i. これら 3 つの量は以下のように関係している．

（空間的な超曲面 $\mathcal{S}$ に内在的な 3–幾何学のスカラー曲率不変量 ${}^{(3)}R$，“いかに曲がって薄片を切るか”に依存する量）＋（補正項．それは (a) はめ込んでいる 4 次元の幾何学に相対的な超曲面の“外曲率” $K_{\alpha\beta}$（コラム 14.1 および 21 章）のみに依存し，そして (b) この補正項と ${}^{(3)}R$ との和が“いかに曲がって薄片を切るか”によらないように計算され（一義的に明確な計算），そして (c) 正確な値 $(\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})^2 - \mathrm{Tr}\boldsymbol{K}^2 \equiv (K_\alpha{}^\alpha)^2 - K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta}$ をもつ）

＝（時空の曲率の度量，それは時空の 4–幾何学に依存し，時空を通って切られる空間層 $\mathcal{S}$ の傾斜 $\boldsymbol{u}$ に依存するが，しかし構成によって，“いかに曲がって薄片を切るか”によらない）＝（スカラー量，それは (a) すでに述べられたことによって完全に定義される，(b) したがって標準的な微分幾何学で完全に計算できる（21 章における詳細））

＝（$2u^\alpha G_{\alpha\beta}u^\beta$，ここに $G_{\alpha\beta}$ は式 (8.49) とコラム 8.6 の Einstein 曲率テンソルである）＝ 2（トラック–2, 15 章で，$\boldsymbol{u}$ に直交する超曲面内の $\mathcal{P}$ に位置する 3–体積の単位要素と関連した“回転のモーメント”として，説明されている量）　　(10)

j. 中心的な原理，“質量–エネルギーは空間を曲げる”は公式

$$
{}^{(3)}R + (\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{K})^2 - \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{K}^2 = 16\pi\rho \tag{11}
$$

あるいは，省略された公式，

$$(\text{回転のモーメント}) = (\text{内曲率}) + (\text{外曲率}) = (\text{質量–エネルギーの密度}) \quad (12)$$

に翻訳でき，任意点 $\mathcal{P}$ で時空を通るすべての空間層に対して成り立つ．

k. Maxwell の電気力学のすべてが，体積要素に終わる力線の数はその体積要素内の電荷の量の 4π 倍に等しい，という陳述に含まれているのとまったく同様に，Einstein の幾何力学のすべてはこの陳述に含まれている．因子 16π は本書で用いられている幾何学的な単位系に対してふさわしい（密度 ρ は $G/c^2 = 0.742\times10^{-28}$cm/g に g/cm^3 の慣習的な単位で表された密度 ρ_{conv} を掛けて得られる cm^{-2} で表されている）．

l. "質量–エネルギーは空間を曲げる" という原理を

$$2u^\alpha G_{\alpha\beta}u^\beta = 16\pi u^\alpha T_{\alpha\beta}u^\beta \quad (13)$$

という形式で再表現する．この式は $\mathcal{P}$ をよぎるすべての同時性に対して，その "傾斜" $\boldsymbol{u}$ は何であろうと成り立つはずであると要求する．

m. 式 (13) の両辺の係数は一致しなければならないと結論する．こうして，

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \quad (14)$$

Einstein の方程式は成分の言葉で，あるいは，抽象的な幾何学的な量の言葉で

$$\boldsymbol{G} = 8\pi \boldsymbol{T} \quad (15)$$

4. Einstein の方程式から超空間へよりも，むしろ超空間から Einstein の方程式へ行く．

a. Einstein の方程式への 4 番目のルートは 43 章で詳しく説明されている幾何力学の進歩した観点から出発する．幾何学の力学は超空間で展開することをそこで示す．超空間は無限個の次元をもつ．超空間内の任意の点はすべての隆起や曲率をもつ，完全な 3–幾何学 $^{(3)}\mathcal{G}$ を記述する．幾何学の力学は超空間の点から点へ達する．

b. 粒子の力学のように，幾何学の力学は，Lagrange, Hamilton および Hamilton and Jacobi の名前と関連した，異なるが同等の数学的な公式と結びつく．これらの中で現在の解析に対してもっとも好都合なのは最後のもの（"H–J"）である．

c. ポテンシャル $V(x)$ の影響のもとで 1 次元の運動をしている 1 個の粒子の問題で，H–J 式は

$$\underbrace{-\frac{\partial S}{\partial t}}_{\substack{\uparrow\\[\text{全エネルギー}]}} = \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}_{\substack{\uparrow\\[\text{運動エネルギー}]}} + V(x) \quad (16)$$

となる．それは解

$$S_E(x,t) = -Et + \int^x [2m(E-V)]^{1/2} dx \tag{17}$$

をもつ．この解から“建設的な干渉の条件”，

$$\frac{\partial S_E(x,t)}{\partial E} = 0 \tag{18}$$

を適用することによって運動を理解する（2 つの量 x および t を結びつける 1 つの式．建設的な干渉の条件および H–J 方法一般についてより多くのことに対しては，コラム 25.3 および 25.4 をみよ）．

d. 幾何学の力学に対して対応する式では，3–幾何学の関数 $S = S({}^{(3)}\mathcal{G})$ を取り扱う．それは 3–幾何学そのものに依存し，座標の選択のきまぐれ，あるいは 3–幾何学の計量係数での対応するきまぐれ，

$$ds^2 = {}^{(3)}g_{mn}\, dx^m dx^n \tag{19}$$

に依存しない（3–幾何学を指す ${}^{(3)}$ は今後単純さのために省略される）．この関数は H–J 式 (16) の類似

$$-(16\pi)^2 \frac{1}{2g}(g_{im}g_{jn} + g_{in}g_{jm} - g_{ij}g_{mn}) \frac{\delta S}{\delta g_{ij}} \frac{\delta S}{\delta g_{mn}} + {}^{(3)}R = 16\pi\rho \tag{20}$$

に従う．

e. 超空間での幾何学の力学に対するこの式から，式 (17) から (18) へ行くときに用いられたのと似た推論によって，Einstein の場の方程式を導き出すことができる（Gerlach 1969）．

f. もし，“Einstein–Hamilton–Jacobi の式”(20) を，(20) から導かれる Einstein の場の方程式よりもより基礎的とみなす方法を見出すべきであるとするならば，先駆者となって新しい基礎を確立せねばならないだろう．[Hojman, Kuchař, and Teitelboim（1973 前刷り）によって，なされて以後.]

5. “観測できない平坦な時空” の背景でスピン 2 の場に対する標準的な場の理論としてみられた，Einstein の幾何力学.

a. Einstein の場の方程式へのこの取り組む方法は長い歴史をもっている．それに対する文献は 7.1 節および 18.1 節に見出されるだろう（この取り組む方法のさらなる議論は，それらの 2 つの節およびコラム 7.1, 練習問題 7.3, およびコラム 18.1 に見出されるだろう）.

b. 以下の要約は Deser（1970）から引用されている．“われわれは非線形性の単純な物理学的導出を与えたい…, 今日よく知られた議論を用いて…線形の，質量をもたない，スピン 2 の場から完全な Einstein の方程式にいたる….

c. “Einstein の方程式は自由な質量をもたないスピン 2 の場の方程式，

$$\begin{aligned} &R^L{}_{\mu\nu}(\phi) - \frac{1}{2}R^L{}_{\alpha\alpha}(\phi)\eta_{\mu\nu} \equiv G^L{}_{\mu\nu}(\phi) \\ &\equiv [(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta})\Box + \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta + \eta_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\alpha}\partial_\nu\partial_\beta - \eta_{\nu\beta}\partial_\mu\partial_\alpha]\phi_{\alpha\beta} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

は，実際 ϕ 場自身のストレス–テンソルを含む，**全**ストレス–テンソルに結合しなければならないと注意して，非幾何学的に導かれるだろう（その源は物質のストレス–テンソル $T_{\mu\nu}$ である）．すなわち，自由場の方程式 (21) はもちろんそのままではまったく矛盾がないけれども，源としての力学的な系の $T_{\mu\nu}$ が存在するときには［それらは矛盾する］．なぜならそのときには左辺（それは恒等的にゼロ発散である）は，右辺と矛盾する．なぜなら結合は $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ が，物質の運動方程式から計算されるとき，もはや保存されないことを意味するからである．

d. “この［運動量とエネルギーの保存の原理の破れ］を克服するために，式 (21) に対して責任がある 2 次の Lagrangian ${}^{(2)}L$ から生ずるストレス–テンソル ${}^{(2)}\theta_{\mu\nu}$ が，右辺に挿入される．

e. “しかしこれらの修正された方程式にいたる Lagrangian${}^{(3)}L$ はそうすると 3 次であり，それ自身が 3 次の ${}^{(3)}\theta_{\mu\nu}$ を寄与する．

f. “この級数は限りなく続き，合計すると完全な非線形 Einstein の方程式，$G_{\mu\nu}(\eta_{\alpha\beta}+\phi_{\alpha\beta}$ ［から計算される］$) = -\kappa T_{\mu\nu}$［幾何学的な単位と本書の符号の慣習では，$+8\pi T_{\mu\nu}$］になる（もし適当に導かれるならば!），それは計量 $g_{\mu\nu}$ の Minkowski 的な値 $\eta_{\mu\nu}$ からのずれ $\phi_{\mu\nu}$ についての無限級数である．

g. ひとたび繰り返しが始められると（$T_{\mu\nu}$ が実際存在してもしなくても），それはすべての次数にまで続けられねばならない．なぜなら保存はただ完全な級数 $\sum_{n=2}^{\infty} {}^{(n)}\theta_{\mu\nu}$ に対して成り立つからである．こうして，理論は（物理学的に不適当な）自由な線形形式 (21) のまま残されるか，あるいは無限級数で**なければならない**.”

h. 詳細に対しては，Deser（1970）をみよ．論文は（1）よく選ばれた形式を利用する，(2) 計算を整理し直す．そして（3）“式 (21) と同じく自己結合の要求に基づくが，完全な理論は，無限級数としてよりもむしろ，ただ 1 つの（3 次の）付加項をもつ閉じた形で現れるという利点をもつ完全な Einstein の方程式を導く”，ように進む．

i. Deser は解析を最後に次のように要約する．“矛盾がないことは，したがってわれわれを不変的な結合に導いた，それは等価原理を意味する．一般相対論の幾何学的な解釈が生ずるのはこの点にある，なぜなら**すべての物質**は今や計量 $\mathfrak{g}^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$ の有効的な Riemann 空間内で動くからである．….［最初の］平坦な ‘背景’ 空間はもはや観測できない.” 言い換えれば，Einstein の場の方程式へのこの研究方法は “曲率をもたない曲率” あるいは，同等によく，“平坦な

時空でない平坦な時空” として要約できる！

6. 粒子物理学から生ずる空間の弾性としての Sakharov の重力の観点.

a. 均質で等方的な固体の変形に対する抵抗は 2 つの弾性定数，Young 率と Poisson 比で記述される.

b. 空間の変形に対する抵抗は 1 つの弾性定数，重力の Newton 的な定数で記述される．それは Hilbert の作用原理

$$I = \frac{1}{16\pi G}\int {}^{(4)}R(-g)^{1/2}\,d^4x + \int (L_{物質} + L_{場})(-g)^{1/2}\,d^4x = 極値 \tag{22}$$

に現れる.

c. 歴史的な記録によれば，固体を記述するのにどれだけこの弾性定数を要するかは，対称性や不変性の巨視的な考察からでなく，初めに物質の微視的な分子模型から導かれた（Newton, Laplace, Cauchy, Voigt, Kelvin, Born）．こうして，自然長あるいは自然角あるいは両方から変形される分子結合に蓄えられるエネルギーを勘定する．形式

$$e = A(\mathrm{Tr}\boldsymbol{s})^2 + B\mathrm{Tr}(\boldsymbol{s}^2) \tag{23}$$

の弾性物質の単位体積あたりの変形エネルギーに対する表現にいたる．ここにひずみテンソル

$$s_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_m}{\partial x^n} + \frac{\partial\xi_n}{\partial x^m}\right) \tag{24}$$

は，位置 x^m にあった代表点の位置 $x^m + \xi^m(x)$ への運動によって弾性媒質内に生み出されるひずみを測定する．定数 A および B は微視的な物理学から導かれる．それらは弾性の巨視的な理論の 2 つの弾性定数の値を定める.

d. Andrei Sakharov (1967) (*the* Andrei Sakharov) は重力あるいは，彼がよぶように，“空間の計量弾性” に対する同様の微視的な基礎を提案した．彼は Einstein の幾何力学の作用項［式 (22) の第 1 項］を，“真空の量子的な揺らぎの作用における変化［粒子および場の物理学と関連して，空間が曲がるときにもたらされる]” と同一視する.

e. Sakharov は今日の場の量子論は，くりこみによって取り除けないならば形式的に無限大であるだろう，真空内のエネルギー密度を，“くりこみの手続きによって取り除くことができる” と指摘する．こうして，平坦な空間内の電磁場の自由度の標準的な解析で，k から $k + dk$ までの円波数の領域内での，単位体積あたりの振動のモードの数を $(2\cdot 4\pi/8\pi^3)k^2\,dk$ として勘定する．おのおのの振動のモードは，絶対零度でも，“振動のゼロ点エネルギー”，$\frac{1}{2}h\nu = \frac{1}{2}\hbar ck$［これと関連して揺らいでいる電場は，すべての物理学的な効果の中でもっとも堅固に確

立されているものである．それは水素原子内の電子に対して陽子のみによって引き起こされる電場を補足して作用し，それによって，Welton (1948) および Dyson (1954) によってとくに明らかにされたように，水素原子のエネルギー準位での有名な Lamb–Retherford のずれの大部分を生み出す］の絶対的な既約最小量をもつ．時空の単位体積あたりの電磁場のゼロ点エネルギーの総密度（単位：cm^4）は形式的に

$$(\hbar/2\pi^2)\int_0^\infty k^3 dk \tag{25}$$

として発散する．同様に形式的にこの発散は “くりこみ” によって “除去” される［くりこみについてのより多くに対しては，たとえば，Hepp (1969) をみよ］.

f. 同様の発散は，他の場と関連したエネルギーと，電子，μ–中間子，および他の粒子の対の数についての真空の揺らぎと関連したエネルギーの，これらの粒子のどれかの静止質量と比較して大きい量子エネルギーの極限での値とを，形式的に合計するときに現れる．再び形式的な計算でのこれらの発散は “くりこみによって除去” される．

g. エネルギー密度，したがってストレス–エネルギーテンソルへの寄与だけでなく，すべてのこれらの場および粒子に対する変分原理の全 Lagrange 関数 $\mathcal{L}$,

$$I = \int \mathcal{L} d^4x = \text{極値} \tag{26}$$

への寄与もまたくりこみによって除去される．

h. 空間を曲げることはすべてのこれらのエネルギーを変えると，Sakharov は Zel'dovich (1967) の議論を拡張して指摘する．したがって “くりこみ” あるいは “引き算” の操作はもはやゼロを与えない．代わりに，Lagrangian へのゼロ点エネルギーの寄与は，1 の大きさの程度の数係数 $A, B, \cdots$ をもつ，曲率のべきについてのべき級数として展開されると，Ruzmaikina and Ruzmaikin (1969) によって以下のように単純化された形をとる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(R) = A\hbar \int k^3 dk + B\hbar^{(4)}R \int k dk \\ + \hbar[C(^{(4)}R)^2 + DR^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}] \int k^{-1} dk \\ + (\text{高次の項})\end{aligned} \tag{27}$$

［曲がった多様体での単位振動数あたりの定常波の数についての変化に対しては，Berger (1966)，Sakharov (1967)，Hill in De Witt (1967c)，Polievktov–Nikoladze (1969)，および Berger, Gauduchon, and Mazet (1971) をみよ．］

i. くりこみ物理学は式 (27) での第 1 項は落とされるべきであると主張する．第 2 項は Hilbert の作用原理，上述の式 (22) に形が同等である，ただ Riemann スカラー曲率不変量に掛けられる定数は $-c^3/16\pi G$（慣習的な単位で）であるが，

ここではそれは $B\hbar\int kdk$（同じ慣習的な単位で）であるということを除いて，とSakharov は指摘する．式 (27) での高次の項は，Sakharov が "Einstein の方程式に対する補正…" とよぶものに通じる．

j. これらの補正を見渡して，等式

$$G = (\text{Newton の重力定数}) = \frac{c^3}{16\pi B\hbar\int kdk} \tag{28}$$

を主張するとき，明らかに Einstein 理論の作用原理を得る．B は 1 の程度の，次元をもたない数因子であって，式 (28) での形式的に発散する積分の有効的な上限あるいは "切断" は，逆 Planck 長 [式 (7) をみよ].

$$k_{\text{切断}} \sim (c^3/\hbar G)^{1/2} = 1/L^* = 1/1.6\times 10^{-33}\text{cm} \tag{29}$$

の大きさの程度ととられるべきであることがわかる，と Sakharov は議論する．実際 Sakharov は述べている．(1) 場の物理学は Planck 長よりも小さい波長に対して，そして $\hbar ck_{\text{切断}} \sim 10^{28}$eV あるいは 10^{-5}g あるいはそれ以上の程度の量子エネルギーに対して，新しい不思議な何かへの大きな変化を受ける，(2) したがって積分 $\int kdk$ は切断である，そして (3) 場と粒子の物理学から純粋に生ずる，この切断の値は Newton の重力定数 G の値を支配する．

k. この意味で，Sakharov の解析は，粒子物理学に対する重力は，化学物理学に対する弾性のようなもので，たんに残りのエネルギーの統計的な度量であるということを，暗示している．一例では，分子結合は分子–分子結合の長さの標準値からのずれに依存する．他の例では，粒子のエネルギーは幾何学の曲率によって影響を受ける．

l. 単純にみえる弾性は，複雑である分子結合からその説明を得る．しかし複雑である分子結合は，Schrödinger の波動方程式，および弾性よりもさらに単純でさえある，電荷を帯びた質点間の Coulomb の力の法則によって説明される．

m. 単純にみえる Einstein の幾何力学は，Sakharov によって粒子物理学での補正項として解釈される．複雑な粒子物理学は，いつの日か今度は自分が何か単純なもの—何か幾何学よりもはるかに深くそしてはるかに単純なもの（"pregeometry" [幾何学以前]，44 章）に解明されるべく運命づけられているか？

17.6　Einstein の理論は "先験的な幾何学はない" によって特徴づけられる

*22　Einstein の重力理論は非常に強要的であるのに対して，より強要的でなくより優雅でない，代わりの理論を容易に構成することができる．物理学の文献には例がいっぱいある．

*22　Einstein の理論が他の重力理論と比較される

[解説としては Ni (1972)，および Thorne, Ni, and Will (1971) をみよ.] しかし，その競争相手の中に置かれるときには，Einstein の理論は鋭くそして明白にぬきんでている．それは実験と一致する．その競争相手の多くはそうでない (38–40 章)．それは重力を完全に幾何学によって記述する．その競争相手の多くはそうでない．それは “先験的な幾何学” に無関係である．その競争相手の多くはそうでない．

*23 実験との一致の問題は，38 章まで考慮しない．Einstein の理論は相変わらず独特である．すべての他の理論は補助的な重力場 [たとえば，Brans and Dicke (1961) のスカラー場] を導入する，あるいは “先験的な幾何学” を含む，あるいは，両方である．こうして，すべての他の理論は Einstein の理論よりも概念的により複雑である．すべての他の理論は複雑な要素を含み，それに対する実験的な動機は存在しない．

“先験的な幾何学” という概念は説明を要求する．それは少なからぬ要求である．なぜなら先験的な幾何学の排除は，Einstein を彼の幾何力学の方程式 $\boldsymbol{G} = 8\pi \boldsymbol{T}$ に本来導いたという推論で重要な役割を演じたからである．*24 **“先験的な幾何学” とは，不変に固定されている，すなわち，重力を及ぼす源の分布を変えることによって変えることのできない時空の幾何学の何らかの様相を意味する**．こうして，先験的な幾何学は物質によって生成されないかあるいは影響を受けない．それは力学的でない．*25 **例**：Nordstrøm (1913) は時空の物理学的な計量 $\boldsymbol{g}$ (等価原理に入る計量) が “背景” の平坦な時空の計量 $\boldsymbol{\eta}$，およびスカラー重力場 ϕ によって生成される理論を定式化した．

$$\eta^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha\beta} = -4\pi\phi\eta^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} \qquad (\text{ストレス–エネルギーによる } \phi \text{ の生成}) \tag{17.23a}$$

$$g_{\alpha\beta} = \phi^2\eta_{\alpha\beta} \qquad (\phi \text{ および } \boldsymbol{\eta} \text{ から } \boldsymbol{g} \text{ の構成}) \tag{17.23b}$$

この理論では，物理学的な計量 $\boldsymbol{g}$ (物差しや時計および試験粒子の支配者) はただ 1 つの変化できる自由度 (ϕ についての自由度) をもっている．$\boldsymbol{g}$ の残りは平坦な時空の計量 (“先験的な幾何学”) $\boldsymbol{\eta}$ によって固定される．Nordstrøm の式 (17.23) を $\boldsymbol{\eta}$ および ϕ に関係しない形 [Einstein and Fokker (1914)，練習問題 17.8]

$$\underbrace{R}_{\substack{\boldsymbol{g}\text{ から構成される}\\ \text{スカラー曲率}}} = 24\pi \underbrace{T}_{[g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}]}, \qquad \underbrace{C^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}}_{\substack{\boldsymbol{g}\text{ から構成される}\\ \text{Weyl テンソル}}} = 0 \tag{17.24}$$

に書き直しても先験的な幾何学は除かれない．質量は時空の幾何学でただ 1 つの自由度に，依然として影響できる．他の自由度は**先験的**に固定されている．それらは**先験的な幾何学**である．そしてこの先験的な幾何学はどのような式にも関係しない物理学的な実験によって完全によく (原理的に) 見つけることができる (コラム 17.3)．

---

*23　すべての他の理論は補助的な重力場あるいは先験的な幾何学を導入する

*24　“先験的な幾何学” が定義される

*25　先験的な幾何学の実例としての Nordstrøm の理論

コラム 17.3　先験的な幾何学の若干の型を見つけたり，あるいは除外する実験（1970 年 12 月の Alfred Schild と Charles W. Misner の議論に基づく）

適当なパルサーで十分に満たされている，一瞬の間静止している宇宙を選ぶ．パルサーは重力波および電磁波の両方の特徴的なパルスを絶対的に規則正しく，周期的に放射しているはずである．

受信機を含んだ 2 隊の宇宙船が実験データを集めるために“ステーション上”に送られる．大将 Weber の隊は重力波の受信機を運んでおり，大将 Hertz の隊は電磁気的な受信機を運んでいる．おのおのの宇宙船の船長は 3 個の適当に選ばれた（同一の振動数の）パルサーを監視し，それらのパルスがつねに一致して到着するように操作して自らを“ステーション上”に保つ．彼が収集する実験データは，ステーションを維持するために用いていない，すべての他のパルサーから受信されたパルスからなり，それらのおのおのは規準の（定常的な）パルスと一致するものとしてか，あるいは混ぜ合わされているものとして記録される．[表示目的のために，任意の 1 個のパルサーによって生み出されるパターンは音響の形に転換されうる．規準のパルスは 1 つのドラム上で一定の割合で（データを操作するコンピュータによって）音響として演じられ，そして他のパルサーからのパルスは 2 番目のドラム上で演じられうる．リズムのある音のパターンが生ずるだろう．]

データ隊が点検されそして調整を始めたときに，おのおのの隊長は定常的なパターンを報告する．今や実験が始まる．1 個あるいはより多くの重い星が隊の中で引っ張られる．隊はステーション上にとどまろうと反応し，そしてデータのパターンの変化を報告する．隊の外側の縁にいる宇宙船は，探知できるような変化は彼らのステーションで起こっていないことを確認する．したがって遠方のパルサーからの入射放射は新たに位置づけられた星によって影響を受けないとみなされうる．移動可能な星により近いデータステーションは興味深いデータを報告する．

結果は何であるか？

特殊相対論の法則によって支配される宇宙（時空はつねに平坦である）では，パターンは変化しない（Weber の隊はまず点検できなかった，重力波はパルサーから今まで認められなかったから．星も，他の何ものも重力場を生み出すことができない）．時空の幾何学のすべての様相は**先験的**に固定されている（完全な先験的な幾何学！）．重力は存在しない．そして Hertz の船長たちに彼らの位置を調整させるような光の偏向は起こらない．

Nordstrøm の重力理論（本文をみよ）によって支配される宇宙では，両方の船隊は調査し，すなわち，両方とも波をみる．しかしいずれの船隊も音のリズムのパターンに何の変化もみない．星は引っ張られており，重力波あるいは電磁波のいずれにも影

響をもたない．理論に存在する先験的な幾何学（$\boldsymbol{\eta}$）はいかなる光の偏向もまたいかなる重力波の偏向も除外する．

Whitehead（1922）の重力理論（Will（1971b）およびそこに引用されてある文献をみよ）によって支配される宇宙では，ラジオ波は“物理学的な計量”$\boldsymbol{g}$ の測地線に沿って伝播し，星の重力場によって偏向される．しかし重力波は平坦な背景計量 $\boldsymbol{\eta}$ の測地線に沿って伝播し，こうして星によって影響を受けない．したがって，Hertz の船長たちはステーション上にとどまるために位置を変えねばならない．そして彼らは規準のパルサーと他のパルサーとの間に変化する音のパターンを聞く．しかし Weber の船隊はステーション上にとどまり音のパターンに変化を記録しない．先験的な幾何学（$\boldsymbol{\eta}$）は実験結果に明白に現れる．

Einstein の理論によって支配される宇宙では，両方の船隊が効果をみる（Einstein の理論は先験的な幾何学をもたないから先験的な幾何学の証拠はない）．さらに，もし船隊がもともと，各ステーションに 1 つの Weber 船と 1 つの Hertz 船というように，対になっていたならば，それらは対のまま残る．高い振動数の光波と高い振動数の重力波の伝播の間に何の相違も存在しない．両方は $\boldsymbol{g}$ の測地線に沿って伝播する．

*26 数学は 1917 年には，“先験的な幾何学は存在しない”および“物理学の幾何学的な，座標によらない定式化”，に対する要求を切り開いて進むだけ十分洗練されていなかった．Einstein は両方の要求を“一般共変性”というただ 1 つの熟語で記述した．“先験的な幾何学は存在しない”は実際にはさらに進んだ一般相対論を要求するが，しかし“一般共変性”として変装させられ，匿名でそうすることによって，それはまた半世紀の混乱を生みだした．[たとえば，Kretschmann（1917）をみよ.]

先験的な幾何学（“絶対的な事象”）と力学的な場（“力学的な事象”）との間の区別の体系的な取り扱いは Anderson（1967）の相対論の教科書の注目すべき特徴である．

[練習問題]

17.8 Einstein–Fokker は Nordstrøm に帰着する

時空の計量 $\boldsymbol{g}$ に対して Weyl のテンソル (13.50) がゼロになることは，計量が等角的に平坦である，すなわち，$\boldsymbol{g} = \phi^2\boldsymbol{\eta}$（ここに $\boldsymbol{\eta}$ は平坦な時空の計量である）となるスカラー場 ϕ が存在することを保証する．[証明に対してはたとえば，Schouten (1954) をみよ.] こうして，Einstein–Fokker の式 (17.24)，$C^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = 0$ は，Nordstrøm の式 (17.23b) に同等である．この事実を手にして，Einstein–Fokker の場の方程式 $R = 24\pi T$ は Nordstrøm の場の方程式 (17.23a) に帰着することを示せ．

---

*26 Einstein の“一般共変性”の原理の一部として“先験的な幾何学は存在しない”

17.7 Einstein の方程式の歴史の鑑賞

現在の形への道で経験した戦いと変化以上に，アイデアとは今日何であり何を意味するかをよりよく示すものはない．一般相対論の完全な歴史は 1 冊の本を必要とするだろう．ここでは，わずかな偉大な論文からのわずかな重要な引用文により，適切な歴史が含むであろうもののささやかな鑑賞を与えてもらう．

Einstein (1908)："われわれは…したがって，以下において，重力場と基準系の対応する加速度との完全な物理学的な同等性を仮定する…．点 P での時計は座標原点での時計よりも空間の任意の場所の観測者に対して，$(1+\Phi/c^2)$ 倍速く進む…．したがって光線は重力場によって曲げられる…．エネルギー E の量は質量 E/c^2 をもつ．"

Einstein and Grossmann (1913)："ここに記述されている理論は，物体の慣性質量と重力質量との間の比例は，理論物理学の基本原理として表されなければならない厳密な自然法則であるという確信に由来する…．エレベーター内に閉じ込められた観測者は，エレベーターは静的な重力場内に静止しているかどうか，あるいはエレベーターは重力の存在しない空間内に位置してエレベーターに作用する力によって保持される加速度運動をしているかどうかを定める方法をもたない（等価の仮定）．…たとえば，ラジウムの崩壊で，[質量の] 減少は全質量の 1/10,000 になる．もしそれらの慣性質量での変化が重力質量での変化に対応しなかったならば，慣性質量の重力質量からのずれが生ずるであろうし，それは Eötvös の実験が許すよりもはるかに大きい．したがって重力質量と慣性質量との同等性は厳密であることはきわめて確からしいと考えられなければならない．

"一般化のために求められるものは確かに

$$\Gamma_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

の形であるだろう．ここに κ は定数であり，$\Gamma_{\mu\nu}$ は基本テンソル $g_{\mu\nu}$ から微分操作を通して生ずる 2 階の反変テンソルである…．[Poisson の] $\Delta\phi$ の一般化であり，そして任意の変換についてテンソルである $\Gamma_{\mu\nu}$ に対する微分表現を見出すことは，不可能であることがわかった．方程式の体系は任意の変換に対して共変であるべきであると要求することは，もっとも自然であるようにみえる．それは重力場の方程式がこの性質をもたないという結果と矛盾している．"

Einstein and Grossman (1914)："1913 年の取り扱いで…われわれはこれらの重力方程式に対して一般共変性を示すことができなかった．[それらの困難の原因：2 個の添字をもつ曲率テンソルの部分は左辺に置かれて場の方程式の 2 次の部分を構成し，$T_{\mu\nu}$ をもつ部分は右辺に置かれて，重力的なストレス–エネルギーとよばれた．左辺と右辺はテンソルとして変換することが要求されたが，一般的な座標変換のもとでそれは不可能である．]

Einstein (1915a)："近年私は一様でない運動の相対性までも仮定した上に，一般相対性理論の基礎をおこうと努めてきた．私は一般相対性の適度に定式化された仮定に対応する重力の唯一の法則を見出したと実際信じた．そしてこれらの会議録に昨年出た論文で，

厳密にこの解の必要性を確立しようと努めた.

“更新された解析は，その必要性が，そこで採用された方法には絶対に示されていないこと，それにもかかわらず，それは誤りに基づいていることが示されるべきであるように見えることを，私に示した.

“これらの理由のために，私が立てた場の方程式にすべての自信を失った．そして可能性を自然な手段で制限する方法を求めた．このようにして私は 3 年前に離れた場の方程式の一般共変性に対する要求に戻された．同時に友人 Grossmann とともにめいった気持ちで仕事を続けた．実際われわれはすでにそのとき，以下に与えられる問題の解にきわめて近くまで来ていたのである.

“以上述べられたことに従って，重力の場の方程式を

$$R_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$$

の形式で仮定することは自然である．なぜならこれらの式は行列式が 1 の任意の変換について共変であることを，われわれはすでに知っているからである．実際，これらの式は課さねばならないすべての条件を満たしている．[ここに $R_{\mu\nu}$ は Einstein が共変とみなした Ricci テンソルの一片である.] …

“式 (22a) は第 1 近似で

$$\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 0$$

を与える．この [条件] によって座標系は定まらない．この決定に対しては 4 つの式が必要であるという意味で”（1915 年 11 月 4 日の集まり，11 月 11 日出版された).

Einstein（1915b）：“最近出版された研究で，いかに重力場の理論は多次元多様体の Riemann の共変理論に基づいて樹立されうるかを示した．その理論のさらに確かな論理的な構造が達成されうることが，物質の構造について確かに大胆な付加的な仮説を導入して，ここで証明されるだろう…．与えられた表現が関係する物質について，重力場が本質的な部分を演ずることは十分によく可能であるだろう．そうすると実際には $T^\mu{}_\mu + t^\mu{}_\mu$ のみが正であり，そして $T^\mu{}_\mu$ はいたるところでゼロになるけれども，$T^\mu{}_\mu$ は全構造に対して正であるように現れうる．われわれは以下において実際，条件 $T^\mu{}_\mu = 0$ は [まったく] 一般的に満たされると仮定する.

“分子の [小さいスケールの] 重力場が物質の本質的な部分を構成するという仮説を，最初から拒絶しない者は誰でも，以下においてこの観点に対して強い支持をもつだろう.

“われわれの仮説は…重力の場の方程式を一般に共変な形式…

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$$

で与えることを可能にする [ここに $G_{\mu\nu}$ は Ricci テンソルである]”（1915 年 11 月 11 日の集まり，11 月 18 日に出版された).

Einstein（1915c）：“私は原理の反論がこの仮定 [場の方程式]，それによって空間および時間が事象の実在性の最後の痕跡から奪われている仮定，によって立っていないこと

を示した．現在の仕事で，私はこのもっとも基礎的な相対性理論の重要な確認を見出す．それは定性的にもまた定量的にも，水星の軌道運動の方向について軌道の永続的な歳差運動が，Leverrier によって発見されたように，1 世紀あたり約 45″ になるということを，どのような特別な仮説をもすべて要求せずに，説明することがわかる．”

Einstein（1915d，1915 年 11 月 25 日の集まり，12 月 2 日出版）：“より最近私は物質のエネルギーテンソルを，私の 2 つの以前の報告でなされたのと少し異なる方法で導入するとき，物質のエネルギーテンソルについて仮定なしに進むことができることを発見した．水星の近日点の運動に対する場の方程式はこの修正によって影響を受けない….

“さて

$$G_{im} = -\kappa\left(T_{im} - \frac{1}{2}g_{im}T\right)$$

と置こう［ここに G_{im} は Ricci テンソルである］.”…

…これらの式は，式 (9) と対照的に，新しい条件を含まない，したがってエネルギー運動量の［保存］法則に従う以外に，他の仮定が物質のエネルギーテンソルについてなされる必要はない．

“この段階で，一般相対論は最終的に論理的な構造として完成される．もっとも一般的な定式化での相対性の仮定は，時空の座標を物理学的に意味のないパラメータにし，水星の近日点の運動を説明する完全に決定的な重力の理論に強制的に通ずる．対照的に，一般相対性の仮定は，特殊相対論がこれまで教えなかった自然の他の過程の性質について，われわれに何ももたらすことはできない．私がこれらの会議録で最近表明したこの点についての意見は間違っていた．特殊相対論と共存するすべての物理学の理論は，その理論の受け入れ可能性に対して何らかの規準を供給すること［一般相対論］なしに，絶対的な微分計算によって一般相対論の系に，同調させることができる．”

Hilbert（1915）：“公理 I［記号は本書での表現に一致させるために変えられている］．物理学的な事象の法則は世界関数［Mie の術語；今日 “Lagrangian”］L としてよく知られている．それは以下の独立変数

$$g_{\mu\nu}, \qquad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}, \qquad \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}$$

$$A_\sigma, \qquad \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\tau}$$

を含み，そしてとくに積分

$$\int L(-g)^{1/2}\,d^4x$$

の変分は 14 個のポテンシャル $g_{\sigma\nu}, A_\sigma$ のどの 1 つ［についての変化］に対してもゼロにならねばならない….

“公理 II（一般共変性の公理）．世界関数 L は世界パラメータ［座標］x^α の任意の変換について不変である….

“世界関数 L に対して，さらなる公理がその選択を明確にするために必要とされる．もし重力方程式がポテンシャル $g^{\sigma\nu}$ の 2 次微分のみを含むべきであるとするならば，L は

$$L = R + L_{\text{elec}}$$

の形をもたねばならない．ここに R は Riemann テンソルからつくられる不変量（4 次元多様体の曲率）である”（1915 年 11 月 20 日の集まり）．

Einstein（1916c）：“最近 H. A. Lorentz および D. Hilbert は，一般相対論で，1 つの変分原理からその式を導くことについて，とくに透明な形を与えることに成功した．これは以下の取り扱いにおいてもまたなされるだろう．そこでは基礎的な関係をできるだけ透明にそして，一般相対論が許す限り一般的な方法で提示することが私の目的である．”

Einstein（1916b）：“これからまず重力場は光の速さで広がる…．［平面］波はエネルギーを輸送することができる…．こうして単位時間あたりの系の放射…

$$\frac{G}{24\pi}\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial^3 J_{\alpha\beta}}{\partial t^3}\right)^2$$

を得る．”

Hilbert（1917）：“因果律の原理に関する限りでは，物理学的な量およびそれらの時間変化率は，現在の時刻で任意の与えられた座標系で知られるだろう．そうすると予言は，それが，現在の時刻に対して用いられるそれらの座標が，厳密に不変に留まるようなすべてのそれらの変換について不変であるときにのみ物理学的な意味をもつだろう．私は未来に対するこの種の予言がすべて一義的に定まる，すなわち，因果律の原理はこの定式化で成り立つと宣言する．

“14 個の物理学的なポテンシャル $g_{\mu\nu}, A_\sigma$ の現在における知識から，未来における同じ量についてのすべての予言は，それらが物理学的な意味をもつ限り必然的にそして一義的に出る．”

18章
弱い重力場

歩ける道は完全な道でない.

話せる言葉は完全な言葉でない.

老子（LAO–TZU）（～紀元前3世紀）

18.1 線形化された重力理論

Einstein の場の方程式 $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ は，幾何学的な言葉およびそれらを書くときに
*1 用いられる短縮のために，ほとんどまったく微分方程式のようにみえず，多くの見慣れた性質をもつはるかに微分の少ない方程式のようにみえる．その事情をみる最善の方法は，
*2 Einstein の場の方程式を弱い場の状況

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{18.1}$$

例えば，$|h_{\mu\nu}| \sim |\Phi| \lesssim M_\odot/R_\odot \sim 10^{-6}$，太陽系に，あるいは星間空間を通って伝播する弱い重力波に適用することである．

弱い場の状況では，場の方程式を式 (18.1) が成り立つ座標系を用いて $h_{\mu\nu}$ のべきで展開できる．そして正確さをあまり失わずに，線形項のみを保持できる．生ずる形式はしばしば **"線形化された重力理論"** とよばれる．なぜならそれは独自に重要な理論であるから
*3 である．実際，(1) ゼロ静止質量 (2) スピン 2，をもつ (3) 平坦な時空での，量子力学的な粒子に対応する古典的な場を求めるときに得るのは正確にこの "線形化された理論" である [Fierz and Pauli(1939) をみよ]．トラック–2 の読者はすでに 7.1 節，練習問題 7.3，およびコラム 7.1 で線形化された理論を若干研究している．そこではそれは別名，"平
*4 坦な時空における重力のテンソル場の理論" で通っていた．ちょうど，一般相対論から線形化された理論に，平坦な時空の周りでの線形化によって（以下をみよ）"降りる" ことができるように，線形化された理論から一般相対論へ，線形化された場の方程式と運動方程式との間に調和を課することによって，あるいは同等のことであるが，(1) 線形化された重力場 $h_{\mu\nu}$ によって運ばれるストレス–エネルギー，(2) 場への補正 $h^{(1)}{}_{\mu\nu}$ に対する源として作用するこのストレス–エネルギーの影響，(3) 補正 $h^{(1)}{}_{\mu\nu}$ によって運ばれる–エネ

*1 "線形化された重力理論"
*2 (1) 一般相対論の弱い場の極限として
*3 (2) "平坦な時空" での重力の標準的な "場の理論" の記述として
*4 (3) 一般相対論を "導く" ための基礎として

ルギー，(4) 補正 $h^{(1)}{}_{\mu\nu}$ への補正 $h^{(2)}{}_{\mu\nu}$ に対する源として作用するこのストレス–エネルギーの影響，(5) 補正への補正によって運ばれるストレス–エネルギー等を要求することによって，逆方向に“やり遂げる”ことができる．一般相対論を導くこの代わりの方法は，Gupta(1954, 1957, 1962)，Kraichnan(1955)，Thirring(1961)，Feynman(1963a)，Weinberg(1965)，および Deser(1970) によって展開され研究された．しかし観点が幾何学的から離れている（コラム 18.1 をみよ）から，導出の詳細はここでは紹介されない（しかしコラム 17.2 の 5 項をみよ）．

*5 ここでは一般相対論から線形化された理論を導くことに注目する．計量の成分に対しては形 (18.1) を採用する．生ずる接続係数 (8.24b) は，計量摂動 $h_{\mu\nu}$ について線形化されるとき，

*6

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\alpha\nu,\beta} + h_{\beta\nu,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}) \\ &\equiv \frac{1}{2}(h_{\alpha}{}^{\mu}{}_{,\beta} + h_{\beta}{}^{\mu}{}_{,\alpha} - h_{\alpha\beta}{}^{,\mu})\end{aligned} \tag{18.2}$$

となる．ここで第 2 行は，$h_{\mu\nu}$ のべきについて展開するときはいつも規定どおりに用いられる慣習を導入する．つまり $h_{\mu\nu}$ の添字は $g^{\mu\nu}$ および $g_{\mu\nu}$ でなく，$\eta^{\mu\nu}$ および $\eta_{\mu\nu}$ を用いて上げ下げされる．Ricci テンソル (8.47) の同様の線形化は

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} &= \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu} \\ &= \frac{1}{2}(h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} + h_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu})\end{aligned} \tag{18.3}$$

ここに

$$h \equiv h^{\alpha}{}_{\alpha} = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} \tag{18.4}$$

さらに縮約して $R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ をつくった後，Einstein の方程式 $2G_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu}$ は，

$$\begin{aligned}&h_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu} \\ &\qquad - \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^{\beta}) = 16\pi T_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{18.5}$$

となる．項の数は $R_{\mu\nu}$ [式 (18.3)] から $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ [式 (18.5)] へ移行するときに増大したが，この厄介さは

*7

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{18.6}$$

を定義し，そして任意の他の対称テンソルへの対応する操作を意味するためにバーを用いることによって補うことができる．こうして $h_{\mu\nu}$ について 1 次まで $G_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu}$，そして $\bar{\bar{h}}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$，すなわち，$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$．この記号で**線形化された場の方程式は**

---

*5 線形化された理論の詳細

*6 (1) 接続係数

*7 (2) “重力ポテンシャル” $\bar{h}_{\mu\nu}$

コラム 18.1　一般相対論の幾何学的な観点からの導出とスピン 2 の観点からの導出が，比較されそして対照される

	Einstein の導出	スピン 2 の導出
最初にあった時空幾何学の性質？	最初にあったのではない．幾何学は物理学における力学的な参加者である	“神が与えた” 平坦な Lorentz 時空多様体
時空のトポロジー（多重連結性）	物理学の法則は局所的である．それらはトポロジーを指定しない	単純連結の Euclid 的なトポロジー
物理学の考え方	力学的な幾何学は物理学の “主要な場” である	この場，あの場，そして他の場すべて平坦な時空多様体内でそれらの力学を行う
一般相対論の導出に対する出発点	1. 等価原理（光子および試験粒子の世界線は時空の幾何学の測地線である） 2. 曲率から導かれるあのテンソルの保存量（Cartan の回転のモーメント）はストレス–運動量–エネルギーテンソルと同定されるべきである（15 章をみよ）	1. 平坦な時空内でスピン 2 そしてゼロ静止質量の場で始める 2. この場からつくられるストレス–エネルギーテンソルはこの場に対する源として役立つ
生ずる方程式	Einstein の場の方程式	Einstein の場の方程式
導出が出発した時空幾何学に生ずる評価	物理学における基本的な力学的参加者	何もない．生ずる理論は，元の平坦な幾何学が観測できないことを示し，それをすべての方程式から完全に除く
これらの方程式から現れる物理学の最大唯一の危機についての観点：完全な重力崩壊	物質および宇宙の性質を理解するのに中心的である	重要でないあるいはせいぜい周辺的である

*8 $$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta,}{}^{\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\nu} + \bar{h}_{\nu\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\mu} = 16\pi T_{\mu\nu} \tag{18.7}$$

となる.

これらの線形化された方程式での第 1 項は通常の平坦な空間の d'Alembertian, 他の項は単に式を "ゲージ–不変" に保つのに役立つ（コラム 18.2 をみよ）. コラム 18.2 では一般性を失わずに, "ゲージ条件"

*9 $$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \tag{18.8a}$$

を課すことができる. これらのゲージ条件は電磁気論の Lorentz ゲージ $A^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ のテンソル類似物である. 場の方程式 (18.7) はそうすると

*10 $$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = 16\pi T_{\mu\nu} \tag{18.8b}$$

となる.

ゲージ条件 (18.8a), 場の方程式 (18.8b), および計量の定義

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \tag{18.8c}$$

は Lorentz ゲージで書かれた重力の線形化された理論の基本方程式である.

［練習問題］

18.1 Riemann 曲率のゲージ不変性

線形化された理論では Riemann テンソルの成分は

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\nu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu\nu}) \tag{18.9}$$

であることを示せ. それからこれらの成分はコラム 18.2 で議論された形のゲージ変換 (4b) によって不変にとどまることを示せ. Einstein テンソルは Riemann テンソルの縮約であるから, これは Einstein テンソルはまたゲージ不変であることを示している.

18.2 Lorentz ゲージの正当化

線形化された理論の場の方程式 (18.7) に対する特解が任意のゲージで, 与えられているとする. 4 個の生成関数 $\xi_{\mu}(t, x^j)$ が必ず存在して, そのゲージ変換［コラム 18.2, 式 (4b)］は

$$\bar{h}^{新しい\ \mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \qquad \text{(Lorentz ゲージ)}$$

を満たすことを示せ. また続いて起こるゲージ変換はこの Lorentz ゲージ条件を, その生成関数が源をもたない波動方程式

---

*8 (3) 線形化された場の方程式
*9 (4) ゲージ条件
*10 (5) 場の方程式と Lorentz ゲージでの計量

$$\xi^{\alpha,\beta}{}_{\beta} = 0$$

を満たす場合に限り，影響を受けずにとどまらせることを示せ．

18.3　静的な，球対称の物体の外場

静的な球対称の物体の外部重力場を，物体がすべての t に対して $x=y=z=0$ に位置している物体の（ほとんど）Lorentz 系で，すなわち，ほとんど直交座標系 $|h_{\mu\nu}|\ll 1$ で，記述されるものと考える．Lorentz ゲージを採用することとする．

(a) 場の方程式 (18.8b) およびゲージ条件 (18.8a) は

$$\bar{h}_{00} = 4M/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}, \qquad \bar{h}_{0j} = \bar{h}_{jk} = 0,$$
$$h_{00} = h_{xx} = h_{yy} = h_{zz} = 2M/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}, \quad h_{\alpha\beta} = 0 \ \ (\text{もし}\alpha\neq\beta\text{ならば})$$

を意味する．ここに M は定数（物体の質量，19.3 節をみよ）である．

コラム 18.2　線形化された理論におけるゲージ変換と座標変換

A. 線形化された理論の基本方程式は， ほとんど大域的に Lorentz である任意の座標系で書かれたとき，式 (18.1) および (18.7) である．

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{1}$$

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\nu} + \bar{h}_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\mu} = 16\pi T_{\mu\nu} \tag{2}$$

2 つの異なる型の座標変換，大域的な Lorentz 変換，および無限小座標変換は，ほとんど大域的な Lorentz 系を互いに結びつける．

1. **大域的な Lorentz 変換**

$$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'} x^{\alpha'}, \qquad \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha'\beta'} \tag{3a}$$

これらは計量係数を

$$\eta_{\alpha'\beta'} + h_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}} g_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$$
$$= \eta_{\alpha'\beta'} + \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'} h_{\mu\nu}$$

によって変換する．こうして，$h_{\mu\nu}$ および同様に $\bar{h}_{\mu\nu}$ は平坦な時空でテンソルの成分のように変換する．

$$h_{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'} h_{\mu\nu} \tag{3b}$$

2. **無限小座標変換**（座標系での“さざなみ”の創造）

$$x^{\mu'}(\mathcal{P}) = x^{\mu}(\mathcal{P}) + \xi^{\mu}(\mathcal{P}) \tag{4a}$$

ここに $\xi^{\mu}(\mathcal{P})$ は $|h_{\mu'\nu'}| \ll 1$ にとどめるべく十分小さい 4 個の任意の関数である．この種類の無限小変換はすべてのスカラー場，ベクトル場，およびテンソル場の関数形にわずかな変化をつくる．例：温度 T は位置の一義的な関数，$T(\mathcal{P})$ である．したがって座標の関数として書かれるときはそれは変化する．

$$\begin{aligned} T(x^{\mu'} = a^{\mu}) &= T(x^{\mu} + \xi^{\mu} = a^{\mu}) = T(x^{\mu} = a^{\mu} - \xi^{\mu}) \\ &= T(x^{\mu} = a^{\mu}) - T_{,\mu}\xi^{\mu} \end{aligned}$$

すなわち，もし $\xi^0 = 0.001\sin(x^1)$，そしてもし $T = \cos^2(x^0)$ ならば，

$$T = \cos^2(x^{0'}) + 0.002\,\sin(x^{1'})\cos(x^{0'})\sin(x^{0'})$$

これらのちっぽけな変化は計量を除くすべての量で無視されうる．ただし計量の $\eta_{\mu\nu}$ からのちっぽけなずれは重力についてのすべての情報を含んでいる．計量に対する通常のテンソル変換則

$$g_{\rho'\sigma'}[x^{\alpha'}(\mathcal{P})] = g_{\mu\nu}[x^{\alpha}(\mathcal{P})]\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\rho'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\sigma'}}$$

は，変換則 (4a) および

$$g_{\mu\nu}[x^{\alpha}(\mathcal{P})] = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}[x^{\alpha}(\mathcal{P})]$$

と結合されるとき

$$\begin{aligned} g_{\rho'\sigma'}(x^{\alpha'} = a^{\alpha}) &= \eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}(x^{\alpha} = a^{\alpha}) - \xi_{\rho,\sigma} - \xi_{\sigma,\rho} \\ &\quad + \text{無視できる補正} \sim h_{\rho\sigma,\alpha}\xi^{\alpha} \text{ および } \sim h_{\rho\alpha}\xi^{\alpha}{}_{,\sigma} \end{aligned}$$

を示す．

したがって**新しい座標系 $(x^{\mu'})$ と古い座標系 (x^{μ}) における計量の摂動関数は**

$$h_{\mu\nu}^{\text{新しい}} = h_{\mu\nu}^{\text{古い}} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \tag{4b}$$

で関係している．それに対してすべての他のスカラー，ベクトル，およびテンソルの関数形は，線形化された理論の精度内で変わらない．

B. ゲージ変換とゲージ不変性． 線形化された理論では通常式 (4b) をゲージ変換とみなし，それは電磁気論のゲージ変換

$$A_{\mu}^{\text{新しい}} = A_{\mu}^{\text{古い}} + \Psi_{,\mu} \tag{5a}$$

に類似している．重力的なゲージ変換はスカラー，ベクトル，あるいはテンソル（す

なわち，観測可能量）の関数形に影響を及ぼさないという事実は，“ゲージ不変性”とよばれる．ちょうど率直な計算が電磁場のゲージ不変性，

$$F_{\mu\nu}^{\text{新しい}} = A_{\nu,\mu}^{\text{新しい}} - A_{\mu,\nu}^{\text{新しい}} = A_{\nu,\mu}^{\text{古い}} + \Psi_{,\nu\mu} - A_{\mu,\nu}^{\text{古い}} - \Psi_{,\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{\text{古い}} \tag{5b}$$

を示すように，率直な計算（練習問題 18.1）は Riemann テンソルのゲージ不変性，

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}^{\text{新しい}} = R_{\mu\nu\alpha\beta}^{\text{古い}} \tag{6}$$

を示す．このようなゲージ不変性はすでに $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ はテンソルの成分であるという事実によって保証された．こうして直交形 $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \eta_{\mu\nu}$ において，$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{\text{古い}}$ の成り立つ古い座標で，あるいは $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{\text{新しい}}$ の成り立つ新しい座標で計算されようと，本質的に同じである．

Riemann テンソルのように，Einstein テンソルおよびストレス–エネルギーテンソルはゲージ変換によって影響を受けない．したがって，**与えられた $T_{\mu\nu}$ に対する線形化された場の方程式 (2) への特解 $\bar{h}_{\mu\nu}$ を知れば，ゲージの変換 (4) によって正確に同じ物理学的な状況（すべての観測可能量は不変である）を記述する別の解を得ることができる，ここに ξ_μ は 4 個の任意のしかし小さい関数である．**

C. Lorentz ゲージ． 任意の物理学的な状況に対して，$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ となるようにゲージ（すなわち，座標）を限定することができることを示すことができる（練習問題 18.2）．これが 18.1 節で導入された Lorentz ゲージである．Lorentz ゲージは一義的に固定されない．ゲージ条件 $\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ は

$$\xi^{\alpha,\beta}{}_{\beta} = 0$$

を満たす任意のゲージ変換によって影響を受けずにとどまる（練習問題 18.2 をみよ）．

D. 曲線座標系． 与えられた系（たとえば，太陽系）に対してひとたびゲージが固定されたとすると，$h_{\mu\nu}$ および $\bar{h}_{\mu\nu}$ を平坦な時空でのテンソルの成分とみなすことができる．そして場の方程式 (2) および選ばれたゲージ条件を平坦な時空での幾何学的な，座標によらない式とみなすことができる．この観点は，もし望むならば，曲線座標（たとえば，太陽に中心をもつ球面座標）を用いることを可能にする．しかしそうするときには，計量の Lorentz 成分 $\eta_{\mu\nu}$ を，平坦な時空の曲線座標系での計量の成分 $g_{\mu\nu\,\text{平坦}}$ でいたるところ置き換えなければならない．そして場の方程式およびゲージ条件でのすべての常微分（“コンマ”）を $g_{\mu\nu\,\text{平坦}}$ からくる接続係数をもつ共変微分で置き換えなければならない．例については練習問題 18.3 をみよ．

(b) 球面極座標,

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta$$

を採用する．$h_{\mu\nu}$ および $\bar{h}_{\mu\nu}$ を平坦な時空でのテンソルの成分（コラム 18.2 の終わりをみよ）とみなし，通常のテンソル変換則を用いることによって，(a) で見出される解を

$$\bar{h}_{00} = 4M/r, \qquad \bar{h}_{0j} = \bar{h}_{jk} = 0,$$

$$h_{00} = \frac{2M}{r}, \qquad h_{0j} = 0, \qquad h_{jk} = \frac{2M}{r} g_{jk\,平坦}$$

の形式で表現する．ここに $g_{\alpha\beta\,平坦}$ は球面座標系での平坦な時空の計量成分である．

$$g_{00\,平坦} = -1, \qquad g_{rr\,平坦} = 1, \qquad g_{\theta\theta\,平坦} = r^2,$$

$$g_{\phi\phi\,平坦} = r^2\sin^2\theta, \qquad g_{\alpha\beta\,平坦} = 0 \ \ (\alpha \neq \beta \ \ であるとき)$$

それによって，線形化された次数まで正確な，一般相対論の線要素は

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + (1 + 2M/r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2)$$

であると結論せよ．

(c) 一般的な，静的な，球対称の，Lorentz ゲージの，線形化された場の方程式に対する真空解を出発点から，完全に球座標で作業して導け．[ヒント：コラム 18.2 の終わりで議論されたように式 (18.8c) での $\eta_{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu\,平坦}$ で置き換えられなければならない．そして場の方程式およびゲージ条件 (18.8a), (18.8b) で，すべてのコンマ（偏微分）は $g_{\mu\nu\,平坦}$ から出る接続係数をもつ共変微分で置き換えられなければならない.]

(d) この重力場に対する Riemann 曲率テンソルを計算せよ．答えは式 (1.14) と一致するはずである．

18.2 重 力 波

*11 線形化された理論のゲージ条件と場の方程式 (18.8a), (18.8b) は Lorentz ゲージで平坦な時空での電磁気論の方程式に密接な類似性をもつ．

$$A^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \tag{18.10a}$$

$$-A^{\mu}{}_{,\alpha}{}^{\alpha} = 4\pi J^{\mu} \tag{18.10b}$$

それらは追加された添字（$h^{\mu\nu}$ 対 A^{μ}，$T^{\mu\nu}$ 対 J^{μ}）についてのみ異なる．したがって，電磁気論についての過去の経験から，線形化された重力理論についての多くを推測できる．

*11 線形化された理論と電磁気論が比較される

たとえば，場の方程式 (18.8b) は重力波の解をもたねばならない．電磁気の平面波

$$A^x = A^x(t-z), \qquad A^y = A^y(t-z), \qquad A^z = 0, \qquad A^0 = 0$$

*12 の類似物は重力の平面波

$$\bar{h}^{xx} = \bar{h}^{xx}(t-z), \qquad \bar{h}^{xy} = \bar{h}^{xy}(t-z), \qquad \bar{h}^{yy} = \bar{h}^{yy}(t-z),$$
$$\bar{h}^{\mu 0} = \bar{h}^{\mu z} = 0 \qquad (\text{すべての}\ \mu\ \text{に対して}) \tag{18.11}$$

このような波の詳細な研究は 35–37 章まで延期されるだろうけれども，これらの波の若干の性質は次節の終わりの練習問題で研究される．

18.3　重力の物質に対する効果

*13 弱い重力場の物質に対する効果は，線形化された計量 (18.1) および Christoffel の記号 (18.2) を，適当な運動方程式，すなわち，測地線の方程式 (粒子あるいは光線の運動に対する)，流体力学的な方程式 (流体物質に対する)，Maxwell の方程式 (電磁波に対する)，あるいは場や物質が存在するであろう場合にそれらの全ストレス–エネルギーテンソルに対する式 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 0$ で，用いることによって計算されうる．練習問題 18.5，18.6 および 18.7 は，練習問題 16.1 と 16.4，および 17.4 節での Newton 的極限での計算と同じように，例を与える．しかしながら，もし最低次の (線形化された) 重力的な "力" (Christoffel 記号の項) が重力場の源の運動に重要な影響をもつならば，線形化された場の方程式 (18.7) は不適当であり，Einstein の方程式に対するよりよい近似が考慮されねばならない．[こうして機械的にあるいは電気的に動かされる振動子による重力波の放射は線形化された理論の範囲内で起こる．しかし二重星系，あるいは重力が保持する星の振動による放射は Einstein の方程式での非線形項 (重力の "ストレス–エネルギー") の議論を必要とするだろう．36.9–36.11 節をみよ．]

上述の結論は線形化された場の方程式と関連する保存則の考察から出る．まさに電磁気の方程式 (18.10a), (18.10b) が電荷の保存

$$J^{\mu}{}_{,\mu} = 0, \qquad \int_{\text{全空間}} J^0(t,x)\,dxdydz \equiv Q = \text{一定}$$

*14 を保証するように，重力的な方程式 (18.8a), (18.8b) は真空によって境界づけられた任意の物体の全 4–運動量および全角運動量の保存を保証する．

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{18.12a}$$
$$\int_{\text{物体}} T^{\mu 0}(t,\boldsymbol{x})\,dx\,dy\,dz \equiv P^{\mu} = \text{一定} \tag{18.12b}$$

---

*12　平面重力波

*13　弱い重力の物質に対する効果をいかに解析するか

*14　線形化された理論での 4–運動量と角運動量の保存

$$(x^\alpha T^{\beta\mu} - x^\beta T^{\alpha\mu})_{,\mu} = 0 \tag{18.13a}$$

$$\int_{\text{物体}} (x^\alpha T^{\beta 0} - x^\beta T^{\alpha 0}) dx\, dy\, dz \equiv J^{\alpha\beta} = \text{一定} \tag{18.13b}$$

(特殊相対論での角運動量の基礎的な性質に対しては 5.11 節をみよ．角運動量はここでは座標系の原点について計算される)．さて線形化された場の方程式 (18.7) およびこれらの保存則に現れるストレス–エネルギー成分 $T^{\mu\nu}$ は，正確に特殊相対論（$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ をもつ）
*15 を用いて計算する成分であることは重要である．結果として，ここで公式化されたエネルギー–運動量の保存は重力の寄与あるいは効果を含まない！ このことから，線形化された理論は，重力が重要な仕事をしないことを仮定していることがわかる．たとえば，重力放射の減衰力によるエネルギー損失は線形化された理論によって無視される．同様に，$h_{\mu\nu}$ の源として作用する物体のおのおのに対する 4–運動量 P^μ の保存は，各物体は $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ の測地線に沿ってよりもむしろ $\eta_{\mu\nu}$ の測地線に沿って運動する（ほとんど Lorentz 座標系での直線）ことを意味する．こうして，線形化された理論は $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ を用いて，試験粒子と場の運動を計算するために用いられうる．しかし源そのものの運動に対する重力の補正を含むためには—重力の補正が $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ よりもむしろ $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ を満たすことを可能にするためには—場の方程式に，線形化された理論が捨てる非線形項を再投入しなければならない（たとえば，保存則について 20 章をみよ，重力波の生成および放射の反作用については 36.9–36.11 節をみよ，そしてポスト Newton の近似については 39 章をみよ）．

線形化された理論での重力波によって放射されるエネルギー，運動量，および角運動量は，電磁波に対して電磁気論で用いられる方法に類似した特殊相対論の方法で計算されうる［Fiertz and Pauli (1939)］．しかし完全に重力的な方法を用いることがより多くの知識を与えそして強力であるだろう（35 および 36 章）．

［練習問題］

18.4 平面重力波に対する時空の曲率

重力的な平面波 (18.11) に対する Riemann 曲率テンソル (18.9) の成分を計算せよ．
［答え：

$$R_{x0x0} = -R_{y0y0} = -R_{x0xz} = +R_{y0yz} = +R_{xzxz} = -R_{yzyz} = -\frac{1}{4}(\bar{h}_{xx} - \bar{h}_{yy})_{,tt},$$

$$R_{x0y0} = -R_{x0yz} = +R_{xzyz} = -R_{xzy0} = -\frac{1}{2}\bar{h}_{xy,tt}$$

すべての他の成分は上述の成分から対称性 $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$ によって得られるものを除いてゼロである.］

*15 線形化された理論の妥当性についての限界：重力は源の運動に重要な影響を及ぼしてはならない

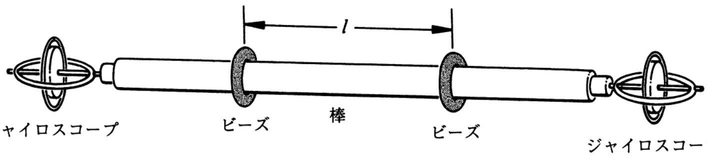


図 18.1　両端にジャイロスコープをもつビーズを並べられた棒からなる，重力波に対する原始的な検波器 [Bondi(1957)]．議論に対しては練習問題 18.5 をみよ．

18.5　素朴な重力波の検波器（図 18.1 をみよ）

2 個のビーズが滑らかな棒上をほとんど自由に滑り，わずかな摩擦だけがそれらの滑りを妨げる．棒は時空を通して自由に落下し，その中心は測地線に沿って動き，そしてその両端はジャイロスコープに結びつけられている．したがってジャイロスコープは回転しない．ビーズは棒の中心から等距離（距離 $\frac{1}{2}l$）の位置にある．棒に衝突する平面重力波［式 (18.11) および練習問題 18.4］は，ビーズを前後に押す（"測地線のずれ"，"潮汐重力"）．棒上のビーズに生ずる摩擦は棒を熱する．そして波の通過は棒の温度での上昇を測定することによって認められる*（もちろん，これはすべての考えられる最善の計画でない!）．ビーズの運動に対する摩擦の効果を無視して，ビーズを分離させている固有距離を時間の関数として計算せよ．［ヒント: $\boldsymbol{\xi}$ をビーズ間の分離とする．そして $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|$ を棒自身の静止系で棒に沿って方向を示す単位ベクトルとする．そうするとビーズの分離は大きさ $l = \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n}$ をもつ．棒は回転していないという事実は $\boldsymbol{n}$ に対する平行移動の法則，$\boldsymbol{\nabla_u n} = 0$ に表されている（6.5，6.6 および 13.6 節の "Fermi–Walker 移動" は平行移動に帰着する．なぜなら棒は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla_u u} = 0$ をもつ測地線に沿って動くからである）．こうして

$$dl/d\tau = \boldsymbol{\nabla_u}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{\nabla_u \xi})\cdot\boldsymbol{n},$$

$$d^2l/d\tau^2 = \boldsymbol{\nabla_u\nabla_u}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{\nabla_u\nabla_u\xi})\cdot\boldsymbol{n}$$

ここに τ は棒の固有時間である．しかし $\boldsymbol{\nabla_u\nabla_u\xi}$ は波の Riemann 曲率によって生み出される（測地線のずれ）．

$$(\boldsymbol{\nabla_u\nabla_u\xi})\cdot\boldsymbol{n} = [-\boldsymbol{Riemann}(\cdots,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u})] \text{ の } \boldsymbol{n} \text{ に沿う射影}$$

（棒に垂直な，すなわち，$\boldsymbol{n}$ に垂直な測地線のずれの力は棒がビーズを押し返すことによって相殺され，ビーズが棒を通り抜けることを止める，すなわち物質が物質を貫通することはない!）こうして，

$$d^2l/d\tau^2 = -\boldsymbol{Riemann}(\cdots,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{Riemann}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u})$$

この加速度を棒の局所 Lorentz 系で求めよ．波は z 方向に伝播しそして棒の方向は成分 $n^z = \cos\theta$，$n^x = \sin\theta\cos\phi$，$n^y = \sin\theta\sin\phi$ をもつように座標を位置づけよ．$l(\tau)$ に対して生ずる微分方程式を解け.］［答え：

* この思考実験は Bondi によって，重力波の実在の懐疑論者を納得させるための手段として考案された [1957, 1965, Bondi and McCrea (1960)].

$$l = l_0 \left[1 + \frac{1}{4}(\bar{h}_{xx} - \bar{h}_{yy}) \sin^2\theta \cos 2\phi + \frac{1}{2}\bar{h}_{xy} \sin^2\theta \sin 2\phi\right]$$

ここに $\bar{h}_{jk}$ は棒の世界線 ($x = y = z = 0$) 上で求められる．もし棒が波の伝播方向に沿って方向づけられるならば（もし $\theta = 0$ ならば），ビーズは動かないことに注意せよ．この意味で，波の効果（測地線のずれ）は純粋に横方向である．さらなる議論に対しては，35.4–35.6 節をみよ．]

18.4 ほとんど Newton 的な重力場

*16 Lorentz ゲージでの線形化された場の方程式 (18.8a), (18.8b) に対する一般解は電磁気論からよく知られた形の遅延積分としての表現にかなう．

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{x}) = \int \frac{4T_{\mu\nu}(t - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|, \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x' \tag{18.14}$$

この解の重力波的な様相は 36 章で研究されるだろう．ここではほとんど Newton 的な源

*17 $T_{00} \gg |T_{0j}|$, $T_{00} \gg |T_{jk}|$, および遅延が無視できるほど十分遅い速度に注意を集中する．この場合には，式 (18.14) は

$$\bar{h}_{00} = -4\Phi, \qquad \bar{h}_{0j} = \bar{h}_{jk} = 0 \tag{18.15a}$$

$$\Phi(t, \boldsymbol{x}) = -\int \frac{T_{00}(t, \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x' = \text{Newton 的なポテンシャル} \tag{18.15b}$$

に帰着する．対応する計量 (18.8c) は

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad (18.15c) \\ &\approx -(1 - 2M/r)dt^2 + (1 + 2M/r)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \ \ \text{(源から離れたところで)} \end{aligned}$$

である．この計量についての誤差は以下のことである．(1) 線形化された理論が気づかない非線形性による次数 Φ^2 の欠けている補正，(2) $\bar{h}_{0j} = 0$ と置くことによる欠けている補正（これらは次数 $\bar{h}_{0j} \sim \Phi v$，ここに $v \sim |T_{0j}|/T_{00}$ は源での代表的な速度である），(3) $\bar{h}_{jk} = 0$ と置くことによる欠けている補正［これらは次数 $\bar{h}_{jk} \sim \Phi(|T_{jk}|/T_{00})$ である］．太陽系ではこれらの誤差はすべて $\sim 10^{-12}$，ここに $\Phi \sim 10^{-6}$ である．

Newton の理論との受動的な対応は $g_{00} = -(1 + 2\Phi)$ のみを要求した［式 (17.19) をみよ］．しかし，線形化された理論はすべての計量係数を，$\sim \Phi v$, $\sim \Phi^2$, および $\sim \Phi(|T_{jk}|/T_{00})$

*18 の誤差まで定める．これは太陽系での光の曲がりおよび重力による赤方偏移を正しく予言するに十分な精度である（わずかな誤差 $\sim 10^{-6}$），しかし近日点の変位を予言するには十分でない．

---

*16 線形化された場の方程式の遅延–積分解

*17 線形化された理論の極限としての Newton 的重力

*18 線形化された理論によって予言される光の曲がりおよび重力による赤方偏移

［練習問題］

18.6　太陽による光の曲がり

高い精度まで，太陽は静的でありそして球状である．したがってその外部の線要素は $\Phi = -M/r$ をもつ［式 (18.15c)］．すなわち

$$ds^2 = -(1-2M/r)dt^2 + (1+2M/r)(dx^2+dy^2+dz^2) \quad \text{(太陽外のいたるところで)} \tag{18.16}$$

この曲がった時空の赤道面 $(z=0)$ 内で動いている光子は世界線

$$x = t, \qquad y = b \equiv \text{“衝突径数”}, \qquad z = 0 \tag{18.17}$$

からごくわずかだけずれる．ずれの量を以下のように計算せよ．

(a) 光子の世界線に対する測地線の方程式 (16.4a)

$$\frac{dp^\alpha}{d\lambda^*} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}p^\beta p^\gamma = 0 \tag{18.18}$$

を書き下ろせ．［ここに $\boldsymbol{p} = d/d\lambda^*$ =(光子の 4–運動量)=(光子のヌル測地線への接線ベクトル).］

(b) 赤道面内での接続係数を求め，そして近似的な世界線 (18.17) に対応する 4–運動量の成分の近似値，$|p^y| \ll p^0 \approx p^x$ を用いて，

$$\frac{dp^y}{d\lambda^*} = \frac{-2Mb}{(x^2+b^2)^{3/2}}p^x\frac{dx}{d\lambda^*}, \qquad p^x = p^0\left[1 + O\left(\frac{M}{b}\right)\right] = \text{定数}\left[1 + O\left(\frac{M}{b}\right)\right]$$

を示せ．

(c) $x = -\infty$ で $p^y = 0$ を仮定して（光子は初め正確に x 方向に動いている），p^y に対するこの方程式を積分せよ．それによって

$$p^y(x = +\infty) = -\frac{4M}{b}p^x$$

を得よ．

(d) これは角度

$$\Delta\phi = 4M/b = 1''.75(R_\odot/b) \tag{18.19}$$

だけ光がずれることに対応することを示せ．ここに $R_\odot$ は太陽の半径である．この予言と実験との比較に対しては，コラム 40.1 をみよ．

18.7　重力による赤方偏移

(a) 形式

$$dp_\mu/d\lambda^* - \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}p_\alpha p^\beta = 0$$

に書かれている，光子に対する測地線の方程式を用いて，太陽の重力場［線要素 (18.16)］内で自由に動いているどのような光子も $dp_0/d\lambda^* = 0$．すなわち，

$$p_0 = \text{光子の世界線に沿って一定} \tag{18.20}$$

を証明せよ．

(b) 太陽の表面に静止している原子は，直交系でみたときに，波長 λ_e の光子を放出する．［**注意**：

$$h\nu_e = h/\lambda_e = (\text{原子が測定するエネルギー}) = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}_e \tag{18.21}$$

ここに $\boldsymbol{p}$ は光子の 4–運動量でありそして $\boldsymbol{u}_e$ は放出者の 4–速度である．］太陽から離れて静止している原子は光子を受け取り，そしてその波長は λ_r であると測定する．［**注意**：$h/\lambda_r = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}_r$.］光子は量

$$z \equiv \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{M_\odot}{R_\odot} = 2\times10^{-6} \tag{18.22}$$

だけ赤方偏移していることを示せ．［**ヒント**：$\boldsymbol{u}_r = \partial/\partial t$, $\boldsymbol{u}_e = (1-2M/r)^{-1/2}\partial/\partial t$. なぜか？］重力による赤方偏移と実験結果のさらなる議論に対しては，7.4 および 38.5 節，また図 38.1 および 38.2 をみよ．

19章 重力を及ぼしている系の質量と角運動量

19.1 弱い重力を及ぼしている源の外場

[*1] 非常に弱い重力をもつ孤立系を考え，その構造と運動を計算するときには自らの重力効果を完全に無視することができる（これは小惑星，および磁場内でらせん状に運動している高エネルギーの電子や陽子をもつ星雲について成り立つが，地球や太陽について成り立たない）．系について，これ以外の何事も仮定しない．たとえば，Newton の理論と対照的に，速度は光速度に任意に近いことを許し，そしてストレス T^{jk} および運動量密度 T^{0j} は質量–エネルギー密度 T^{00} に匹敵することを許す．

[*2] このような系によって生み出される弱い重力場，

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{19.1}$$

$$\bar{\bar{h}}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} = \int \frac{4\bar{T}_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \tag{19.2}$$

を計算する［式 (18.14) の “棒をつけた” バージョンをみよ］．注意を系外の遠く離れた時空領域に限定せよ，そして関係式

$$\bar{T}_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} \bar{T}_{\mu\nu}(t - r, \mathbf{x}')\right] (r - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)^n \tag{19.3a}$$

$$r - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = x^j \left(\frac{x^{j'}}{r}\right) + \frac{1}{2}\frac{x^j x^k}{r}\left(\frac{x^{j'} x^{k'} - r'^2 \delta_{jk}}{r^2}\right) + \cdots \tag{19.3b}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{x^j}{r^2}\frac{x^{j'}}{r} + \frac{1}{2}\frac{x^j x^k}{r^3}\frac{(3x^{j'} x^{k'} - r'^2 \delta_{jk})}{r^2} + \cdots \tag{19.3c}$$

を用いて，$h_{\mu\nu}$ を $\mathbf{x}'/r \equiv \mathbf{x}'/|\mathbf{x}|$ のべきについて展開せよ．系の静止系での計算を遂行せよ．ここに

$$P^j \equiv \int T^{0j}\, d^3x = 0 \tag{19.4a}$$

ただし座標原点を系の質量中心にとる．

$$\int x^j T^{00}\, d^3x = 0 \tag{19.4b}$$

[*1] $1/r$ についてのべき級数としての，弱い重力を及ぼしている系から離れたところでの計量

[*2] (1) 導出

結果は，h_{00} および h_{0j} を単純化するためにゲージを変えた後には，

*3

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] dt^2 - \left[4\epsilon_{jkl} S^k \frac{x^l}{r^3} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] dt dx^j$$
$$+ \left[\left(1 + \frac{2M}{r}\right)\delta_{jk} + \begin{pmatrix}\mathrm{O}(1/r)\text{ として消えて}\\ \text{いく重力放射の項}\end{pmatrix}\right] dx^j dx^k \qquad (19.5)$$

である（導出に対しては練習問題 19.1 をみよ）．ここに M および S^k は物体の質量および固有の角運動量である．

$$M = \int T^{00}\, d^3x \qquad (19.6a)$$

$$S_k = \int \epsilon_{klm} x^l T^{m0}\, d^3x \qquad (19.6b)$$

対応する Newton のポテンシャルは

$$\Phi = -\frac{1}{2}(g_{00} - \eta_{00}) = -\frac{M}{r} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \qquad (19.6c)$$

*4

結論：ゲージを適当に選ぶと，弱い源から遠く離れたところでの Φ および g_{00} は時間に無関係であり，源の質量 M によって一義的に定まる．g_{0j} は時間に無関係であり，源の本質的な角運動量 S^j によって定まる．しかし g_{jk} は $\mathrm{O}(1/r)$ の時間に依存する項（重力波！）をもつ．

本章の残りは重力場についての質量と角運動量の "形跡" に集中し，重力波は無視されるだろう，あるいは 35 章まで，ほとんど無視されるだろう．

[**練習問題**]

19.1 弱い重力を及ぼしている物体から遠く離れた場所での計量の導出

(a) 式 (19.5) を導け．［ヒント：(1) 本文に要約された手続きに従え．(2) h_{00} を計算するときには，式 (19.2) の $n=0$ および $n=1$ の項を，精度 $\mathrm{O}(1/r^2)$ まで明確に書き下ろせ．そして $n=0$ の項を恒等式

$$T^{jk} = \frac{1}{2}(T^{00}x^j x^k)_{,00} + (T^{lj}x^k + T^{lk}x^j)_{,l} - \frac{1}{2}(T^{lm}x^j x^k)_{,lm} \qquad (19.7a)$$

$$T^{ll}x^m = \left(T^{0l}x^l x^m - \frac{1}{2}T^{0m}r^2\right)_{,0} + \left(T^{lk}x^k x^m - \frac{1}{2}T^{lm}r^2\right)_{,l} \qquad (19.7b)$$

を用いて単純化せよ（これらの恒等式は $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$ から出ることを確かめよ）．(3) h_{0m} を計算するとき式 (19.2) の $n=0$ の項を精度 $\mathrm{O}(1/r^2)$ まで明確に書き下ろし，それを恒等式

$$T^{0k}x^j + T^{0j}x^k = (T^{00}x^j x^k)_{,0} + (T^{0l}x^j x^k)_{,l} \qquad (19.7c)$$

を用いて単純化せよ（これは $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$ から出ることを確かめよ）．(4) h_{00} および h_{0m} を

---

*3 (2) 結果
*4 計量は系の質量 M と角運動量 $\boldsymbol{S}$ にいかに依存するか

$$\xi_0 = \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00\prime}r'^2 d^3x' + \frac{x^j}{r^3}\int\left(T^{0k\prime}x^{k\prime}x^{j\prime} - \frac{1}{2}T^{0j\prime}r'^2\right)d^3x'$$
$$+ \int (T_{00}{}' + T_{ll}{}')\left[\frac{x^{j}x^{j\prime}}{r^2} + \frac{(3x^{j\prime}x^{k\prime} - r'^2\delta_{jk})x^j x^k}{2r^4}\right]d^3x'$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\int (T_{00}{}' + T_{kk}{}')\frac{(r - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)^n}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}d^3x',$$

$$\xi_m = -\frac{2x^j}{r^3}\int T_{00}{}' x^{j\prime}x^{m\prime}d^3x' + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\int T_{0m}{}'\frac{(r - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)^n}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}d^3x'$$
$$+ \frac{x^m}{r}\xi_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\right)_{,m}\int T_{00}{}' r'^2 d^3x'$$
$$- \left(\frac{x^k}{r^2}\right)_{,m}\int\left(T^{0j\prime}x^{j\prime}x^{k\prime} - \frac{1}{2}T^{0k\prime}r'^2\right)d^3x'$$
$$- \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int (T_{00}{}' + T_{kk}{}')\left[\frac{(r - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)^n}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\right]_{,m}d^3x'$$

によって生み出されるゲージ変換によって単純化せよ．ここに $T_{\mu\nu}{}'$ は $T_{\mu\nu}(t-r, \mathbf{x}')$ を表す.]

(b) 系の質量および角運動量は保存されることを証明せよ．[**注意**：$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$（自己重力の影響は無視できる）のゆえに，証明は平坦な時空における場合とここでは少しも異ならない（5 章).]

19.2　質量および角運動量の測定

*5　系の質量および角運動量の値は，それらが外部の重力場に残す形跡を調べることによって測定されうる．調べるのに用いるであろうすべての道具の中で，もっとも単純なのは重力に束縛された軌道上の試験粒子である．もし粒子が源から十分離れているならば，その運動は源の角運動量あるいは重力波によってほとんどまったく影響を受けず，重力場の球
*6　対称な，Newton 的な部分のみが重要な影響をもつ．したがって，粒子は Kepler の楕円軌道上を動く．源の質量 M を定めるには，Kepler の第 3 法則（おそらく "Kepler の 1–2–3 法則" とよんだ方がよいだろう）を適用しさえすればよい．

$$M = \left(\frac{2\pi}{\text{軌道周期}}\right)^2\left(\begin{matrix}\text{楕円の}\\\text{半長軸}\end{matrix}\right)^3, \qquad \text{すなわち,} \qquad M^1 = \omega^2 a^3 \tag{19.8}$$

源の角運動量の測定はまったく容易でない．Newton の重力効果を感じないが，計量 (19.5) での非対角項,

---

*5　弱い重力を及ぼしている系に対して

*6　(1) 全質量 M は Kepler の "1–2–3" 法則を軌道を描く粒子に適用することによって測定されうる

$$g_{0j} = -2\epsilon^{jkl} S^k x^l / r^3 \tag{19.9}$$

を“感じる”探査装置を用いなければならない．このような探査装置としては，逆方向に回転している衛星の歳差運動に相対的に，同方向に回転している衛星の近日点の歳差運動を用いることができる．ジャイロスコープはもう1つのこのような探査装置である．源の重力場内にジャイロスコープを静止させて置く．その質量中心に加えられる力によって，それが落下するのを防ぐ．時間が経過するにつれて，計量の g_{0j} 項はジャイロスコープが基底ベクトル $\partial/\partial x^j$ に相対的に歳差運動をするよう力を及ぼす．これらの基底ベクトルは座標系に“結びついており，”それは今度は無限遠での Lorentz 系に結びついており，それはさらに“固定された星”に結びついている（39.12 節参照）から，歳差運動は“固定された星”に相対的である．歳差運動の角速度は，練習問題 19.2 で導かれているように，

*7

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{r^3}\left[-\boldsymbol{S} + \frac{3(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{r^2}\right] \tag{19.10}$$

である．源の回転が“源の近傍の慣性系を引きずり，”それによってジャイロスコープが歳差運動をするように強制しているとときどき言われる．さらなる議論については，21.12，40.7，および 33.4 節をみよ．

［練習問題］

19.2 ジャイロスコープの歳差運動

ジャイロスコープの歳差運動の角速度に対する式 (19.10) を導け．［ヒント：ジャイロスコープの質量中心に直交テトラッド（tetrad，四つ組）を置け．テトラッドを座標系，したがって“固定された星”に固く結びつけよ．より特別に，テトラッドが以下の 1–形式基底

$$\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} = [1-(2M/r)]^{1/2}\boldsymbol{d}t + 2\epsilon_{jkl}S^k(x^l/r^3)\boldsymbol{d}x^j, \qquad \boldsymbol{\omega}^{\hat{j}} = [1+(2M/r)]^{1/2}\boldsymbol{d}x^j \tag{19.11}$$

に双対であるような基底 $\{e_{\hat{\alpha}}\}$ であるように選べ．テトラッド $\{\boldsymbol{e}_{\hat{j}}\}$ の空間の足は，

$$-\epsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}\omega^{\hat{k}} = \Gamma_{\hat{i}\hat{j}\hat{0}}$$

で与えられる角速度 $\boldsymbol{\omega}$［式 (13.69) をみよ］をもつジャイロスコープに相対的に回転する．したがって，ジャイロスコープの角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ は角速度 $\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\omega}$ をもつテトラッドに相対的に歳差運動をする．

$$\frac{dL^{\hat{j}}}{d\hat{t}} = \epsilon_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}\Omega^{\hat{k}}L^{\hat{l}}, \qquad \epsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}\Omega^{\hat{k}} = \Gamma_{\hat{i}\hat{j}\hat{0}} \tag{19.12}$$

与えられた直交系に対して $\Gamma_{\hat{i}\hat{j}\hat{0}}$ を計算せよ，そしてそれによって $\boldsymbol{\Omega}$ に対する式 (19.10) を得よ．］

---

*7 (2) 全角運動量 $\boldsymbol{S}$ はジャイロスコープの歳差運動を吟味することによって測定することができる

19.3 完全に相対論的な源の質量と角運動量

今や, 弱い重力を及ぼしている源への制限を放棄する. 孤立した重力を及ぼしている系, その内部では時空は高度に曲がっているかもしれないしあるいは曲がっていないかもしれない—ブラックホール, 中性子星, 太陽, …を考えよ. しかし今は, 系の内部あるいは系に近い "強い場の領域" を解析することはしない. 代わりに, 源から遠く離れた弱い重力場に注意を制限せよ, そして真空内での線形化された理論を用いてそれを解析せよ. $h_{\mu\nu}$ を多重極モーメントおよび $1/r$ のべきについて展開し, そしてゲージ, Lorentz 系, および座標原点を調整して生ずる計量を単純化せよ. このような計算の結果は弱い源に対する結果 (19.5) に同等である！(計算の詳細はその長さのためにここでは詳しく説明されない. しかし練習問題 19.3 をみよ.)

しかしこれを任意の源の遠方の場として受け入れる前に, 真空の場の方程式での非線形効果を吟味すべきである. 2 つの型の非線形性は源から遠く離れたところで重要であることがわかる. (1) 計量の静的な, Newton 的な部分についての非線形性, それは計量の補正

$$\delta g_{00} = -2M^2/r^2, \qquad \delta g_{jk} = \frac{3}{2}(M^2/r^2)\delta_{jk}$$

を生み出す (練習問題 19.3 および 39.8 節をみよ). それによって計量は次の形式

*8
$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]dt^2 - \left[4\epsilon_{jkl}S^k\frac{x^l}{r^3} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]dtdx^j + \left[\left(1 + \frac{2M}{r} + \frac{3M^2}{2r^2}\right)\delta_{jk} + \begin{pmatrix}\mathrm{O}(1/r)\text{ として消えていく}\\ \text{重力放射の項}\end{pmatrix}\right]dx^j dx^k \tag{19.13}$$

に表現される. (2) 重力波によって運び去られる質量, 角運動量, および線形運動量の埋め合わせをするために, 源の質量のゆるやかな減少, 角運動量のゆるやかな変化, および "静止系" のゆるやかな変化が生ずる (それは本章を終えた後, 初めてもっともよく理解される. コラム 19.1 をみよ).

与えられた源の遠く離れた時空の幾何学 (19.13) を測定することによって, その源が強い内部重力をもつか, あるいは弱い内部重力をもつかどうかを発見することはできない. しかし g_{00} および g_{0j} を源の内部にわたる積分として定める定数 M および S_j を表すときには, 決定的な相違を発見する. もし内部重力が弱いならば, 線形化された理論は源を通して成り立つ. そして

*9
$$M = \int T_{00}\, d^3x, \qquad S_j = \int \epsilon_{jkl}x^k T^{l0}\, d^3x \tag{19.14}$$

しかしもし重力が強いならば, これらの公式は失敗する. この失敗は強い重力に対して, 計量 (19.13) の定数 M および S_j を源の質量および角運動量と同定することを妨げるか？以下の議論によって, けっしてそうでない.

まず, 太陽の質量を考えよ. 太陽に対しては Newton の理論は高度に正確であると予期

*8　$1/r$ についてのべき級数として, 任意の重力を及ぼしている系から離れたところでの計量

*9　源が強い内部重力をもつときに, M および $\boldsymbol{S}$ に対する体積積分の失敗

する（わずかな誤差 $\sim M_\odot/R_\odot \sim 10^{-6}$）．したがって線要素 (19.13) に現れる定数 M は，実際

$$M = \int \rho\, d^3x = \int T_{00}\, d^3x = \text{全質量}$$

である．しかしこの主張は間違っているだろうか？ より大きな自信と洞察を得るには，**"支配された無知"** という観点を採用せよ．すなわち，必要とされる以上を知っているふりをするな（この型の物理学的な議論は，Newton の有名な "Hypotheses non fingo," すなわち "私は仮説を偽造しない"）ということである．T_{00} の体積積分（M の通常の Newton の定義）を求めるには，太陽の内部構造の理論を必要とする．たとえば，太陽の目にみえる表面層は，非常に密度が高くしかも大きくて相対論的な重力場 $|\Phi| \sim 1$ が存在する重い中心核を隠さないことを知らなければならない．もし解析に流体型のストレス–エネルギーテンソル $T^{\mu\nu}$ を用いるならば，状態方程式，不透明度，およびエネルギーの生成と輸送の理論を知る必要がある．流体の記述を物質の原子構成に対する適当な近似として正当化する必要がある．陽子および電子の静止質量を説明する物質の究極的な理論はこの質量の重要な部分を，超顕微鏡的なスケールでの強い（非線形の）重力場に帰着しないだろうと仮定する必要がある．このすべてをなしうることはもっともらしいが，しかしこれは太陽の質量が，実際に，天文学者によって定められる方法でないことも明白である！ 星の構造の理論は観測された質量を与えるように調整される．それらは質量を非重力的な観測から演繹させるように構成されていない．太陽の質量は実際には太陽の外部の重力場内での惑星の軌道を研究することによって測定される．体積積分 $\int T^{00}\, d^3x$ を求めることよりもむしろ，線要素 (19.13) から質量 M を読み取ることに同等な手続きである．

*10　すべての上述の不確定さを避けるために，そして理論をできる限り密接に実験に対応させるために，**太陽あるいは任意の他の物体の "全質量–エネルギー" M は遠方の外部の時空幾何学に対する線要素 (19.13) に現れる定数であると定義する．同様に物体固有の角運動量を線要素 (19.13) に現れる一定の 3–ベクトル $\boldsymbol{S}$ と定義する．** 作業上，全質量–エネルギー M は Kepler の第 3 法則によって測定される．角運動量 $\boldsymbol{S}$ はジャイロスコープの歳差運動あるいは惑星の軌道に対する M の影響によって測定される．これは物体がブラックホールあるいは中性子星であるときも，それが太陽であるときと同じく真実である．

*11　固有の角運動量 $\boldsymbol{S}$ はどのような種類の幾何学的事象であるか？ それは源から離れたところ，そこでは後退する距離とともに，時空はますます平坦になる（漸近的に平坦な），で
*12　なされる測定によって定義される．こうして，それは源を取り巻く **"漸近的に平坦な時空"** での 3–ベクトルとみなされうる．しかし $\boldsymbol{S}$ はどのような Lorentz 系で 3–ベクトルであるか？ 明らかに漸近的な Lorentz 系，そこでは線要素 (19.13) が成り立つところである．すなわち，漸近的な Lorentz 系，そこでは源の遠く離れた "Coulomb"（"M/r"）場が静的なところ，すなわち源の **"漸近的な静止系"** で，代わりに，$\boldsymbol{S}$ を漸近的な静止系で純粋に空間的な（$S^0 = 0$）4–ベクトル，$\boldsymbol{S}$ とみなすことができる．もし漸近的な静止系の 4–速

---

*10　"全質量–エネルギー" M および "角運動量" $\boldsymbol{S}$ の外部重力場による定義

*11　源の外遠く離れた漸近的に平坦な領域での幾何学的な事象としての $\boldsymbol{S}$

*12　"漸近的な静止系" と "全 4–運動量"

度を $\boldsymbol{U}$ で表すならば，$\boldsymbol{S}$ は純粋に空間的な 4–ベクトルであるという事実は幾何学的に $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{U}=0$，あるいは

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{P}=0 \tag{19.15}$$

と述べ直すことができる，ここに

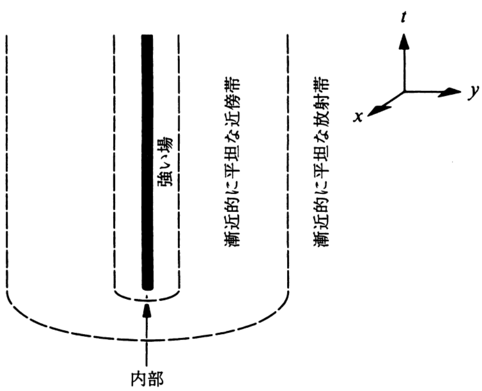
$$\boldsymbol{P}\equiv M\boldsymbol{U}\equiv \text{“源の全 4–運動量”} \tag{19.16}$$

は依然として時空の漸近的に平坦な領域に存在する別なベクトルである．

*13 全 4–運動量 $\boldsymbol{P}$ および固有角運動量 $\boldsymbol{S}$ は，コラム 19.1 に要約される保存則を満たす．これらの保存則は重力理論と相対論的な宇宙物理学で貴重な道具である．しかしこれらの法則の導出（20章）は中性子星および基礎的な宇宙論のような話題と重要性で比較にならない．したがって多くの読者は本書を初めて読むときにはそれを省くことを望むだろう．

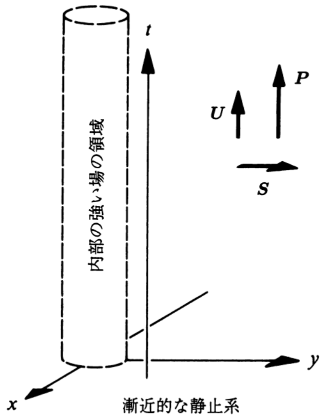
コラム 19.1　孤立系の全質量–エネルギー，4–運動量，および角運動量

A. 時空は以下に分割される．（1）源の内部，それは（2）強い場の真空領域によって取り囲まれており，次には（3）弱い場，漸近的に平坦な，近傍帯の領域によって取り囲まれていて，そして（4）弱い場，漸近的に平坦な放射帯の領域によって取り囲まれている．このコラムおよび本章では，漸近的に平坦な領域のみを取り扱う．内部および強い場の領域は次の章で取り扱われる．

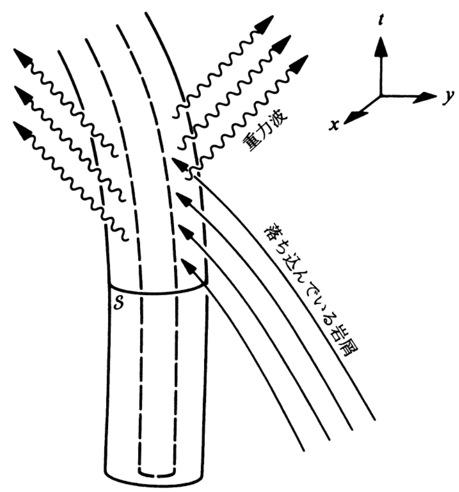


B. 源の漸近的な静止系はあの大域的な，漸近的な Lorentz 系（座標 t，x，y，z）であり，そこでは源の場の遠い “Coulomb” 部分が静止している（図をみよ）．漸近的な静止系は強い場の領域まで続かない．任意のこのような延長は必然的に曲率によって高度に非 Lorentz 的な曲線形式へ強制されるだろう．漸近的な静止系の空間の原点は源がそれを中心とする．すなわち，遠い Newton のポテンシャルは $\Phi = -M/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}+\mathrm{O}(1/r^3)$，すなわち，$\Phi$ は座標の分枝から生ずるような双極子項 $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{x}/r^3$ をもたないように調整されている．

*13　全 4–運動量と角運動量に対する保存則



C. 源に全質量–エネルギー M，4–速度 U，全 4–運動量 P，および固有の角運動量ベクトル S をもたせることができる． 4–ベクトル $\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{P}$，および $\boldsymbol{S}$ は時空の漸近的に平坦な領域に存在しそこでは自由に動かすことができる（無視できる曲率 ⇒ 閉曲線周りの平行移動は $\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{P}$，あるいは $\boldsymbol{S}$ を変えない）．源の 4–速度 $\boldsymbol{U}$ は漸近的な静止系（静止系で $U^0 = 1$，$\boldsymbol{U} = 0$）の 4–速度に等しいと定義される．全質量–エネルギー M は Kepler の第 3（“1–2–3”）法則［式 (19.8)］によって測定される．全 4–運動量は $\boldsymbol{P} \equiv M\boldsymbol{U}$ によって定義される．固有の角運動量 $\boldsymbol{S}$ は 4–速度 $\boldsymbol{U}$ に直交し，$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{U} = 0$（したがって $S^0 = 0$，$\boldsymbol{S}\neq 0$，漸近的な静止系で一般的に），$\boldsymbol{S}$ はジャイロスコープの歳差運動あるいは特徴的な近日点の歳差運動（19.2 節）によって測定される．漸近的な静止系で，ゲージ（すなわち，座標でのさざなみ）を適当に選ぶと，**平坦な時空の幾何学からのわずかなずれは線要素**



星間岩屑がブラックホールに落ち込む，
そして重力波が現れる．

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] dt^2 - \left[4\epsilon_{jkl}S^k \frac{x^l}{r^3} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] dt dx^j + \left[\left(1 + \frac{2M}{r} + \frac{3M^2}{2r^2}\right)\delta_{jk} + (\text{重力放射項})\right] dx^j dx^k \tag{1}$$

によって記述される．

D. 4–運動量と角運動量の保存． 粒子が源に落ち込むあるいは源から吐き出されると

仮定し，電磁波が流れ込みそして流れ出ると仮定し，源が重力波を放出すると仮定せよ．すべてのこのような過程は源の孤立を破りそしてその全 4–運動量 $\boldsymbol{P}$，その固有の角運動量 $\boldsymbol{S}$，およびその漸近的な静止系を変えることができる．源を十分離れていて漸近的に平坦な領域にある球殻 $\mathcal{S}$ で囲め．この殻を源の一瞬の漸近的な静止系で常に静止させよ．$\mathcal{S}$ 近傍の源の重力場を調査して，その 4–運動量 $\boldsymbol{P}$ および固有の角運動量 $\boldsymbol{S}$ を殻の固有時間 τ の関数として測定せよ．次章に与えられる解析で，4–運動量は，

$$\frac{dP^\alpha}{d\tau} = -\int_{\mathcal{S}} T^{\alpha j} n_j d(\text{面積}) = \begin{pmatrix}\text{4–運動量が殻を通っ} \\ \text{て流れ込む割合}\end{pmatrix} \tag{2}$$

の意味で保存されることを示す．ここに $\boldsymbol{n}$ は $\mathcal{S}$ に垂直な外向きの単位ベクトルであり，積分は殻の一瞬の静止系で遂行される．要するに，**4–運動量が殻を通って流れる割合は，標準的な特殊相対論の方法で測定されるとき，源の重力的に測定される 4–運動量の変化率に等しい．同様に，角運動量は**

$$\frac{dS_i}{d\tau} = -\int_{\mathcal{S}} (\epsilon_{ijk} x^j T^{kl}) n_l d(\text{面積}) = \begin{pmatrix}\text{角運動量が殻を通っ} \\ \text{て流れ込む割合}\end{pmatrix} \tag{3a}$$

$$\frac{dS_0}{d\tau} = -\frac{dU^\alpha}{d\tau} S_\alpha = \begin{pmatrix}\boldsymbol{S}\text{ を }\boldsymbol{U}\text{ に直交させ続けるために} \\ \text{要求される変化 “Fermi–Walker 移} \\ \text{動則”．6.5，13.6 節を参照せよ．}\end{pmatrix} \tag{3b}$$

の意味で保存される．これらの保存則で $T^{\alpha\beta}$ は殻での全ストレス–エネルギーテンソルであり，物質，電磁場，および重力波からの寄与を含む．重力波の寄与は，$T^{(GW)\alpha\beta}$ とよばれ，35 章で取り扱われる．

注意：上述の形での保存則は次数 M/r（落ち込む物質の “重力のポテンシャルエネルギー” からの寄与）のわずかな誤差を含む．しかしこのような誤差は非常に大きい殻の極限（$r \to \infty$）でゼロになる．

注意：次章で与えられるこれらの保存則の公式化はより明確であり，より厳密である．しかしここでの公式化よりも物理学的に啓蒙性に欠ける．

［練習問題］

19.3　定常的な，完全に相対論的な源から遠く離れた重力場

時間によらない（$g_{\mu\nu,t} = 0$）源の特別な場合に対する線要素 (19.13) を導け．これは，以下の要点を述べられた経路に沿って注意深く進まなければ，難しい問題でありうる．(1) 最初 Einstein の場の方程式でのすべての非線形性を無視せよ．場は源から遠く離れて弱い．これらの非線形性は支配的な項には存在しない．(2) Lorentz ゲージで線形化された理論 (18.8) を用いて支配的な項を計算せよ．(3) とくに，真空の，時間によらない波動方程式 (18.8b) に対する一般解を $n^j \equiv x^j/r \equiv$ (半径方向の単位ベクトル) を含む以下

の形式で書け．

$$\bar{h}_{00} = \frac{A^0}{r} + \frac{B^j n^j}{r^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^3}\right),$$
$$\bar{h}_{0j} = \frac{A^j}{r} + \frac{B^{jk} n^k}{r^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^3}\right),$$
$$\bar{h}_{jk} = \frac{A^{jk}}{r} + \frac{B^{jkl} n^l}{r^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^3}\right),$$
$$A^{jk} = A^{(jk)}, \qquad B^{jkl} = B^{(jk)l} \tag{19.17}$$

（丸い括弧は対称化を表す）．(4) それからこの一般解に Lorentz ゲージ条件 $\bar{h}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\beta} = 0$ を課する，それによって

$$A^j = 0, \qquad A^{jk} = 0,$$
$$B^{jk}(\delta^{jk} - 3n^j n^k) = 0,$$
$$B^{jkl}(\delta^{kl} - 3n^k n^l) = 0 \tag{19.18}$$

を知る．(5) B^{jk} をそのトレース $3B$，ゼロトレースの対称部分 S^{jk}，そしてゼロトレースの反対称部分（これらはその“既約部分”である）の和として書け．

$$B^{jk} = B\delta^{jk} + S^{jk} + \epsilon^{jkl} F^l, \qquad S^{jj} = 0 \tag{19.19}$$

任意のテンソル B^{jk} はこのような形に表現されうることを示せ．それからゲージ条件 (19.18) は $S^{jk} = 0$ を意味することを示せ．(6) 同様に最初の 2 個の添字について対称である任意のテンソル B^{jkl} は

$$B^{jkl} = \delta^{jk} A^l + C^{(j}\delta^{k)l} + \epsilon^{ml(j} E^{k)m} + S^{jkl},$$
$$E^{km} \quad \text{対称でゼロトレース，すなわち，} E^{km} = E^{(km)}, \; E^{kk} = 0,$$
$$S^{jkl} \quad \text{対称でゼロトレース，すなわち，} S^{jkl} = S^{(jkl)},$$
$$S^{jjl} = S^{jkk} = S^{jkj} = 0 \tag{19.20}$$

の形に表現されうることを示せ．それからゲージ条件 (19.18) は $C^j = -2A^j$ および $E^{km} = S^{jkl} = 0$ を意味することを示せ．(7) すべてのこれらの結果を結合して，

$$\bar{h}_{00} = \frac{A^0}{r} + \frac{B^j n^j}{r^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^3}\right),$$
$$\bar{h}_{0j} = \frac{\epsilon^{jkl} n^k F^l}{r^2} + \frac{B n^j}{r^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^3}\right),$$
$$\bar{h}_{jk} = \frac{\delta^{jk} A^l n^l - A^j n^k - A^k n^j}{r^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \tag{19.21}$$

を結論せよ．それからゲージ変換（それは Lorentz ゲージの範囲にとどまる）を用いて，B および A^j を，$\bar{h}_{0j}$ および $\bar{h}_{jk}$ から消去せよ．したがって

$$\bar{h}_{00} = \frac{A^0}{r} + \frac{(B^j + A^j)n^j}{r^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^3}\right),$$
$$\bar{h}_{0j} = \frac{\epsilon^{jkl} n^k F^l}{r^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \tag{19.22}$$
$$\bar{h}_{jk} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

(8) 座標原点を移動して $x^j_{\text{新しい}} = x^j_{\text{古い}} - (B^j + A^j)/A^0$ とする．新しい座標系では $\bar{h}_{\alpha\beta}$ は式 (19.22) と同じ形をもっている．しかし $B^j + A^j$ は除かれている．生ずる $\bar{h}_{\alpha\beta}$ から計量を構成し，そして定数 A^0 および F^l が式 (19.13) と一致するように定義し直せ．

(9) 計量でのすべての線形項は今や勘定されている．主要な非線形項は主要な線形項の 2 乗 $(M/r)^2$ に比例しなければならない．比例定数を得るもっとも容易な方法は完全に相対論的で，静的な，球状の源に対する Schwarzschild 幾何学 (31.1) をとることである．座標変換によって，それを

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - M/2r}{1 + M/2r}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{19.23}$$

の形に表し（練習問題 25.8），それを M/r のべきについて展開せよ．

19.4　閉じた宇宙の質量と角運動量

“アイルランドに蛇はいない.”

St. Patrick の陳述

アイルランドから蛇を追いやった後（伝説*）

*14　一般相対論によれば，“閉じた宇宙のエネルギー（あるいは角運動量，あるいは電荷）” のようなものは存在しない．そしてこれは単純な理由のためである．何かを量るには，量るために立つべきプラットホームを必要とする．

太陽を測るには，惑星軌道の周期と長半径を測り，そして Kepler の “1–2–3” 法則，$M = \omega^2 a^3$ を適用する．太陽の角運動量 $\boldsymbol{S}$ を測定する（1970 年代あるいは 1980 年代で

* Stokes（1887）および他の標準的な文献はこの伝説を否定する．Stokes のパート I に，基本的な原稿文献のリストがつくられており，とくに 154 枚の 2 つ折り（folios）の写本原稿 Rawlinson B.512 を含む．それは 2 段組になっており，14 世紀および 15 世紀での種々の書体で書かれている（**Catalogi codicum manuscriptorum Bibliothecae Bodleianae Partis Quintae Fasciculus Primus, Oxford, 1862, col. 728-732** を参照せよ）．この原稿で，2 つ折り（folio）97b.1，14 行は Stokes の翻訳で読むと（パート I, p.xxx.），“楽園には獣はいない，蛇がいない，ライオンがいない，竜がいない，さそりがいない，ネズミがいない，蛙がいないから，アイルランドには同じようにどのような有害な動物も，おおかみだけを除いて，いない…”．

*14　閉じた宇宙に対して全質量–エネルギー M および角運動量 $\boldsymbol{S}$ は定義されていないしまた定義できない

の宇宙工学に対する課題!)には，太陽に近い軌道でのジャイロスコープの歳差運動を測定する，あるいは“慣性系の引きずられ”のある他の様相を吟味する．物体の電荷を定めるには，物体を大きい球で囲み，この球上の各点で球に垂直な電場を求め，球にわたって積分し，そして Gauss の定理を適用する．しかし 3–球のトポロジーをもつ任意の閉じた模型宇宙の内部で，1 点から十分でたらめに展開される Gauss 型 2–球は正反対の点で無に崩壊する．“宇宙の電荷”について有用な情報を得る試みもまた無に崩壊する．電荷は明らかにゼロである．同じ理由で，質量–エネルギーあるいは角運動量を定めるすべての“面積分”(20 章での詳細をみよ)はゼロに崩壊する．同じ点を別な方法でつくり出すには閉じた宇宙の周りには系のどのようないわゆる“全質量”あるいは“静止系”あるいは“4–運動量”あるいは“角運動量”のいずれを定めるために，試験対象あるいはジャイロスコープを Kepler の軌道に置く場所は存在しない．これらの項は定義されていないしまた定義できない．言葉としてはハイだが，意味としてはイイエである．

閉じた宇宙に対して定義された 4–運動量をもたないことは，一見して悩ましくみえるかもしれない．しかし 4 個の数字が与えられ，それらがある“宇宙の全エネルギー運動量 4–ベクトル”と称されているものの成分を表していると権威的に言われることは，はるかにより悩ましくみえるだろう．どのような局所 Lorentz 系についての成分か？ どの点で？そしてその奇妙に選ばれた点に戻る 1 つの閉経路周りを平行移動したときのこのベクトルでの変化は何か？ 問題は生じないし，そして生じえないことはこれらの困難からの幸せな救いである！

γ 線のエネルギーの途方もなく正確な測定を想像せよ．実験家はこの γ 線は宇宙の全質量–エネルギーにどれだけ寄与するかを知ることを希望する．実験室でそのエネルギーを測定した後，彼はそれが地球に束縛されているだけの負の重力エネルギーに対する補正をする．結果，

$$E_{\text{補正}} = h\nu(1 - M_{\oplus}/R_{\oplus})$$

は，光子が地球の重力場からよじ登った後にもつであろうエネルギーである．しかしこれは，光子が太陽系，銀河，局所銀河団，超銀河団，それから何ものかの，重力場からよじ登るときのエネルギー損失(赤方偏移)に対する長い一連の補正での最初にすぎないのか？これらの補正は，$E_{\text{補正}} = 0$ 以外に収束する証拠を示さない．

閉じた宇宙の電荷–エネルギー–角運動量が特徴を欠くのとまったく対照的に，漸近的に
*15 平坦な任意の空間ですべての 3 つの量を定義し測定する魅力的な可能性がある．漸近的に平坦な空間について語るべく，宇宙論の現在の観点に大変革をもたらすには及ばない．天文学的なあるいは宇宙物理学的な興味のある場合(コラム 19.2)に，$(-g_{00})^{1/2}$ の 1 からの逸脱によって測定されるとき，平坦さからのずれがいかに小さいかを注意すれば十分である．何かの力学が，いかに複雑であろうとも，起こっている領域を取り囲んで，幾何学がある指定された精度まで漸近的に平坦であるときにはつねに，力学的な領域の全エネルギー–運動量 4–ベクトル $\boldsymbol{P}$，およびその全固有の角運動量 $\boldsymbol{S}$ について語ることは意味が

*15 M および $\boldsymbol{S}$ の定義可能性に対する鍵としての漸近的な平坦さ

ある．平坦な領域内で任意の閉曲線周りにいずれの方向の平行移動も全エネルギー–運動量 4–ベクトルを変化させずに出発点に戻す．さらに，このことは力学的な領域（ブラックホール，崩壊する星，激しい重力波等）での平坦さからのずれがいかに巨大であろうとも相違を生じない．はるかに離れたところで曲率は弱くなるだろう，そして 4–運動量と角運動量は時空幾何学上でのそれらの形跡によって現れるだろう．

コラム 19.2　選択された天体近傍での計量の補正項

	m	m	r	$m/r = 1 - (-g_{00})^{1/2}$
Milo のヴィーナスの肩で	2×10^{5} g	$= 1.5\times10^{-23}$ cm	30 cm	5×10^{-25}
地球の表面で	6×10^{27} g	$= 4\times10^{-1}$ cm	6.4×10^{8} cm	6×10^{-10}
太陽から地球までの距離で	2×10^{33} g	$= 1.5\times10^{5}$ cm	1.5×10^{13} cm	1×10^{-8}
銀河中心から太陽までの距離で	2×10^{44} g	$= 1.5\times10^{16}$ cm	2.5×10^{22} cm	6×10^{-7}
Virgo 銀河団の中心から銀河までの距離で	6×10^{47} g	$= 4\times10^{19}$ cm	3×10^{25} cm	1×10^{-6}

20章
4–運動量と角運動量に対する保存則

系がある状態から特別に定義されている基準状態へ任意の方法で推移するとき，系外に生み出されるすべての効果（力学的な仕事の単位で測定された）の寄与を，われわれはその状態での物質系のエネルギーとして表す．

WILLIAM THOMPSON（後に Lord Kelvin），

Max von Laue によって，Schilpp（1949），p.514 に引用されている．

すべての形のエネルギーは慣性をもつ．

ALBERT EINSTEIN，1905 年 9 月 26 日の彼の論文からの結論，
von Laue によって Schilpp（1949），p.523 に要約されている．

[5 章（ストレス–エネルギーテンソル）は本章に対する準備として必要であり，本章は今度は 36 章（重力波の生成）のトラック–2 部分に対する準備として必要である．そして 35 章（重力波の伝播）を理解するのに有用であるだろう．]

20.1 概　　観

19 章は任意の，重力を及ぼす系に対する全 4–運動量 $\boldsymbol{P}$ および全角運動量 $\boldsymbol{S}$ の重要な特徴を詳述した．しかし 1 つの決定的な特徴が証明されずに残された．それは，$\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{S}$ に対する保存則（コラム 19.1）である．これらの保存則を証明するのが本章のおもな目的である．しかしより重要でないとしても，他の興味ある，$\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{S}$ の様相は，証明の途中で遭遇するだろう．4–運動量および角運動量に対する Gauss 型の束積分，重力場に対するストレス–エネルギー "擬テンソル"，それは $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{S}$ に対する体積分を構成するときの道具であり，そして重力場のエネルギーの非局在化である．

20.2 4–運動量と角運動量に対する Gauss 型束積分

電磁気論では源から出る電気力線の数を加え合わせることによって，すなわち，源を取り囲む閉じた 2–曲面にわたる Gauss 型束積分を遂行することによって，源の保存されて

*1

---

*1　電荷および Newton 的な質量に対する Gauss 型束積分

いる全電荷を定めることができる．

$$Q = \frac{1}{4\pi}\oint E^j d^2 S_j = \frac{1}{4\pi}\oint F^{0j} d^2 S_j \tag{20.1}$$

同様に，Newton の理論では Gauss 型束積分

$$M = \frac{1}{4\pi}\oint \Phi_{,j}\, d^2 S_j \tag{20.2}$$

を求めることによって，源の質量を定めることができる．源の電荷および質量は源を取り囲む電磁場および重力場上に消すことのできない形跡を置くから，これらの束積分はうまくいく．

一般相対論での外部の重力場（時空幾何学）は同様の形跡，源の全質量–エネルギー M のみでなく，源の全 4–運動量 $\boldsymbol{P}$ および源固有の角運動量 $\boldsymbol{S}$（コラム 19.1 をみよ）の形跡をもつ．したがって，源の 4–運動量と角運動量を表す Gauss 型の束積分を求めることは理にかなっている．

探求を単純化するために，上述の束積分をまず線形化された理論で実行し，そして Maxwell の電気力学を指針として用いる．電気力学では電荷に対する Gauss 型の束積分は，Maxwell の方程式 $F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^\mu$，および $F^{\mu\nu}$ は反対称であり，したがって $F^{0\mu}{}_{,\mu} = F^{0j}{}_{,j}$ である，という決定的な事実から得られる．

$$Q = \int J^0 d^3x = \frac{1}{4\pi}\int F^{0\nu}{}_{,\nu}\, d^3x = \frac{1}{4\pi}\int F^{0j}{}_{,j} d^3x \underset{\uparrow\,[\text{Gauss の定理}]}{=} \frac{1}{4\pi}\oint F^{0j} d^2S_j$$

線形化された理論で類似の束積分を見出すために，線形化された場の方程式 (18.7) を類似の重要な対称性をもつ実体を含む類似の形に書き直せ．必要とされる実体は

*2

$$H^{\mu\alpha\nu\beta} \equiv -(\bar{h}^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta} - \bar{h}^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta} - \bar{h}^{\mu\beta}\eta^{\alpha\nu}) \tag{20.3}$$

であることがわかる．この表現から容易に確かめられるように，それは Riemann テンソルと同じ対称性をもつ

$$H^{\mu\alpha\nu\beta} = H^{\nu\beta\mu\alpha} = H^{[\mu\alpha][\nu\beta]},$$
$$H^{\mu[\alpha\nu\beta]} = 0 \tag{20.4}$$

この実体は，$\bar{h}^{\mu\nu}$ のように，線形化された理論の Lorentz 変換のもとでテンソルとして変換する．しかしそれはゲージ–不変でないので，一般相対論の意味でテンソルでない．

*3 $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ によって，線形化された場の方程式 (18.7) は非常に単純化された形

$$2G^{\mu\nu} = H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta} = 16\pi T^{\mu\nu} \tag{20.5}$$

をとる，そしてこれらから，$H^{\mu\alpha\nu\beta}$ の ν と β についての反対称性によって，線形化された理論での源の保存則，

*2　$H^{\mu\alpha\nu\beta}$ が定義される
*3　$H^{\mu\alpha\nu\beta}$ による線形化された場の方程式

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \frac{1}{16\pi} H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta\nu} = 0$$

が出る．それはすでに 18.3 節で議論された．これらの運動方程式を与えるのと同じ反対称
[*4] 性はまた源の全 4–運動量に対する Gauss 型束積分

$$\begin{aligned} P^{\mu} &= \int T^{\mu 0} d^3x = \frac{1}{16\pi}\int H^{\mu\alpha 0\beta}{}_{,\alpha\beta}\, d^3x = \frac{1}{16\pi}\int H^{\mu\alpha 0 j}{}_{,\alpha j} d^3x \\ &= \frac{1}{16\pi}\oint_{\mathcal{S}} H^{\mu\alpha 0 j}{}_{,\alpha}\, d^2S_j \end{aligned} \tag{20.6}$$

└[Gauss の定理]

を生み出す．ここで積分 $\mathcal{S}$ の閉じた 2–曲面は源を完全に取り囲まねばならない．そして一定時間 x^0 の 3–曲面内に存在しなければならない．源のエネルギー P^0 に対する積分 (20.6)，それは P^j に対する積分よりもはるかにしばしば用いられ，$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ によってとくに単純な形に帰着する．

$$P^0 = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{S}} (g_{jk,k} - g_{kk,j}) d^2S_j \tag{20.7}$$

（練習問題 20.1 をみよ）．

式 (20.6) に似た，しかしより長い計算（練習問題 20.2）は，座標原点についての全角運
[*5] 動量に対する束積分

$$\begin{aligned} J^{\mu\nu} &= \int (x^{\mu} T^{\nu 0} - x^{\nu} T^{\mu 0}) d^3x \\ &= \frac{1}{16\pi}\oint_{\mathcal{S}} (x^{\mu} H^{\nu\alpha 0 j}{}_{,\alpha} - x^{\nu} H^{\mu\alpha 0 j}{}_{,\alpha} + H^{\mu j 0\nu} - H^{\nu j 0 \mu}) d^2S_j \end{aligned} \tag{20.8}$$

を与える．

式 (20.6) から (20.8) までの束積分を求めるには（体積分との対照によって），源の外遠
[*6] く離れた重力場のみを用いる必要がある．その重力場は強い源に対する完全な一般相対論で，弱い源に対する線形化された理論におけるのと同じ形をもつから，束積分は弱かろう
[*7] があるいは強かろうが，任意の孤立した源に対する P^{μ} および $J^{\mu\nu}$ を計算するために用いられうる．

$$\left.\begin{aligned} P^{\mu} &= \tfrac{1}{16\pi}\oint_{\mathcal{S}} H^{\mu\alpha 0 j}{}_{,\alpha}\, d^2S_j, \\ P^0 &= \tfrac{1}{16\pi}\oint_{\mathcal{S}} (g_{jk,k} - g_{kk,j}) d^2S_j, \\ J^{\mu\nu} &= \tfrac{1}{16\pi}\oint_{\mathcal{S}} (x^{\mu} H^{\nu\alpha 0 j}{}_{,\alpha} - x^{\nu} H^{\mu\alpha 0 j}{}_{,\alpha} \\ &\qquad + H^{\mu j 0\nu} - H^{\nu j 0\mu}) d^2S_j \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{完全な一般相対性理論で，任意の孤立した源} \\ \text{に対して，積分 } \mathcal{S} \text{ の閉曲面が源を取り囲む漸} \\ \text{近的に平坦な領域内に存在するとき，また漸} \\ \text{近的に Minkowski の座標が用いられるとき} \end{array} \tag{20.9}$$

P^{μ} および $J^{\mu\nu}$ を知ると，源の全質量–エネルギー M および固有の角運動量 S^{μ} をコラム 5.6 の標準的な手続きによって計算することができる．

[*4] 線形化された理論での Gauss 型の束積分：(1) 4–運動量に対して

[*5] (2) 角運動量に対して

[*6] 完全な一般相対論への Gauss 型束積分の一般化

[*7] 全質量–エネルギー，質量中心，そして固有の角運動量

$$M = (-P^{\mu} P_{\mu})^{1/2} \tag{20.10}$$

$$Y^{\mu} = -J^{\mu\nu} P_{\nu}/M^2 = \begin{pmatrix} \text{源の漸近的な球対称の場 “}M/r\text{” が} \\ \text{座標原点からずれた中心までのベクトル} \end{pmatrix} \tag{20.11}$$

$$S_{\rho} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}(J^{\mu\nu} - Y^{\mu}P^{\nu} + Y^{\nu}P^{\mu})P^{\sigma}/M \tag{20.12}$$

束積分 (20.9) の被積分関数はゲージ不変でないことにとくに注意せよ．事象 $\mathcal{P}_0$ における任意の局所慣性系［$g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0) = \eta_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\alpha}(\mathcal{P}_0) = 0$］でそれらはゼロである．なぜなら

$$g_{\mu\nu,\alpha} = h_{\mu\nu,\alpha} = 0 \Rightarrow H^{\mu\nu\alpha\beta}{}_{,\alpha} = 0, \qquad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \Rightarrow H^{\mu\nu\alpha\beta} = 0$$

これは合理的な振る舞いである．それらの Newton 的な類似物，Newton 的な束積分 (20.2) の被積分関数 $\Phi_{,j} =$（重力加速度）は，同様に局所慣性系でゼロである．

束積分の被積分関数はゲージ不変でないけれども，全積分 P^{μ}（4–運動量）および $J^{\mu\nu}$（角運動量）は確かにゲージ不変である！　それらは任意の座標系やゲージに関係なく意味と重要性をもつ．それらは源を取り囲む漸近的に平坦な領域でテンソルである．

もしエネルギーおよび角運動量を定義する何らかの可能性があるべきであるとするならば，時空は漸近的に平坦でなければならない．そのときに初めて線形化された理論が適用されうる．そして線形化された理論は遠く離れたところで妥当するという原理に基づいて初めて束積分 (20.9) を完全な非線形理論で用いることを正当化することができる．エネルギーと角運動量を定義するために物理学者が一緒に動くことを誰も強制できない．物理学者は一緒に動く必要はなく，そしてそうすべき強制的な動機をもたないだろう．源の内部構造は近づきにくい，理解できない，興味がない，危険である，きわめて遠いところである，あるいは恐ろしいところであるかもしれない．遠く離れた平坦さに対するこの要求は束積分 (20.9) の注目すべき特徴である．それはまた決定的な特徴である．座標さえも漸近的に Minkowski でなければならない，さもなければ本章でのほとんどの公式は，つぶれ
*8 るかあるいは修正を必要とする．とくに，**局在化された系の 4–運動量および角運動量を求めるときには，束積分 (20.9) を漸近的に Minkowski 座標でのみ適用しなければならない．もしこのような座標が存在しない（時空は無限遠で平坦でない）ならば，束積分，および定義に対して束積分に依存する量，すなわち重力を及ぼす系の全質量，運動量，および角運動量を，完全に放棄しなければならない．**これに関連して，19.4 節の議論を思い起こせ．それは，物理学的な言葉で，なぜ “全質量–エネルギー” は宇宙論を無視する制限された観点を採用するときにのみ有用な，制限された概念であるかを記述したのである（“光線” あるいは “粒子” は並外れた価値をもつ概念であるが，波動光学あるいは波動力学が重要となるときには，うまくいかない概念であることと比較せよ）．

要約：公式 (20.9) を Minkowski 境界条件を失う方法で（そしてとくにそれらを修正せずに曲線座標で）用いる試みは，容易にそして不可避的に無意味なものを生み出す．

---

*8　時空の漸近的に平坦で漸近的に Minkowski 座標でのみ成り立つ Gauss 型束積分

[練習問題]

20.1　線形化された理論での全質量–エネルギーに対する束積分

P^0 に対する束積分 (20.6) は式 (20.7) に帰着することを示せ．それから，ほとんど Newton 的な源 [線要素 (18.15c)] に適用されるときは，それはさらによく知られた Newton 的な束積分 (20.2) に帰着することを示せ．

20.2　線形化された理論での角運動量に対する束積分

$J^{\mu\nu}$ に対する Gauss 型束積分 (20.8) を導け．[ヒント：場の方程式 (20.5) を用いて

$$16\pi x^\mu T^{\nu 0} = (x^\mu H^{\nu\alpha 0k}{}_{,\alpha})_{,k} - H^{\nu j 0\mu}{}_{,j} - H^{\nu 00\mu}{}_{,0} \tag{20.13}$$

を示し，それから Gauss の定理を用いて式 (20.8) の体積分を求めよ.]

20.3　任意の定常的な源に対する束積分

(a) 束積分 (20.9) を用いて任意の定常的な源に対する P^μ および $J^{\mu\nu}$ を求めよ．源の周りの漸近的に平坦な計量に対して，重力放射項をゼロと置いた式 (19.13) を用いよ．

(b) “補助的な式” (20.10) から (20.12) まではこの源の全質量–エネルギー M および固有の角運動量 S^μ に対する正しい答えを与えることを確かめよ．

20.3　4–運動量および角運動量に対する体積分

線形化された理論では，P^μ および $J^{\mu\nu}$ に対する面積分を源のいたるところについての体積分に転換することは容易である．まず第 1 に面積分 [式 (20.6), 練習問題 20.2] にいたった段階を単純に逆向きに跡をたどることができる．完全な一般相対論で，いかにして，同じように面積分から体積分へ転換することができるか？　もし正しい方向に考えるならば答えはむしろ容易である．完全な Einstein の場の方程式を線形化された理論の式 (20.5) に類似した形

*9

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta} = 16\pi\, T^{\mu\nu}_{\text{eff}} \tag{20.14}$$

に表現しさえすればよい．ここに $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ は，源の内部深くで $|h_{\mu\nu}|$ が $\gtrsim 1$ であるかもしれないような，$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ を用いて式 (20.3) によって，定義されるべきである．Einstein 方程式のこの形はそうすると，線形化された理論におけるように，Gauss 型束積分の体積分への転換を許す．

*10

$$P^\mu = \frac{1}{16\pi}\oint H^{\mu\alpha 0j}{}_{,\alpha}\, d^2S_j = \frac{1}{16\pi}\int H^{\mu\alpha 0j}{}_{,\alpha j}\, d^3x = \frac{1}{16\pi}\int H^{\mu\alpha 0\beta}{}_{,\alpha\beta}\, d^3x$$
$$= \int T^{\mu 0}_{\text{eff}}\, d^3x \tag{20.15}$$

---

*9　$H^{\mu\alpha\nu\beta}$ による完全な Einstein の場の方程式

*10　完全な一般相対論での 4–運動量および角運動量に対する体積分

同様に，

$$J^{\mu\nu} = \int (x^{\mu} T_{\text{eff}}^{\nu 0} - x^{\nu} T_{\text{eff}}^{\mu 0}) d^3 x \tag{20.16}$$

［式 (20.14) で共変微分よりも偏微分を用いることは転換にとって決定的である］．これらの体積分では，前述の議論を通してなされたように，座標は源から離れたところで漸近的に Lorentz（$g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$）にならねばならない．

$T_{\text{eff}}^{\mu\nu}$ の形は $H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta}$ が Einstein 曲率テンソル (20.5) への線形化された近似であることを思い起こすことによって計算できる．非線形補正を

*11

$$16\pi t^{\mu\nu} \equiv H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta} - 2G^{\mu\nu} \tag{20.17}$$

で定義せよ（それらを $g_{\mu\nu}$ あるいは $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ によって計算することは簡明であるが長い．これらの補正の正確な形は本書では必要とされないだろう）．そうすると Einstein の方程式は

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta} = 16\pi t^{\mu\nu} + 2G^{\mu\nu} = 16\pi (t^{\mu\nu} + T^{\mu\nu})$$

である．したがって

*12

$$T_{\text{eff}}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu} \tag{20.18}$$

量 $t^{\mu\nu}$ はときどき“重力場に対するストレス–エネルギー擬テンソル”とよばれる．Einstein の場の方程式 (20.14) は，$H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta}$ は ν と β について反対称であるから，

*13

$$T_{\text{eff},\nu}^{\mu\nu} = (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \tag{20.19}$$

を意味する．これらの方程式は $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ に同等であるが，しかしそれらは共変微分よりもむしろ偏微分で書かれている—偏微分は体積分と面積分の間を行き来する転換を許すという事実．

*14 量 $H^{\mu\alpha\nu\beta}$，$T_{\text{eff}}^{\mu\nu}$，および $t^{\mu\nu}$ はすべて，それらの定義と存在に対して座標の選択に依存し，それらは座標によらない存在をもたない．それらはテンソルあるいは任意の他の幾何学的な事象の成分でない．したがって，$T_{\text{eff}}^{\mu\nu}$ および $t^{\mu\nu}$ を含む式 (20.14) から (20.19) までの式は幾何学的な，座標によらない意味をもたない．それらは“共変テンソルの式”でない．にもかかわらず，体積分［式 (20.15) および式 (20.16)］の値 P^{μ} および $J^{\mu\nu}$ に一般的な座標変換のもとで，源外の遠く離れた漸近的に平坦な領域で幾何学的な，座標によらない意味を与える適当な不変性が存在する．この不変性は体積分そのものでみることは難しいけれども，ある空間の制限された領域内でのみ座標を変える座標変換は積分の値に影響を及ぼすことはできないことは面積分の形式 (20.9) から明らかである．遠く離れた，漸近的に平坦な領域での座標変換に対して，Lorentz 変換のもとで P^{μ} および $J^{\mu\nu}$ に対する積分は特殊相対論のテンソルのように変換するだろうということ，および無限小座標変

*11　$t^{\mu\nu}$（“ストレス–エネルギー擬テンソル”）が定義される
*12　$T_{\text{eff}}^{\mu\nu}$ が定義される
*13　$T_{\text{eff}}^{\mu\nu}$ に対する保存則
*14　$H^{\mu\alpha\nu\beta}$，$t^{\mu\nu}$，および $T_{\text{eff}}^{\mu\nu}$ は座標に依存する事象である

換（ゲージは変化する）のもとでそれらは不変量であるだろうということを，線形化された理論は保証する．

$t^{\mu\nu}$ はテンソルの成分でないから，それらは 1 つの座標系でのある点でゼロになりえても他の座標系でゼロになりえない．重力場に対する局在化されたエネルギー密度 t^{00} を定義するときに生ずる不確定さは $t^{\mu\nu}$ の形式的な定義に存在する不確定さに対応部分をもつ．
*15 元の $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ と漸近的に弱い場の領域で一致する任意の量 $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{新しい}$ は，$H^{\mu\alpha\nu\beta}$ が P^μ および $J^{\mu\nu}$ の面積分 (20.9) に対して与えるのと同じ値を与えるであろうということは明白である．1 つのとくに好都合な選択は Landau and Lifshitz（1962 ; §100）によって与えられている，彼らは

*16
$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{L-L}} = \mathfrak{g}^{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\alpha\nu}\mathfrak{g}^{\mu\beta} \tag{20.20}$$

を定義する．ここに $\mathfrak{g}^{\mu\nu} \equiv (-g)^{1/2}g^{\mu\nu}$．Landau と Lifshitz は，Einstein の式は形式

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{L-L},\alpha\beta} = 16\pi(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\mathrm{L-L}}) \tag{20.21}$$

*17 に書かれうることを示す．ここに Landau–Lifshitz 擬テンソルの成分

$$\begin{aligned}(-g)t^{\alpha\beta}_{\mathrm{L-L}} = \frac{1}{16\pi}\Big\{&\mathfrak{g}^{\alpha\beta}{}_{,\lambda}\mathfrak{g}^{\lambda\mu}{}_{,\mu} - \mathfrak{g}^{\alpha\lambda}{}_{,\lambda}\mathfrak{g}^{\beta\mu}{}_{,\mu} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\lambda\mu}\mathfrak{g}^{\lambda\nu}{}_{,\rho}\mathfrak{g}^{\rho\mu}{}_{,\nu}\\ &- (g^{\alpha\lambda}g_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\beta\nu}{}_{,\rho}\mathfrak{g}^{\mu\rho}{}_{,\lambda} + g^{\beta\lambda}g_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\alpha\nu}{}_{,\rho}\mathfrak{g}^{\mu\rho}{}_{,\lambda}) + g_{\lambda\mu}g^{\nu\rho}\mathfrak{g}^{\alpha\lambda}{}_{,\nu}\mathfrak{g}^{\beta\mu}{}_{,\rho}\\ &+ \frac{1}{8}(2g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta}g^{\lambda\mu})(2g_{\nu\rho}g_{\sigma\tau} - g_{\rho\sigma}g_{\nu\tau})\mathfrak{g}^{\nu\tau}{}_{,\lambda}\mathfrak{g}^{\rho\sigma}{}_{,\mu}\Big\}\end{aligned} \tag{20.22}$$

は計量の 1 次微分について正確に 2 次である（Einstein もまたこの性質をもつ擬テンソル $t_E{}^\mu{}_\nu$ を与えたが，それは対称でなくしたがって $J^{\mu\nu}$ に対する積分にいたらなかった）．$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{L-L}}$ は $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ と同じ対称性をもちそして源から離れたところで $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ に等しい（練習問題 20.4），そして $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{L-L}}$ による場の方程式 (20.21) は $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ による場の方程式と同
*18 じ形をもつから，

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{L-L\,eff}} \equiv (-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\mathrm{L-L}}) \tag{20.23a}$$

は，この節ですでに導入された $T^{\mu\nu}_{\mathrm{eff}}$ のすべての性質

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{L-L\,eff},\nu} = 0 \tag{20.23b}$$

$$P^\mu = \int T^{\mu 0}_{\mathrm{L-L\,eff}}\,d^3x \tag{20.23c}$$

$$J^{\mu\nu} = \int (x^\mu T^{\nu 0}_{\mathrm{L-L\,eff}} - x^\nu T^{\mu 0}_{\mathrm{L-L\,eff}})d^3x \tag{20.23d}$$

をもつことができる．

---

*15　$H^{\mu\alpha\nu\beta}$，$t^{\mu\nu}$，$T^{\mu\nu}_{\mathrm{eff}}$ 以外の，同様に良いバージョン

*16　(1) $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{L-L}}$

*17　(2) $t^{\alpha\beta}_{\mathrm{L-L}}$

*18　(3) $T^{\mu\nu}_{\mathrm{L-L\,eff}}$

［練習問題］

20.4　源から離れたところでの $H_{\mathrm{L-L}}^{\mu\alpha\nu\beta}$ の形

式 (20.20) の実体 $H_{\mathrm{L-L}}^{\mu\alpha\nu\beta}$ は源の外離れた弱い場の領域で $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ ［式 (20.3)］に帰着することを示せ．

20.4　なぜ重力場のエネルギーは局在化されえないか

3–体積の要素 $d\Sigma_\nu$ を考えそして計算に擬テンソル $t^{\mu\nu}$ あるいは前節で議論された擬テンソル $t_{\mathrm{L-L}}^{\mu\nu}$ のいずれかを用いて，3–体積の要素内の“重力場”のエネルギー運動量 4–ベクトルへの寄与を求めよ．それによって

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_\mu t^{\mu\nu} d\Sigma_\nu$$

あるいは

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_\mu t_{\mathrm{L-L}}^{\mu\nu} d\Sigma_\nu$$

を得よ．正しいか？　イイエ，質問が間違っている．動機が間違っている．結果が間違っている．アイデアが間違っている．

3–体積の要素内の電磁気的なエネルギーおよび運動量の量を求めることは意味がある．第 1 に，この量に対するただ 1 つの公式がある．第 2 に，より重要なのは，このエネルギー運動量は原理的に“重さをもつ”．それは，空間を曲げる．Einstein の場の方程式の右辺に源の項として役立つ．問題の空間領域を通過する 2 つの近傍の世界線の測地線の相対的なずれを生み出す．観測可能である．“局所的な重力的エネルギー運動量”をこれらの性質のどの 1 つも有しない．それに対する一義的な公式は存在しない，しかし多数のまったく異なる公式がある．2 つの引用されている公式は無限個の公式の中の 2 つである．さらに，“局所的な重力的エネルギー運動量”は重さをもたない．それは，空間を曲げない．Einstein の場の方程式の右辺に源の項として役立たない．問題の空間の領域を通過する 2 つ近傍の世界線のどのような相対的な測地線のずれも生み出さない．観測可能でない．[*19]

“局所的な重力的エネルギー運動量”に対する不可思議な公式を求める者は誰でも間違った質問への正しい答えを求めている．不幸にも，並外れて大きい時間と努力が過去において，研究者達が計画の無益を認識するまでに，“この質問に答えよう”という試みに捧げられた．終わりに近づいて，すべての数学的な議論を越えて，Einstein の等価原理の静かなしかし岩のような強さを認識するにいたった．任意の与えられた局所ですべての局所的な“重力場”（すべての Christoffel 記号，すべての $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$）が消滅する基準系をつねに見出す

[*19]　なぜ重力場に対して局在化されたエネルギー運動量を定義できないか

ことができる．Γ が存在しないことは “重力場” が存在しないことを意味しそして局所的な重力場が存在しないことは “局所的な重力的エネルギー運動量” が存在しないことを意味する．

重力が，重力的に相互作用している系の質量–エネルギーに寄与することを誰も否定したりあるいは否定することを望むことはできない．地球–月の系の質量–エネルギーは，2 つの物体が無限に離れていたときに系がもつであろう質量–エネルギーよりも小さい．中性子星の質量–エネルギーは同じ数のバリオンが無限に離れているときの質量–エネルギーよりも小さい．重力波が集中している真空の空間領域を取り囲んで，正味の引力が存在する．それはその空間領域における正の正味の質量–エネルギーの印である（35 章をみよ）．重力のエネルギーの存在が問題となっているのではなく，重力のエネルギーの局在が問題となっているのである．それは局在化できない．等価原理はそれを禁止する．

いぼとこぶのたくさんある，古風なジャガイモをみよ．ペンで黄色い印をつけ，その上に “北極” および “赤道” の印をつけよ．赤道の長さは北極から赤道までの距離の 2π 倍から非常に遠くかけ離れている．地球–月の系の質量欠損（あるいは中性子星に対する欠損，あるいは重力波で占められた空間領域に対する剰余分）に対して，“曲率” の説明は，ちょうど “重力” の説明と同じく単純である．にもかかわらず一例での赤道の長さでの欠損，あるいは他の例での質量での欠損を，任意の一義的に正しい方法で多様体の（一例では 2 次元の，他の例では 3 次元の）異なる要素に帰着することは可能でない．ジャガイモの表面上の小さい領域をみよ．そこでの幾何学は局所的に平坦である．3 つの重力を及ぼしている系の任意の 1 つの任意の小さい空間領域をみよ．適当な座標系ではそれは重力場に無関係である．求めている包括的な効果は大域的な効果であって，局所的な効果でない．それが数学が叫ぶものである．それが $t^{\mu\nu}$ が一義的でない教訓である！

20.5 全 4–運動量と角運動量に対する保存則

われわれの銀河あるいは太陽系のような系を考えよ，それらは多くの重力を及ぼしている物体からつくられている．物体のあるものは高度に相対論的であるだろうし（ブラックホール，中性子星），他のものはそうでない．しかし，物体間の領域では時空はほとんど平坦である（重力は弱い）—実際，それほど平坦であるので全系を，おのおのの物体の重力が強いであろう小さい領域を除いて，（ほとんど）大域的に慣性的である座標で覆うことができる．このような座標は Newton の重力ポテンシャル，$\Phi \approx \frac{1}{2}(\eta_{00} - g_{00})$ が，物体間の領域で小さい

$$\Phi_{\text{物体間}} \sim (\text{系の質量})/(\text{系の半径}) \ll 1$$

のときに限り存在できる．太陽系は確かにこの条件（$\Phi_{\text{物体間}} \sim 10^{-7}$）を満たす．それは銀河（$\Phi_{\text{物体間}} \sim 10^{-6}$）が満たすのと同じであり，また銀河団（$\Phi_{\text{物体間}} \sim 10^{-6}$）が満たすのと同じである．しかし宇宙は全体として満たさない（$\Phi_{\text{物体間}} \sim 1$）!

系の全 4–運動量に対する体積分を求めるには，その体積を各物体を含む領域（“A” と印

される）と物体間の領域に分けよ．そしてほとんど平坦な物体間の領域からの擬テンソルの寄与を無視せよ．

*20

$$P^{\mu}_{系} = \sum_A \int_A T^{\mu 0}_{\text{eff}}\, d^3x + \int_{\substack{物体間の\\領域}} T^{\mu 0}_{\text{eff}}\, d^3x$$
$$= \sum_A P^{\mu}_A + \int_{\substack{物体間の\\領域}} T^{\mu 0}\, d^3x \tag{20.24a}$$

時空は各物体の周辺で漸近的に平坦であるから，${P_A}^{\mu}$ は物体 A の近くで実験家によって重力的に測定されたとき，その 4–運動量である．物体間の領域にわたる $T^{\mu 0}$ の積分はその領域での任意の気体，粒子，あるいは磁場の全 4–運動量への寄与である．角運動量の同様の分解は

$$J^{\mu\nu}_{系} = \sum_A J^{\mu\nu}_A + \int_{\substack{物体間の\\領域}} (x^{\mu}T^{\nu 0} - x^{\nu}T^{\mu 0}) d^3x \tag{20.24b}$$

となる．操作用語で，これらの分解は，**系の全 4–運動量と角運動量は，系外の実験家によって重力的に測定されるとき，個々の物体の近くで実験家によって重力的に測定される，それらの個々の物体に対する P^{μ} および $J^{\mu\nu}$ と，物体間の物質および場からの特殊相対論的な型の寄与との和である**．これは物体のあるものが光速に近い速度で系の中を突き進んでいるときでも真実である．それらの重力的に測定された P^{μ} および $J^{\mu\nu}$ は他の任意の物体と対等の立場で，系の全 P^{μ} および $J^{\mu\nu}$ に寄与する！

*21　この漸近的に平坦な系をある漸近的な Lorentz 系で静止している 2 次元の曲面 $\mathcal{S}$ で取り囲め．そうすると $\mathcal{S}$ 内の 4–運動量と角運動量は（$\mathcal{S}$ の静止系で測定されたとき）

*22

$$\frac{dP^{\mu}}{dt} = \frac{d}{dt}\int T^{\mu 0}_{\text{eff}}\, d^3x = \int T^{\mu 0}_{\text{eff},0}\, d^3x = -\int T^{\mu j}_{\text{eff},j}\, d^3x$$
$$= -\oint T^{\mu j}_{\text{eff}} d^2 S_j \tag{20.25}$$

そして同様に

$$\frac{dJ^{\mu\nu}}{dt} = -\oint_{S_2} (x^{\mu}T^{\nu j}_{\text{eff}} - x^{\nu}T^{\mu j}_{\text{eff}}) d^2 S_j \tag{20.26}$$

で与えられる割合で変化する．擬テンソル $t^{\mu\nu}$ は，物体間の領域および系外で全 4–運動量および角運動量に無視できるほどの寄与をする（仮定によって）けれども，その重力波による時間微分 dP^{μ}/dt および $dJ^{\mu\nu}/dt$ への寄与は天文学的な周期にわたって加えられるとき，重要でありうる．こうして，束積分 (20.25)，(20.26) でそれを無視してはならない．

これらの束積分を求めるとき，$T^{\mu\nu}_{\text{eff}}$ の Landau–Lifshitz 形式は計量の 2 階微分を含まないから，それを用いることはとくに好都合である．こうして

$$T^{\mu\nu}_{\text{eff}} = (-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\text{L-L}}) \approx (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\text{L-L}})$$

---

*20　重力を及ぼしている物体の系に対する全 4–運動量と角運動量

*21　全 4–運動量と角運動量の変化率

*22　(1) $T^{\mu\nu}_{\text{eff}}$ の束積分として表される

と置け．ここに $t^{\mu\nu}_{\mathrm{L-L}}$ は式 (20.22) によって与えられる．$t^{\mu\nu}_{\mathrm{L-L}}$ の大きい r で $1/r^2$ あるいは $1/r^3$ のように消えていく部分のみが束積分 (20.25)，(20.26) に寄与できる．静的な解 $[\mathfrak{g}_{\mu\nu} \sim \text{const.} + \mathrm{O}(1/r)]$ に対しては，$t^{\mu\nu}_{\mathrm{L-L}}$ は $1/r^4$ のように消えていく．したがって，唯一の寄与は計量の力学的な部分から生ずる．それらは，大きい距離で，完全に重力波の形をしている．35 章での重力波の研究は，$t^{\mu\nu}_{\mathrm{L-L}}$ が若干の波長にわたって平均されるときに，それは任意のストレス–エネルギーテンソルについて要求するすべての性質をもつ．波動に対するストレス–エネルギーテンソル $T^{(\mathrm{GW})\mu\nu}$ になることを明らかにするだろう（たとえば，Einstein の方程式 $G^{(\mathrm{B})\mu\nu} = 8\pi T^{(\mathrm{GW})\mu\nu}$ によって，それは波が伝播する時空の "背景" 曲率に寄与する）．さらに，束積分 (20.25)，(20.26) を求める前に $t^{\mu\nu}_{\mathrm{L-L}}$ を若干の波長にわたって平均することは積分の値に影響できない．したがって，これらの積分で，置き換え

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{eff}} = T^{\mu\nu} + T^{(\mathrm{GW})\mu\nu}$$

を自由に行うことができる．それによって

*23
$$-\frac{dP^\mu}{dt} = \oint_{\mathcal{S}} (T^{\mu j} + T^{(\mathrm{GW})\mu j}) d^2 S_j \tag{20.27}$$

$$-\frac{dJ^{\mu\nu}}{dt} = \oint_{\mathcal{S}} [x^\mu (T^{\nu j} + T^{(\mathrm{GW})\nu j}) - x^\nu (T^{\mu j} + T^{(\mathrm{GW})\mu j})] d^2 S_j \tag{20.28}$$

を得る．これらは系を取り巻く漸近的に平坦な時空内のテンソル式である．擬テンソルおよび他のテンソルでない実体へのすべての関係は消滅している．

式 (20.27) および (20.28) は，**4–運動量および角運動量が系から失われる率は，重力的に測定するとき，物質，場，および重力波が 4–運動量および角運動量を運び去る率に正確に等しいことを述べている．**

この定理は高度に相対論的な物体（たとえば，回転している中性子星）に粒子を遠くから投げることによってその 4–運動量あるいは角運動量を変化させると想像する思考実験で非常に有用である［たとえば，Hartle (1970) をみよ］．

[練習問題]

20.5　Newton 的な極限での全質量–エネルギー

(a) ほとんど Newton 的な計量

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi) dt^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{jk}\, dx^j\, dx^k$$

に対して $t^{\alpha\beta}_{\mathrm{L-L}}$ を計算せよ（18.4 節をみよ）．源がゆっくり変化しており，したがって Φ の時間微分が空間微分に比べて無視できると仮定せよ．［**答え：**

$$t^{00}_{\mathrm{L-L}} = -\frac{7}{8\pi}\Phi_{,j}\Phi_{,j},$$

*23　(2) $T^{\mu\nu} + T^{(\mathrm{GW})\mu\nu}$ の束積分として表される

$$t^{0j}_{\mathrm{L-l}} = 0,$$
$$t^{jk}_{\mathrm{L-L}} = \frac{1}{4\pi}(\Phi_{,j}\Phi_{,k} - \frac{1}{2}\delta_{jk}\Phi_{,l}\Phi_{,l})] \tag{20.29}$$

（**注意**：ここで与えられている $t^{jk}_{\mathrm{L-L}}$ は "Newton の重力場に対するストレステンソル" である．練習問題 39.5 および 39.6 を参照せよ．）

(b) 重力場の源が完全流体であり次式で与えられるとせよ．

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \qquad p/\rho \sim \boldsymbol{v}^2 \equiv (d\boldsymbol{x}/dt)^2 \sim |\Phi|$$

Newton のポテンシャルは源の方程式

$$\Phi_{,jj} = 4\pi\rho$$

を満たすとせよ．源のエネルギーは

$$\begin{aligned} P^0 &= \int (T^{00} + t^{00})(-g)d^3x \\ &= \int [\rho/\underbrace{(1-\boldsymbol{v}^2)^{\frac{1}{2}}}_{\text{[Lorentz 収縮因子]}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}^2}_{\text{[運動エネルギー]}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho\Phi}_{\text{[ポテンシャルエネルギー]}}] \underbrace{(g_{xx}g_{yy}g_{zz})^{1/2}dx\,dy\,dz}_{\text{[固有体積]}} \\ &\quad + \text{高次の補正} \end{aligned} \tag{20.30}$$

(c) "運動方程式" $T^{\mu\nu}_{\mathrm{L-L\,eff},\nu} = 0$ は Newton の流体力学の標準方程式に帰着することを示せ．

20.6　場の方程式から導かれた運動方程式

Einstein の場の方程式

$$\boldsymbol{G} = 8\pi\boldsymbol{T} \tag{20.31}$$

を空間が源をもたない電磁場

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}g_{\alpha\beta}F^{\nu\beta} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}\right) \tag{20.32}$$

（5.6 節での電磁場のストレス–エネルギーテンソルに対する表現を参照せよ）以外に何ものも含まない条件で考える．幾何学が時間とともにいかに変化するかを式 (20.31) から予言するには，電磁場が時間とともにいかに変化するかを知らねばならない．場は 4–ポテンシャルの "外微分"，

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{dA} \text{（形式の言葉）}$$

あるいは

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \ (\text{成分の言葉}) \tag{20.33}$$

として表される．そして場の時間変化率は Maxwell の方程式

$$\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{F} = 0$$

あるいは

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{20.34}$$

によって支配される．もし Maxwell の方程式が Maxwell の場の時間についての発展を予言し，そして Einstein の方程式が Einstein の場に対して同じことをするのが正当な分業にみえるならば，Einstein の方程式 (20.31) と，Maxwell のストレス–エネルギーに対する表現 (20.32) が，両方の仕事をしうることの発見は新鮮な驚きとして現れるだろう．Maxwell の "運動方程式" (20.34) が与えられなくてもよい．それを式 (20.31) と式 (20.32) から新たに導くことができる．証明は 5 段階で進む（練習問題 3.18 および 5.10 節をみよ．）段階 1：Bianchi 恒等式 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{G} \equiv 0$ はエネルギー運動量の保存 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 0$ を意味する．段階 2：保存はそれ自身を，成分の言葉で次の形式で表す．

*24

$$0 = 8\pi T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 2F^{\mu\alpha}{}_{;\nu} g_{\alpha\beta} F^{\nu\beta} + 2F^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} F^{\nu\beta}{}_{;\nu} - g^{\mu\nu} F_{\sigma\tau;\nu} F^{\sigma\tau} \tag{20.35}$$

段階 3：真ん中の項を不変に残し，第 1 項を整理し直し，最後の項のように，項 $F^{\sigma\tau}$ を保つようにする．こうして第 1 項で $F^{\nu\beta}$ の添字 $\nu\beta$ を $\sigma\tau$ および $\tau\sigma$ で置き換えて，その項を

$$\begin{aligned} &F^{\mu\alpha}{}_{;\sigma} g_{\alpha\tau} F^{\sigma\tau} + F^{\mu\alpha}{}_{;\tau} g_{\alpha\sigma} F^{\tau\sigma} \\ &= (F^{\mu}{}_{\tau;\sigma} - F^{\mu}{}_{\sigma;\tau}) F^{\sigma\tau} \\ &= g^{\mu\nu}(F_{\nu\tau;\sigma} + F_{\sigma\nu;\tau}) F^{\sigma\tau} \end{aligned} \tag{20.36}$$

に細分割する．段階 4：式 (20.35) の最初と最後の項を結合して

$$g^{\mu\nu}(F_{\nu\tau;\sigma} + F_{\sigma\nu;\tau} + F_{\tau\sigma;\nu}) F^{\sigma\tau} \tag{20.37}$$

を与える．場の量の微分についての添字は循環の順序に従っている．この事情は共変微分を明白に書き下ろしたとき，接続係数 $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ についてのすべての項を抹殺する．こうして共変微分を通常の微分で置き換えることができる．さらに，場に対してポテンシャルによる表現 (20.33) を代入するとこれら 3 つの微分は互いに他を恒等的に抹殺する．したがって，保存則 (20.35) で真ん中の項を除いて何も残らず，4 個の量（$\beta = 0, 1, 2, 3$）

$$F^{\beta\nu}{}_{;\nu} \tag{20.38}$$

について 4 個の陳述（$\mu = 0, 1, 2, 3$）

*24 Einstein の場の方程式から導かれる真空の Maxwell 方程式

$$F^{\mu}{}_{\beta}F^{\beta\nu}{}_{;\nu}=0 \tag{20.39}$$

を引き起こす．段階 5：4 個の未知数 (20.38) に対する 4 個の方程式 (20.39) での係数の行列式は値

$$\begin{vmatrix} F^0{}_0 & F^0{}_1 & F^0{}_2 & F^0{}_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F^3{}_0 & F^3{}_1 & F^3{}_2 & F^3{}_3 \end{vmatrix} = -(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2 \tag{20.40}$$

をもつ（練習問題 20.6 (i) をみよ）．一般的な場合には，4 変数 (t,x,y,z) のこの 1 つの関数は 1 つあるいはより多くの超曲面上でゼロになる．しかしこのようなどの超曲面でも離れると（すなわち，時空内の "正常な点" で）それはゼロと異なる．すべての正常な点で，ゼロでない行列式をもつ 4 個の線形方程式 (20.39) の解は 4 個の未知数 (20.38) に対して恒等的にゼロを与える．すなわち，Maxwell の "運動方程式"

$$F^{\beta\nu}{}_{;\nu}=0$$

が満たされる．そして Einstein の場の方程式 (20.31) およびストレス–エネルギーテンソルに対する表現 (20.32) の率直な結果として満たされねばならない．特別な場合は反例を認める（練習問題 20.8 をみよ）．しかし一般的な場合には Maxwell の運動方程式をもちだすには及ばない．それらを Einstein の場の方程式から演繹できる．

Maxwell の場そのものの力学から Maxwell の場の影響のもとで運動している荷電粒子の力学に向かう．Maxwell の運動方程式に対するよりも Lorentz の運動方程式に対する
*25 外部からの先見により多くの訴えをするな．代わりに，Lorentz の方程式を生成するために再び Einstein の場の方程式を呼び求めよ．あるいはより直接的に，エネルギー–運動量の局所的な保存の原理を，結果として呼び求めよ．

$t=t$ から $t=t+\Delta t$ までの粒子の世界線の軌道を保つ（図 20.1）．この世界線の周りに "世界管" を生成せよ．こうして，時間座標 t の各値で粒子の位置を中心としてとれ．この中心の周りに半径 ϵ の球を構成せよ．そして連続する球がいかに求める世界管に触れるかに注意せよ．この管上で時刻 t および $t+\Delta t$ に "ふた" をつくれ．2 つのふたは，本来

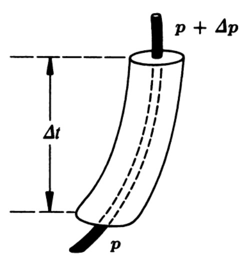


図 20.1　"世界管"．粒子の 4–運動量における変化は世界管の境界を横切る 4–運動量の流れによって支配される．

*25　Einstein の場の方程式から導かれる Lorentz 力の方程式

の世界管とともに，エネルギーおよび運動量が創造も破滅もされえない（15 章，Bianchi 恒等式の言葉で“回転のモーメントの創造がない”）時空の領域を制限する．したがって，“上”のふたから出ていくエネルギー–運動量は Maxwell の場によって世界管をよぎって運び込まれるエネルギー–運動量の量で補充された，“下”のふたに入ってくるエネルギー–運動量に等しくなければならない．このような解析から，平坦な時空で遂行されたように，基本的な形式での Lorentz の運動方程式（3 章および 4 章をみよ），

$$d\boldsymbol{p}/d\tau = e\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}\rangle \qquad \text{（形式の言葉）}$$

あるいは曲がった時空で，共変形式での Lorentz の運動方程式，

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} = e\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}\rangle \qquad \text{（形式の言葉）}$$

あるいは

$$m\left[\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right] = eF^\alpha{}_\beta\frac{dx^\beta}{d\tau} \quad \text{（成分の言葉）} \tag{20.41}$$

になる．

しかし途中，原理の問題を克服した後，初めて“Lorentz の運動方程式で終わる”．もしエネルギー–運動量の平衡の計算をまったく厳密に行う方法を理解したならば粒子とはなんであるかを理解するだろう！ 物理学のすべてにおける若干の計算は，Lorentz および彼の先輩から Dirac および Rohrlich にいたるまでの非常に多くの指導的な研究者によって非常に多くの方法でなされている［さらに深い洞察に対しては Teitelboim（1970, 1971）をみよ］．展開する問題の中には注意を向けざるをえない 2 つの問題がある．(1) 粒子は
*26 Lorentz 力の法則 (20.41) に従って場に反応する．この場は外部の源と粒子そのものとからの寄与の和である．粒子によって粒子そのものに及ぼされる場はいかにして計算されるか？ それが式 (20.41) での“実験的な質量” m にその効果に関してすでに含まれていない限り，この力はその粒子によって引き起こされる遅延場と先行場との差の半分として計算されなければならない（重力放射の放射体に対する対応点のより詳細な議論に対しては 36.11 節をみよ）．この差は特異性をもたない．世界線上で，以下の単純な値をもつ．［点粒子に対して一般的に成り立つ．有限の大きさをもつ粒子に対しては，粒子を横切って光が通過する時間内で粒子が光速に比べて無視できるほどその速度を変えるときに限り成り立つ．たとえば，Burke（1970）をみよ．］

$$\frac{1}{2}(F_{\text{遅延}} - F_{\text{先行}})^{\mu\nu} = \frac{2e}{3}\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d^3x^\nu}{d\tau^3} - \frac{d^3x^\mu}{d\tau^3}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) \tag{20.42}$$

すべての受け入れ可能な道筋の推論はつねに表現 (20.42) にいたった．それはまた長く知られておりそして完全に試されている放射減衰の法則を再現するために要求される場を表
*27 している．(2)“無限大の自己エネルギー”．静止している粒子の周り，あるいは任意の運動状態にある粒子の近くで，場は e/r^2 でありそして場のエネルギーは

*26 粒子そのものの電磁場によって作用される粒子（“放射減衰”）

*27 点粒子の無限大の自己エネルギー

$$(1/8\pi)\int_{r_{\text{最小}}}^{\epsilon}(e/r^2)^2 4\pi r^2\,dr = (e^2/2)(r_{\text{最小}}^{-1}-\epsilon^{-1}) \tag{20.43}$$

である．この表現は $r_{\text{最小}}$ がゼロに近づくことが許されるとき発散する．この困難を克服するには，つねにこの“自己エネルギー”と“裸の質量”の和が現れるような具合にエネルギー平衡の計算を調整する．$r_{\text{最小}}$ がゼロに近づくとき，2 項はそれぞれ“無限大に近づく”と想像される．しかし和は“実験的な質量”と同定され有限にとどまることが要求される．もちろん，粒子は古典的な物体でない．エネルギーの正しい計算は量子レベルで処理されなければならない．そこでは分離された無限大を視界から隠すことはより容易である—しかしそれらは依然存在し，そして粒子の構造が理解されるまで残ることを約束する．

Maxwell および Lorentz の運動方程式から最終の例（電荷をもたない粒子に対する測
*28 地線の運動方程式を導くこと）へ向かう前に，“運動方程式を Einstein の場の方程式から導く”という全体のプログラムに反対するときでないか？　まず，それが実際 4–運動量の保存則のような基本的で長く確立されている原理から出るとき，それは“Einstein の場の方程式から”（そしてさらに，“Einstein の場の方程式から”）出るということは大げさなうぬぼれた見せびらかしでないか？　この保存原理は，歴史的な事実において，ちょうどそれが電気力学の前にそしてすべての他の確立された場の理論の前に出たように，幾何力学の前に出たことは論駁されえない．しかし，Einstein の理論以外の理論にこの原理は恒等式として取り入れられない．ここでのみエネルギー–運動量の保存は世界の機構の内的な働きの完全に自動的な結果として現れる（エネルギー密度は回転のモーメントに結びついており，そして回転のモーメントは自動的に保存される．17 章をみよ）．Einstein の理論から粒子の運動方程式を導くことができる．Maxwell の理論からはできない．こうして，電荷に“外”力，さらに Lorentz 力が作用する．そして，なにものもこの力が電荷をある定められた世界線（エンジンによって駆動させられる源）に従うように適応させることを妨げない．注意を Lorentz の運動方程式に従う世界線から Lorentz の運動方程式に従わない世界線に移したということは，Maxwell の方程式に対して何の困難も生じない．一般相対論ではまったく逆のことが真実である．正しい世界線（測地線）から間違った世界線に移ることは，その世界線の近傍で Einstein の場の方程式を満たすことと Einstein の場の方程式を満たすことができないということとの間に相違を生ずる．

Maxwell の場の方程式は電荷の保存を自動的に満たしそしてそれを要求するように構成されている．しかしすべてのものが電荷をもっているわけでない．Einstein の場の方程式は運動量–エネルギーの保存を自動的に満たしそしてそれを要求するように構成されており，そしてすべてのものがエネルギーをもっている．Maxwell の場の方程式は“外”力の挿入に無関係である．なぜならその力は電荷の保存の原理をけっして脅かさないからである．Einstein の場の方程式はすべての力を気にかける．なぜならすべての力はエネルギーの交換に対する媒体であるからである．

電磁気学は“私はここに存在するすべての電荷を勘定する，”というモットーをもつ．電

*28　運動方程式を Einstein の場の方程式の結果とみなすことがなぜ正当化されるか

荷をもたないすべての物はその注視を逃れる．

“私はここに存在するすべての物の重さを量る” というのは時空曲率のモットーである．この監視を逃れる物理学的な実体は存在しない．

そうすると，物体の測地線の運動方程式を導くことは “4–運動量の保存の原理” よりもむしろ “Einstein の幾何力学の場の方程式” に基づいていると言われるのはなぜか？ なぜなら幾何学はその曲率によってすべての形の質量–エネルギーに反応するからである．とりわけ，外部の幾何学は，内部構造の問題（激しい運動，未知の力，ねじれ曲がったそしてさらに多重連結の幾何学）にまったく関係なく，内部の質量–エネルギーについて述べるからである．

粒子の運動方程式を “場の方程式から” 導く計画への 1 つの異議が解決されたら，他の自然な異議を取り扱う時期がきている：“粒子”（点への理想化を意味する）に連続体を取
*29 り扱う場の方程式を適用することに内部矛盾が存在しないか？ **答え**：点を取り扱うときに矛盾が存在する．したがって点を取り扱うな．内部構造をまったく取り扱うな．物体外の幾何学をみることによって運動を解析せよ．その幾何学は運動に従う必要のあるすべての取り扱いを提供する．

すでにここで，上に描写されているように，Lorentz の運動方程式の導出からの相違をみる．そこでは（1）外部の幾何学は内部運動を知らせるものとして利点がない．（2）詳細な簿記は電磁気的なエネルギーの空間での局在化について描かれた．そして（3）この簿記は満足には解かれ得ない，粒子の内部構造の問題をもたらした．

*30 さて新しい幾何力学の精神で解析を始める．物体の “Schwarzschild の影響圏” を取り囲んで，“背景の幾何学” が平坦さから本質的に逸脱し始める領域まで広がる “緩衝地帯” を区画する（図 20.2）．緩衝地帯での幾何学を，平坦な空間に漸近的に変わっていく（“緩
*31 衝地帯の境界 $\mathcal{B}$”），変化しない源の幾何学として理想化せよ．この平坦な時空に相対的にそして源の内部構造に関係なく，源は静止を続け，あるいは直線に沿って一様な速度で動き続ける（全 4–運動量の保存，20.5 節）という重要な結論を引き出すには，変化しない（すなわち，放射していない）源（練習問題 19.3）の外遠く離れた時空の幾何学の性質を思い出せば十分である．言い換えれば，源は測地線の運動方程式に従う．もしこれが瞬間の結果であるならば，それが意味するものおよびそれが要求するものを見出すために，1 段階逆戻りしてそれを吟味するのが適切である．

*32 物体が存在せずそして背景の幾何学のみが考慮されなければならないとき，測地線はよく定義された数学的な構成である．さらに，この測地線に沿った Fermi–Walker 移動は共運動の局所慣性系（13.6 節をみよ）を構成するよく定義された方法を与える．この系に相対的に，測地線の代表点は原点につねに静止し続ける．

*33 物体の存在はこの状況をどのように変えるか？ 物体は角運動量，質量四重極モーメン

---

*29 運動方程式を導くときに，いかにして粒子の構造の複雑さを避けうるか：“外的な観点”

*30 測地線の運動を Einstein の場の方程式から導く

*31 （1）導出の要約

*32 （2）注意深い導出

*33 曲率の粒子のモーメントとの結合は測地線の運動からのずれを生み出す

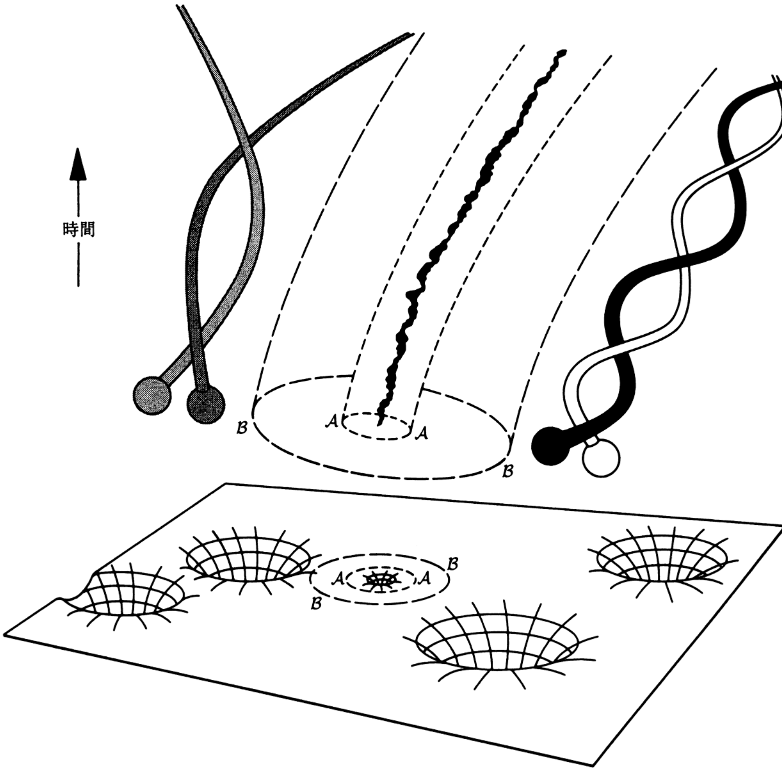


図 **20.2**　"緩衝地帯"，$\mathcal{AB}$ 間の空間の殻，そこでの幾何学は，漸近的に平坦な空間内の局所化された引力中心（研究されている物体）の球対称な "Schwarzschild 幾何学" として適切に理想化されている．$\mathcal{A}$ の内部：物体の "影響地帯"．この物体がすべての対称性を欠く一般的な場合には，幾何学の探求が $\mathcal{A}$ から内部へ続けられるにつれて，計量が理想的な "Schwartzschild の特徴" からますます逸脱するのが見出される（物体の角運動量の計量への影響，四重極モーメントの影響，より高いモーメントの影響）．$\mathcal{B}$ の外部："背景幾何学." この幾何学が $\mathcal{B}$ の外部へますます大きい距離で探求されるにつれて，この幾何学は平坦さからますます逸脱するのが見出される（質量の集中，重力波，および他の幾何力学の影響）．

ト，そして高次の多重極モーメントを有する．それらは背景幾何学の潮汐を生み出す加速度（Riemann 曲率）と相互作用する．これらのモーメントの空間での位置に依存して，相互作用は物体を測地線の経路から 1 方向あるいは他方向にそらせる（40.9 節をみよ）．これらの運動での異常性は幾何学での異常性と協力して進む．理想的な数学的測地線上およびその近くでは計量は Minkowski である．この測地線から Riemann 規準座標 ξ^1, ξ^2, ξ^3（11.6 節をみよ）をもつ変位だけ移動された点で，計量成分はその正準値（$-1, 1, 1, 1$）と（1）ξ^m の 2 乗および積，そして（2）背景幾何学の Riemann 曲率テンソル（潮汐を生み出す加速度），とに比例する量だけ異なる．これらの 2 次の項は緩衝地帯での理想からのずれを象徴的に

$$\delta(\text{計量}) \sim r^2 \cdot R \cdot (2\text{ 次の球面調和関数}) \tag{20.44}$$

程度として記述されるであろうずれを生み出す．ここに r は測地線からの距離であり R は曲率テンソルの重要な成分の大きさである．物体は平坦さから標準的な "Schwarzschild" のずれ，

$$\delta(\text{計量}) \sim m/r \tag{20.45}$$

それ自身（平坦な背景で），測地線に沿う運動からのずれをもたらさない，のみならず

$$\delta(\text{計量}) \sim (S/r^2)(1\text{ 次の球面調和関数}) \tag{20.46}$$

および

$$\delta(\text{計量}) \sim (\not{I}/r^3)(2\text{ 次の球面調和関数}) \tag{20.47}$$

および高次の項を生み出す．ここに $S\,(\mathrm{cm}^2)$ は角運動量ベクトルあるいは“スピン”の代表的な成分である．$\not{I}\,(\mathrm{cm}^3)$ は慣性モーメントあるいは四重極テンソル（詳細に対しては36章をみよ）の代表的な成分である，そしてより高い項は高次の係数をもつ．

*34 物体の周囲の事物によって生成される潮汐を生み出す加速度（“背景幾何学”）は，RS 程度の力で物体のスピンに作用する．そして

$$\text{加速度}\,(\mathrm{cm}^{-1}) \sim \frac{R\,(\mathrm{cm}^{-2})\,S\,(\mathrm{cm}^2)}{m\,(\mathrm{cm})} \tag{20.48}$$

程度の加速度で物体を測地線の運動から引き離す（練習問題 40.8 をみよ）．言い換えれば，周囲の事物とスピンの両方が幾何学にゆがみをもたらし，これらのゆがみが重なり合って物体を軌道を離れて押し動かす．

計量についての重要な 2 つの摂動の和は定性的に

$$\delta g \sim r^2 R + S/r^2 \tag{20.49}$$

の形をしている．和は r が

$$r \sim (S/R)^{1/4} \tag{20.50}$$

程度の値をもつところで最小である，そしてそこで大きさ

$$\delta g \sim (SR)^{1/2} \tag{20.51}$$

をもつ．

“あるあらかじめ指定された精度 ϵ で測地線の運動方程式を導く”ことは，緩衝地帯での計量は ϵ の範囲内で Minkowski であることを意味するものと定義されるだろう．示された例では，これは，$(SR)^{1/2}$ が ϵ あるいはより小さい程度であることが要求されることを意味する．R の値については何もできない．なぜなら背景曲率 R は背景幾何学の特徴であるからである．物体の質量およびモーメントに制限を課すことによってのみ要求を満たすことができる．支配的なモーメントが角運動量である例では，物体のこのパラメータは大きさの程度で極限

$$S \sim \epsilon^2/R \tag{20.52}$$

よりも小さいことを要求しなければならない．明らかにより高いモーメントについてのこれおよび同様の条件は，物体が球対称（$S=0$，$\not{I}=0$，より高いモーメント $=0$）である

*34　スピンの曲率との結合

ことを要求することによってもっとも容易に満たされる．そうすると計量についての摂動は，再び角度因子および添字を無視して，定性的に

$$\delta g \sim r^2 R + m/r \tag{20.53}$$

の形をとり，そして緩衝地帯は上式を最小にする r の値を括弧に入れてもっともよく案出される．

$$r_{\mathcal{A}} \leq [r \sim (m/R)^{1/3}] \leq r_{\mathcal{B}} \tag{20.54}$$

緩衝地帯での計量の Minkowski 的な典型からのずれは

$$\delta g \sim (m^2 R)^{1/3} \tag{20.55}$$

の程度である．δg に対する任意のあらかじめ指定された精度 ϵ を達成するには，質量は

$$m \sim \epsilon^{3/2}/R^{1/2} \tag{20.56}$$

程度の極限よりも小さいことを要求しなければならない．

*35　複雑な背景の影響のもとで動いている有限質量の物体は，幾何学が任意の精度で Minkowski の値に近づく緩衝地帯を認めないだろう．したがってこのような物体が測地線の世界線に従うということは正しくない．有限の静止質量の物体が測地線の世界線に従うということは意味がない．何の世界線？　もし物体がブラックホールであるなら，その地平線，“ホライズン”（horizon; 捕獲曲面，1 方向の膜，33 および 34 章をみよ）内に外部で起こっている物理学に関係のある点は存在しない．どのような背景幾何学内での測地線の世界線？ブラックホールの“背後に存在する”あるいはブラックホール“への背景”である幾何学について語ることは意味がない．

*36　1 つの時空内での 1 つの物体の 1 つの運動から，連続的な 1 つのパラメータをもつ時空群に向かう，物体の質量 m は，Einstein の場の方程式のこれらの解の 1 つを他の解から区別するパラメータである．極限 $m = 0$ へ行く．そうすると緩衝地帯の大きさはゼロに縮まりそして緩衝地帯での計量の完全な Minkowski からのずれもゼロになる．この極限（“試験粒子”）で，物体は局所慣性系内を一様な速度で直線に沿って動くあるいは，言い換えれば，物体は背景幾何学での測地線をたどる．さらに，この背景幾何学はよく定義されている．それはパラメータ m がゼロになるときの時空幾何学の極限である［Infeld and Schild（1949）をみよ］．この意味で，測地線の運動方程式は Einstein の場の方程式の避けられない結果として出る．

*37　1 つのパラメータをもつ時空群の極限としての“背景”という概念が，物体が質量とともに電荷をもち，そして周囲の空間が電磁場を与えられる場合に拡張される．このときは 1 つのパラメータ群は結合された Einstein–Maxwell 方程式の解からなる．質量に対する

---

*35　物体は時空の測地線上を動けない意味
*36　試験粒子が背景幾何学の測地線上を動く意味
*37　電荷をもつ試験粒子の曲がった時空内の運動

電荷の比 e/m が固定される．質量 m は再び調整可能なパラメータである．m がゼロになる極限では，(1) 背景幾何学，(2) 背景電磁場，そして (3) 場の方程式の結果として，この背景での Lorentz の運動方程式の一般相対論バージョンに従う世界線が残る [Chase (1954)]．対照的に，Einstein が彼の標準的な 1915 年の幾何力学の Maxwell の標準的な電気力学との結合に対する考えられる代わりとして，思索の 1 段階で試験的に提唱したいわゆる "重力と電磁気の統一場の理論" は，荷電粒子に対する間違った運動方程式に通ずることが示されている [Callaway (1953)]．荷電粒子は，どれだけの電荷が背に蓄えられていようとも電荷をもたないかのように動く．もしその理論が正しければ，サイクロトロンは作動しないだろうし，原子は存在しないだろうし，そして生活そのものは不可能であるだろう．

*38 こうして粒子の正しい運動方程式を与える能力は今日一般相対論の手中に加えられた切り札となった．このような取り扱いに対するアイデアは Einstein and Grommer (1927) にさかのぼる．物体（それが有限の大きさをもつとき）のスピンと背景幾何学の曲率との相互作用から生ずる測地線の運動方程式に対する補正は，Papapetrou (1951) およびより完全に Pirani (1956)（練習問題 40.8 をみよ）によって取り扱われている．この題目に関する本が存在する [Infeld and Plebanski (1960)]．40.9 節は測地線に沿う運動への補正がいかに月および惑星の軌道に影響するかを記述する．研究対象がばらばらになったり特定方向の放射の流れを放出するときに生ずる問題の若干および，未解決の原理の問題は Wheeler (1961) によって議論されている．

無限小の質量の極限から有限の質量の物体に向かうとき，電荷をもたないブラックホール (33 章) の系よりも単純な事情は存在しない．これらの物体の運動についてのすべては，源をもたない Einstein の方程式 $\boldsymbol{G} = 0$ をいくつかのブラックホールの地平線 (24 章をみよ) 外の時空領域にまで適用することから出る．運動の理論はそうすると幾何力学でありそして幾何力学以外の何ものでもない．

*39 本節での運動についてのすべての考察が古典論の状況で遂行されていることは強調されなければならない．量子物理学の現実世界では，幾何学はいたるところで避けられない，当然の，ゼロ点揺らぎ (43 章) を経験する．これらの揺らぎに関する計算された局所的な曲率は，Planck スケールの距離 $[L = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.6 \times 10^{-33}\,\mathrm{cm}]$ で $[R \sim 1/L^2 \sim 0.4 \times 10^{66}\,\mathrm{cm}^{-2}]$ であり，任意のよく知られた物体（電子あるいは星）によってはるかに大きなスケールで生み出される曲率に比べて巨大である．これらの 2 つの曲率の相互作用の詳細な解析はこれまでなされていない．このような解析は局所的な量子揺らぎよりも大きな領域にわたる幾何学の滑らかにされた平均を定義するだろう．この平均の幾何学について，物体は測地線に沿う運動に従うだろう．このような期待は，誰も問う理由がないと同時に誰も証明していない．

---

*38　運動方程式を Einstein の場の方程式からの導出についての文献
*39　導出についての量子力学の制限

[練習問題]

20.6　電磁場とそのストレス–エネルギーテンソルの単純な特徴

(a) “スカラー” $-1/2F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$（座標変換について不変である）および “擬スカラー” $1/4F_{\alpha\beta}{}^{*}F^{\alpha\beta}$（座標変換のもとで，変換の Jacobian の符号が正あるいは負であるかに応じて，± 符号を除いて自らを再現する）は任意の局所慣性系でそれぞれ値 $\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2$ および $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$（電磁場の “2 つの Lorentz 不変量”）をもつことを示せ．

(b) Poynting 束 $(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})/4\pi$ は，場の両方の Lorentz 不変量がゼロになる（場が局所的に “ヌル” である場合）例外的な場合を除いて，エネルギー密度 $(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)/8\pi$ よりも大きさが小さいことを示せ．

(c) 電荷をもつピッチ（pith）球が棒磁石の北極からわずかな距離のところに置かれてある．電気力線と磁力線のパターンを描いて，電磁場がどこで特徴的に “ヌル” であるかを描け．“ヌル場” は “放射場” であるというのは妥当であるか？

(d) 平面波が z 方向に進んでいる．対応する電磁場はいたるところでヌルであることを示せ．

(e) 異なる方向に進む 2 つの単色光の平面波の重ね合わせはせいぜい測度ゼロの点の組でヌルであることを示せ．

(f) 場 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ が関心のある点でヌルでない “一般的な場合” に，Poynting 束は，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ の方向に速度

$$v=\tanh\alpha \tag{20.57}$$

で進む局所慣性系から場を眺めることによってゼロに帰着することを示せ．ここに速度パラメータ α は公式

$$\tanh 2\alpha=\frac{(\text{Poynting 束})}{(\text{エネルギー密度})}=\frac{2|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}|}{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2} \tag{20.58}$$

で与えられる．

(g) この新しい系での電磁場のすべての成分は E_x および B_x を除いてゼロに取りうることを示せ．

(h) 混合表示での場の成分，$F_{\alpha}{}^{\beta}$ からつくられる 4×4 行列式は，一般的な座標変換について不変であることを示せ（ヒント：3 個の行列の積の行列式はこれら 3 個の行列の行列式の積に等しいという定理を用いよ）．

(i) この行列式は (f) の特別な局所慣性系で求めることによって値 $-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2$ をもつことを示せ．

(j) この特別な系で Maxwell のストレス–エネルギーテンソルは形式

$$\|T^\mu{}_\nu\| = \frac{({E_x}^2 + {B_x}^2)}{4\pi}\left\|\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}\right\| \tag{20.59}$$

をもつことを示せ（力線に沿って Faraday の張力，力線に直角に Faraday の圧力）．

(k) 場が局所的にヌルである他の場合には，場が形式 $\boldsymbol{E} = (0, F, 0)$，$\boldsymbol{B} = (0, 0, F)$ をもちそしてストレス–エネルギーテンソルが値

$$\|T^\mu{}_\nu\| = \frac{F^2}{4\pi}\left\|\begin{matrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\| \quad (\mu\text{ 行に対して, }\nu\text{ 列に対して}) \tag{20.60}$$

をもつような局所慣性系をつねに見出しうることを示せ．

(l) 電磁場がヌルであるかないかに関係なく，Maxwell のストレス–エネルギーテンソルはゼロトレース $T^\mu{}_\mu = 0$ をもつ．そしてその 2 乗は単位テンソルの倍数，

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\alpha T^\alpha{}_\nu &= \frac{\delta^\mu{}_\nu}{(8\pi)^2}[(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2)^2 + (2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2] \\ &= \frac{\delta^\mu{}_\nu}{(8\pi)^2}[(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2)^2 - (2\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})^2] \end{aligned} \tag{20.61}$$

であることを示せ．

20.7　ストレス–エネルギーテンソルは電磁場をそのコンプレクション（complexion）を除いて定める

(a) ゼロトレース $T^\mu{}_\mu = 0$ をもち，そしてその 2 乗は単位行列の $M^4/(8\pi)^2$ 倍であるような，ゼロでない対称な 4×4 テンソル $T^{\mu\nu}$ が与えられているとき，この倍数がゼロ（“ヌルの場合”）あるいは正であるかに従って，テンソルは 3–空間内での適当な回転あるいは局所慣性系の適当な選択によって，それぞれ形式 (20.60) あるいは (20.59) に変換されうることを示せ．

(b) 問題にしている系で一般的な（ヌルでない）場合に，$T^{\mu\nu}$ は成分，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^{\text{極値}} &= (M, 0, 0), \\ \boldsymbol{B}^{\text{極値}} &= (0, 0, 0) \end{aligned} \tag{20.62}$$

をもつ “極値的な電磁場” $\xi_{\mu\nu}$ の Maxwell テンソルであることを示せ．それはまた成分

$$\begin{aligned} {}^*\boldsymbol{E}^{\text{極値}} &= (0, 0, 0), \\ {}^*\boldsymbol{B}^{\text{極値}} &= (M, 0, 0) \end{aligned} \tag{20.63}$$

をもつ “双対的な極値場” ${}^*\xi_{\mu\nu}$ の Maxwell テンソルであることを示せ．

(c) 双対演算子* を 4–次元空間での反対称 2 階のテンソル（2–形式）に 2 度加えるとそのテンソルのマイナスに逆戻りすることを思い出して，演算子 $e^{*\alpha}$（“双対回転”）は値

$$e^{*\alpha} = (\cos\alpha) + (\sin\alpha)^* \tag{20.64}$$

をもつことを示せ.

(d) 問題にしている系で，したがって任意の座標系で，ヌルでないテンソル $T^{\mu\nu}$ を再現するであろうもっとも一般的な電磁場は

$$F_{\mu\nu} = e^{*\alpha}\xi_{\mu\nu} \tag{20.65}$$

であることを示せ.

(e) ヌルの場合に対して対応する結果を導け．[1 つの系で，したがってすべての座標系で (d) および (e) によって定義される場 $F_{\mu\nu}$ は $T^{\mu\nu}$ の “Maxwell 2 乗平方根” として知られる，$\xi_{\mu\nu}$ は $T^{\mu\nu}$ の “極値的な Maxwell 2 乗平方根” として知られる，そして角度 α は “電磁場のコンプレクション” とよばれる．Misner and Wheeler (1957) をみよ．またその論文から書き改められているコラム 20.1 および 20.2 をみよ.]

コラム 20.1　固有の Lorentz 変換と双対回転との対照

量	一般的な固有の Lorentz 変換	双対回転
Maxwell のストレス–エネルギーテンソルの成分あるいは場 $\boldsymbol{F}$ の “Maxwell 2 乗”	変換される	不変である
不変量 $(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2)$ および $(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2$	不変である	変換される
組合せ $[(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2)^2 + (2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2]$ $= [(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2)^2 - (2\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})^2]$	不変である	不変である

コラム 20.2　局所慣性系での一般的な（ヌルでない）電磁場のテンソル $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ の変換

場の値	はじめに	単純化するための双対回転の後に
はじめに	$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は垂直である．そして $\boldsymbol{E}$ は $\boldsymbol{B}$ よりも大きい
単純化するための Lorentz 変換後	$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は互いに平行でありそして x 軸に平行である	$\boldsymbol{E}$ は x 軸に平行でありそして $\boldsymbol{B} = 0$

20.8 Maxwell の方程式は，広がった領域にわたって $(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})=0$ であるときストレス–エネルギーの保存則から導くことはできない

Maxwell の方程式，

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$$

は，Einstein の方程式から出るというアイデアに対する反例を与えよ．あるいはより正確に，(1) Maxwell のストレス–エネルギーテンソルはゼロ発散をもつべきであるという条件および (2) この Maxwell の場は 4–ポテンシャル A_μ のカール (curl) であるという条件はともに満たされうるが，しかし上述の Maxwell の方程式は破れることを示せ．[ヒント：平坦な時空の状況で問題を考えることは主要点を不明確にせずに解析を単純化する．任意に加速された電荷の遅延場を 2 つの部分に分解し，その 2 番目の部分，そこでは $F^{\mu\nu}{}_{II}$ とよばれている，は上述の要求を満たし，そして世界線を離れたいたるところで $(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})=0$ をもつが，引用されている Maxwell の方程式を満たさない．Teitelboim の論文 (1970) を参照せよ．]

20.9 Einstein の場の方程式の結果としてのスカラー場の運動方程式

質量をもたないスカラー場のストレス–エネルギーテンソルは

$$T_{\mu\nu}=(1/4\pi)(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}-1/2g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}) \tag{20.66}$$

ととれる．Einstein の場の方程式からこのスカラー場の運動方程式を導け．

21 章
変分原理と初期値データ

どのような作用が自然界で生じても，この変化によって使われる作用の量は可能な限り最小である．

PIERRE MOREAU DE MAUPERTUIS (1746)

重力の理論では，理論物理学のすべての他の分野におけるように，問題の数学的に正しい陳述は問題の性質によって許される限度まで確定していなければならない．可能ならば，解の一意性を保証しなければならない．

VLADIMIR ALEXANDROVICH FOCK (1959)

物事は過去にあるべくしてあったがゆえに現在あるべくしてある．

THOMAS GOLD (1972)

計算されたもの

G. W. LEIBNIZ

[本章は完全にトラック–2 である．ここまでのトラック–2 の教材は本章に対する準備として必要でない．しかし 9–11 および 13–15 章は有用であろう．本章はコラム 30.1（ミックスマスター宇宙），また 42 および 43 章に対する準備として必要である．]

21.1 力学は初期値データを要求する

幾何学の力学を予言するための計画は次の通り：“質量–エネルギーの分布を与え，それから幾何学に対する Einstein の 2 次方程式，

$$G = 8\pi T \tag{21.1}$$

を解く”．これ以上に，間違いでもなく正しくもない計画はないだろう．時空内の質量–エネルギーの分布を与えて時空幾何学に対して解く？ イイエ．質量–エネルギーを生み出す場と，場の時間変化率，および空間の 3–幾何学とその時間変化率，すべてを 1 つの時間で

*1

本章の準備について，Karel Kuchař，Claudio Teitelboim，および James York の協力に対して，K. K. の講義ノートを用い，そして K. K. [とくに練習問題 21.10] および J. Y. [とくに式 (21.87)，(21.88)，および (21.152)] の結果を他のところに出版する前に引用する許可をいただいたことに，厚く感謝を捧げる．

*1 初期のデータを与え，幾何学を予言せよ

与えよ．そしてその1つの時間での時空の4–幾何学に対して解く？　ハイ．その後に初めて，幾何力学および場の力学に対する方程式によって，すべての時間に対して，外部からのさらなる規則を必要とせずに（仕事をすることのみを必要とする！)，方程式そのものの内でおよび方程式そのものによって，時空幾何学および質量–エネルギーのこの時空を通る流れを予言する．これは，要約すれば，幾何力学の本来的に備わっている“計画”，本章でより詳細に説明される計画である．

計画を審査せよ．任意の結合した方程式の組を解く技術は，未知数を既知のものあるいは規定されるべきものから分離することにあることを指摘せよ．この分離はすでに式(21.1)でなされていると主張せよ．右辺にはすでに曲率の源が存在する．左辺にはすでに知りたいと思うもの，2度微分された計量係数の形での曲率の入れ物が存在する．したがって前進する以外に何ももたないことを主張して，計量係数に対するこれらの方程式を解け．しかし，方程式の構造をより深く解析するには［結合した偏微分方程式の組を解析する論理的基礎に対してはCartan (1922a) をみよ]，“初期値データと未来”とのより重要な分離をまず認めたときに，“源と入れ物”の分離を正しい方法でなしうるだけであることを見出す．こうして，解析をする前に結果を要約すると，Einsteinの法則の10個の成分のうち4個はこの場所そして今の空間の曲率と質量–エネルギーの分布とを結びつける．そして他の6個の方程式はこうして定められた幾何学がそれからいかに発展し続けるかを告げる．
*2

与えるべき適切な初期値データは何であるかを定めるときに，Hilbertの変分原理，

$$I = \int \mathcal{L}\, d^4x = \int L(-g)^{1/2}\, d^4x \underset{\uparrow}{=} \int L\, d(\text{固有 4–体積}) = \text{極値} \tag{21.2}$$

［練習問題 8.16]

あるいはそのArnowitt–Deser–Misner（“ADM”）変形（21.6節）およびそのKuchařによる一般化（21.6節）より以上に有用な手引きを見出さない．この原理から，もしよく定義された極値問題をもつべきであるとするならば，“両境界で挟まれたこのサンドウィッチの満たす”時空を通して幾何学を変化させるとき，両境界で（最初の空間的な超曲面上と最後の空間的な超曲面上で）何が固定されなければならないかをもっとも直接的に認識することができる．

Lagrange関数 L（スカラー関数）あるいはLagrangian密度 $\mathcal{L} = (-g)^{1/2}L$（座標体積について積分されるべき量）は，曲がった空の空間を取り扱うときには，幾何学のみでつくられる．しかし通常場も存在して，それもLagrangianに寄与する．こうして，

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{幾何学}} + \mathcal{L}_{\text{場}} = (-g)^{1/2}L,$$
$$L = L_{\text{幾何学}} + L_{\text{場}} \tag{21.3}$$

*3 場のLagrangianの代表的な計量係数についての変分は，すべての方法の中で，場の対称的なストレス–エネルギーテンソル（21.3節）の対応する成分を生み出すための（すなわち，計算するための）もっとも好都合な方法であることがわかる．

*2　Einstein方程式の10個の成分のうち4個は初期値データについての条件である

*3　ストレス–エネルギーテンソルの新しい観点

コンピュータは，この場の幾何学に対する影響を認め，そして瞬間から瞬間へと計量の時間に伴う発展をあらかじめ計算して，時空の事象についてコンピュータ自身の順序づけを課する．実際，コンピュータは時空をたくさんの数の空間層（空間的な薄片）に薄く切る．コンピュータは（1）それぞれの薄片の 3–幾何学と（2）“経過関数” N と 3–ベクトル “移動関数” N_i で表された，1 つのこのような薄片と次のこのような薄片との関係を分離して簿記をするのがもっとも好都合である（21.4 節）．

それぞれの薄片あるいは “同時性” に内在的な 3–幾何学は，この超曲面に内在的な 3 次元の Riemann 曲率をその中でそれ自身で定義する．しかしこの超曲面の完全な説明のためには，この超曲面が，包囲している 4 次元の時空多様体についていかに曲がっているかを告げる外在的な曲率（21.5 節）をも知らなければならない．

4–幾何学の空間＋時間への分割によって，Hilbert の作用原理は単純で有用な形（21.6 節）をとる．

力学での作用原理の適用のもっとも基本的な例では，

$$I = \int_{x',t'}^{x,t} L(dx/dt, x, t)dt \tag{21.4}$$

と書きそして積分を極値化する．生ずる “力学的な経路の長さ” あるいは “力学的な位相” あるいは “作用”

$$S(x,t) = I_{極値} \tag{21.5}$$

は，量子力学的な波動関数の位相を（因子 $\hbar$ を除いて）与えるから，特に重要な量である．さらに，この作用関数の位置についての変化率は運動量とよぶものである．

$$p = \partial S(x,t)/\partial x \tag{21.6}$$

そして時間についての変化率（のマイナス）はエネルギーを与える（図 21.1）．

$$E = -\partial S(x,t)/\partial t \tag{21.7}$$

そして波頭の組のこれら 2 つの特徴間の関係，

*4

$$E = H(p,x) \tag{21.8}$$

は，“分散関係” とよぶ，力学の中心題目である．

---

*4　分散関係としての Hamiltonian

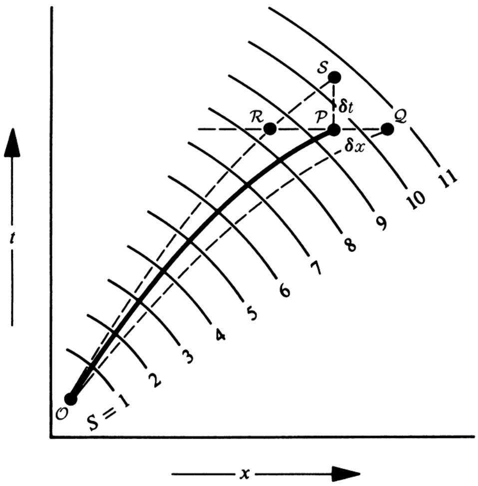


図 21.1　"力学的な位相" あるいは "作用"

$$S(x,t) = I_{\text{極値}}(x,t) = \int_{x',t'}^{x,t} L(x,\dot{x},t)dt \,(\text{の極値}) \tag{1}$$

の位置および時間についての変化率とみられる運動量とエネルギー（の負）．こうして，

$$\delta S = p\,\delta x - E\,\delta t \tag{2}$$

道に沿っての履歴の変化，$\delta x(t)$ についての積分 I の変分は，履歴の最適化によってすでにゼロである．したがって生ずる唯一の変化は

$$\begin{aligned}\delta S = \delta I_{\text{極値}} &= L(x,\dot{x},t)\delta t + \int_{x',t'}^{x+\Delta x,t} \delta L\,dt \\ &= L\,\delta t + \int_{x',t'}^{x+\Delta x,t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial x}\delta x\right) dt \\ &= L\,\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Delta x + \int_{x',t'}^{x+\Delta x,t} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)}_{[\text{極値化によってゼロ}]} \delta x dt\end{aligned} \tag{3}$$

終点の座標 (x,t) における変化 δx のみを意図するときには（$\mathcal{OP}$ から $\mathcal{OQ}$ への履歴の変化），$\Delta x = \delta x$ をもつ．終点における変化 δt のみをするときには（$\mathcal{OP}$ から $\mathcal{OS}$ への履歴の変化），$\Delta x =$ ($\mathcal{P}$ から $\mathcal{R}$ への変化の指針) $= -\dot{x}\delta t$．終点の一般的な変分に対しては，こうして $\Delta x = \delta x - \dot{x}\delta t$ をもち，そして

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x - \left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L\right)\delta t \tag{4}$$

"分散関係" は関係［式 (2) および (4) を比較せよ］

$$(\text{力学的な位相の位置についての変化率}) = (\text{運動量}) = p = \frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}} \tag{5}$$

および

$$-(\text{力学的な位相の時間についての変化率}) = (\text{エネルギー}) = E = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L \tag{6}$$

をとり，それらから $\dot{x}$ を消去する［$\dot{x}$ に対して式 (5) を解き $\dot{x}$ のその値を式 (6) に代入する］ことによって得られると結論する．こうして

$$E = H(p,x,t) \tag{7}$$

あるいは

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x, t\right) \tag{8}$$

この基本的な解析のすべての特徴は幾何力学において類似物をもつ．

幾何学の力学を Arnowitt–Deser–Misner 形式で取り扱うとき*，指定された量を最初の空間的な超曲面の 3–幾何学 ${}^{(3)}\mathcal{G}$，そして最後の空間的な超曲面の 3–幾何学 ${}^{(3)}\mathcal{G}$ であると考えると好都合であることがわかる．作用積分を，これら 2 つの面の間の "サンドウィッチ" を満たす時空の選択について極値化されたものとして描く．もしこのように時空を定めたならば，まさにその行為によって自動的に 2 つの超曲面の固有時についての隔たりを定めている．持ち込まれるべきあるいは考察されるべき付加的な時間変数は存在しない．
*5 1 つの概念 ${}^{(3)}\mathcal{G}$ は，こうして幾何力学で粒子力学の 2 つの量 x，t にとって代わる．そこで x および t に依存した作用 S はここでサンドウィッチの面の 3–幾何学に依存する．こうして，

$$S = S({}^{(3)}\mathcal{G}) \tag{21.9}$$

3–幾何学での変化は作用を変える．3–幾何学での基本的な変化あたりの作用の変化量は，幾何力学的な場の座標 g_{ij} に共役な "場の運動量" $\pi^{ij}_{\text{真実}}$ を公式

$$\delta S = \int \pi^{ij}_{\text{真実}} \delta g_{ij} d^3x \tag{21.10}$$

に従って定義する．幾何力学の Arnowitt, Deser, and Misner（ADM）正準形式（21.7 節）からのこの式を，基本的な力学での終点の変化に伴う作用の変化に対する表現，

$$\delta S = p\,\delta x - E\,\delta t \tag{21.11}$$

と比較すると，何かが違っている．式 (21.10) には時間についての明白な言及が存在しないとまず思うだろう．しかし，3–幾何学はそれ自身自動的に時間についての情報の保持者である．そして式 (21.10) は完全である．さらに，${}^{(3)}\mathcal{G}$ 自身すでに時間について保持している情報以外の "時間" 変数はなく，また "エネルギー" もない．こうして，"場の座標" あるいは 3–幾何学についてなしうる若干の変化に関係する作用の変化率を結ぶ "分散関係" は形式

$$\mathcal{H}(\pi^{ij}, g_{mn}) = 0 \tag{21.12}$$

* **歴史的な注意**．どのような座標に無関係な幾何学的な物理量が Hilbert–Palatini の変分原理で**実際**，両端で固定されるかは最近まで誰も知らなかった．Dirac は一般相対論の Hamiltonian 定式化についての彼の開拓者的な仕事で，どのような変分原理にも特別の注意を払わなかった．彼は，"第 1 のクラスおよび第 2 のクラスの制限" および古典力学の Poisson 括弧の一般化を導入して，Hamiltonian 形式を一般相対論に適応させるためにそれを一般化しなければならなかった．Arnowitt, Deser, and Misner もまた，座標に無関係な幾何学的な物理量の意味で両境界で固定されるものは何であるかを尋ねなかったとしても，彼らの仕事は対照的に，変分原理を全体の取り扱いに対する基礎としてとった．この仕事の大きな報酬は式 (21.40) の経過および移動関数の Lagrange 乗数，その係数は直接そして単純に Dirac の制限を与えた，としての認識であった．彼らは自然なそして単純な時間座標に達することに成功しなかったが，その目標はその間に Kuchař and York の "外在的な時間"（21.11 節）で達成されている．しかし，Arnowitt–Deser–Misner の方法は Sharp, Baierlein and Wheeler の "内在的な時間" に扉を開いた．そこでは 3–幾何学が両端で固定されており，そして時間についての情報の保持者である．これが直接 Arnowitt, Deser, and Misner の取り扱いの Wheeler の "超空間バージョン" に直接通じた．

*5　3–幾何学に依存するとみられる作用

をとる．式 (21.8) の E 項はゼロに等しい (詳細は 21.7 節にある)．Einstein の一般相対論の全内容はこの 1 つの Hamiltonian, あるいはそれによりふさわしい名前を与えると，“超 Hamiltonian” から得られうる [Dirac, Arnowitt, Deser, and Misner, および他の，幾何力学の Hamiltonian 形式への寄与の説明に対しては DeWitt (1967a)，pp.1113–1118 をみよ．そしてこの形式の意味および報酬に対しては 21.7 節および本章の以下の節をみよ]．

*6 Hamiltonian と超 Hamiltonioan との相違［たとえば，Kramers (1957) をみよ］は電磁気的な 4–ポテンシャル $A_\mu(x^\alpha)$ から導かれる場の影響のもとで平坦な空間内を動く荷電粒子の問題に最も顕著に表れる．Hamiltonian の取り扱いは運動方程式を作用原理，

$$0 = \delta I = \delta \int \left[p_i \frac{dx^i}{dt} - H(p_j, x^k, t) \right] dt$$

ここに

$$H = -\frac{e}{c}\phi + \left[m^2 + \eta^{ij} \left(p_i + \frac{e}{c} A_i \right) \left(p_j + \frac{e}{c} A_j \right) \right]^{1/2}$$

から導く．超 Hamiltonian の解析は運動方程式を作用原理

$$0 = \delta I' = \delta \int \left[p_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} - \mathcal{H}(p_\alpha, x^\beta) \right] d\lambda$$

から得る．ここに超 Hamiltonian は表現

$$\mathcal{H}(p_\alpha, x^\beta) = \frac{1}{2} \left[m^2 + \eta^{\mu\nu} \left(p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(p_\nu + \frac{e}{c} A_\nu \right) \right]$$

で与えられる．変分原理は変化率に対する Hamilton の方程式

$$dx^\alpha / d\lambda = \partial \mathcal{H} / \partial p_\alpha$$

および

$$dp_\beta / d\lambda = -\partial \mathcal{H} / \partial x^\beta$$

を与える．これらの式から，$\mathcal{H}$ 自身時間的なパラメータ λ に関係なく，定数でなければならないことを見出す．この定数の値は初期条件，$\mathcal{H} = 0$（“粒子の質量の指定”）として課され，その後 Hamilton 方程式自身によって保持されなければならない．$\mathcal{H}$ がゼロになるこのことは，けっして変化率，

$$dx^\alpha / d\lambda \qquad \text{および} \qquad dp_\beta / d\lambda$$

に対する Hamilton の方程式に入る偏微分，

$$\partial \mathcal{H} / \partial p_\alpha \qquad \text{および} \qquad -\partial \mathcal{H} / \partial x^\beta$$

を破壊しない．1 つの形式であるいは他の形式で導かれようとも，運動方程式は同等である．しかし共変性は超 Hamiltonian の形式で，そして同様に一般相対論で，より明白に現れる．

*6 Hamiltonian 対超 Hamiltonian

“最初の空間的な超曲面上の共存できる初期値データ” とよばれるものをもつ式 (21.12) と共存できる，“場の座標” $g_{ij}(x,y,z)({}^{(3)}\mathcal{G})$ および場の運動量 $\pi^{ij}_{\text{真実}}(x,y,z)=\delta S/\delta g_{ij}$ の値を認める．21.8 節に記述されているように 1 つの空間的な超曲面から他の空間的な超曲面へ一歩一歩時間について前へ積分して，全 4–幾何学を構成することができる．ここでは数学的な用語で，波動方程式の性質をもつ双曲型の微分方程式を取り扱っている．

*7

対照的に，(21.9 節) Poisson のポテンシャル方程式の性質をもつ楕円型の微分方程式を取り扱うときには，まず必要とされる初期値データの構成に着手する．これらの楕円型の方程式の解析には，3–幾何学で，(1) 角度（“計量の共形的な部分”）とよばれるべき，1 つの点での相対的な長さを定める計量の部分と (2) その点での長さの絶対的なスケールを定めるために 1 つの点での g_{ij} のすべての成分に入る共通の掛け算の因子を区別することが有用である．3–幾何学の 2 つの部分へのこの分解は，時間的に対称なおよび時間的に反対称な初期値問題 (21.10 節) として知られる 2 つの特別な初期値問題を取り扱うためにとりわけ単純な方法を与える．

ADM 形式は 21.11 節に要約されているように，今日展開の過程にある．Wheeler の “超空間” 形式 (1968a) では，ADM の取り扱いは，3–幾何学が境界づける空間的な超曲面のおのおので固定されなければならないことを要請する．対照的に，York (21.11 節) は元の Hilbert の作用原理に戻って，境界づける空間的な超曲面のおのおので**それ** (3–幾何学) が固定されるべく要請するものを見出す．適切なデータは，“3–幾何学の共形部分” と何か Kuchař (1971a) および (1972) が “外在的な時間” とよぶものとに密接に関係しているものであることがわかる．Wheeler の方法と Kuchař–York の方法との間の対照は，(1) 平坦な時空多様体を取り扱い，(2) この時空を通って平坦な空間的部分をとり，それから (3) 高さ ϵ の，この薄片上のわずかな隆起を導入するときとくに明白に現れる．この変形された薄片に内在的な 3–幾何学は Euclid 幾何学と ϵ について 2 次までのみ異なる．したがって完全な 3–幾何学から時間（“隆起の前方への進行”）へ読み戻すためには，この場合，何か 2 乗平方根を抽出するような操作を要する．対照的に，Kuchař–York の取り扱いは何か ϵ の 1 次のべきに比例するもの，薄片の “外在的曲率” を取り扱い，したがってある方法では時間のより好都合な測度となるものを与える [任意に強い円筒的な重力波に対する “外在的な時間” の構成に対してはとくに Kuchař (1971) をみよ，“ミックスマスター宇宙論” でいろいろ定義されている “時間” についてはまたコラム 30.1 をみよ]．York は時間–変数は “3–幾何学での共形因子に力学的に共役な” 変数ともっとも好都合に同定されることを示している．

*8

*9

幾何力学の初期値問題は Wheeler の言葉でも，あるいは Kuchař and York の言葉でも定式化されうる．いずれの定式化 (21.9 あるいは 21.11 節) でもそれは Mach の原理 (21.12 節) によって今日正しく理解すべきものに光を投げる．その原理は Mach にとって，Newton 力学で取り扱われる “加速度” は恒星あるいは何か同様によく定義されたも

---

*7　幾何学の力学的な展開
*8　境界の超曲面で固定すべきものの他の選択．3–幾何学+外在的な時間の共形的な部分
*9　Mach が現代風にされる．そこでの質量–エネルギーはここでの慣性を支配する

のについての加速度である場合に限り意味をもちうることを意味した．それは Einstein を一般相対論に導いた．今日それは“そこでの質量–エネルギーはここでの慣性を支配する”という原理に要約されている，そして初期値方程式で数学的な表現が与えられている．

初期値問題の解析は過去と未来を空間的な超曲面をよぎって結びつけた．対照的に，Einstein の場の方程式の 1 つの解（たとえば，一様な密度をもつ球状のちりの群の内部での Friedmann 幾何学）と他の解（たとえば，このちりの群の外部での Schwarzschild 幾何学）との間の接合条件を取り扱う（21.13 節）ときに時間的なベクトルを収容する超曲面に出会う．21.13 節および本章は，重力的な衝撃波および特徴的な初期値問題（たとえば，光円錐上の初期値データの陳述）の注釈で終わる．

21.2 Hilbert の作用原理と Palatini の変分法

*10 Einstein が彼の幾何力学の法則をその最終的なそして今日標準的な形式で提供する 5 日前に，Hilbert は独立に，Einstein の以前の仕事に励まされて，想像できる形式 (21.2), (21.3)

$$L_{\text{幾何学}} = (1/16\pi)^{(4)}R \tag{21.13}$$

のもっとも単純な作用原理の結果としてこの法則を定式化する方法を見出した (1915a)（現在の幾何学的な単位から慣習的な単位へ移行するときには $1/16\pi$ を $c^3/16\pi G$ で置き換えよ．あるいは作用の単位をもつ力学的な位相から，ラジアンの単位をもつ波動関数の実際の位相へ転換するには，$\hbar{\sim}L^{*2}$ で割れ）．ここに ${}^{(4)}R$ は，コラム 8.4 で詳しく説明されているように，4 次元のスカラー曲率不変量である．

この作用原理は計量係数の 2 階微分を含んでいる．対照的に，力学に対する作用原理は力学変数の 1 階微分のみを含む．そして同様に型 $\partial A_\alpha/\partial x^\beta$ の微分のみが電気力学に対する作用原理に現れる．したがって，またここでの作用原理に，$\partial g_{\mu\nu}/dx^\gamma$ の 1 階微分のみを予期したであろう．しかし，スカラー不変量はこれらの 1 階微分から構成されていない．こうして，不変量であるには，$L_{\text{幾何学}}$ は座標系の選択によらない値をもたなければならない．しかし，1 点の近傍で，$g_{\mu\nu}$ のすべての 1 階微分がゼロになるような座標系をつねに選ぶことができる．定数を除いて，計量係数およびその 1 階微分から一様につくられうるスカラー不変量は存在しない．

1 階微分から 2 階微分へ向かうとき，作業すべき曲率テンソルは全部で 20 個の異なる成分をもつ．局所慣性系で表すと，これら 20 個の成分は局所 Lorentz 変換の 6 個のパラメータの範囲まで任意である．こうして 20−6=14 個の独立な曲率の局所的な特徴（“曲率不変量”）が存在し，それは座標に無関係であり，そのいずれをも作用原理で用いることが考えられる．*11 しかし，${}^{(4)}R$ はこれら 14 個の量の中で計量係数の 2 階微分について線形である唯一のものである．Hilbert の不変量以外のどの選択も幾何力学の法則を複雑にし，

*10 変分原理 Einstein の方程式へのもっとも単純なルート
*11 スカラー曲率不変量は唯一の自然な選択である

そして Newton の重力理論（17 章）との単純な対応を破壊する．

Hilbert は本来，変分原理での x，y，z，t の独立に調整できる関数は反変表示での計量テンソル，$g^{\mu\nu}$ の 10 個の異なる成分であると考えた．後に Palatini（1919）は独立に調整できる関数のより単純なそしてより教育的なリスト，10 個の $g^{\mu\nu}$ だけでなく，10 個の $g^{\mu\nu}$ と 40 個のアフィン接続 $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$，を見出した．

接続 Γ に対する計量 g による標準的な公式を断念し，Γ を "そよ風にはためかす" ことは数理物理学では珍しくない．力学のもっとも単純な問題でも，運動量 p に対する座標 x の時間微分による標準形式を断念して p をまた "そよ風にはためかす" ことができる．それから $x(t)$ および $p(t)$ は新しい変分原理での 2 つの独立に調整できる関数になる．*12

$$I = \int_{x',t'}^{x,t} \left[p(t)\frac{dx(t)}{dt} - H(p(t), x(t), t) \right] dt = \text{極値} \tag{21.14}$$

幸いに，関数 $p(t)$ の選択についての極値化から，運動量に対する速度による標準的な公式を回復する．他の関数 $x(t)$ の選択についての極値化は，まさに $x(t)$ が唯一の調整できる関数であり，Euler and Lagrange のより基本的な変分解析が与えるのと同じ運動方程式を与える．粒子力学での 2 種類の変分原理の間のこの同等性のさらなる解析はコラム 21.1 に現れる．そのコラムに，また電気力学に適用されたときの 2 種類の変分原理をみる．

Hilbert の変分原理を t，x，y，z の本来の関数とみなしたときの $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ および $g^{\alpha\beta}$ で表すには，Lagrangian 密度は

$$L_{\text{幾何学}}(-g)^{1/2} = (1/16\pi)^{(4)}R(-g)^{1/2} = (1/16\pi)g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}(-g)^{1/2} \tag{21.15}$$

であることに注意せよ．ここで，アフィン接続をもつ任意の時空多様体におけるように，

$$R_{\alpha\beta} = R^{\lambda}{}_{\alpha\lambda\beta} \tag{21.16}$$

をもつ（14 章）．ここに

$$R^{\lambda}{}_{\alpha\mu\beta} = \partial\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}/\partial x^{\mu} - \partial\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\mu}/\partial x^{\beta} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\mu} \tag{21.17}$$

そしてすべての Γ は前もって（座標系で）その 2 個の下つき添字について対称として与えられている．式 (21.2)，(21.3) の積分 I が極値であるべきために，$g^{\mu\nu}$ および Γ の両方についての変化によって引き起こされる I についての変分はゼロであるべきであると要求する．こうして，

$$0 = \delta I = (1/16\pi)\int \delta[g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}(-g)^{1/2}]d^4x + \int \delta[L_{\text{場}}(-g)^{1/2}]d^4x \tag{21.18}$$

さて式 (21.18) での第 1 の積分および第 2 の積分におけるそれぞれの因子の変分を考えよ．第 1 の因子の変分は自明で，$\delta g^{\alpha\beta}$ である．第 2 の因子，$R_{\alpha\beta}$ の変分で，$g^{\alpha\beta}$ についての変化は何の役割も演じない．Γ についての変化のみが現れる．さらに，$\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}$ 自身は

*12　座標および運動量を独立に変化するアイデア

*13 テンソルでなくても変分 $\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}$ はテンソルである．こうして変換公式

$$\Gamma^{\bar{\gamma}}{}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \left[\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\tau}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\bar{\alpha}}}\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\bar{\beta}}} + \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\bar{\alpha}}\partial x^{\bar{\beta}}}\right]\frac{\partial x^{\bar{\gamma}}}{\partial x^{\lambda}} \tag{21.19}$$

で，最後の項は $\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\tau}$ の任意の組のテンソル性質をそれぞれ破壊する．しかし Γ の 2 つの選択的な組の間の差 $\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\tau}$ で引き算せよ．曲率テンソルの代表的な成分の変分 $\delta R^{\lambda}{}_{\alpha\mu\beta}$ は形 $\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta,\mu}$ の 2 個の項と形 $\Gamma\,\delta\Gamma$（添字は単純さのために落とされている）の 4 個の項とからなることに注意せよ．テンソルを取り扱うときには 1 つの座標系は他の座標系と同じくよい．したがってすべての Γ が考察されている点でゼロになる座標系をとれ．項 $\Gamma\,\delta\Gamma$ は消える．この座標系で，曲率の変分は $\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}$ のような量の 1 階微分で表される．任意の座標系で正しい公式を得るには通常の微分を共変微分で置き換えさえすればよい．

$$\delta R^{\lambda}{}_{\alpha\mu\beta} = \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta;\mu} - \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\mu;\beta} \tag{21.20}$$

およびその縮約，

$$\delta R_{\alpha\beta} = \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta;\lambda} - \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\lambda;\beta} \tag{21.21}$$

コラム 21.1 力学的な座標（＝“運動量”）と時間とをもつ作用の変化率，および粒子力学と電気力学での作用の変化率を結びつける分散関係（＝“Hamiltonian”）

A. Palatini の方法に類似した粒子力学についての序文

粒子力学では，履歴 $x = x(t)$ が両端 (x', t') および (x, t) の間で調整できると考え，それを変化させてこれらの両端間でとられた積分 $I = \int L(x, \dot{x}, t)dt$ を極値化する．

座標と運動量で表すと（図 21.1 をみよ），積分は次の形

$$I = \int [p\dot{x} - H(p, x, t)]dt \tag{1}$$

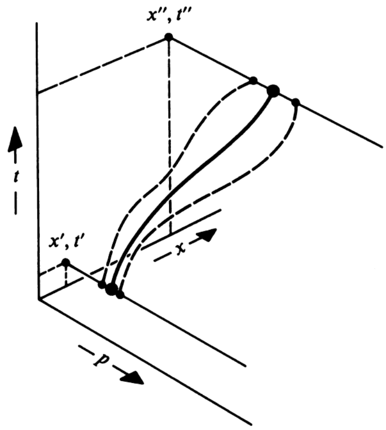
をもつ．ここに $x(t)$ は再び変化されるべき関数であり，p は x と $\dot{x}$ のある関数に対する略語にすぎず，$p = \partial L(x, \dot{x}, t)/\partial\dot{x}$ である．このようにみると，運動量の変分 $\delta p(t)$ は変分 $\delta x(t)$ によって支配され，そしてその反映にすぎない．

1. 独立変数として取り扱われる運動量

しかし，驚くべきことに，問題をみるまったく別な方法（挿入図をみよ）が存在す

*13 接続の変分はテンソルである

る．$x(t)$ および $p(t)$ を 2 つのまったく無関係で独立に調整できる関数とみなすことができる．公式 $p = \partial L(x, \dot{x}, t)/\partial \dot{x}$ を，変分原理の新しい "独立な座標および運動量バージョン" から，それあるいはそれに同等なものを回復するためにのみ，放棄する．



式 (1) の変分は，この新しい方法で定義され計算されるとき，

$$\delta I = p\delta x\Big|_{x',t'}^{x'',t''} + \int_{x',t'}^{x'',t''} \left[\left(\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta p + \left(-\dot{p} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)\delta x\right] dt \tag{2}$$

となる．δp の係数がゼロになることを要求して，運動量と速度との間の古い関係，$p = \partial L(x, \dot{x}, t)/\partial \dot{x}$ の求める新しい形式，

$$\dot{x} = \frac{\partial H(p, x, t)}{\partial p}$$

を得る．δx の係数をゼロにすると他の Hamilton 方程式，

$$\dot{p} = -\frac{\partial H(p, x, t)}{\partial x} \tag{3}$$

を与える．それは元の Lagrange 運動方程式，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

に内容について同等である．

この二重の変数という概念での $p(t)$ が—極値化の前には!—関数 $x(t)$ とまったく分離した独立な時間の関数であるということは，$p(t)$ はそれに課される両端での条件をもたないが，x' と x'' が指定されるという事情における以上に明白に現れているところはない．こうして履歴の形が，極値を達成する過程における x，p，t 空間での調整を受けるばかりでなく，両端さえも針金上のビーズのように，挿入図における 2 つの指定された直線に沿って滑るよう調整される．

2. 分散関係を見出すための道具としての作用

(x', t') を出発し，(x, t) で終わる古典的な履歴に対する "作用"，あるいは I の極値 ($= \hbar \times$de Broglie 波の位相) を $S(x, t)$ で表せ．終点を $(x + \delta x, t)$ に変えると作用での変化

$$\delta S = p\,\delta x \tag{5}$$

がつくられる．こうして運動量は "作用の力学的な座標についての変化率" である．

終点を

$$(x + \delta x, t + \delta t) = ([x + \dot{x}\,\delta t] + [\delta x - \dot{x}\,\delta t], t + \delta t) \tag{6}$$

に変えると，作用での変化

$$\delta S = p[\delta x - \dot{x}\,\delta t] + L\,\delta t = p\,\delta x - H\,\delta t \tag{7}$$

をつくる．こうして Hamiltonian は "作用の時間についての変化率" のマイナスである．

Hamiltonian $H = H(p, x)$ を用いて，de Broglie 波に対する "分散関係" は

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x\right) \tag{8}$$

となる．

この分散関係の導出で，$p(t)$ および $x(t)$ を独立変数としてのすべての話を有益に短縮し，そして定義 $I = \int L(x, \dot{x}, t)dt$ からほとんど 1 段階で結果を導くことができる．電気力学でも同様である．

このコラムの残りはまず 21 章を熟読すると，よく理解できる．

B. 電気力学での Palatini の方法の類似物

源をもたない電気力学で，2 つの空間的な超曲面 S' および S'' と，おのおのでの位置の関数としての磁場，B' および B''（この 2 番目の場は後に記号を単純化するために $''$ 上つき添字なしに書かれるであろう）が与えられていると考える．2 つの超曲面間の時空領域にわたる積分，

$$I_{\text{Maxwell}} \equiv \int \mathcal{L}_{\text{Maxwell}}\,d^4x = -\frac{1}{16\pi}\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(-g)^{1/2}\,d^4x \tag{9}$$

が変化されるべきである．

1. 超曲面上での場の変化と超曲面の位置の変化は電磁気学では明白に分離された概念である

電磁場 $\boldsymbol{F}$ は電磁気学で物理学的に重要な量である（幾何力学での 3–幾何学に匹敵する）．対照的に，4–ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は直接的な物理学的意義をもたない．ポテンシャルでのゲージ変換

$$A_\mu = A_{\mu\,\text{新しい}} + \partial\lambda/\partial x^\mu$$

は，場の成分

$$F_{\mu\nu} = \partial A_\nu/\partial x^\mu - \partial A_\mu/\partial x^\nu$$

を不変にする（$g_{\mu\nu}$ を変えるが ${}^{(3)}\mathcal{G}$ を不変にする座標変換に匹敵する）．サンドウィッチの本体内での場の変化は，しかしながら，ポテンシャルについての変化 δA_μ の効果でもっとも好都合に表される．

また作用積分が上端の空間的な超曲面（“多くの指をもつ時間”）の位置についての変化でいかに影響されるかをみたい．今，座標 x，y，z，$t(x,y,z)$ を与えられている超曲面の点が x，y，z，$t+\delta t(x,y,z)$ へ変位されると考えよ．さてこの特権のある座標系の使用を放棄せよ．同時性の変位を超曲面 Σ に垂直な 4–ベクトル $\delta\boldsymbol{n}$（単位 4–ベクトルでない）で記述せよ．サンドウィッチの元の上面と新しい上面との間に含まれる 4–体積 $\delta\Omega$ の要素は，特権のある座標系で形 $(-g)^{1/2}\delta t(x,y,z)d^3x$ をもつ 20 章での記号で

$$\delta\Omega = \delta n^\mu d^3\Sigma_\mu = (\delta\boldsymbol{n}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma}) \tag{10}$$

となる．ここに面要素 $d^3\Sigma_\mu$ はすでに記載された因子 $(-g)^{1/2}$ を含む．

上方の超曲面上での場の値についての変化およびその超曲面の位置についての変化をともに勘定して，

$$\begin{aligned}\delta S = \delta I_{\text{極値}} = &-(1/16\pi)\int_{\text{上方の}\Sigma} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(\delta\boldsymbol{n}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma}) \\ &+ (1/4\pi)\int_{\text{上方の}\Sigma} F^{\mu\nu}\underbrace{\Delta A_\mu}_{\left[\text{等価の }(\delta A_\mu - \delta n^\alpha A_{\mu;\alpha})\text{ で置き換えよ}\right]} d^3\Sigma_\nu \\ &+ (1/4\pi)\int_{4-\text{体積}} \underbrace{F^{\mu\nu}{}_{;\nu}}_{\left[\text{積分が極値化されているからゼロにならなければならない}\right]}\delta A_\mu(-g)^{1/2}d^4x\end{aligned} \tag{11}$$

をもつ．

座標を調整して超曲面が一定の t の超曲面になり，そして一定の x，y，z の直線がこの超曲面に垂直になるようにこの表現を単純化せよ．そうするとその超曲面上の体積要素はただ 1 つのゼロでない成分 $d^3\Sigma_0 = (-g)^{1/2}\,d^3x$ を含む．場の量 $F^{0\nu}$ の 2 つの添字についての反対称性は，ν は空間的なラベル $i=1,2,3$ であることを要求する．作用の変分は

$$\delta S = \int\left[\frac{(-g)^{1/2}F^{i0}}{4\pi}\delta A_i - \left\{\underbrace{\frac{(-g)^{1/2}F^{i0}}{4\pi}A_{i;0}}_{\left[\left\{\frac{(-g)^{1/2}F^{i0}}{4\pi}A_0\delta t\right\}_{,i}\text{ を加えて引け}\right]} - \mathcal{L}_{\text{Maxwell}}\right\}\delta t\right]d^3x \tag{12}$$

となる．

2. 電気力学での場の“運動量”の意味

この表現を量

$$\delta S = \int \pi^i_{EM}\, \delta A_i\, d^3x - \int \mathcal{H}\, \delta\Omega \tag{13}$$

と同定せよ．ここに

$$\pi^i_{EM} = \frac{\delta S}{\delta A_i} = \begin{pmatrix}\text{“}A_i\text{に力学的に正準共役な}\\ \text{電磁気学的な運動量の密度”}\end{pmatrix} = \frac{(-g)^{1/2}F^{i0}}{4\pi} = -\frac{\mathcal{E}^i}{4\pi} \tag{14}$$

は電場の単純な倍数であり，そして

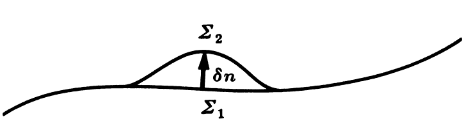
$$\mathcal{H} = -\frac{\delta S}{\delta\Omega} = \begin{pmatrix}\text{電磁気学的な}\\ \text{Hamiltonian の密度}\end{pmatrix} = (1/16\pi)[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + 4F^{i0}(A_{i;0} - A_{0;i})] \tag{15}$$

$$= (1/8\pi)(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2)$$

力学的な Hamiltonian 密度の概念は，電磁気学的なエネルギーの密度の通常の概念と，2 つの量は非常に異なる状況で導かれ用いられるにもかかわらず，一致する．しかし，正準運動量 π^i_{EM} は，たとえば，Poynting ベクトルによって定義されるような電磁気学的な運動量の密度と，2 つの量に対する標準的な名前についての混乱させる類似性にもかかわらず，直接関係する何ものももたない．式 (13) には項 δA_0 は存在しない．すなわち，$\pi^0_{EM} \equiv 0$ に注意せよ．

3. 泡　微　分

式 (15) に現れる“多くの指をもつ時間”についての“泡微分”は朝永によって初めて導入された (1946)．空間的な超曲面 Σ_1，この超曲面上で位置の関数として（この超曲面に垂直な世界線上の観測者によって）定義される磁場 $\boldsymbol{B}$，そしてこの情報から 1 個の数，作用 S へ導く処方を考える（$\hbar$ で割ると，この作用はこの特別な超曲面にわたって場の値のこの特別な分布が起こるための“波動関数”あるいは“確率振幅”の位相を与える）．第 2 の超曲面 Σ_2（挿入図をみよ）へ行く．それは与えられた点の直接近傍を除いて，Σ_1 と同等である．Σ_2 にわたって，Σ_1 にわたる元の分布と同一である場の値の分布をとる．“位置の同一性”は法線によって定義される．2 つの場合での力学的な位相あるいは作用の値での差，δS を求めよ．この差を 2 つの超曲面間の“泡”に含まれる固有 4–体積 $\delta\Omega = \int(\delta\boldsymbol{n}\cdot d^3\boldsymbol{\Sigma})$ の量で割れ．商をとり，それを泡の大きさがゼロになる極限で求めよ．このようにして作用の“泡時間微分” $\delta S/\delta\Omega$ を得よ．



作用 S は，超曲面 Σ に依存する他に，その超曲面にわたる，磁場 $\boldsymbol{B}$ の分布にも依存するということは何を意味するか？ 作用は物理量 $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ に依存し，物理学以前の量 $\boldsymbol{A}$ に依存しない．こうしてゲージについての変化 $\delta A_i = \partial\lambda/\partial x^i$ は，S について何の変化もなしえない．他方，$\boldsymbol{A}$ でのこの変更に対する S での変化の計算値は

$$\begin{aligned}\delta(\text{作用}) = \delta S &= \int \frac{\delta S}{\delta A_i}\delta A_i\, d^3x \\ &= \int \frac{\delta S}{\delta A_i}\frac{\partial\lambda}{\partial x^i}\, d^3x = -\int \left(\frac{\delta S}{\delta A_i}\right)_{,i} \lambda(x,y,z)\, d^3x \end{aligned} \tag{16}$$

である．作用のゲージについての依存性がないためには，この表現は任意の $\lambda(x,y,z)$ に対してゼロにならなければならない．$S(\Sigma, \boldsymbol{B}) = S(\text{超曲面}, \text{超曲面上の場})$ が恒等式

$$\left(\frac{\delta S}{\delta A_i}\right)_{,i} = \pi^i_{EM,i} = -(1/4\pi)\mathcal{E}^i{}_{,i} = 0 \tag{17}$$

を満たす場合に限り可能な結果である．

4. 電気力学に対する Hamilton–Jacobi “伝播則”

電磁気学に対する “分散関係” あるいは “Hamilton–Jacobi 方程式” は，(1) 力学変数 A_i（粒子力学の x の一般化）によってもたらされる “力学的な位相” あるいは作用の変化を (2) 多くの指をもつ時間（粒子力学のただ 1 つの時間 t の一般化）についての変更によってもたらされる変化と関係づける．こうして式 (15) は

$$-\frac{\delta S}{\delta\Omega} = \frac{(4\pi)^2}{8\pi}\left(\frac{\delta S}{\delta\boldsymbol{A}}\right)^2 + \frac{1}{(8\pi)}(\nabla\times\boldsymbol{A})^2 \tag{18}$$

に翻訳できる．

C. 幾何力学と電気力学に対する分散関係が比較されそして対照される

幾何力学は，“サンドウィッチの上面” での 3–幾何学 ${}^{(3)}\mathcal{G}$ を除いて，作用がそこでの計量 g_{ij} によって伝えられる情報に依存しないと述べる式において，式 (17)（“作用は磁場 $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ を除いて，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ によって伝えられる情報に依存しない”）の直接的な類似性をもつ．それはまた式 (18)（“作用の伝播に対する力学的な方程式”）の直接的な類似性をもつが，ただ 1 つの相違があり，電気力学では場の変数 $\boldsymbol{B}$ と多くの指をもつ時間は性格で異なるが，幾何力学では “場” と “多くの指をもつ時間” は 1 つのそして同じ ${}^{(3)}\mathcal{G}$ の 2 つの様相とみなされうる．

D. 作用原理と分散関係は量子原理に根づいている，すべての履歴の民主主義的な同等性の Feynman の原理

物理学での作用原理についてのより以上のことに対しては，たとえば Mercier (1953)，

Lanczos (1970), および Yourgrau and Mandelstam (1968) をみよ.

Newton (1687) は彼の *Principia* の第 1 版に対する序文の最初のページに "直線の記述…, その直線の上に幾何学がうち立てられる, は力学に属すると記している. 幾何学はわれわれにこれらの直線を描くことを教えないで, それらが描かれることを要求する".

Newton の注意もまた疑問である. 力学は粒子を直線に沿って動かすが, 力学がこの奇跡を達成する仕組みは何であるか? 量子原理が答えを与える. 粒子は直線に沿って動かないことによってのみ直線に沿って動く. 実際, 粒子は出発点 (x', t') から, 発見される点 (x'', t'') に通ずるすべての考えられうる世界線を "確かめ", それらを "比較し", そして極値の世界線をとる. いかにして粒子はこの奇跡を達成するか?

粒子は "(x', t') から (x'', t'') への通過に対する確率振幅" によって支配される. この振幅あるいは "伝播関数" $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$ は, 出発から終わりに通ずるすべての世界線からの寄与に等しい重みをつけた民主主義的な和である. こうして,

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = N \int e^{iI_H/\hbar} \mathcal{D}x \tag{19}$$

ここに N は規格化の因子であり, すべての履歴に対して同じである.

$\mathcal{D}x$ は履歴についての和に対する "体積要素" である. $t_n = t_0 + n\,\Delta t$ で x_n を与えることによって定義される "骨組み履歴" に対しては, 掛け算の定数を除いて, $dx_1\, dx_2 \cdots dx_N$ に等しい $\mathcal{D}x$ をもつ. 履歴が

$$x(t) = \frac{x'(t''-t) + x''(t-t')}{(t''-t')} + \sum_n a_n \sin n\pi \frac{(t-t')}{(t''-t')} \tag{20}$$

のような表現での Fourier 係数で定義されているときには, 体積要素は, 再び掛け算の因子を除いて, $da_1\, da_2 \cdots$ である.

破壊的な干渉は実際, "極値的な履歴" あるいは "古典的な履歴" から無視できないほど異なる履歴からの遷移確率への寄与をぬぐい去る. その極値的な履歴に近い履歴は, 他方, 建設的に寄与する. そして単純な理由のために, 古典的な履歴から 1 次の小さい逸脱は逸脱について 2 次にすぎない位相での変化をもたらす.

この基本的な例で, 極値原理が古典力学でこのような大きい役割を演ずることがいかに説明されているかをみる. 極値原理はすべての古典物理学は量子物理学の基礎に支えられていることを思い出させる. 中心的なアイデアは, (1) 確率振幅の重ね合わせの原理, (2) 建設的および破壊的な干渉, (3) "すべての履歴の民主主義", (4) 履歴 H に結合している確率振幅は, 掛け算の定数である規格化の因子を除いて $e^{iI_H/\hbar}$, というものである.

履歴の民主主義および履歴にわたっての和についてのより以上のことに対しては, Feynman (1942, 1948, 1949, 1951, および 1955), および Feynman and Hibbs の本 (1965); また Hibbs (1951), Morette (1951), Choquard (1955), Polkinghorne (1955), Fujiwara (1962), および Kursunoglu (1962) における概説および文献;

また Demposter（1963）および Symanzik（1963）のリポートをみよ．この観点は多くの研究者によって幾何力学の量子的な定式化を議論すべく適用されている．その最初は Misner（1957）であり，そしてごく最近の 1 人は Faddeev（1971）である．

変分原理に現れる第 3 の因子は $(-g)^{1/2}$ である．その変分（練習問題 21.1）は

$$\delta(-g)^{1/2} = -\frac{1}{2}(-g)^{1/2} g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} \tag{21.22}$$

である．他の被積分関数 Lagrangian 密度 $L_{場}$ は，存在する場，それらの微分に依存するだろうが，計量を $g^{\mu\nu}$ そのものとしてのみ含み，$g^{\mu\nu}$ のどのような微分の形でもけっして含まないと仮定されるだろう．

極値が存在するためには，以下の表現がゼロにならなければならない．

$$\begin{aligned}(1/16\pi)\int\left[\left(R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right)\delta g^{\alpha\beta}+g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta;\lambda}-\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\lambda;\beta})\right](-g)^{1/2}\,d^4x\\+\int\left(\frac{\delta L_{場}}{\delta g^{\alpha\beta}}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}L_{場}\right)\delta g^{\alpha\beta}(-g)^{1/2}\,d^4x=0\end{aligned} \tag{21.23}$$

式 (21.23) で Γ の変分

$$(1/16\pi)\int g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta;\lambda}-\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\lambda;\beta})(-g)^{1/2}\,d^4x$$

を含む項に注意を集中し，部分積分をして $\delta\Gamma$ の微分を消去せよ．この積分に対する方法を準備するために，**テンソル密度**の概念，一般相対論で広く適用されている記号的な工夫，を導入せよ．テンソル密度の概念は節約を目的とする．この概念なしには，テンソル

*14

$$\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} = (-g)^{1/2}[\mu\alpha\beta\gamma]$$

（練習問題 3.13 をみよ）を $4^4 = 256$ 個の成分をもつものとして，そしてその共変微分は $4^5 = 1{,}024$ 個の成分がなければならず，その 1 つは

$$\begin{aligned}\epsilon_{0123;\rho} &= \partial(-g)^{1/2}/\partial x^{\rho}\epsilon_{[0123]}-\Gamma^{\sigma}{}_{0\rho}\epsilon_{\sigma123}-\Gamma^{\sigma}{}_{1\rho}\epsilon_{0\sigma23}-\Gamma^{\sigma}{}_{2\rho}\epsilon_{01\sigma3}-\Gamma^{\sigma}{}_{3\rho}\epsilon_{012\sigma}\\&=[(-g)^{1/2}{}_{,\rho}-\Gamma^{\sigma}{}_{\sigma\rho}(-g)^{1/2}][0123]\end{aligned}$$

であるようなものとして，取扱うことになるだろう．値（0，−1，+1）をもつ記号 $[\alpha\beta\gamma\delta]$ は，交替する添字について，単なる簿記をするだけの非常に過度な荷物となる．この不便さを落とせ．代わりに非テンソル $(-g)^{1/2}$ を導入しそれに対して共変微分の法則，

$$(-g)^{1/2}{}_{;\rho} = (-g)^{1/2}{}_{,\rho} - \Gamma^{\sigma}{}_{\sigma\rho}(-g)^{1/2} \tag{21.24}$$

を**定義せよ**．これら 4 個の成分は 1,024 個の成分の代わりをする．そしてそれらの中にあったすべての重要な情報を伝える．

---

*14　テンソル密度の概念

ベクトル j_μ にベクトル密度

$$\jmath_\mu = (-g)^{1/2} j_\mu$$

が結合し，テンソル $T_{\mu\nu}$ にテンソル密度

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = (-g)^{1/2} T_{\mu\nu}$$

が結合し，さらに続く．ドイツ語のゴチック文字（この訳文では異なる記号（カリグラフ文字）が使われている）は因子 $(-g)^{1/2}$ の存在に対する標準的な指針である．時折（たとえば，21.11 節をみよ）テンソルの成分を 1 と異なる $(-g)^{1/2}$ のべきで掛けると好都合である．指数の値に従って生ずる成分の集合は，それぞれの**重み**をもつテンソル密度とよばれる．

任意の次数のテンソルからつくられる通常のあるいは標準的なテンソル密度

$$\mathcal{A}^{\cdots}_{\cdot\cdot} = (-g)^{1/2} A^{\cdots}_{\cdot\cdot}$$

の微分則は，

$$(\mathcal{A}^{\cdots}_{\cdot\cdot})_{;\rho} = (\mathcal{A}^{\cdots}_{\cdot\cdot})_{,\rho} + (\text{標準的な共変微分の標準的な } \Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot} \text{ 項が } \mathcal{A}^{\cdots}_{\cdot\cdot} \text{ に掛けられたもの})$$
$$- (\mathcal{A}^{\cdots}_{\cdot\cdot}) \Gamma^{\sigma}{}_{\sigma\rho}$$

である．積の共変微分は 2 項の和，すなわち第 1 項の共変微分 × 第 2 項 + 第 1 項 × 第 2 項の共変微分である．

さて求められるべき積分に戻ろう．因子 $g^{\alpha\beta}$ および $(-g)^{1/2}$ をテンソル密度 $\mathbf{g}^{\alpha\beta}$ に結びつけよ．積の共変微分に対する法則によって正当化されるように，共変的に部分積分せよ．“両端での項”，プラス積分

$$-(1/16\pi) \int (\mathbf{g}^{\alpha\beta}{}_{;\lambda} - \delta^{\beta}_{\lambda} \mathbf{g}^{\alpha\gamma}{}_{;\gamma}) \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\, d^4x$$

を得よ．この積分は，作用積分においてここで関心のある“内部点”で Γ の変分を含む唯一の項である．積分が極値であるためには，$\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}$ の対称化された係数はゼロにならなければならない．

$$\mathbf{g}^{\alpha\beta}{}_{;\lambda} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\lambda} \mathbf{g}^{\beta\gamma}{}_{;\gamma} - \frac{1}{2}\delta^{\beta}_{\lambda} \mathbf{g}^{\alpha\gamma}{}_{;\gamma} = 0$$

40 個の共変微分 $\mathbf{g}^{\alpha\beta}{}_{;\lambda}$ に対する 40 個の方程式のこの組はゼロ解，

$$\mathbf{g}^{\alpha\beta}{}_{;\lambda} = 0 \tag{21.25}$$

のみをもつ．こうして“逆計量テンソルからつくられる密度”は共変的に一定である．

この単純な結果は (1) 多くの単純な一続きの結果，(2) $(-g)^{1/2}$，(3) $g^{\alpha\beta}$，(4) $g_{\alpha\beta}$，および (5) $\mathbf{g}_{\alpha\beta}$ の共変的な一定性をもたらす．これらの中で，(4) はここで特別な関心がある．そして (2) は以下のように，それを証明するのに必要とされる．$(-g)^{1/2}$ の共変微分に対して定義式 (21.24) をとれ．そして第 1 項に現れる通常微分を練習問題 21.1 から計算せよ．この計算で形 $\partial\mathbf{g}^{\alpha\beta}/\partial x^{\lambda}$ の項に出会う．式 (21.25) を用いてそれらを求め，そして結果

$$(-g)^{1/2}{}_{;\lambda} = 0$$

を得よ．この結果から $\binom{1}{1}$ テンソル密度 $(-g)^{1/2}\delta^{\alpha}_{\gamma}$ の共変微分はまたゼロであることが出る．しかしこのテンソル密度はテンソル密度 $\mathbf{g}^{\alpha\beta}$ の通常の計量テンソル $g_{\beta\gamma}$ による積である．この積の x^{λ} による共変微分で，第 1 因子の微分はゼロであることをすでに知っている．したがって（第 1 因子 × 第 2 因子の微分）はゼロにならなければならない．

$$\mathbf{g}^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma;\lambda} = 0$$

そしてこれから証明されるべきものとして

$$g_{\beta\gamma;\lambda} = 0 \tag{21.26}$$

が出る．あるいは明確に，

$$\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\lambda}} - g_{\gamma\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\lambda} - g_{\beta\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\gamma\lambda} = 0$$

今まで $g_{\beta\gamma}$ について独立であった Γ に対するこれらの方程式を解き，Riemann 幾何学に対して要求されるように，接続係数に対する標準的な公式

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \tag{21.27}$$

を得よ．

同様に，変分式 (21.23) での $\delta g^{\alpha\beta}$ の係数をゼロに等しくおき，そして Einstein の場の方程式のすべての 10 個の成分を，形式

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi \underbrace{\left(g_{\alpha\beta} L_{\text{場}} - 2\frac{\delta L_{\text{場}}}{\delta g^{\alpha\beta}}\right)} \tag{21.28}$$

［21.3 節で，ストレス–エネルギーテンソル $T_{\alpha\beta}$ と同定される］

で見出せ．

計量の変分の中で，もっとも単純なものの 1 つは変化

$$g_{\text{新しい}\,\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} \tag{21.29}$$

であり，それは無限小座標変換

$$x^{\mu}_{\text{新しい}} = x^{\mu} - \xi^{\mu} \tag{21.30}$$

によってもたらされる．計量は変化するけれども，3–幾何学は変化しない．取り扱っている時空幾何学は作用原理を極値化するかしないか，それが Einstein の方程式の解であるかないかは問題でない．作用積分 I はスカラー不変量，数であり，その値は物理学に依存す*15
るがその物理学が表される座標系にまったく依存しない．この不変性はさらに作用原理の

*15 作用は座標化での単なる変化によって影響されない

両方の部分（$I_{\text{幾何学}}$ および $I_{\text{場}}$）に対してそれぞれ通用する．したがっていずれの部分も変分 (21.29) によって値に影響を受けないだろう．言い換えれば，量

$$
\begin{aligned}
\delta I_{\text{幾何学}} &= (1/16\pi)\int G_{\alpha\beta}(\xi^{\alpha;\beta}+\xi^{\beta;\alpha})(-g)^{1/2}\,d^4x \\
&= -(1/8\pi)\int G_{\alpha\beta}{}^{;\beta}\xi^{\alpha}(-g)^{1/2}\,d^4x
\end{aligned}
\tag{21.31}
$$

[“共変的な部分積分”]

は 4–幾何学が何であろうとそして変化 ξ^α が何であろうとゼロにならなければならない．このようにして，新しい角度から 15 章の縮約された Bianchi 恒等式

$$
G_{\alpha\beta}{}^{;\beta}=0 \tag{21.32}
$$

をみる．

作用原理の，式 (21.29) のようなたんなる座標変換についての “中立性” は，変分原理そしてそれとともに Einstein の方程式は座標あるいは計量でなく，4–幾何学そのもののみを定めることができることを再び示している．

[練習問題]

21.1　計量テンソルの行列式の変分

任意の行列式の値での変化は，その行列式の各要素での変化にその余因子を掛け生ずる積（練習問題 5.5）を加えることによって与えられることを思い出して

$$
\delta(-g)^{1/2}=\frac{1}{2}(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} \quad \text{および} \quad \delta(-g)^{1/2}=\frac{1}{2}(-g)^{1/2}g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}
$$

を証明せよ．また

$$
g=\det\|\mathbf{g}^{\mu\nu}\| \quad \text{および} \quad \delta(-g)^{1/2}=+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\,\delta\mathbf{g}^{\mu\nu}
$$

を示せ．

21.3　物質の Lagrangian とストレス–エネルギーテンソル

Einstein の幾何力学の法則を Hilbert の作用原理から導くことは，右辺に場の Lagrangian から導かれる源の項を持ち込む．対照的に，17 章の導出は源の項を場のストレス–エネルギーテンソルと同定した．2 つの導出が共存できるためには，ストレス–エネルギーテンソルは表現

*16
$$T_{\alpha\beta} = -2\frac{\delta L_{場}}{\delta g^{\alpha\beta}} + g_{\alpha\beta}L_{場} \tag{21.33a}$$

あるいは

$$(-g)^{1/2}T^{\alpha\beta} \equiv \mathcal{T}^{\alpha\beta} = 2\frac{\delta \mathcal{L}_{場}}{\delta g_{\alpha\beta}} \tag{21.33b}$$

によって与えられなければならない．この同定の結果は何であるか？

ここで用いられているように術語“場の Lagrange 関数”は，平坦な時空で定式化されているように古典論の Lagrange 関数を意味する．ただし平坦な時空の計量が現れるときにはつねに現実の計量で置き換えられ，16 章の“コンマはセミコロンに移行する規則”はすべての微分に適用される．

一般的なテンソル場を取り扱っているときには，“コンマはセミコロンに移行する規則”は，すべての添字をもつテンソル場の微分の他に，添字の数に等しい数の Γ を導入するだろう．場の Lagrangian でのこれらの Γ の存在は，21.2 節に記述されている Palatini の変分手続きに対して不幸な結果をもつだろう．もはや Γ は標準的な公式 (21.27) によって計量係数で与えられて終わることはないだろう．もはや Hilbert–Palatini の変分原理から導かれる幾何学は，Riemann 的でないだろう．そうすると何が？

これらの面倒な問題は 2 つのよく知られた単純な例，スカラー場および電磁場では起こらない．1 つの例では，場の Lagrangian は

$$L_{場} = (1/8\pi)[-g^{\alpha\beta}(\partial\phi/\partial x^\alpha)(\partial\phi/\partial x^\beta) - m^2\phi^2] \tag{21.34}$$

*17 となる．接続係数は入らない，量は微分されるがスカラーである．他の例では，場の Lagrangian は 4–ポテンシャル A_μ の 1 次微分でつくられる．したがって Γ は，共変微分に対する標準的な規則（コラム 8.4）に基づいて現れるはずである．しかし，A の微分は単独にではなく，つねに反対称の組合せで現れ，Γ は相殺して，共変微分を通常の微分に同等にする．

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \tag{21.35}$$

両方の例で，ストレス–エネルギーテンソルを生成する式 (21.33) の微分は容易に遂行され（練習問題 21.2 および 21.3），これら 2 つの例の 1 つでの $T_{\mu\nu}$ に対して前章ですでにみられた標準的な表現 (5.22) および (5.23) を与える．

*18 場の理論は，場のストレス–エネルギーテンソルに対するいわゆる正準表現を生成するまったく別な方法を与える［たとえば，Wentzel（1949）をみよ］．構成の方法そのものによって，このような表現はまた運動量およびエネルギーの保存則を満たすことが保証されており，この事情によってそれはまたある状況で有用となる．しかし，正準テンソルはしばしばその 2 つの添字について対称でなく，このような場合には角運動量の保存則を破

---

*16　Lagrangian はストレス–エネルギーテンソルを生成する

*17　例としての電磁気学

*18　“正準的な場の理論”のストレス–エネルギーテンソルとの対照

る（5.7 節での議論をみよ）．対称的なときでも，それは式 (21.33) によって与えられるストレスおよびエネルギーとまったく異なる局在化を与えるだろう．場の理論はそれ自身で場のエネルギーがどこに局在しているかについてのこれらの異なる描像のどちらかに決めることができないだろう．しかし，重力の引力の直接的な測定は原理的にストレス–エネルギーの局在に対する択一的な規則を選び出す手段を与える［たとえば，Feynman（1964）をみよ］．なぜなら重力は質量–エネルギーおよび運動量の密度に直接反応を示すからである．したがって変分形式での重力理論がストレス–エネルギーテンソルを固定させるための一義的な規則は，対称的である他に，運動量およびエネルギーの保存則をも自動的に満たす（練習問題 21.2 および 21.3）規則を与えることは幸せな状況である．［ストレス–エネルギーテンソルの対称化の初期の議論に対しては，Rosenfeld（1940）および Belinfante（1940）をみよ．より広範囲にわたる議論は Corson（1953）および Davis（1970）によって，文献についての広範囲な参照とともに与えられている．］

スピノール場を取り扱うときには，変化されるべき量として計量係数そのものでなく，全空間にわたるテトラッド（tetrad，四つ組）場として定義される直交ベクトルのテトラッドの成分をとるのが好都合であることがわかる［議論と文献に対しては Davis（1970）をみよ］．

［練習問題］

21.2　スカラー場に対するストレス–エネルギーテンソル

スカラー場の Lagrange 関数 (21.34) が与えられているとき，この場に対するストレス–エネルギーテンソルを導け．またこの Lagrange 関数から導かれるスカラー場に対する場の方程式（場が曲がった時空の競技場内でその力学を遂行する一般的な場合で）を書き下ろせ．この場の方程式の結果として，ストレス–エネルギーテンソルは保存則，$T_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = 0$ を満たすことを示せ．

21.3　Faraday–Maxwell のストレス–エネルギーテンソル

Lagrangian 密度 $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/16\pi$ が与えられるとき，それを変数 A_μ および $g^{\mu\nu}$ で表し直し，式 (21.33) を用いて 5.6 節で議論されているようにストレス–エネルギーテンソルを導け．また Lagrange の変分原理から場の方程式 $F_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = 0$（曲がった時空，しかし—単純さのために—電荷の存在しない空間領域）を導け．この場の方程式の結果として，Faraday–Maxwell のストレス–エネルギーテンソルは保存則，$T_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = 0$ を満たすことを示せ．より野心的な学習課題に対しては，場の Lagrangian から式 (21.33) の処方によって導かれるどのようなストレス–エネルギーテンソルも自動的に保存則 $T_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = 0$ を満たすだろうことを示せ．

21.4　時空を空間と時間に分割する

多くの指をもつ時間を“拡張して”，ここではより速くそこではより遅く，あるいはそこではより速くここではより遅く，時空を調査する多くの方法がある．しかし，コンピュータは1つの明確な処方に従うときにのみもっとも効率的にプログラムされる．その上で幾何学が与えられている連続する超曲面は，時間パラメータ t の連続する値によってもっとも好都合に記述される．これらの超曲面の3–幾何学とこれらの薄片の間を埋める4–幾何学とを異なる基礎に立って取り扱う．

*19

時空を空間的な超曲面の1–パラメータ群に薄切りすることは，その道に沿っての力学の解析のみならず，形式，“時空のサンドウィッチの2つの面上の3–幾何学を与え，そして作用を極値化するために両面間の4–幾何学を調整する”，の任意の作用原理に持ち出されるときの境界条件によってもまた必要とされる．

*20

無限小の厚さのサンドウィッチという単純な場合を考察しよう（図21.2）．(3+1)–空間–時間分割に適合した座標を選び，図での“下方の”（先の）超曲面を $t=$ 一定そして“上方の”（後の）超曲面を $t+dt=$ 一定と名づけよ（名前であって，名前に過ぎない，固有時間についての直接的な測度はまったくない）．2つの超曲面を固い構造をつくりたい2つの鋼鉄のリボン（ribbon），と比較せよ．2つのリボン上の幾何学を与えることはけっしてこの構造を固定しない．その目的のためには，1つのリボンと他のリボン間の交差接続部を必要とする．(1) これらの接続部は下方のリボンに垂直に溶接されなければならないことを指定する，(2) おのおののリボンが溶接される場所を指定する，(3) 接続部の長さを与える，だけでは十分でない．さらにおのおのの接続部が上方の曲面と結びつく場所を告げなければならない．もし上面での接続部の両端間の固有距離がいたるところで下面での接続部の両端間の距離よりも短いならば，二重のリボンは吊り橋のケーブル型の曲線をもつだろう．もしいたるところで長いならば，煉瓦橋のアーチ曲線をもつだろう．サンドウィッチの構成に必要なデータは以下のものである．(1) 下方の超曲面の3–幾何学の計量，

$$g_{ij}(t,x,y,z)dx^i dx^j \tag{21.36}$$

これはその超曲面内での1点と他の点との間の(距離)^2 を述べる．(2) 上方の超曲面上の計量

$$g_{ij}(t+dt,x,y,z)dx^i dx^j \tag{21.37}$$

(3) 下方の超曲面の点 (x,y,z) に基づいている接続部の固有の長さに対する公式，

$$\begin{pmatrix}\text{下方の超曲面と上方の超}\\ \text{曲面間の固有時間の経過}\end{pmatrix} = (\text{“経過関数”})\,dt = N(t,x,y,z)dt \tag{21.38}$$

および (4) 上方の超曲面上の位置に対する公式，

*19　時空を薄切りして時空を計算する

*20　薄いサンドウィッチ 4–幾何学

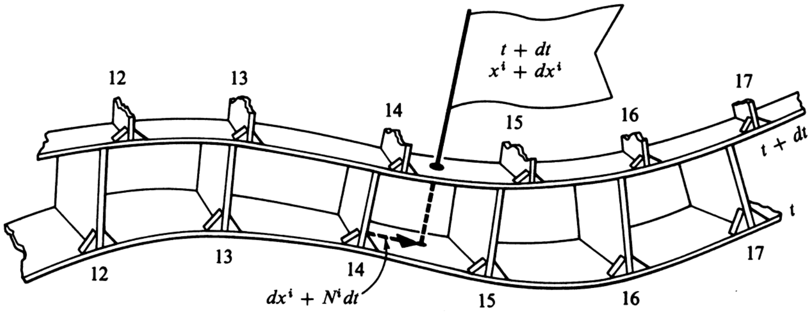


図 **21.2** あらかじめ指定されている長さと移動に一致して，2 個の 3–幾何学間に垂直な接続子を入れることによって，これら 2 個の 3–幾何学を薄いサンドウィッチ型の 4–幾何学に組み入れること．さもないと柔軟であるだろうものは，その結果，堅くなる．旗を立てられた点は式 (21.40) を例示する．

$$x^i_{\text{上方の}}(x^m) = x^i - N^i(t, x, y, z)dt \tag{21.39}$$

ここにこの接続部は溶接されなければならない．この情報の一部を省いて，堅さのない構造を見出せ．

*21 薄いサンドウィッチの構造の堅さはサンドウィッチを満たしている時空の 4–幾何学の明確さにもっとも直接的に現れている．$x^\alpha = (t, x^i)$ および $x^\alpha + dx^\alpha = (t + dt, x^i + dx^i)$ 間の固有間隔 ds あるいは $d\tau$ を求めよ．4 次元形式での Pythagoras の定理

$$ds^2 = \begin{pmatrix}\text{基底 3–幾何学}\\ \text{での固有距離}\end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix}\text{下方の 3–幾何学から上方}\\ \text{の 3–幾何学への固有時間}\end{pmatrix}^2$$

は結果

$$ds^2 = g_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) - (N dt)^2 \tag{21.40}$$

を与える（図 21.2 をみよ）．ここで式 (21.36) におけるように g_{ij} は 3–幾何学の計量係数であり，ラテン記号によって 4–計量のギリシャ添字の成分

$$ds^2 = {}^{(4)}g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{21.41}$$

から区別される，式 (21.41) では混乱の可能性を減ずるために添字 ${}^{(4)}$ の記号をつけてある．式 (21.41) と (21.40) を比較して，3–計量と経過および移動関数から 4–計量の以下の構成にいたる［Arnowitt, Deser and Misner（1962）］.

*22

$$\begin{Vmatrix} {}^{(4)}g_{00} & {}^{(4)}g_{0k} \\ {}^{(4)}g_{i0} & {}^{(4)}g_{ik} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (N_s N^s - N^2) & N_k \\ N_i & g_{ik} \end{Vmatrix} \tag{21.42}$$

溶接された接続部は役割を果たす！

式 (21.42) で，量 N^m はその元の根本の反変形式での移動の成分である，それに対して $N_i = g_{im}N^m$ は 3–計量をもつ 3–幾何学内で計算されるとき，共変成分である．この関係を逆にするには，

*21 4–幾何学の計量は 2 つの 3–幾何学の接続部の経過と移動に依存する

*22 4–幾何学の詳細

$$N^m = g^{ms} N_s \tag{21.43}$$

は，逆 4–計量と鋭く区別されるべき逆 3–計量を取り扱うということである．こうして，逆 4–計量は

$$\begin{Vmatrix} {}^{(4)}g^{00} & {}^{(4)}g^{0m} \\ {}^{(4)}g^{k0} & {}^{(4)}g^{km} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -(1/N^2) & (N^m/N^2) \\ (N^k/N^2) & (g^{km} - N^k N^m/N^2) \end{Vmatrix} \tag{21.44}$$

であり，積を行列の掛け算に対する標準的な規則に従って計算することによって検査される結果である．

$${}^{(4)}g_{\alpha\beta}{}^{(4)}g^{\beta\gamma} = {}^{(4)}\delta_\alpha{}^\gamma$$

体積要素は形

$$(-{}^{(4)}g)^{1/2} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = N g^{1/2} dt\, dx^1\, dx^2\, dx^3 \tag{21.45}$$

をもつ．

接続部を 2 つの鋼鉄のリボンに溶接する，あるいは，4–計量を固定することによって，経過および移動関数を 3–計量に加えることはまた自動的に単位の時間的な法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の成分を定める．この 4–ベクトル（法線ベクトル $\boldsymbol{n}$）についての規格化の条件は，1–形式，また便宜のために $\boldsymbol{n}$ とよばれ，$\boldsymbol{n}$ に双対であり，そしてこのベクトル（法線ベクトル $\boldsymbol{n}$）のこの 1–形式による積が値

$$\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \rangle = -1 \tag{21.46}$$

をもつような，1–形式が存在すると述べることによってもっとも容易に定式化される．この 1–形式は値

$$\boldsymbol{n} = n_\beta\, \boldsymbol{d}x^\beta = -N\boldsymbol{d}t + 0 + 0 + 0 \tag{21.47}$$

をもつ．

この 1–形式，この層状の曲面の構造のみが，自動的に 1 の値，図 2.4 におけるように固有時間での 1 単位の前進を表すベクトルによって貫かれるときに，そのベクトルがどのような x，y および z 変位をもつかにかかわらず，ベルの 1 つのゴーンという音を与えうる．こうして共変 1–形式表示での単位の時間的な法線ベクトルは必然的に成分

*23
$$n_\beta = (-N, 0, 0, 0) \tag{21.48}$$

をもつ．添字を式 (21.44) によって上げて接線ベクトルとして表される，同じ法線の反変成分を得よ．こうして，

$$n^\alpha = [(1/N), -(N^m/N)] \tag{21.49}$$

*23　単位の法線の成分

この結果は図 21.2 の調査に基づいて単純な解釈を受ける．こうして図での代表的な "垂直の接続部" は成分

$$(dt, -N^m dt)$$

をもち，そして固有の長さ $d\tau = Ndt$ をもつと言うことができる．したがって，単位の固有の長さのベクトル $\boldsymbol{n}$ との比をとると，成分は正確に式 (21.49) によって与えられるものである．

21.5　内在的および外在的曲率

Einstein の重力の説明での中心的な概念は曲率である．したがって曲率を (3+1)–空間–時間分割の言葉で解析することは適当である．空間的な超曲面の 3–幾何学に内在する曲率は 14 章での 4 次元の曲率の計算で記述され計算されたのと同じ方法によって定義され計算されるだろう．内在的曲率のすべての測度の中で，もっとも単純なものの 1 つは Riemann スカラー曲率不変量 ${}^{(3)}R$（記号の単純さのために以下では接頭辞なしに，R と書かれる）である．そしてこの不変量を定義するすべての方法の中で（14 章をみよ），もっとも簡潔なものの 1 つは極限（練習問題 21.4 をみよ）

*24

$$R\begin{pmatrix}\text{考察されて}\\ \text{いる点で}\end{pmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0} 18 \frac{4\pi\varepsilon^2 - \begin{pmatrix}\text{固有の距離 } \varepsilon \text{ での点の軌跡}\\ \text{として定義される曲面 (近}\\ \text{似的に 2–球) の固有の面積}\end{pmatrix}}{4\pi\varepsilon^4} \tag{21.50}$$

を用いる．

3–幾何学に内在的な曲率のより詳細な記述のために，3 次元的なものを 4 次元的なものから区別するために要求されるときにのみ 3–幾何学を改めて，8 章から 14 章までにすでに展開されているように微分幾何学を利用せよ．超曲面内で変位

$$\boldsymbol{d\mathcal{P}} = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{d}x^i \tag{21.51}$$

を考えることから始めよ．ここに $\boldsymbol{e}_i$ は，3 個の座標 1–形式 $\boldsymbol{d}x^i$ に双対な基底接線ベクトル $\boldsymbol{e}_i = \partial/\partial x^i$（1 つの記号で）あるいは $\boldsymbol{e}_i = \partial\mathcal{P}/\partial x^i$（別な記号で）である．たまたま超曲面内に存在する接線ベクトル $\boldsymbol{A}$ の任意の場を同じ基底ベクトルで表そう．

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_i A^i \tag{21.52}$$

このベクトルと基底ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ とのスカラー積は

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_j) = A^i(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j) = A^i g_{ij} = A_j \tag{21.53}$$

さて注意を 1 点でのベクトルからベクトルの近傍点への平行移動に向ける．

*24　面積の不足の測度としてのスカラー曲率

地球の赤道上に存在して北極星を指し示しているベクトルは，子午線に沿って依然地球表面上にあるが北へ 1,000 km の点へそれ自身に平行に移動されると，もはや地球表面の 2–幾何学に存在しないだろう．北半球に位置する望遠鏡は北極星をみるにはその筒を上げなければならない！ 4–幾何学にはめ込まれた 3 次元の超曲面への一般化は即座である．超曲面内に存在するベクトル $\boldsymbol{A}$ をとり，超曲面内に存在する基本的なルートに沿ってそれを移動し，この移動の過程で各段階でそれ自身に平行に移動させる．ここで“平行に”とは包んでいる 4–多様体の幾何学についての平行を意味する．そうすると $\boldsymbol{A}$ は通常もはや超曲面内に存在して終わらないだろう．こうして包んでいる時空の幾何学での i 番目の座標方向についての $\boldsymbol{A}$ の“共変微分”（すなわち，移動された $\boldsymbol{A}$ によって減少された，新しい点での $\boldsymbol{A}$）は形

$$^{(4)}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{A} = {}^{(4)}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{A} = {}^{(4)}\boldsymbol{\nabla}_i(\boldsymbol{e}_j A^j) = \boldsymbol{e}_j\frac{\partial A^j}{\partial x^i} + ({}^{(4)}\Gamma^{\mu}{}_{ji}\boldsymbol{e}_\mu)A^j \tag{21.54}$$

をもつ（10.4 節をみよ）．この公式の特別な例は基底ベクトル $\boldsymbol{e}_m$ 自身の共変的に測定された変化に対する式，

$$^{(4)}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{e}_m = {}^{(4)}\Gamma^{\mu}{}_{mi}\boldsymbol{e}_\mu \tag{21.55}$$

である．式 (21.54) および (21.55) の両方で“超曲面から外への成分”

$$(A^{j\,(4)}\Gamma^{0}{}_{ji})(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{n}) \tag{21.56}$$

*25 の存在はまったく明白である．さてこの成分を消せ．$^{(4)}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}$ を超曲面に直角に射影せよ．このようにして超曲面の 3–幾何学に内在する平行移動と共変微分に達する．正しくはこの共変微分は $^{(3)}\boldsymbol{\nabla}$ と書かれるべきである．しかし記号の単純さのためにそれは本章の残りでは，あいまいさが生ずるかもしれない場合を除いて $\boldsymbol{\nabla}$ と書かれるだろう．新しい共変微分の値を得るには，添字 $^{(4)}$ をいたるところで $^{(3)}$ で置き換え，あるいは，よりよく言えば，すべて落として，和の“見せかけの添字” $\mu=(0,1,2,3)$ を $m=(1,2,3)$ で置き換えて，式 (21.54) を書き直しさえすればよい．しかし，Israel（1966）に従って，$\boldsymbol{A}$ の反変成分 A^i を取り扱う表現から共変成分 $A_i=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_i)$ を取り扱う表現へ向かうのがより好都合である．こうして超曲面自身に内在的な 3–幾何学について計算された，超曲面内で i 番目の座標方向についての $\boldsymbol{A}$ の共変微分は，その h 番目の共変成分に対して量

*26

$$\begin{gathered} A_{h|i} = \boldsymbol{e}_h\cdot{}^{(3)}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{e}_h\cdot\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_h}{\partial x^i} - A^m\Gamma_{mhi} \\ (= A_{h;i}\ \ \Sigma\text{における}\boldsymbol{A}\text{に対して}) \end{gathered} \tag{21.57}$$

をもつ[式 (10.18) をみよ]．ここで垂直の棒の記号はこの共変微分を，たとえば，式 (10.17ff) におけるように，4–幾何学についてとられる共変微分から区別する．3 次元に対するここでの接続係数は，4 次元に対してすでに取り扱われた接続係数のように［式 (14.14) および (14.15) をみよ]，計量係数およびそれらの 1 次微分で表され，解釈

*25　4–幾何学での平行移動から 3–幾何学での平行移動へ

*26　3–幾何学についてとられた，新しい共変微分

$$^{(3)}\Gamma_{mhi} \equiv \Gamma_{mhi} = \boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{\nabla}_i \boldsymbol{e}_h \tag{21.58}$$

をもつ．今度は接続係数から，14 章におけるように，超曲面に内在的な 3–幾何学の完全な Riemann 曲率テンソル $^{(3)}R^i{}_{jmn}$ を計算する．

同時性に内在的な曲率に加えて，今やこれまでの章で扱われていない概念（コラム 14.1 における束の間の取り扱いを除いて），3–幾何学の**外在的な曲率**に遭遇する．このアイデアは 3–幾何学内でまた 3–幾何学自身によって考えられるとき意味をもたない．その存在に対しては 3–幾何学がよく定義された薄片としてよく定義された包んでいる時空内にはめ込まれていることに依存する．それは包んでいる 4–幾何学に相対的なこの薄片の曲率を測定する（図 21.3）．

今点 $\mathcal{P}$ に立っている法線をとり，“その基底を超曲面 Σ に保って”自分自身に平行に“基準ベクトル”として点 $\mathcal{P} + \delta\mathcal{P}$ に移動し，それをその点ですでに立っている法線ベクトルから引け．差 $\delta\boldsymbol{n}$ は，適当な近似で“ベクトル”とみなされるだろう．その値は変位 $\delta\mathcal{P}$ の“ベクトル”によって支配され線形的に依存する．

近似という概念へのいかなる訴えも除去するために，有限の変位 $\delta\mathcal{P}$ からベクトル値をもつ“変位 1–形式” $\boldsymbol{d}\mathcal{P}$ という極限的な概念［式 (15.13) をみよ］へ行け．また厳密には定義されていないベクトル $\delta\boldsymbol{n}$ をベクトル値 1–形式 $\boldsymbol{dn}$ の極限的な概念によって置き換えよ．この量は，ベクトルとみなされ，長さについて変化しないベクトル $\boldsymbol{n}$ での変化であるから，こうして $\boldsymbol{n}$ に垂直な方向を向く変化を表していなければならない．したがってそれは超曲面 Σ 内に存在するとみなされうる．$\boldsymbol{d}\mathcal{P}$ に線形に依存して，それは形式

*27

$$\boldsymbol{dn} = -\boldsymbol{K}(\boldsymbol{d}\mathcal{P}) \tag{21.59}$$

で表されうる．ここで線形演算子 $\boldsymbol{K}$ は抽象的な座標によらない幾何学的な対象として提案される外在曲率である．$\boldsymbol{K}$ の符号はここで定義されているようなときには，図 21.3 での法線の先端がそれらの基底よりも接近しているときは正であり，たとえば，模型宇宙の再収縮の間はそうであり，Eisenhart (1926)，Schouten (1954)，および Arnowitt, Deser and Misner (1962) によって用いられた慣習と一致しているが，Israel (1966) の慣習と逆である．

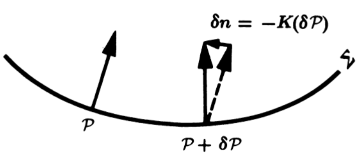


図 21.3　外在曲率は，図内の各点が包絡的な時空に向かって，超曲面に対する“法線となる”固有時間の単位間隔に前方に運ばれるとき生ずる，空間的な超曲面 Σ 内に横たわる図のわずかな収縮と変形を測定する（包絡的な時空が存在しない？　外在曲率は存在しない!）．基本的な変位 $\delta\mathcal{P}$ が曲面内でいずれの方向を指そうとも，すべて同じわずかな収縮を経験するとき，外在曲率テンソルは単位テンソルの正の倍数である．こうして図に例示されている超曲面の外在曲率は正である．破線の矢印は近傍点 $\mathcal{P} + \delta\mathcal{P}$ への平行移動後の基準点 $\mathcal{P}$ での法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を表している．

*27　演算子としての外在（外在的な）曲率

式 (21.59) の左辺と右辺に現れる 1–形式の投入口に，一般的な接線ベクトル［それは式 (2.12a) に続く議論におけるように，一般的な局所的変位（今までのところ自由とされている）を記述するはずである］の代わりに非常に特殊な接線ベクトル，すなわち，i 番目の座標方向での変位に対する基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を挿入せよ．こうして式 (21.59) は

$$^{(4)}\boldsymbol{\nabla}_i \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{K}(\boldsymbol{e}_i) = -K_i{}^j \boldsymbol{e}_j \tag{21.60}$$

と解釈されることを見出す，ここで $K_i{}^j$ は線形演算子 $\boldsymbol{K}$ の座標表示での成分である．式 (21.60) の両辺と基底ベクトル $\boldsymbol{e}_m$ とのスカラー積をとれ．$(\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{n}) = 0$ を思い出せ．こうしてテンソル K_{im} が共変的に提示されるとき，その 2 つの添字についての対称性を確立せよ．

$$\begin{aligned} K_{im} &= K_i{}^j g_{jm} = K_i{}^j(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_m) = -\boldsymbol{e}_m\cdot{}^{(4)}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\cdot{}^{(4)}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{e}_m \\ &= (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_0)^{(4)}\Gamma^0{}_{mi} = \boldsymbol{n}\cdot{}^{(4)}\boldsymbol{\nabla}_m\boldsymbol{e}_i = K_{mi} \end{aligned} \tag{21.61}$$

↑［式 (21.55) をみよ］

外在曲率のテンソル K_{ij} の知識は 4 個のベクトル $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ の平行移動のもとでの変化を表すのに役立つ．式 (21.60) はすでに $\boldsymbol{n}$ は平行移動のもとでいかに変化するかを告げる．$\boldsymbol{e}_m$ の変化は式 (21.55) からベクトルとして読み取られるべきである．このベクトルと，4 個の独立なベクトルの式 (21.58) での基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，および $\boldsymbol{e}_3$，あるいはより簡単に $\boldsymbol{e}_s$，および式 (21.61) での法線ベクトル $\boldsymbol{n}$，とのスカラー積を知ることはこのベクトルの適切な同定である．こうして，Israel（1966）に従って，Gauss and Weingarten の式として知られるものに，今世紀内でのすべての記号の変化をたくみに監視して達する．

*28
$$^{(4)}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{e}_j = K_{ij}\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}} + {}^{(3)}\Gamma^h{}_{ji}\boldsymbol{e}_h \tag{21.62}$$

この式から Σ での各基底ベクトルがいかに変化するかを知って，Σ 内に存在する任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ での変化に対する式 (21.54) をいかに書き直すかも知る．両方の場合での変化は，基準の近傍点から移動されるときに基準ベクトルに相対的に表される．術語 “平行移動” は今や “包んでいる時空の幾何学について平行に” ということを意味する．

$$^{(4)}\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{A} = A^j{}_{|i}\boldsymbol{e}_j + K_{ij}A^j\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}} \tag{21.63}$$

時空が 21.4 節に記述されているように Arnowitt, Deser, and Misner の計画に従って空間的な薄片に切り裂かれるときに，外在曲率を求めることはとくに重要である．図 21.2 に例示されている薄いサンドウィッチの 4–幾何学は，初歩的であるけれども，サンドウィッチの 2 つの面上の 3–計量および経過と移動関数 N および N^i によって完全に定義される．共変表示での法線は式 (21.47) によって成分

---

*28　外在曲率による 4–移動に対する Gauss–Weingarten の式

$$(n_0, n_1, n_2, n_3) = (-N, 0, 0, 0) \tag{21.64}$$

をもつ．“包んでいる 4–幾何学内で自身に平行に移動される $\boldsymbol{n}$” に相対的な $\boldsymbol{n}$ の変化は，平行移動の定義によって，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{dn})_i &= n_{i;k}\, \boldsymbol{d}x^k \\ &= \left[\frac{\partial n_i}{\partial x^k} - {}^{(4)}\Gamma^{\sigma}{}_{ik} n_\sigma\right] \boldsymbol{d}x^k \\ &= N^{(4)}\Gamma^0{}_{ik}\, \boldsymbol{d}x^k\end{aligned} \tag{21.65}$$

である．外在曲率テンソルで表されたときの同じ変化，

$$(\boldsymbol{dn})_i = -K_{ik}\, \boldsymbol{d}x^k \tag{21.66}$$

と比較せよ．このテンソルは値

$$K_{ik} = -n_{i;k} = -N^{(4)}\Gamma^0{}_{ik} = -N[{}^{(4)}g^{00(4)}\Gamma_{0ik} + {}^{(4)}g^{0p(4)}\Gamma_{pik}]$$

あるいは，式 (21.42) および (21.44) によって，

*29

$$\begin{aligned}K_{ik} &= (1/N)[{}^{(4)}\Gamma_{0ik} - N^{p(3)}\Gamma_{pik}] \\ &= \frac{1}{2N}\left[\frac{\partial N_i}{\partial x^k} + \frac{\partial N_k}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial t} - 2\Gamma_{pik}N^p\right] \\ &= \frac{1}{2N}\left[N_{i|k} + N_{k|i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\right]\end{aligned} \tag{21.67}$$

をもつと結論せよ．これは ADM 経過および移動関数［Arnowitt, Deser, and Misner (1962)］で表される外在曲率である．

例として，Σ に 3–球の幾何学

*30

$$ds^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \tag{21.68}$$

をもたせよ．薄片の 1–パラメータ群での近傍の空間的な薄片，ラベル $t + dt$（ラベルのみ!）をもつ薄片に半径 a が $a + da$ で置き換えられた同じ式によって与えられる 3–計量をもたせよ．これら 2 つの薄片間の薄いサンドウィッチの 4–幾何学は，経過と移動関数を与えるまでは完全には定まらない．単純さのために，移動ベクトル N^i（図 21.2 をみよ）はいたるところゼロであるとし経過関数は Σ 上のすべての点で同じ値 N をもつとする．2 つの薄片間の固有時間の分離はこうして $d\tau = Ndt$ である．Σ 内に位置する任意の幾何学的な図は時間とともに膨張する．この図での任意の長さの，固有時間の単位あたりの増加率は，その長さがどのような方向に位置づけられようと同じであり，値

$$(\text{固有時間の単位あたりの長さの増加率}) = \frac{1}{a}\frac{da}{d\tau} = \frac{1}{2N}\frac{1}{a^2}\frac{d(a^2)}{dt} \tag{21.69}$$

*29 3–計量の移動と変化による外在曲率

*30 膨張している 3–球の外在曲率

をもつ．この量のマイナスは，$\binom{1}{1}$ 単位テンソル，$\boldsymbol{1} = \boldsymbol{d}\mathcal{P}$ を掛けると，$\binom{1}{1}$ 表示での外在曲率テンソル，

$$\boldsymbol{K} = -\frac{1}{2N}\frac{1}{a^2}\frac{d(a^2)}{dt}\boldsymbol{1} \tag{21.70}$$

を与える．この結果（練習問題 21.5）を ADM 公式 (21.67) を出発点として用いて成分 K_i^j の直接的な計算によって確認する．

超曲面 Σ に内在的な Riemann 曲率 $R^a{}_{bcd} = {}^{(3)}R^a{}_{bcd}$ は，外在曲率 K_{ij} とともに 4–幾何学の Riemann および Einstein 曲率について 1 つの情報を与える．計算では，座標基底を用いることは好都合でない．

基底ベクトル	基底 1–形式
$\boldsymbol{e}_0 = \partial_t,$	$\boldsymbol{d}t,$
$\boldsymbol{e}_i = \partial_i$	$\boldsymbol{d}x^i$

なぜなら通常基底ベクトル $\boldsymbol{e}_0$ は超曲面に垂直でない（図 21.2 をみよ）．異なる基底，しかし依然自己双対であるものを採用せよ．

[*31]

基底ベクトル	基底 1–形式
$\boldsymbol{e}_n \equiv \boldsymbol{n} = N^{-1}(\partial_t - N^m\partial_m),$	$\boldsymbol{\omega}^n = N\boldsymbol{d}t = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n},$
$\boldsymbol{e}_i = \partial_i$	$\boldsymbol{\omega}^i \equiv \boldsymbol{d}x^i + N^i\boldsymbol{d}t$

(21.71)

また成分をリストするために，ギリシャ添字 $\alpha = 0,1,2,3$ の代わりに，ギリシャ添字 $\bar{\alpha} = n,1,2,3$ を用いよ．

曲率は閉じた経路の周りを移動されるときベクトルに生ずる変化によって，あるいは，式 (14.23)

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]}\boldsymbol{w} \tag{21.72}$$

から測定されることを思い出せ．移動されるベクトルは $\boldsymbol{e}_i$ であるとし，経路は $\boldsymbol{e}_j$ および $\boldsymbol{e}_k$ によって定義されているとする．後の 2 つのベクトルは座標基底に属する．したがって "経路は自動的に閉じ"，$[\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k] = 0$，そして式 (21.72) での最後の項は考察から消える．式 (21.62) および (21.60) を呼び出して

$$\begin{aligned}{}^{(4)}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{e}_j}{}^{(4)}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_i &= {}^{(4)}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{e}_j}\left[K_{ik}\frac{\boldsymbol{n}}{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})} + {}^{(3)}\Gamma^m{}_{ik}\boldsymbol{e}_m\right] \\ &= K_{ik,j}\frac{\boldsymbol{n}}{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})} - K_{ik}K_j{}^m\boldsymbol{e}_m\frac{1}{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})} + {}^{(3)}\Gamma^m{}_{ik,j}\boldsymbol{e}_m \\ &\quad + {}^{(3)}\Gamma^m{}_{ik}\left[K_{mj}\frac{\boldsymbol{n}}{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})} + {}^{(3)}\Gamma^s{}_{mj}\boldsymbol{e}_s\right]\end{aligned} \tag{21.73}$$

を見出す．同様に添字 j と k を逆にした項を求め，式 (21.73) から引き，単純化し，そして

[*31] 4–曲率を計算するための基底形式

*32
$$\mathcal{R}(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_i = (K_{ik|j} - K_{ij|k})\frac{\boldsymbol{n}}{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})} + [(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}(K_{ij}K_k{}^m - K_{ik}K_j{}^m) + {}^{(3)}R^m{}_{ijk}]\boldsymbol{e}_m \tag{21.74}$$

を見出す．係数は曲率テンソルの求める成分を直接与える．

$${}^{(4)}R^m{}_{ijk} = {}^{(3)}R^m{}_{ijk} + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}(K_{ij}K_k{}^m - K_{ik}K_j{}^m) \tag{21.75}$$

および

$${}^{(4)}R^n{}_{ijk} = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1\,(4)}R_{nijk} = -(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}(K_{ij|k} - K_{ik|j}) \tag{21.76}$$

式 (21.75) および (21.76) は Gauss and Codazzi の方程式として知られている［参考文献としては，Eisenhart（1926）をみよ］．3–幾何学の曲率の成分は，埋め込みが，考察されている外在曲率に無関係な超曲面上の点で達成されるときに限り正常に 4–幾何学の曲率の対応する成分と一致するだろう，ということが式 (21.75) から出る．直接的に逆の事情は平坦な 3–空間内に埋め込まれている 2–球のよく知られた例によって示される．そこでは式 (21.75) の左辺（次元が 1 単位だけどこでも下げられている!）はゼロであり，外在曲率と内在曲率が右辺で厳密に相殺する．

Einstein 曲率の重要な成分は Gauss–Codazzi の結果から求められる．計算をするには，$\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{e}_j$ および $\boldsymbol{e}_k$ を直交テトラッドであると考えるのがもっとも単純である，$\boldsymbol{n}$ 自身はすでに規格化されており超曲面内のすべてのベクトルに直交する．そうすると，式 (14.7) および (21.75) を用いて，

*33
$$\begin{aligned} -G^0_0 &= {}^{(4)}R^{12}{}_{12} + {}^{(4)}R^{23}{}_{23} + {}^{(4)}R^{31}{}_{31} \\ &= {}^{(3)}R^{12}{}_{12} + {}^{(3)}R^{23}{}_{23} + {}^{(3)}R^{31}{}_{31} \\ &\quad + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}[(K^2_1K^1_2 - K^2_2K^1_1) + (K^3_2K^2_3 - K^3_3K^2_2) \\ &\quad + (K^1_3K^3_1 - K^1_1K^3_3)] \\ &= \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}[(\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{K})^2 - \mathrm{Tr}(\boldsymbol{K}^2)] \end{aligned} \tag{21.77}$$

を見出す．ここに R は 3 次元スカラー曲率不変量であり，Tr は “トレース” を意味する．こうして，

$$\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{K} = g^{ij}K_{ij} = g_{ij}K^{ij} = K^j_j \tag{21.78}$$

および

$$\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{K}^2 = (K^2)^j_j = K_j{}^mK_m{}^j = g_{js}K^{sm}g_{mi}K^{ij} \tag{21.79}$$

結果は直交テトラッドで得られるけれども，空間的な超曲面内で一般的な座標変換について明白に共変である．そしてどのような時間座標にも明白な関連をしない．この点について Einstein 曲率の座標に無関係な記述を与える．

*32 Gauss–Codazzi：内在的な 3–幾何学および外在曲率による 4–曲率
*33 外在曲率による Einstein 曲率

*34　Einstein の場の方程式は式 (21.77) を $8\pi\rho$ に等しくする．ここに，ρ は質量–エネルギーの密度である．式 (21.77) は "空間的な薄片をいかに曲げて切るかによらない曲率の測度" である．この曲率の測度は Einstein の場の方程式の導出に中心的であり，コラム 17.2 の 3 項，"空間的な薄片上の物理学" で概略が述べられている．

Einstein 曲率テンソルの他の成分は手元にある結果から式 (14.7) によって容易に求められ，直交系に関して，形式

$$
\begin{aligned}
G^n_1 &= {}^{(4)}R^{n2}{}_{12} + {}^{(4)}R^{n3}{}_{13} \\
&= -(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}(K^2_{1|2} - K^2_{2|1} + K^3_{1|3} - K^3_{3|1})
\end{aligned} \tag{21.80}
$$

をもつ．これはただちに超曲面内の任意の系 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$（直交していようがいまいが）に対して成り立つ形式に翻訳される．

*35
$$
G^n_i = -(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}[K_{i|m}^{\ m} - (\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{K})_{|i}] \tag{21.81}
$$

Einstein の場の方程式はこの量を，重力以外の物質および場によって伴われる運動量の密度の i 番目の成分の 8π 倍に等しくおく．

今までに書きとどめられた Einstein の場の方程式の 4 個の成分は，以下において，一般相対論の "初期値方程式" として中心的な位置をもつだろう．他の 6 個の成分は書かれないだろう．(1) 力学は Hamilton の方法でより単純に解析される，そして (2) 計算が遂行される．それは対象 $\mathcal{R}(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{n})\boldsymbol{e}_i$ の残りの型を求めることを要求する．その計算への 1 段階は練習問題 21.7 に見出されるだろう．Sachs は計算をしているが (1964，式 (10)) Gauss 規準座標に特殊化した後初めてである．これらの座標は時空の非常に特殊な薄切りを前提にする．(1) 空間的な超曲面 $n = 0$ から法線的に生ずる測地線はすべての続く同時性 $n =$ 一定を垂直に切る，そして (2) n 座標は直接固有時間の経過，あるいは固有の長さを適切*であればどれでも，これらの測地線に沿って直接測定する．このように特別な座標では答えは単純にみえるのは驚くべきことでない．

$$
{}^{(4)}R^n{}_{ink} = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}\left(\frac{\partial K_{ik}}{\partial n} + K_{im}K^m{}_k\right) \qquad (\text{Gauss 規準座標}) \tag{21.82}
$$

Gauss 規準座標系の代わりに，Arnowitt, Deser, and Misner の座標系を用いると付加的な項が式 (21.82) に入る．ADM 座標がここでは用いられる．なぜならそれらは，空間的な超曲面を異なる場所で異なる割合で時間的に前へ押し進める自由度（"多くの指をもつ時間"）でもって，解析したいように力学を解析することを可能にするからである．Fisher (1971) はテンソル場の Lie 微分の概念を用いることによって，いかにこのような公式の幾何学的な内容を座標に無関係な方法で求めそして理解するかを示している．それについての入門は練習問題 21.8 によって与えられている．

---

* ここで Sachs の方程式 (10) は単位法線 $\boldsymbol{n}$ は必ずしも時間的でない場合に一般化されている．Sachs は $\boldsymbol{n} = \partial/\partial t$ を用いた．

*34　式 (21.77) は中心的な Einstein 方程式である，"質量–エネルギーは曲率を定める"

*35　他の初期値方程式

［練習問題］

21.4 面積欠損によるスカラー曲率不変量

北極から赤道まで 10,000 km であるが，もし地球が平坦であったら“赤道”の長さは実際の ～40,000 km に対照的に，62,832 km をもつだろう．この差は表面が曲がって閉じているという事実を反映している．この“問題以前”から実際の問題，3–球

$$ds^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)]$$

に向かう．$\chi = 0$ から固有半径 $\varepsilon = a\chi$ の 2–球を測定する．この 2–球の固有面積を χ の関数として定めよ．面積欠損についての関係 (21.50) は極限 $\varepsilon \to 0$ で正しい結果値 $R = 6/a^2$ を与えることを確かめよ．より野心的な練習問題に対しては，(1) 一般的な (滑らかな) 3–幾何学をとれ，(2) 任意に選ばれた点近傍の計量を 11.6 節で与えられているように Riemann の規準座標で表せ，(3) 固有距離 ε での点の集合の軌跡を ε の興味ある最低次まで極座標角 θ および ϕ (長さ ε の測地線の出発の方向) によって定めよ，(4) これらの点によって定義される図の固有面積を ε の興味ある最低次まで定めよ，そしてそれによって式 (21.50) を確立せよ［この題目についてより多くのことに対しては，たとえば，Cartan (1946), pp.252–256 をみよ］．

21.5 Riemann 幾何学の薄片に対する外在曲率テンソル

外在曲率に対する結果 (21.70) を公式 (21.67) から直接的な計算によって確かめよ．

21.6 $\boldsymbol{\mathcal{R}(e_j, e_k)n}$ を求める

この量を式 (21.74) の模型に沿ってあるいは違った方法で求めよ．結果での $\boldsymbol{n}$ の係数は恒等的にゼロにならなければならないことはいかにして予見されうるか？ $\boldsymbol{e}_m$ の係数を比較して，${}^{(4)}R^m{}_{njk}$ を見出し式 (21.76) との同等性の検査を行え．

21.7 交換子 $[\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{n}]$ を求める

この交換子を求めることは $\mathcal{R}(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{n})\boldsymbol{e}_i$ のような量の計算への第 1 段階である．$\boldsymbol{e}_j$ を微分演算子 $\partial/\partial x^j$ として表して，式 (21.49) を用いて $\boldsymbol{n}$ をまた微分演算子として表せ．このようにして，問題の交換子は値 $-(N_{,j}/N)\boldsymbol{n} - (N^m{}_{,j}/N)\boldsymbol{e}_m$ をもつことを示せ．

21.8 テンソルの Lie 微分 (J. W. York, Jr によって与えられた練習問題)

テンソル場の Lie 微分を定義しその性質のいくつかを探求せよ．ベクトル場 $\boldsymbol{n}$ に沿う Lie 微分は型 $\binom{r}{s}$ のテンソル場 $\boldsymbol{T}$ に作用する微分演算子であり，それらをまた型 $\binom{r}{s}$ のテンソル $\mathcal{L}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{T}$ に転換する．Lie 微分過程は通常の鎖法則に従いそして加法の性質をもつ［共変微分に対する式 (10.2b), (10.2c), (10.2d) を比較せよ］．スカラー関数 f に対しては，$\mathcal{L}_{\boldsymbol{n}}f \equiv \boldsymbol{n}[f] = f_{,\mu}n^\mu$ をもつ．ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に沿う Lie 微分は練習問題 9.11 で

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} \equiv [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$$

によって定義された．もし 1–形式についての $\mathcal{L}_{\boldsymbol{n}}$ の作用が定義されるならば，一般的な型のテンソルへの拡張は単純であるだろう．なぜなら後者はつねにベクトルと 1–形式とのテ

ンソル積の和に分解されうるからである．もし σ が 1–形式で $\boldsymbol{v}$ がベクトルであるならば，$\mathcal{L}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\sigma}$ を任意の $\boldsymbol{v}$ に対して

$$\langle \mathcal{L}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}\rangle = \boldsymbol{n}[\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}\rangle] - \langle \boldsymbol{\sigma}, [\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}]\rangle$$

を満たすような 1–形式であると定義する．

(a) 座標基底で

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{\alpha,\beta}n^{\beta} + \sigma_{\beta}n^{\beta}_{,\alpha})\boldsymbol{dx}^{\alpha}$$

を示せ．

(b) 座標基底で

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{T} = (T_{\alpha\beta,\mu}n^{\mu} + T_{\mu\beta}n^{\mu}{}_{,\alpha} + T_{\alpha\mu}n^{\mu}{}_{,\beta})\boldsymbol{dx}^{\alpha}\otimes\boldsymbol{dx}^{\beta}$$

を示せ，ここに $\boldsymbol{T}$ は型 $\binom{0}{2}$ である．

(c) (a) および (b) で，すべての偏微分は共変微分で置き換えられうることを示せ．[Lie 微分はアフィン接続の存在と独立に定義されることを注視せよ．さらなる情報に対しては，たとえば，Bishop and Goldberg (1968) および Schouten (1954) をみよ．]

21.9　曲率テンソルの力学的な成分に対する表現 (J. W. York, Jr. によって与えられた練習問題)

Gauss–Codazzi の方程式は，時空の曲率テンソルの 3 次元（ヌルでない）超曲面の内在的なおよび外在的な幾何学による 20 個の代数的に独立な成分のうちの 14 個を与えるものとみられうる．Hilbert の Lagrangian, $\sqrt{-g}{}^{(4)}R$ の空間+時間 分割を達成するためには，さらに曲率テンソルの残りの 6 個の成分を類似の方法で表さなければならない．この目的に対してはすべてのテンソルを時空のテンソルとして表し，そして時間微分の一般化された概念として，空間的な超曲面の時間的な単位の法線の場の方向についての Lie 微分を用いることが好都合である．多くの準備的な結果が証明されなければならない．

(a)
$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}g_{\mu\nu} = u_{\mu;\nu} + u_{\nu;\mu}$$

(b)
$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}(g_{\mu\nu} + u_{\mu}u_{\nu}) \equiv \mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}(\gamma_{\mu\nu}) = u_{\mu;\nu} + u_{\nu;\mu} + u_{\mu}a_{\nu} + a_{\mu}u_{\nu}$$

ここに $\gamma_{\mu\nu}$ は空間的な超曲面の計量であり，時空座標の基底で表される．そして $a^{\mu} \equiv u^{\lambda}\nabla_{\lambda}u^{\mu}$ は時間的な正規曲線，その接線場が u^{μ} である曲率ベクトル（4–加速度）である ($u_{\mu}a^{\mu} = 0$ を思い出せ)．

(c) 外在的な曲率テンソルは

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}\gamma_{\mu\nu}$$

で与えられることを証明せよ．

(d) 超曲面への射影の単位テンソルは

$$\perp^{\mu}_{\nu} \equiv \delta^{\mu}_{\nu} + u^{\mu} u_{\nu}$$

によって定義される.

⊥ を用いて

$$u_{\alpha;\beta} \equiv -K_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta} - a_{\alpha} u_{\beta}$$

と書けることを示せ. ここに

$$K_{\alpha\beta} = -\perp^{\mu}_{\alpha} \perp^{\nu}_{\beta} u_{(\mu;\nu)}$$

および

$$\omega_{\alpha\beta} = -\perp^{\mu}_{\alpha} \perp^{\nu}_{\beta} u_{[\mu;\nu]}$$

(e) u^{μ} は 1 群の空間的な超曲面に対する単位の法線の場であるという事実から, $\omega_{\alpha\beta} = 0$ を示せ.

(f) 必要とされる道具は今や手元にある. 結果を得るには,

(i) $\mathcal{L}_{\boldsymbol{u}} K_{\mu\nu}$ を書き下ろせ (練習問題 21.8 をみよ).

(ii) この表現を形式

$$u^{\sigma} \nabla_{\sigma} \nabla_{\mu} u_{\nu} = u^{\sigma} \nabla_{\mu} \nabla_{\sigma} u_{\nu} + {}^{(4)}R_{\rho\nu\mu\sigma} u^{\sigma} u^{\rho}$$

での Ricci 恒等式に代入せよ.

(iii) 2 つの残りの自由な添字を ⊥ を用いて超曲面に射影し, そして

$$\begin{aligned} \perp^{\mu}_{\alpha} \perp^{\rho}_{\beta} {}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma} u^{\nu} u^{\sigma} = {} & \mathcal{L}_{\boldsymbol{u}} K_{\alpha\beta} + K_{\alpha\gamma} K^{\gamma}_{\beta} \\ & + {}^{(3)}\nabla_{(\alpha} a_{\beta)} + a_{\alpha} a_{\beta} \end{aligned}$$

を得ることを示せ. ここに ${}^{(3)}\nabla_{\alpha} a_{\beta} \equiv \perp^{\mu}_{\alpha} \perp^{\nu}_{\beta} \nabla_{\mu} a_{\nu}$ は a_{β} の 3 次元共変微分であることが示されうる. Gauss 規準座標で, この結果から

$$R_{0i0j} = \frac{\partial}{\partial t} K_{ij} + K_{ik} K^{k}_{j}$$

を得ることを示せ.

(g) 最後に, ${}^{(4)}R$ の構成には,

$$\gamma^{\mu\nu} [{}^{(3)}\nabla_{(\mu} a_{\nu)} + a_{\mu} a_{\nu}] = g^{\mu\nu} [{}^{(3)}\nabla_{(\mu} a_{\nu)} + a_{\mu} a_{\nu}] = a^{\lambda}_{;\lambda}$$

を示す必要がある.

21.10　外在曲率, プラス 共変発散による ${}^{(4)}\boldsymbol{R}^{i}{}_{nin}$ の表現 (K. Kuchař によって与えられている練習問題)

α' を, 超曲面の 1–パラメータ群の選択にいかなる方法でも必ずしも整合されていない, 4 個の座標の任意の滑らかな組とする.

(a)

$$^{(4)}R^{i}{}_{nin} = g^{\alpha'\gamma'} n^{\beta'} (n_{\alpha';\beta'\gamma'} - n_{\alpha';\gamma'\beta'})$$

を示せ.

(b) 共変発散

$$(n^{\beta'} n^{\gamma'}{}_{;\beta'})_{;\gamma'}$$

および

$$-(n^{\beta'} n^{\gamma'}{}_{;\gamma'})_{;\beta'}$$

をこの表現から除去して，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の 1 次微分のみを含むものが残されるようにできることを示せ.

(c) 基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ および $\boldsymbol{n}$ は完全系をつくることに注意して，公式

$$g^{\beta'\mu'} = e_i{}^{\beta'} \omega^{i\mu'} + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1} n^{\beta'} n^{\mu'}$$

を正当化せよ．ここに ω^i は $\boldsymbol{e}_i$ に双対な 1–形式である.

(d) $n_{\alpha';\beta'} n^{\alpha'} = 0$ および

$$K_{ij} = -e_{i\alpha'} n^{\alpha'}{}_{;\beta'} e_j{}^{\beta'}$$

に注意して

$$^{(4)}R^{i}{}_{nin} = (\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})^2 - \mathrm{Tr}\boldsymbol{K}^2 + \text{共変発散}$$

を示せ.

21.6 Hilbert の作用原理と，空間–プラス–時間分割における ADM の修正

力学を解析するためには，$^{(4)}R^{n}{}_{ink}$ に対して欠けている公式をもつことは幸いにも不必要であることがわかる．しかし，Hilbert の作用原理ですべての力学的な解析の核心として，Lagrangian 密度

$$16\pi\mathcal{L}_{\text{幾何学}} = (-{}^{(4)}g)^{1/2\,(4)}R \tag{21.83}$$

をもつことは本質的である．現在の ADM (1962) 記法で，この密度は形式

$$\begin{aligned}(-{}^{(4)}g)^{1/2\,(4)}R &= (-{}^{(4)}g)^{1/2}[{}^{(4)}R^{ij}{}_{ij} + 2{}^{(4)}R^{in}{}_{in}]\\ &= (-{}^{(4)}g)^{1/2}[R + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})(\mathrm{Tr}\boldsymbol{K}^2 - (\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})^2) + 2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{(4)}R^{i}{}_{nin}]\end{aligned} \tag{21.84}$$

*36 をもつ．Kuchař (1971b，また練習問題 21.10 をみよ) は，この量のすべてを計算せずにその十分な部分を計算する方法を示す．“十分な部分” と “全体” との差は時間微分プラス発散で，形式

$$[(-^{(4)}g)^{1/2}A^{\alpha}]_{,\alpha} = (-^{(4)}g)^{1/2}A^{\alpha}{}_{;\alpha} \tag{21.85}$$

の量である．式 (21.83) に $dt\,dx^1\,dx^2\,dx^3$ を掛けて作用積分を得るために積分すると，項 (21.85) は積分されて表面項となる．この表面内部の幾何学の変分はこの表面項の値に差を生じない．したがって項 (21.85) を落とすことは運動方程式に影響をもたない．計算の結果（練習問題 21.10）は単純である．発散を落とした後に残るものは単に式 (21.84) での $\mathrm{Tr}\boldsymbol{K}^2$ および $(\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})^2$ についての項の符号を変えることである．こうして変分原理は

$$\begin{aligned}(\text{極値}) = I_{\text{修正された}} &= \int \mathcal{L}_{\text{修正された}} d^4x \\ &= (1/16\pi)\int [R + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})((\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})^2 - \mathrm{Tr}\boldsymbol{K}^2)]Ng^{1/2}dtd^3x + \int \mathcal{L}_{\text{場}} d^4x\end{aligned} \tag{21.86}$$

となる．この表現は，言い直すと，幾何学の力学の Arnowitt, Deser, and Misner (ADM) の解析に対する出発点である．

York（1972b，また練習問題 21.9 をみよ）の論文からの 2 つの補足は前述の解析に基づくものへの幾何学的な洞察を拡大する．第 1 に，外在曲率のテンソルはもっとも自然に形式

$$\boldsymbol{K} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{g} \tag{21.87}$$

で定義される [また Fischer (1971) をみよ]，ここに $\boldsymbol{g}$ は 3–幾何学の計量テンソルであり，$\boldsymbol{n}$ は時間的な単位法線場であり，そして $\mathcal{L}$ は練習問題 21.8 で定義されているように Lie 微分である．第 2 に，完全な Hilbert の Lagrangian を得るために式 (21.86) の Lagrangian に付加されなければならない発散式 (21.85) は，

$$-2[(-^{(4)}g)^{1/2}(n^{\alpha'}\mathrm{Tr}\boldsymbol{K} + a^{\alpha'})]_{,\alpha'} \tag{21.88}$$

である．ここに座標は一般的であり（練習問題 21.10 をみよ），そして

$$a^{\alpha'} = n^{\alpha'}{}_{;\beta'}n^{\beta'} \tag{21.89}$$

は連続する薄片への時間的な法線 $\boldsymbol{n}$ に沿って進む観測者の 4–加速度である．

21.7 幾何学の力学の ADM の定式化

Dirac（1959，1964，およびそこに引用されている以前の文献）は，Poisson 括弧および Hamilton 方程式を一般化して，幾何学の力学を (3+1) 次元形式で定式化した．Arnowitt,

*36 Hilbert の作用原理から完全微分を落として ADM 原理を得る

Deser, and Misner は代わりに Hilbert–Palatini の変分原理をこの力学に対する基礎とした．その単純さのゆえに，ここではこの ADM（1962）の方法に従う．Hilbert–Palatini の作用原理での被積分関数の重力部分は凝縮されているが，しかし標準的な形（ADM は他の単位を用いて避けている 16π を挿入した後）で

$$16\pi\mathcal{L}_{\text{幾何学 真実}} = \mathcal{L}_{\text{幾何学ADM}} = -g_{ij}\,\partial\pi^{ij}/\partial t - N\mathcal{H} - N_i\mathcal{H}^i - 2\left[\pi^{ij}N_j - \frac{1}{2}N^i\mathrm{Tr}\boldsymbol{n} + n^{|i}(g)^{1/2}\right]_{,i} \quad (21.90)$$

と書き直される．ここで短縮された各項は特別な意味をもちそして特別な役割，今各項に与えられた名前によって予示された役割

*37 $$\pi^{ij}_{\text{真実}} = \frac{\delta(\text{作用})}{\delta g_{ij}} = \begin{pmatrix}\text{“幾何力学的な場の座標”}\ g_{ij}\\ \text{に力学的に共役な “幾何力学}\\ \text{的な場の運動量”}\end{pmatrix} = \frac{\pi^{ij}}{16\pi};\ \pi^{ij} = g^{1/2}(g^{ij}\mathrm{Tr}\boldsymbol{K} - K^{ij}) \quad (21.91)$$

を演ずるだろう（ここで ADM の π^{ij} は $\pi^{ij}_{\text{真実}}$ よりも通常より好都合である）．そして

$$\mathcal{H}_{\text{真実}} = \mathcal{H}(\pi^{ij}_{\text{真実}}, g_{ij}) = (\text{“超 Hamiltonian”}) = \mathcal{H}/16\pi, \quad (21.92)$$
$$\mathcal{H}(\pi^{ij}, g_{ij}) = g^{-1/2}\left(\mathrm{Tr}\boldsymbol{n}^2 - \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\boldsymbol{n})^2\right) - g^{1/2}R$$

および

$$16\pi\mathcal{H}^i_{\text{真実}} = \mathcal{H}^i = \mathcal{H}^i(\pi^{ij}, g_{ij}) = (\text{“超運動量”}) = -2\pi^{ik}{}_{|k} \quad (21.93)$$

ここで共変微分は，式 (21.91) での定義があるべき形を示すように（21.2 節をみよ），π^{ik} をテンソル密度として取り扱ってつくられる．作用を極値化するために変化されるべき量は，以下のように 4–幾何学の計量における係数である．6 個の g_{ij} および経過（lapse）関数 N および移動（shift）関数 N_i，そしてまた 6 個の “幾何力学的な運動量” π^{ij} である．これらの運動量を計量とともに変化させることは，(1) 基本的な Hamilton 力学（コラム 21.1）のパターンに従うことである．そこでは，運動量 p は座標 x と同じく独立に変化できるとすることによって，2 次の 1 つの Lagrange 方程式の代わりに 1 次の 2 つの Hamilton 方程式に到達する．そして (2) 21.2 節の Palatini の変分原理の手本に多少従うことである．しかし，そこでは，変化されるべき 40 個の接続係数をもったことに反してここではただ 6 個の π^{ij} にまで達している．これらの運動量と 3–計量を知ることは外在曲率を知ることである．変分を遂行する前に式 (21.90) から発散 $-2[\ \ ]_{,i}$ を落とせ．それは表面積分を与えるだけでありしたがって変分原理から生ずるであろう運動方程式にいかなる影響も及ぼさないからである．また式 (21.90) での第 1 項を形式

$$-(\partial/\partial t)(g_{ij}\pi^{ij}) + \pi^{ij}\partial g_{ij}/\partial t \quad (21.94)$$

*37　力学的な g_{ij} に共役な運動量

に書き直して変分原理から完全な時間微分を落とせ．なぜならそれはまた生ずる運動方程式に無関係であるからである．作用原理は今や形式

$$\begin{aligned}極値 &= I_{真実} = I_{\mathrm{ADM}}/16\pi \\ &= (1/16\pi)\int[\pi^{ij}\,\partial g_{ij}/\partial t - N\mathcal{H}(\pi^{ij}, g_{ij}) - N_i\mathcal{H}^i(\pi^{ij}, g_{ij})]d^4x + \int \mathcal{L}_{場} d^4x\end{aligned} \tag{21.95}$$

をとる．

作用原理そのものは，ここでもいつもと同じく，作用がよく定義された値をとるために固定されなければならないものを告げる（作用が極値をとるときに限り）．幾何学以外の場を取り扱う適切なポテンシャルを除いて，固定されなければならない唯一の量は一見して
*38 最初と最後の空間的な超曲面上の 6 個の g_{ij} の値であるようにみえる．しかし，ADM 作用原理は連続する空間的な薄片内での座標のいかなる変化 $x^1, x^2, x^3 \longrightarrow x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}, x^{\bar{3}}$ について不変である．したがってサンドウィッチの 2 つの面上で本当に固定されねばならない量は 3–幾何学 ${}^{(3)}\mathcal{G}'$（最初の超曲面上で）および ${}^{(3)}\mathcal{G}$（最後の超曲面上で）でありそれ以上必要でない．

*39 数学的な観点から，3–幾何学 ${}^{(3)}\mathcal{G}$ は微分同相写像（diffeomorphisms）のもとで互いに等長的に（isometrically）同等である微分可能な多様体の集合の “同等の組” である．通常の物理学者の観点から，3–幾何学は座標変換のもとで互いに同等である 3–計量 $g_{ij}(x, y, z)$ の同等の組である．より日常的な観点から，2 つの自動車のフェンダーは，1 つの上に描かれている座標の罫線が他の上に描かれている座標の罫線といかに異なろうとも，もしそれらが同じ形をもつならば，1 つのそして同じ 2–幾何学をもつ．

*40 式 (21.95) で，同時に物理学的に重要でありそして避けうる複雑さをもたない場の Lagrangian の一例をもつために，源をもたない電磁場の例をとれ．場の Lagrangian が標準的な Maxwell 値をもつようにすることは可能であるだろう．

$$(1/8\pi)(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2) \longrightarrow -(1/16\pi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{21.96}$$

ここに

$$F_{\mu\nu} = \partial A_\nu/\partial x^\mu - \partial A_\mu/\partial x^\nu \tag{21.97}$$

場の独立な力学変数，4 個のポテンシャル A_α についての Lagrangian の変分は，そうするとただちにこれら 4 個のポテンシャルに対する 4 個の 2 次の偏微分波動方程式を与えるだろう．しかし，代わりに多数の 1 次方程式は，幾何力学にとってと同じく，電気力学にとっても好都合である．粒子力学の Hamilton 方程式

$$\begin{aligned} dx/dt &= \partial H(x, p)/\partial p, \\ dp/dt &= -\partial H(x, p)/\partial x \end{aligned} \tag{21.98}$$

*38 作用原理は述べる，サンドウィッチの各面上で 3–幾何学を固定せよ
*39 3–幾何学とは何か
*40 電磁気学は “場の座標” に共役な運動量の例を与える

の類似物を求める．Lagrange 積分 $\int L(x,\dot{x})dt$ を Hamilton 積分 $\int[p\dot{x}-H(x,p)]dt$ で置き換えることによってこれらの式を得る．同様に，ここで式 (21.96) の作用被積分関数を平坦な時空で

$$(1/4\pi)\left[A_{\mu,\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] \tag{21.99}$$

となるだろうものによって置き換える．

実際，時空は曲がっているだけでなくまた空間的な超曲面に薄く切られているとみなされなければならない．幾何学のこの (3+1) 分割は 10 個の幾何力学的なポテンシャルを 6 個の g_{ij} と 4 個の経過および移動関数へ分割することを望ましいものにした．ここで同様に 4 個の A_μ をベクトルポテンシャルの 3 個の成分 A_i とスカラーポテンシャル $A_0=-\phi$（平坦な時空で Minkowski 座標系で，$\phi=A^0$ となるように符号が選ばれている）に分割する．この記号で，Lagrangian 密度関数は，標準密度因子 $(-{}^{(4)}g)^{1/2}$ を含むが，しかし運動方程式に影響をもたない完全な時間積分 $(\partial/\partial t)(A_i\mathcal{E}^i)$ を落として，公式

*41

$$\begin{aligned}4\pi\mathcal{L}_{\text{場}}=&-\mathcal{E}^i\partial A_i/\partial t+\phi\mathcal{E}^i{}_{,i}\\&-\frac{1}{2}Ng^{-1/2}g_{ij}(\mathcal{E}^i\mathcal{E}^j+\mathcal{B}^i\mathcal{B}^j)+N^i[ijk]\mathcal{E}^j\mathcal{B}^k\end{aligned} \tag{21.100}$$

によって与えられる．ここで，任意の 2 つの添字の交換で符号を変えるものと定義され，そして $[123]=1$ になるように規格化されている交代記号 $[ijk]$ が用いられる．3–テンソル ε^{ijk} および交代記号 $[ijk]$ は，式 (8.10) での対応する 4 次元の対象の場合と同じく関連している．したがって

$$\mathcal{B}^i=\frac{1}{2}[ijk](A_{k,j}-A_{j,k}) \tag{21.101}$$

と書くことができる．量 $\mathcal{B}^i$ は空間的な薄片での磁場の成分である．それらは独立に変化できるとみなされない．それらは 3 つのポテンシャル A_i の選択によって完全に固定されるとして取り扱われる．逆は電場の成分 $\mathcal{E}^i$ に対して成り立つ．それらは運動量のように取り扱われ，そして独立に変化できるものとして取り扱われる．

作用を $\mathcal{E}^i$ について極値化すると（練習問題 21.11），粒子力学での方程式 $dx/dt=p/m$ の類似物，および平坦な時空の電気力学の式

$$E_i=-\partial A_i/\partial t-\partial\phi/\partial x^i \tag{21.102}$$

の類似物すなわち，

*42

$$-\partial A_i/\partial t-\phi_{,i}-Ng^{-1/2}g_{ij}\mathcal{E}^j-[ijk]N^j\mathcal{B}^k=0 \tag{21.103}$$

を与える．ここで移動関数 N^j を含む最後の項は，座標系の傾斜から生ずる．ADM は以下の付加的であるが同等な方法を与え結果 (21.103) を述べる．

*41　電磁気学に対する Lagrangian 密度
*42　電磁気学の初期値方程式

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^i &= \frac{1}{2}[ijk]^* F_{jk} \\ &= \frac{1}{2}[ijk]\left\{\frac{1}{2}[jk\mu\nu](-^{(4)}g)^{1/2\,(4)}g^{\mu\alpha\,(4)}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\right\}\end{aligned} \tag{21.104}$$

$\mathcal{E}^j$ および $\mathcal{B}^j$ は直接には同時的な Σ 内での場の反変成分,

$$\boldsymbol{E} = E^j \boldsymbol{e}_j, \qquad \boldsymbol{B} = B^j \boldsymbol{e}_j \tag{21.105}$$

ではなくて，反変密度,

$$\mathcal{E}^j = g^{1/2}E^j, \qquad \mathcal{B}^j = g^{1/2}B^j \tag{21.106}$$

であると ADM は指摘する.

作用を 3 個の A_i について極値化すると（練習問題 21.12），Maxwell 方程式,

$$\partial \boldsymbol{E}/\partial t = \nabla \times \boldsymbol{B} \tag{21.107}$$

の曲がった時空の類似物を与える.

*43 残りのポテンシャル ϕ は，ただ 1 点で作用原理に入る．それについて極値化するとただちに源をもたない電磁気学の発散関係,

$$\mathcal{E}^i{}_{,i} = 0 \tag{21.108}$$

を与える.

*44 もし作用原理がどれだけの量が両端で固定されるべきかを自ら述べるならば，式 (21.100) はこの問題点についてどのような教訓を与えるか？ コラム 21.1 におけるように，Hamilton 形式での粒子力学の例に戻り，そしてそこで運動量 p は“そよ風にはためく”ことができることに注意することができる．座標 x のみが両端で固定されなければならなかった．こうして作用の変分は

$$\begin{aligned}\delta I &= \delta \int [p\dot{x} - H(x,p)]dt \\ &= \int \{[\dot{x} - \partial H/\partial p]\delta p + (d/dt)(p\,\delta x) + [-\dot{p} - \partial H/\partial x]\delta x\} dt\end{aligned} \tag{21.109}$$

であった．作用積分 I のよく定義された極値に到達するには，δp および δx の角括弧内で係数を抹殺する．すなわち，Hamilton の運動方程式を課するだけでは十分でなかった．さらに両端での量 $p\,\delta x$ を抹殺する．すなわち，運動の初めと終わりで x を指定することが必要であった．ここでも同様である．量 ϕ と $\mathcal{E}^i$ はそよ風にはためくが，作用原理のよく定義された極値について語りうるには，磁場はサンドウィッチの 2 つの面で指定されなければならない．なぜ磁場，あるいは 3 つの量
*45

*43 ϕ についての極値化による発散関係
*44 作用原理は両端で固定すべきものを述べる
*45 両端でポテンシャルでなく磁場そのものを固定せよ

$$\partial A_j/\partial x^i - \partial A_i/\partial x^j \tag{21.110}$$

であって，なぜ 3 つの A_i そのものでないのか？ 式 (21.100) を A_i について変化させ，力学的な方程式に到達しなければならないので，第 1 項の変分を部分積分すると，両端での項

$$\int_{\Sigma_{初め}} \mathcal{E}^i\,\delta A_i\,d^3x - \int_{\Sigma_{終わり}} \mathcal{E}^i\,\delta A_i\,d^3x \tag{21.111}$$

を得る．よく定義された変分問題をもつために，両端でのこれらの項はともにゼロでなければならないと要求する．与えられたベクトルポテンシャルから他のベクトルポテンシャル $A_{i_{新しい}}$ へ，ゲージ変換

$$A_{i_{新しい}} = A_i + \delta A_i = A_i + \partial\lambda/\partial x^i \tag{21.112}$$

によって行け．3 個の $A_{i_{新しい}}$ によって与えられる磁場の成分は式 (21.110) にあげられているものとまったく異ならない．さらに "両端での変分"

$$\int \mathcal{E}^i\,\delta A_i\,d^3x = \int \mathcal{E}^i\,\partial\lambda/\partial x^i\,d^3x = -\int \lambda\mathcal{E}^i{}_{,i}d^3x \tag{21.113}$$

は λ のどのような任意の選択に対しても，発散条件 (21.108) によって自動的にゼロである．したがって両端で固定される量は 3 個の A_i そのもの（たんなるポテンシャル）でなくて物理学的に意味のある量 (21.110)，磁場の成分である．さらに，発散条件 $\mathcal{E}^i{}_{,i} = 0$ は今やポテンシャル ϕ **の決定に対する初期値方程式**となる．

前述の段落で "3 個の A_i" を "6 個の g_{ij}" でそして "磁場の成分" を "3–幾何学 $^{(3)}\mathcal{G}$" でそしてポテンシャル "ϕ" を "経過および移動関数 N および N^i" で置き換えて電気力学から幾何力学へ移行しさえすればよい．

*46　この類似を念頭に置いて，ADM 定式化での一般相対論の変分原理 (21.95) に戻る．サンドウィッチの 2 つの面で 3–幾何学を固定し，作用を極値化するために，π^{ij}，g_{ij}，および経過と移動関数をかわるがわる変化させて，中間の条件を変えよ．幾何力学的な運動量は項 $-2N_i\pi^{ij}{}_{|j}$ を除いて，作用原理ではいたるところ代数的にのみ現れる．変分と部分積分は $2N_{i|j}\delta\pi^{ij}$ を与える．$\delta\pi^{ij}$ の係数を集めこれらの係数の和をゼロに置いて，極値に対して要求される若干の条件の 1 つに到達する．

$$\partial g_{ij}/\partial t = 2Ng^{-1/2}\left(\pi^{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\mathrm{Tr}\boldsymbol{n}\right) + N_{i|j} + N_{j|i} \tag{21.114}$$

この結果は幾何力学的な運動量を外在曲率によって定義する式 (21.91) から得るもの，ならびに経過および移動による外在曲率に対する表現 (21.67) と一致する．結果 (21.14) はここでは力学におけるもっとも基本的な問題での結果

$$dx/dt = \partial H(x,p)/\partial p = p/m$$

と同様に有用である．それは 2 階の方程式あるいは複数の方程式を 2 倍の数の 1 階の方程

*46　ADM 原理は幾何力学的な運動量に対する公式を再現する

式に分割する第 1 段階を示す.

*47 さて作用を g_{ij} について変化させそして再び，適切な部分積分および再整理の後に，一般相対論の残りの 1 階の力学方程式 [式 (21.116) および (21.117) を用いて単純化された] を見出せ.

$$\begin{aligned}\partial\pi^{ij}/\partial t = &-Ng^{1/2}\left(R^{ij}-\frac{1}{2}g^{ij}R\right)+\frac{1}{2}Ng^{-1/2}g^{ij}\left(\mathrm{Tr}\boldsymbol{n}^2-\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\,\pi)^2\right)\\ &-2Ng^{-1/2}\left(\pi^{im}\pi_m{}^j-\frac{1}{2}\pi^{ij}\mathrm{Tr}\boldsymbol{n}\right)\\ &+g^{1/2}(N^{|ij}-g^{ij}N^{|m}{}_{|m})+(\pi^{ij}N^m)_{|m} \qquad (21.115)\\ &-N^i{}_{|m}\pi^{mj}-N^j{}_{|m}\pi^{mi}+\begin{bmatrix}\text{単純さのためにここでは省略されるが,}\\ \text{ADM(1962) によって議論されている}\\ \text{幾何学と異なる場から生ずる源の項}\end{bmatrix}^{ij}\end{aligned}$$

最後に作用式 (21.95) を経過関数 N および移動関数 N_i について極値化して，式 (21.77) および (21.81) あるいは $G_n^\alpha = 8\pi T_n^\alpha$ に同等な，一般相対論の 4 個のいわゆる初期値方程式を見出せ．こうして,

$$-(1/16\pi)\mathcal{H}(\pi^{ij},g_{ij}) = (1/8\pi)Ng^{-1/2}g_{ij}(\mathcal{E}^i\mathcal{E}^j+\mathcal{B}^i\mathcal{B}^j) \qquad (21.116)$$

$$-(1/16\pi)\mathcal{H}^i(\pi^{ij},g_{ij}) = -(1/4\pi)[ijk]\mathcal{E}^j\mathcal{B}^k \qquad (21.117)$$

[練習問題]

21.11 電磁場に対する ADM 変分原理の第 1 の探求

作用原理 (21.100) を $\mathcal{E}^i$ について極値化して結果 (21.103) を導け.

21.12 電磁場に対する ADM 変分原理の第 2 の探求

式 (21.100) を A_i について極値化して，任意の Minkowski，すなわち平坦な領域で生ずる方程式は式 (21.107) に同等であることを確かめよ.

21.13 一般相対論の力学的な方程式での Faraday–Maxwell の源の項

式 (21.115) での最後の指摘されている源の項を，A_i および g_{ij} の関数とみなされる，Maxwell の電気力学の Lagrangian (21.100) から求めよ.

21.14 ϕ の選択は問題にならない

電場および磁場そのものの力学的な展開は，練習問題 21.12 で一般化されているように式 (21.103)，および (21.107) に従って，(a) Minkowski 座標での平坦な時空におけるおよび (b) 一般相対論における解析での，スカラーポテンシャル $\phi(t,x,y,z)$ に対してなされる選択に無関係であるという，本文の陳述を証明せよ.

---

*47 ADM 形式から力学的なおよび初期値方程式を導く

21.15　時空を薄片に切る選択は問題にならない

計量 ${}^{(3)}g_{ij}(t,x,y,z)$ および外在曲率 $K^{ij}(x,y,z)$ が空間的な超曲面 $\boldsymbol{\Sigma}$ 上で与えられている．そしてこれらの量は初期値方程式 (21.116) および (21.117) を満たすとする．そして経過および移動関数 (N,N_i) および $(N+\delta N, N_i+\delta N_i)$ に対する 2 つの択一的な選択が与えられている．曲率そのもの（これら 2 つの異なる座標系でのその成分から区別されるとして）は，超曲面から “わずかに離れた” 点 $\mathcal{P}$ で力学的な方程式 (21.114) および (21.115) によって計算されるとき，経過および移動のこの選択に無関係であることを示せ．

21.8　時間について前方に積分する

Arnowitt, Deser, and Misner の Hamilton 形式［また一般相対論の量子化—おもに Einstein の理論を Hamilton 形式に翻訳する—についての多くの研究者による多くの論文，たとえば，Wheeler (1968) の文献 1 および 2 に引用されているものをみよ］で，幾何学の力学は幾何学の Hamilton 力学とまったく類似の形をとる．そこでは出発時間で x と p を与え，dx/dt および dp/dt に対する 2 つの 1 次方程式を時間について前方に積分してすべての未来の時間でのこれらの力学的に共役の変数を見出す．ここで最初の空間的な超曲面にわたって g_{ij} と π^{ij} の 2 つの 1 次方程式［式 (21.114) および (21.115)］を時間について前方に積分して未来の時間での幾何学を見出す．たとえば，今日まで現代流体力学でよく知られた慣習に従って微分方程式を差分方程式として書き直し，それから十分な記憶能力をもつ電子デジタルコンピュータで積分を遂行することができる．

一般相対論における時間は非相対論的な粒子力学での時間の 1–パラメータ性質から非常に異なる多くの指をもつ特質をもつ［しかし，多くの相互作用をしている粒子の系の相対論的な力学を取り扱う多時間形式に対しては Dirac, Fock, and Podolsky (1932) をみよ］．幾何学を学ぶ者は空間的な超曲面を，空間的に維持する限り 1 つの場所で他の場所でよりも速く前方に押し進めるべく自由である．[*48] この自由度は積分の各段階 t での経過関数 $N(t,x,y,z)$ に自ら現れている．式 (21.114) および (21.115) は解析者に N についての情報を与えるべきパイプ役でない．それらは解析者が N についての情報を与えるべきパイプ役である．N の選択は自然によってでなく人間によってなされるべきである．力学的な方程式はこの選択がなされるまで目的を満たし始めることはできない．“時間パラメータ” t は 1–パラメータ群の超曲面で 1 つの空間的な超曲面を他の空間的な超曲面から区別すべきラベルに過ぎない．しかし N はこうして，幾何学の時間的な発展を記録すべく選ぶ連続する薄片間で，幾何学が場所から場所へ変化するとき，固有時間についての間隔を述べる．映画のカメラは 1 つの時間でただ 1 コマ生ずるものを記録できるが，操作者は場面の

*48　経過と移動は，もっとも好都合であることがわかるように，時間についての積分を前方に押し進めるべく選ばれる

撮影に対して角度の選択によってカメラがみるものについて大きな相違をつくりうる．したがってここでは薄切りの選択について同じことが言える．

他の選択は解析者，とくにデジタルコンピュータで解析を行う者にとって重要である．解析者は差分方程式として書かれた式 (21.114)，(21.115) で，$x=\cdots,73,74,75,76,77,\cdots$，等によって代表される格子点で生ずるものを定める過程にある．解析者は曲率が $x=83$ から $x=89$ までの周辺の局在化された領域でもっとも強く発展していることを見出す．解析者はこの領域で捜索点の適用範囲の密度を増大することを欲する．解析者は t が増大する: $t=\cdots,122,123,124,\cdots$，につれて，時々刻々，より小さい x 値とより大きい x 値での点をこの領域に堆積させることによって密度を増大させる．解析者はより小さい x 値での捜索点を右へ（正の N_1）移動し始めさせ，そしてより大きい x 値での捜索点を左へ（負の N_1）移動し始めさせる．言い換えれば，3 個の移動関数 $N_i(t,x,y,z)$ の選択はまさに経過関数 N の選択と同じく解析者の責任である．式は決して解析者に何を選ぶべきかを述べないだろう．解析者が式を述べなければならない．

これらの選択は，力学的な方程式 (21.114)，(21.115) を複雑にするどころか，どのような幾何力学的な過程が研究に対して解析者の手元にあるかという経過をたどることにおいて，それらを柔軟に，そして解析者の希望に敏感にする．

4 個の関数 N, N_i の選択について一般相対論に存在する自由度は，1 個の関数 $\phi(t,x,y,z)$，スカラーポテンシャルを選ぶ電気力学での自由度と比較することによって別の面から明らかにされる．力学的な Maxwell 方程式 (21.103) および (21.107) は，練習問題 21.12 で

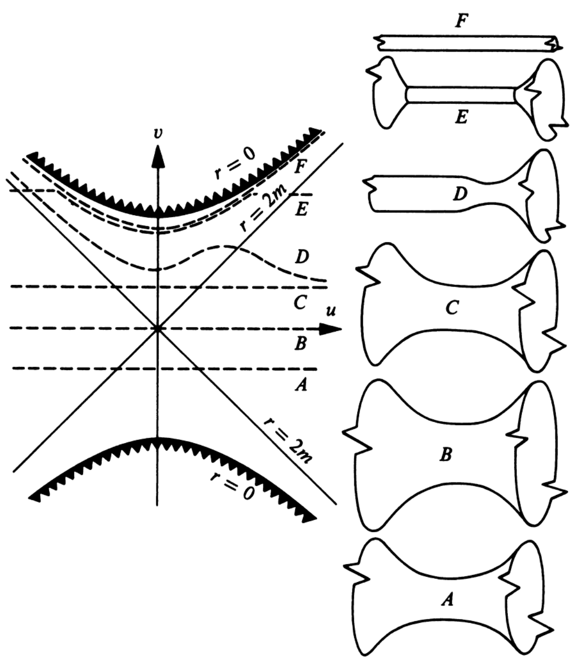


図 **21.4**　1 個あってしかも同じ $^{(4)}\mathcal{G}$，完全な Schwartzschild 4–幾何学を通って異なる空間的な薄片をつくる多くの方法のいくつか．

一般化されているように，まったく ϕ を定めない．代わりにこれらの式はベクトルポテンシャル A_i の時間発展を予言する代償として ϕ が（解析者によって）定められることを要求する．$\phi(t, x, y, z)$ の位置と時間についての依存性における変更された選択は，3 個の A_i の時間と空間についての発展に対する力学的な方程式と異なる結果を意味する．しかし，物理学的に重要な量，連続する超曲面上の電場および磁場そのものは ϕ のこの選択に関係
*49 なく同じになる（練習問題 21.14）．同様に幾何力学では，4 個の関数 N，N_i に対する変更された選択は，(a) 時空での座標の変更された設定，したがって (b) 連続する空間的な超曲面の内在的な計量 ${}^{(3)}g_{ij}$ および外在的な曲率 K^{ij} に対する変更された結果を意味する．しかし座標化のこの選択に関係なく（練習問題 21.15）同じ 4–幾何学 ${}^{(4)}\mathcal{G}$（図 21.4）を与える．

21.9　薄いサンドウィッチ定式化での初期値問題

適切な初期値データが与えられると，力学的な方程式を時間について前方に積分し幾何
*50 学の発展を定めることができる．しかし “適切な初期値データ” は何であるか？　それらは 6 個の関数 ${}^{(3)}g_{ij}(x, y, z)$，加えてさらに 6 個の関数 $\pi^{ij}(x, y, z)$，あるいは $K^{ij}(x, y, z)$，それらは共に 4 個の初期値方程式 (21.116) および (21.117) を満たす，である．座標と運動量を与えるべく要求されることは Hamilton 力学のよく知られた方策と一致する．しかし調和条件あるいはこのようなデータに課される “制限” はよく知られていない．2 次元の空間内で運動する粒子は座標 x，y および座標 p_x，p_y によって目録に載せられる．しかし円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上にとどまることを強制された粒子は制限 $xp_x + yp_y = 0$ を満たす．こうして “制限” の存在は，系は制限をもたない場合に想定されるよりも小さい自由度をもつという合図である．4 個の “初期値” あるいは “制限” 条件 (21.116) および (21.117) を完全に解析することは，こうして (1) 幾何学はどれだけの力学的な自由度をもつか，そして (2) これらの自由度は何であるか，すなわち，幾何学とその時間に伴う発展を完全に支配するために正確にどのような “取り手” を自由に調整することができるかを定めることである．今日なしうる勘定は，幾何学は電磁場と同じ総数の真の自由度をもつという結論である．“取り手”，あるいは力学の自由に調整できる特徴の同定は，電磁気学に対するよりも幾何学に対しては進んでいない（コラム 21.2）．しかし行けるところまではもっとも教訓的である．

正しくは場の自由度の同定は，Einstein の場合であれ Faraday and Maxwell の場合であれ，適切な変分原理がよく定義されたものとするために，最初と最後の空間的な超曲面上で固定されなければならないものを知ることを要求するだけである．そうすると以下の (1)～(3) のいずれかの選択をもつ．(1) 両方の超曲面上でその量を与える．あるいは (2) その量およびその力学的な共役を 1 つの超曲面上で与える．あるいは (3) (1) におけるように量を両方の超曲面上で与えるが，しかし無限に薄いサンドウィッチの極限にいくの

---
*49　経過および移動の選択に関係なく同じ 4–幾何学
*50　初期値データ：何が自由に処理されうるか？　そして何がそれによって固定されるか？

で，1つの超曲面上で量とその時間変化率を与える．この3番目の“薄いサンドウィッチ”手続きは電気力学および幾何力学の両方での初期値問題の素早い解析に対してもっとも単純である．まず電気力学を例示としてとる．

*51 ゼロ発散の磁場およびその時間変化率を与えよ．一般の場合には曲がった時空での任意の滑らかな空間的な超曲面上で，現在の例示的な取り扱いでは Minkowski 時空での超曲面 $t=0$ 上で，

$$\mathcal{B}^i(0,x,y,z) \text{ 与えられている} \tag{21.118}$$

$$\dot{\mathcal{B}}^i(0,x,y,z) = \left(\frac{\partial \mathcal{B}^i}{\partial t}\right) \text{ もまた与えられている} \tag{21.119}$$

これらの量は合わせて空間点あたり4個の，そしてただ4個の独立なデータを含んでいる．さて，どのようにして運動量 $\pi^i \sim -\mathcal{E}^i$ を得て力学的な方程式 (21.103) および (21.107) を時間について前方に積分し始めることができるか？ (1) 3個の関数 $A_i(0,x,y,z)$ の組を見つけてそれらのカール (curl) が3個の指定された $\mathcal{B}^i$ を与えるようにせよ．これがそもそもなされうるということは発散 $\mathcal{B}^i{}_{,i}$ がゼロになることによって保証されている．しかし，A_i の選択は一義的でない．任意の滑らかな λ をもつポテンシャル $A_{i\,\text{新しい}} = A_i + \partial\lambda/\partial x^i$ の新しい組は，元の A_i とまったく同様によい解を与えるが，それは大したことではない．1つの解をとりそれに固執せよ．(2) 同じように，3個の $\dot{A}_i(0,x,y,z)$ の組を見つけてそれらのカールが指定された $\dot{\mathcal{B}}^i(0,x,y,z)$ を与えるようにし，そして選択のすべての任意性を命令によって解け．(3) 電場（場の運動量のマイナス）は

$$\mathcal{E}_i = -\dot{A}_i - \partial\phi/\partial x^i \tag{21.120}$$

（平坦な空間でのみ修正なしに成り立つ公式）によって与えられることを思い出せ．初期値あるいは制限方程式 $\mathcal{E}^i{}_{,i} = 0$ は形式

$$\nabla^2\phi = -\eta^{ij}\dot{A}_{i,j} \tag{21.121}$$

に翻訳される．ϕ に対して解け．そうすると (4) 式 (21.120) は，力学的な式 (21.103) および (21.107) の積分を始めるために要求される（場の座標 A_i とともに），初期値の電場，あるいは電気力学的な場の運動量 $\pi^i \sim -\mathcal{E}^i$ を与える．[Misner and Wheeler (1957) は空間が多重連結であるときに入る付加的な特徴を取り扱う．おのおののワームホール (wormhole) あるいは幾何学の取り手は電気力線をとらえることができる．任意の1つのワームホールにとらえられた束はそのワームホールに関係した古典的な電荷 q_w を定義する．電磁場の力学的な発展を完全に定めるためにはデータ［式 (21.118) および (21.119)］の他にすべてのこれらの電荷を一度すべてに対して指定しなければならない．Unruh (1971) によれば，電荷に対する幾何力学的な類似物は存在しない]．(5) この積分で，スカラーポテン

*52 シャル ϕ はおのおのの次の時間段階で計算されるべきでない，それは選ばれるべきである．

---

*51 電磁気学では，磁場とその変化率を初期データとして与える

*52 スカラーポテンシャル：最初に固定される，後には自由に処理できる

この自由な選択を明確にした後，初めて力学的な方程式はこれらの連続する段階で A_i および π^i あるいは $\mathcal{E}^i$ に対して明確な結果をもって出てくる．

電気力学の初期値問題の薄いサンドウィッチ定式化では，要約すると，$\mathcal{B}^i$ および $\dot{\mathcal{B}}^i$（2 つの近傍の超曲面上での $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ に同等である）を与える．これらの初期値データを呈示するために大きな任意性をもって A_i および $\dot{A}_i$ を選ぶ．任意性は初期の A_i および $\dot{A}_i$ を与えるために占有されてしまっており，初期の ϕ には任意性は残されていない．しかし，すべての次の時間には事情はまさに他の方向にまわってしまう．すべての任意性は ϕ の選択に吸い取られてしまい，3 個の A_i にはいかなる任意性も残されない（力学的な方程式の積分によって与えられるように）．

コラム 21.2　電磁場の自由度を勘定する

A. 第 1 の方法：空間点あたりの “場の座標” の数

源をもたない電磁場の自由度の浅薄な勘定は，最初の同時超曲面 Σ 上の空間点あたり 3 個の場の座標 $A_i(x,y,z)$，および空間点あたり 3 個の場の運動量 $\pi^i_{\text{真実}} = \pi^i/4\pi$ [ここに $\pi^i = -\mathcal{E}^i(x,y,z)$] を与える．

より稠密な調査は空間点あたりの座標の自由度の数は 3 でなくて 2 であることを明らかにする．こうしてベクトルポテンシャルでの変化 $A_i \longrightarrow A_i + \partial\lambda/\partial x^i$ は実際の物理学，磁場の成分，

$$B^i = \frac{1}{2}[ijk](\partial A_k/\partial x^j - \partial A_j/\partial x^k)$$

に変化をもたらさない．さらに，これらの成分は数については 3 であるけれども，それらは時空点あたり 1 つの条件 $\mathcal{B}^i{}_{,i} = 0$ を満たす．こうして空間点あたり座標の自由度の有効な正味の数を 2 に減らす．

空間点あたりの運動量の自由度は，同じように空間点あたりの 1 つの条件 $\mathcal{E}^i{}_{,i} = 0$ によって 3 から 2 に減らされる．

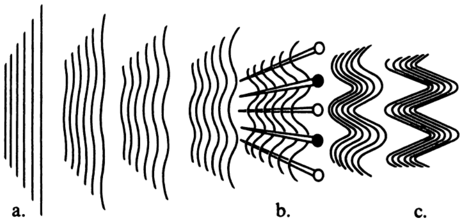
B. 別の方法：Fourier 係数を勘定する

場の理論の教科書では [たとえば，Wentzel（1949）をみよ]，注意は平坦な時空に集中されている．電磁場は Fourier 解析によって個々の進行波に分解される．座標空間での点あたりの自由度を勘定する代わりに，同等のことをし，波数空間での点あたりの自由度を勘定する．こうしておのおのの (k_x, k_y, k_z) に対して，2 個の独立な偏りの状態がある．おのおのの偏りの状態はその記述に対して初期時間 t_0' で振幅（“座標”）と振幅の時間変化率（“運動量”）を要求する．こうして波数空間での点あたりの自由度の数は，座標空間で勘定を遂行することによって得るものと一致して，座標に

対して 2 でありそして運動量に対して 2 である．

曲がった時空では，Fourier 解析は上述のように，空間での直接的な解析よりも電磁場の自由度を同定するあまり好都合でない方法である［このような Fourier 解析に対しては，Misner and Wheeler (1957)，とくに彼らの表 X およびそれに続く本文をみよ］．

C. もう一つの別の方法："構造の変形"を解析する



$\mathcal{E}$ あるいは $\mathcal{B}$ のいずれであろうと，ゼロ発散の場の自由度についての取り手を得る第 3 の方法は構造の変形のアイデアに存在する［Wheeler (1964) からの図］．磁場を，(a) 決して終わることなく空間内に存続する $\mathcal{B}^i{}_{,i}$ は，いたるところゼロであることを自動的に保証する Faraday の力線の図によって表せ．"編み針" を (b) 力線のスパゲッティーのような構造に挿入しこれらの針を思うままに動かせ．編み針を力線に沿って滑らせることは力線の運動をひき起こさない．(c) 互いに，そして力線に垂直な 2 本の編み針によって，任意の与えられた力線に垂直な任意の小さい変位を希望する通りに与えることができる．再び空間点あたりに 2 個の自由度がある．任意のゼロでない場をはじめに認めて，それがどんなに小さかろうとも，このような小さい変形の連続によってその複雑さおよび強さが何であろうとゼロ発散の任意の場のパターンに一致するようにつくることができる．

*53 事情は幾何力学でまったく同様である．1–パラメータ群の空間的な超曲面の始まりを与える．すなわち，

$$^{(3)}\mathcal{G}(0) \text{ 与えられている} \tag{21.122}$$

$$^{(3)}\dot{\mathcal{G}}(0) = \frac{\partial^{(3)}\mathcal{G}}{\partial t} \text{ 与えられている} \tag{21.123}$$

それから (1) 座標 $x^i = (x, y, z)$ の明確な組をとり，それらの座標でその 3–幾何学を記述する一義的な計量係数 $g_{ij}(x, y, z)$ を見出す．解の存在は $^{(3)}\mathcal{G}$ が Riemann 幾何学であるという状況によって保証されている．しかし，異なる座標で出発しそして同じ 3–幾何学の記述に対して異なる計量係数で終わることができたであろう．問題はない．1 組の座標を選び，生ずる計量係数をとり，そして要求される初期値データを不完全に与えるものとしてそれらに固執せよ．(2) 同様に，パラメータの値 $t + dt$ で 3–幾何学 $^{(3)}\mathcal{G} + {}^{(3)}\dot{\mathcal{G}}\,dt$ を記述するために，座標 $x^i + \dot{x}^i\,dt$ を用いて計量係数 $g_{ij} + \dot{g}_{ij}\,dt$ に到達せよ．x_i についての任意性はこうして命令によって解決されてしまい，そして $^{(3)}\mathcal{G}$ は明確な初期の物理学的データとして与えられるので，g_{ij} はそれによって完全に固定される．(3) 外在曲率 K_{ij} あるいは運動量 π^{ij} の成分は g_{ij} および $\dot{g}_{ij}$ と経過および移動関数 N および N_i で式 (21.67)

*53 ADM の取り扱いでは，3–幾何学とその時間変化率を与える

あるいは (21.67) および (21.91) あるいは (21.114) によって与えられることを思い出せ．4 個の初期値あるいは“制限”方程式 (21.116) および (21.117) はこうして 4 個の量 N および N_i を見出すための 4 個の条件となる．短縮

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}[N_{i|j} + N_{j|i} - \partial g_{ij}/\partial t] \tag{21.124}$$

および

$$\gamma_2 = (\text{“移動の異常性”}) = (\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\gamma})^2 - \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\gamma}^2 \tag{21.125}$$

（両者とも初期の同時的超曲面上で x，y，z の関数に対して）を導入することによって，これらの条件を短く書くことができる．そうすると 1 個の初期値方程式に対して

$${}^{(3)}R + \gamma_2/N^2 = 16\pi T_{nn} = 16\pi T^{nn} \tag{21.126}$$

をもつ．そして他の 3 個の初期値方程式に対して，

$$\left[\frac{\gamma_i{}^k - \delta_i{}^k \mathrm{Tr}\,\gamma}{N}\right]_{|k} = -8\pi T_i{}^n \tag{21.127}$$

をもつ．

要約すると，与えられた初期値データ，${}^{(3)}\mathcal{G}$ および ${}^{(3)}\dot{\mathcal{G}}$ を呈示するために，g_{ij} および
*54 $\dot{g}_{ij}$ を大きな任意性で選ぶ（座標についての任意性のためであって，物理学についてのいかなる任意性の理由によるものではない）．初期時間での任意性はすべてこのように吸収されてしまっているので，初期の N および N_i には式 (21.126) および (21.127) を解くことによって得られるように任意性は残されていないと予想する．しかし，すべての後の空間的な薄片上で任意性の判定は逆になる．経過および移動関数は自由に変更できる．しかし，それらが一度選ばれると，6 個の g_{ij}（そして 6 個の K^{ij} あるいは π^{ij}）には，力学的な方程式 (21.114) および (21.115) の積分によって与えられるように，何の任意性も存在しない．電気力学との類似物は明白である．そこでは 1 つの“ゲージに支配される”関数 ϕ は出発で楕円的な方程式 (21.121) によって固定された．しかしその後は自由であった．ここでは 4 個の経過および移動関数は出発で，4 個の式 (21.126) および (21.127) によって固定される．しかしその後は自由である．

練習問題 21.16 は，圧力を密度と結びつける式 $p = p(\rho)$ がわかっている任意の Friedmann 宇宙の時間についての全発展を解析するために，初期値方程式 (21.126) を適用する．練習問題 21.17 は，スカラー ポテンシャル ϕ に対する楕円的な初期値方程式 (21.121) に内容について同等である，空間的な超曲面 Σ 上での変分原理を探す．練習問題 21.18 および 21.19 は，経過および移動関数を定めるために同様の変分原理を探す．

*55 得られるであろう 4–幾何学の明記にはどれだけの自由度，あるいはどれだけの“取り手”が存在するか？　最初の 3–幾何学の計量係数は空間点あたり 6 個の数を与えた．しかし，それらは 3 個の位置の関数，

*54　経過および移動は最初定まっている，その後は自由に変更できる
*55　初期値データを勘定する

$$x = x(x', y', z'),$$
$$y = y(x', y', z'),$$
$$z = z(x', y', z')$$

によって指定され，座標変換の程度まで任意であった．任意の物理学的情報をもつ空間点あたりの量の正味の数はしたがって $6 - 3 = 3$ であった．これら 3 個の関数を，g_{ij} が対角型に変換されてしまっている座標系での計量の 3 個の対角成分として視覚化することができる．通常さらに進んで任意のこのような狭く制限された座標系で解析を実際に詳しく説明することは有用でない．

さて積分から生ずる $^{(4)}\mathcal{G}$ に埋め込まれたものとして，問題の $^{(3)}\mathcal{G}$ について考える．さらに，他の一般的な 4–幾何学から区別し Minkowski 幾何学および特殊な宇宙論をそれほど非典型的なものとする，塊，隆起，揺れ，および波動を与えられたものとして，$^{(4)}\mathcal{G}$ について考える．$^{(3)}\mathcal{G}$ は $^{(4)}\mathcal{G}$ 内の薄片である．それは交差する $^{(4)}\mathcal{G}$ のすべての領域内に存在する塊，隆起，揺れ，および波動を分かちあう．$^{(4)}\mathcal{G}$ が一般的である程度まで $^{(3)}\mathcal{G}$ を，異なる $^{(3)}\mathcal{G}$ になることなく他の位置に移すことは許されない．もし $^{(3)}\mathcal{G}$ を，他の所で不変のままで，ある地域内でわずか“時間について前方に”押し進めようと試みるならば，必然的に $^{(3)}\mathcal{G}$ を変える．この事情によって $^{(3)}\mathcal{G}$ は“時間についての情報を運ぶ”ことがわかる [Sharp (1960); Baierlein, Sharp, and Wheeler (1962)]．さらに，この“時間についての前進運動”はその記述に対して空間点あたり 1 つの数を要求する．この数を $^{(4)}\mathcal{G}$ 内に置かれた任意の座標系 $\bar{t}$，$\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{z}$ を想像することによって具体的な表現で考えることは可能である．それから超曲面は値 $\bar{t} = \bar{t}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$（そこで超曲面は代表的な直線 $\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{z}$ を切る）によって定義されるものと想像されうる．前方運動は超曲面を $\bar{t}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \delta\bar{t}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ へ運び，そして $^{(3)}\mathcal{G}$ 上で形と計量係数をそれに応じて変える．考えをこのような具体的な模型に結びつけないで，むしろ (1) 時空での $^{(3)}\mathcal{G}$ の位置はその明記に対して空間点あたり 1 つの資料を要求する．そして (2) この資料は任意の $^{(3)}\mathcal{G}$ を示す空間点あたりの 3 個のデータにすでにいやおうなしに存在する，原理の一般的な点として認識することは通常よりよい．

*56 結論として，$^{(3)}\mathcal{G}$ が埋め込まれている，あるいは埋め込まれるべきである（$^{3}\mathcal{G}$ がその $^{(4)}\mathcal{G}$ を通してどこから薄切りするかを区別したように）$^{(4)}\mathcal{G}$ について，実際に何かを述べる $^{(3)}\mathcal{G}$ での空間点あたりただ 2 個のデータが存在する．他の“サンドウィッチの面”（厚かろうが薄かろうが）を定義する他の $^{(3)}\mathcal{G}$ に対しても同様である．こうして $^{(3)}\mathcal{G}$ および $^{(3)}\dot{\mathcal{G}}$ の指定は実際 $^{(4)}\mathcal{G}$ について空間点あたり 4 個の正味の力学的な情報を与える（情報の残りのすべては“多くの指をもつ時間”であり，3–幾何学が $^{(4)}\mathcal{G}$ 内のどこに位置しているかを述べる）．この推論によれば，幾何力学は電気力学と同じ数の力学的な自由度をもつ．平坦な時空背景上での重力波の弱い場の解析（35.3 節）を通してのまったく別な方法で同じ結論に到達する．Maxwell 波に対するのと同じ領域の可能な波数，そしておのおのの波数に対して 2 つの偏りの状態，そしておのおのの偏りに対して 1 つの振幅と 1 つの位

*56　最初の同時超曲面上での空間点あたりの 4 個の幾何力学的な情報

相（1つの座標と1つの運動量の等価物）．

定められた時空多様体での電気力学では，空間点あたりの1つの時間データ（多くの指をもつ時間という背景で電磁気学を取り扱うとき）と空間点あたりの2つの力学変数との間にきれいな区別をもつ．しかし幾何力学の超曲面の定式化ではそうでない．そこでは2種類の量は3–幾何学の1つの概念内で互いにほどけないほど混合している．

初期値データおよび最終値データから (1) これらのデータおよび (2) 作用は極値である，

$$I = I_{極値} = S$$

という原理によって定められる作用積分に向きを変える．作用は電気力学では公式

$$S = S(\Sigma, \boldsymbol{B}) \tag{21.128}$$

に従って，最終超曲面上の変数に依存する，しかし幾何力学では公式

$$S = S({}^{(3)}\mathcal{G}) \tag{21.129}$$

に従って最終超曲面に依存する．おのおのの場合に，汎関数の独立変数には空間点あたり3個の数が存在する（Σ に1個，ゼロ発散の磁場に2個，${}^{(3)}\mathcal{G}$ に3個）．

3–幾何学での1個の多くの指をもつ時間と2個の力学変数とのこの混合は，一般相対論ではMaxwell理論でよりも，いつ適切な初期値データを手元にもつかを知ることを難しくする．Σ を与え Σ 上の $\mathcal{B}$ および $\dot{\mathcal{B}}$ を与える．それは電気力学に対して十分であった．
*57 幾何力学に対しては，6個の $g_{ij}(x,y,z)$ および6個の $\dot{g}_{ij}(x,y,z)$ を与えることは必ずしも十分でない．たとえば，時間パラメータ t がまやかしであるとして，dt は与えられた超曲面 Σ から新しい超曲面 $\Sigma + d\Sigma$ へ前進する代わりに，たんに現在の超曲面を再座標化する．

$$\begin{aligned} x^i &\longrightarrow x^i - \xi^i\,dt, \\ g_{ij} &\longrightarrow g_{ij} + (\xi_{i|j} + \xi_{j|i})dt \end{aligned} \tag{21.130}$$

一見すると，6個の g_{ij} と6個の

$$\dot{g}_{ij} = \xi_{i|j} + \xi_{j|i} \tag{21.131}$$

に適切なデータをもつと考えられるだろう．しかし最終的には薄いサンドウィッチの両面を要求されるようにもたないで，ただ1つの面をもつことがわかる．こうして力学の一般的な問題で不適切に主張されたデータとして，自ら形式 (21.131) で表される6個の $\dot{g}_{ij}$ の任意の組を拒絶しなければならない [Belasco and Ohanian (1969)]．

同様の困難は薄いサンドウィッチの2つの面が，いたるところで一致する代わりに，制限された領域で，3次元であれ，2次元であれ，あるいは1次元でさえあろうと（“1つの面が他の面よりも先であることから後になるべく越える”），一致するときに生ずる．こう

*57　初期データの完全性と調和を保証することについての問題

して不適切な初期値データとして 6 個の g_{ij} を拒絶するために Σ 内にただ 1 つの曲線上で式 (21.131) を成り立たせれば十分である．

*58 初期値方程式 (21.126) および (21.127) の解 $N(x,y,z)$，$N_i(x,y,z)$ の存在と一意性を保証するであろう条件を g_{ij} および $\dot{g}_{ij}$ に課すことができるということは "薄いサンドウィッチ推測"，多くの研究者による多くの仕事があったがいまだ決定的な定理が存在しないトピック，として知られる．存在と一意性を推定することは，空間を通しての質量–エネルギーの分布が慣性を定めるという Mach の原理（21.12 節）に，数学的な内容を与えることについての第 1 段階をつくることである．

21.10 時間–対称および時間–反対称な初期値問題

一般的な初期値問題から詳細な解析に適する 2 つの特別な初期値問題，1 つは時間–対称な初期値問題，もう一方は時間–反対称な初期値問題として知られるものに向かう．

空間的な超曲面 Σ が存在してそのすべての点で外在曲率がゼロになるとき，4–幾何学は時間–対称であると言われる．この場合には 3 個の初期値方程式 (21.127) は自動的に満たされる．そして 4 番目の初期値方程式は 3 次元のスカラー曲率不変量についての単純な要求，

$$R = 16\pi\rho \tag{21.132}$$

に帰着する．注意を空の空間に制限するときにはさらなる単純化が生ずる．1 番単純なのは球対称の場合であり，そのときには式 (21.132) は時間対称の瞬間で（2 つの漸近的に平坦な空間が喉によって結ばれる），練習問題 21.20 で展開されているようにただちに完全な Schwarzschild 幾何学を与える．

計量

$$ds_1{}^2 = g_{(1)ik}\, dx^i\, dx^k \tag{21.133}$$

をもつ 3–幾何学を考える．それを "基底計量" とよぶ．計量

$$ds_2{}^2 = \psi^4(x^i) ds_1{}^2 \tag{21.134}$$

をもつ別な 3–幾何学を考える．角度は 2 つの幾何学で同一である．これによってそれらは等角的に同等であると言われる．2 つの 3–幾何学のスカラー曲率不変量は公式 [Eisenhart (1926)]

$$R_2 = -8\psi^{-5}\boldsymbol{\nabla}_1{}^2\psi + \psi^{-4}R_1 \tag{21.135}$$

によって関係している．ここに

$$\boldsymbol{\nabla}_1{}^2\psi = \psi_{|i}{}^{|i} = g_1^{-1/2}(\partial/\partial x^i)[g_1{}^{1/2}g^{ik}(\partial\psi/\partial x^k)] \tag{21.136}$$

*58 "薄いサンドウィッチ推測"

スカラー曲率不変量 R_2 がゼロになることを要求する．そして等角補正因子 ψ に対する"波動方程式"

$$\nabla_1{}^2\psi-(R_1/8)\psi=0 \tag{21.137}$$

に到達する［Brill（1959)］．Brill は基底計量が Bondi によって提案された形式，

$$ds_1{}^2=e^{2Aq_1(\rho,z)}(dz^2+d\rho^2)+\rho^2\,d\phi^2 \tag{21.138}$$

をもつようにとり，そして等角補正因子 ψ はまた軸対称性をもつようにとる．応用として，

$q_1(\rho,z)$：“重力波の振幅の分布”の尺度となる，単純さのために $r=(\rho^2+z^2)^{1/2}=a$ の外部でゼロになると仮定される，

A：“重力波の振幅の分布の振幅”の尺度となる，

$\psi(\rho,z)$：等角因子であり，遠く離れた位置で $1+(m/2r)$ として変化する．量 m(cm) は幾何学は漸近的に平坦であるという条件によって一義的に定まる．それは重力放射の分布の質量–エネルギーの尺度となる．

*59 重力放射の質量 m は振幅 A の小さい値に対しては A^2 に比例する．それは“活動的な区域”での重力波の振幅 $q_1(\rho,z)$ についての素早い変化のスケールの尺度となる，既約 (reduced) 波長 $\lambda=$ (有効波長$/2\pi$) に逆比例する．こうして計量は，活動的な区域で，振幅について A に比例する揺れに支配され，そしてさらに離れたところで，計量についての Schwarzschild の $(1+2m/r)$ 因子に近い何かによって支配される．振幅 A が増大するとき，臨界値が達成され，$A=A_{臨界}$ となり，そこで m は無限大になりそして幾何学は湾曲して閉じる（“重力波のエネルギー自身によって閉じた宇宙”)．さらなる解析および例は Wheeler（1964a)，pp.399–451, また Wheeler（1964c）に見出されるだろう．

*60 Brill は彼が時間–反対称の初期値条件とよぶものを真空の場合に対して同様の解析を遂行した［Brill（1961)］．York（1973）によって改良されたとおりに以下に概略が述べられている．(1) 最初の薄片は極大である，$\mathrm{Tr}\boldsymbol{K}=0$，(2) この薄片は等角的に平坦である，

$$g_{ij}=\psi^4\delta_{ij} \tag{21.139}$$

(3) 計量 δ_{ij} をもつ“基底空間”で作業し，その後幾何学 (21.239) に変換する．初期値方程式のうちの 3 個は

$$K^{ij}_{基底,j}=0 \tag{21.140}$$

となる．これらの方程式を解くには，(1) 任意の局在化されたゼロトレースの対称テンソル B_{km} をとる，(2) A に対する平坦な空間の Laplace 方程式 $\nabla^2A=(3/2)\partial^2B_{km}/\partial x^k\,\partial x^m$ を解く，(3) 6 個のポテンシャル $A_{km}=B_{km}+\frac{1}{3}A\,\delta_{km}$ を定義する，そして (4)

$$K^{ij}_{基底}=[ikl][jmn]\partial^2A_{km}/\partial x^l\,\partial x^n \tag{21.141}$$

*59　波の振幅は質量–エネルギー：$m=m(A)$ を定める

*60　“時間–反対称”な初期値データ

を計算する．それは式 (21.140) を自動的に満たしそして $\mathrm{Tr}\boldsymbol{K}_{基底}=0$ を与える．それから $K^{ij}=\psi^{-10}K^{ij}_{基底}$ はまたこれらの条件を，しかし，今や曲がった幾何学で式 (21.139) を自動的に満たす．最終の初期値方程式は準線形の楕円方程式となり，平坦な基底空間で，等角因子 ψ に対して，

$$8\nabla^2_{基底}\psi+\psi^{-7}\sum_{i,j}(K_{基底\ ij})^2=0 \tag{21.142}$$

ψ の漸近形は波の質量は正であることを明らかにする．

*61 時間–対称および時間–反対称の場合の他に，初期値問題が特別な単純さをもつ場合はさらに少なくとも 2 つある．1 つは，たとえば，27 章の Friedmann 宇宙，あるいは 30 章のミックスマスター（mixmaster）宇宙，あるいは Kuchař（1971a）の取り扱いでの円柱形の重力波に対するように，対称性を与えられた幾何学の場合である．g_{ij} および π^{ij} が特別な対称性をもつような空間的な薄片から出発し，すべての未来の空間的な薄片をこの対称性を保持するようにつくる．これらの同時的な曲面の任意の 1 つの上の幾何学は，ほとんど完全にこれらの対称性の考察によって支配されるけれども，依然特徴的に，Friedmann 宇宙の半径，あるいはミックスマスター宇宙の曲率の 3 個の主半径のような，その完全な決定に対する若干の勘定のできる数のパラメータを要求する．これらのパラメータおよびそれらに共役な運動量はミニ位相空間を定義する．このミニ位相空間では，力学は古典力学の任意の他の問題と同じ過程をたどる [たとえば，コラム 30.1 およびミックスマスター宇宙に対する Misner（1969），軸対称を与えられた波に対する Kuchař（1971a）および（1972），そして球対称をもつ波に対する Gowdy（1973）をみよ]．一般相対論のもっとも独特な特徴である，多くの指をもつ時間の存在に対する証拠さえも，指定された対称性から逸脱する任意の空間的な薄片に決して注意を与えるべきでないことに対する代償として削除される．

[**練習問題**]

21.16 宇宙論を研究する無能な者の方法

時間とともに変化する半径 $a(t)$ の球の形をもつ 3–幾何学に対応する計量，

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)[d\chi^2+\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2)]$$

をもつ時空を考える．局所的な Euclid 基準系で表されたときの外在曲率のテンソルは

$$\boldsymbol{K}=-a^{-1}(da/dt)\boldsymbol{1}$$

ここに $\boldsymbol{1}$ は単位テンソルであることを示せ．初期値方程式 (21.77) は

$$(6/a^2)(da/dt)^2+(6/a^2)=16\pi\rho(a)$$

*61 高い対称性を与えられた幾何学に対する有限次元の力学

[左辺の 2 番目の項の値に対しては，練習問題 14.3 およびコラム 14.2 および 14.5 をみよ] に帰着することを示せ．そして“ちりで満たされた模型宇宙”に対しては右辺の項を $6a_0/a^3$ と書くことがなぜ適切であるかを説明せよ．より一般的に，任意の状態方程式，$p = p(\rho)$ が与えられたときに，

$$d(\rho a^3) = -p\, d(a^3)$$

から $\rho = \rho(a)$ をいかに見出すことができるか，そして膨張および再収縮の履歴，$a = a(t)$ をこうしていかに予測できるかを説明せよ．

21.17　電気力学でのスカラーポテンシャルに対する薄いサンドウィッチ変分原理

(a) 表現

$$\frac{1}{8\pi} g^{mn} \frac{\partial\phi}{\partial x^m} \frac{\partial\phi}{\partial x^n} + U^m \frac{\partial\phi}{\partial x^n}$$

における未知の U^m を，この表現に体積要素 $g^{1/2}\, d^3x$ を掛け，そして同時的な曲面 Σ にわたって積分されたものが，電気力学の初期値方程式 (21.108) を満たすように ϕ によって，そして ϕ によってのみ極値化されるように選べ．

(b) 生ずる変分原理は，“まったく予期しないところから”考案されなければならないのでなく，電気力学の Lagrangian 密度 (21.100) に基づいてつくられた作用原理（サンドウィッチの厚さがゼロになる極限で，サンドウィッチの 2 つの面上で A_i を先立って指定するという制約のみで，I を極値化するためにサンドウィッチの 2 つの面の間のいたるところで ϕ および 3 個の A_i の独立な変分）から直接出てくるものに他ならないことを示せ．

21.18　幾何力学での経過および移動関数に対する薄いサンドウィッチ変分原理

(a) 作用積分

$$I_3 = \int \{[R - (\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})^2 + \mathrm{Tr}\boldsymbol{K}^2 - 2T^*_{nn}]N - 2T_n^{*k} N_k\} g^{1/2}\, d^3x$$

を経過および移動関数について極値化し，このようにして幾何力学の 4 個の初期値方程式に到達することを示せ．解析の際に同時的な曲面上で 6 個の g_{ij} および 6 個の $\partial g_{ij}/\partial t$ を与えていることが理解されている．外在曲率は式 (21.67) におけるように，これらの量および経過と移動の関数で表されると考えられる．エネルギー密度とエネルギーの流れは，本章での前述のように，同時的な曲面内で単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ および 3 個の任意の座標基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ に関係している．そして * は省略された 8π の因子に対する省略形である．

(b) この変分原理を無限に薄いサンドウィッチの極限に行くことによって ADM 変分原理から導け [Wheeler (1964) での導出をみよ]．

21.19　凝縮された薄いサンドウィッチ変分原理

(a) 前述の練習問題の作用 I_3 を経過関数 N について極値化せよ．

(b) 結果と“3–幾何学は時間についての情報の運び手である”という原理との間の関係は何であるか？

(c) N の消去によって，変化されるべき量は 3 個の移動関数 N_i だけである，“凝縮された薄いサンドウィッチ変分原理”に到達せよ．

21.20 Schwarzschild 幾何学への無能な者の道

決定論的に時間発展している曲がった空の空間上で，(1) それは時間対称の瞬間，空間的な超曲面，その外在曲率は展開する時空についていたるところでゼロである，をもつ．そして (2) この空間的な超曲面は球対称性を与えられている，という条件を課す．3–幾何学の計量を形式

$$ds^2 = \psi^4(\bar{r})(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

に書け．初期値方程式 (21.127) から，等角因子 ψ は掛け算因子を除いて形 $\psi = (1+m/2\bar{r})$ をもたなければならないことを示せ．固有の円周 $2\pi\bar{r}\psi^2(\bar{r})$ は $\bar{r}$ のある値のとき最小値をとり，3–幾何学の**喉**を定義することを示せ．3–幾何学は，置換 $r' = m^2/4\bar{r}$ のもとで形量が不変であるという意味で，この喉についての反転について鏡像対称であることを示せ．等角座標 $\bar{r}$ から Schwarzschild 座標 r への変換を見出せ．

21.11 4–幾何学を指定する York の "取り手"

*62 極値的な固有体積の 1 つの同時的な曲面上で—あるいは**特定の**同時的な曲面上で—，(1) 自由に指定できるが，しかしまた完全な，初期値データをもち，こうして (2) 全体の一般的な 4 次元時空多様体を完全に定めるために，3–幾何学の等角部分と，力学的に共役な運動量の 2 つの同等でない成分を与える．これは要するに Brill が特別な場合（前述の節をみよ）に行ったことの一般的な場合への York の拡張（1971, 1972b）である．York および Brill は Licherowicz（1944）および Burhat（1962 および等角的な幾何学および初期値問題についてそこに引用されている以前の論文）の以前の考察を認める．しかしなぜ等角的な幾何学なのか，そしてなぜこのような特別な空間的な超曲面をとり，その上で空間点あたり 4 個の力学的なデータを与えるのか？

Maxwell の方程式の若干の解は Minkowski の平坦な時空での無限の平面単色波よりも単純である．そして若干の解は，局所的な揺れそして波，より大きなスケールの塊および隆起，そしてさらに大きなスケールの一般的な曲率をもち，任意の方法であの時空を通して切られる空間的な薄片上で吟味されるときより複雑にみえる．多くの指をもつ時間に伴うその発展について電気力学を探査することを望む者はこれらの複雑さを避けることができない．そしてもっともすっきりした形で示される，電磁場の自由度をみることを望む者は誰も多くの指をもつ時間のこれらの複雑さを受け入れないだろう．彼は見出しうるもっとも単純な種類の時間的な薄片をとるだろう．その同時的な曲面上で空間点あたり，2 個のそしてたった 2 個の場の座標と，そして 2 個のそしてたった 2 個の場の運動量が存在する．幾何力学についても同様である．

幾何学の力学を解析することと異なるように，幾何学の自由度を解明しようと望むとき

*62 幾何学の自由度の要約

には，3–幾何学に含まれている空間点あたりの情報の 3 個の項目から退く［とくに Kuchař (1971b および 1972) の“外在的な時間”定式化にみられるように，あるいは幾何力学を
*63 解析する任意の他の方法で]．そして York に従って (1) 最大の固有体積をもつ 同時的な曲面をとり，(2) この同時的な曲面上で 3–幾何学の等角部分に含まれている 2 個の“空間点あたりの座標の自由度”を指定する．

空間的な超曲面 Σ 上での固有の体積要素 $g^{1/2}\, d^3x$ は，超曲面に垂直に測定されるとき次の単位の固有時間間隔内に，

$$-\mathrm{Tr}\boldsymbol{K} = -\frac{1}{2}g^{-1/2}\mathrm{Tr}\boldsymbol{n} \tag{21.143}$$

によって与えられる固有体積の増加率［図 21.3 および式 (21.59) と (21.66) をみよ］を経験する．体積が極値であるためにはこの量は Σ の各点でゼロにならなければならない．この条件は Friedmann 宇宙 (27 章) および Taub 宇宙 (30 章) で，宇宙が膨張から再収縮へ転換する自然時間座標 t の値のときに満たされる．同時的な曲面，Σ の選択についての同じ条件が，どのような対称性をもまったくもたない閉じた宇宙に対して，同じ自然な方法，

$$\mathrm{Tr}\boldsymbol{K} = 0 \qquad \text{あるいは} \qquad \mathrm{Tr}\boldsymbol{n} = 0 \tag{21.144}$$

*64 で定式化されることは驚くべきである．代わりに，トポロジー的に開いた 3–空間と実線 (時間) との積である時空を取り扱うことができる．そうするとこの時空内で，2–球のトポロジーをもつ境界を成す空間的な 2–幾何学 S の位置を指定することを考えるのは自然である．そうすると空間的な 3–幾何学 Σ で S の内部を満たす多くの方法をもつ．しかしすべてのこれらの Σ の中で，極値であるもの (1 個であれあるいは複数個であれ) だけが式 (21.144) を満たす．

2–球のトポロジーをもつこの 2–幾何学を誰が指定するか？ その 2–幾何学の選択はどうでもよいことでない．与えられた 4–幾何学で，境界をなす 2–幾何学に対する異なる選択は通常 3–幾何学を極値化することに対して異なる結果を与えるだろう．したがって“初期値の同時的な曲面”Σ に対して異なる選択を与えるだろう．どのような考察もただちにでしゃばって 2–幾何学の 1 つの選択に他の選択以上に優先権を与えないだろう．しかし，このような無限個の選択は閉じた 3–幾何学に注意を制限するときには生じないだろう．したがって閉じた 3–幾何学が閉じた宇宙に適用されるのを考えるために以下の解析に具体性を与えるだろう．たとえ解析は確かに開いた領域で，その開いた領域を境界づける閉じた 2–幾何学上で境界値の適切な指定によって，よく定義されたものになるとしても．要するに，注意を閉じた 3–幾何学に制限することによって，閉じることの明白な条件を明白でない境界条件にとって代わらせる．

York の解析は彼の外在的な時間

*63　極値的な固有体積の超曲面をとる
*64　開いた 3–幾何学の場合

$$\tau = \frac{2}{3} g^{-1/2} \mathrm{Tr}\boldsymbol{n} = \frac{4}{3} \mathrm{Tr}\boldsymbol{K}$$

が，外在的な固有体積の超曲面に対して適切な値 $\tau = 0$ のみならず，超曲面上で任意の一定値をもつとき単純にとどまる．

*65 一定の外在的な時間，$\tau =$ 一定 の条件によって指定される同時的な曲面 Σ 上で，等角 3–幾何学，

$$<=^{(3)} <= \left(\begin{array}{l} \text{(1) 微分同相写像（多様体にわたって点を新しい位置に滑} \\ \text{らかに滑らせること），あるいは (2) すべての局所的な角} \\ \text{度（局所的な距離の比）を固定したまま，しかし局所的な} \\ \text{距離そのものを変えて点から点へ滑らかに変わるスケール} \\ \text{の変化，あるいは (3) 両方のもとで互いに同等なすべて} \\ \text{のこれらの正の Riemann 3 次元計量の同等なクラス} \end{array} \right) \qquad (21.145)$$

を与えることから始める．等角 3–幾何学は座標系の特別な選択からまったく離れていて，そしてどのような座標も用いる必要さえまったくもたない，定義と解釈に荷担する幾何学的な対象である．等角 3–幾何学（**τ=一定の超曲面 Σ 上での**）は，電磁気学で磁場とみなすものと考えてよいだろう．等角的に平坦な 3–幾何学の場合，

$$ds^2 = \psi^4(x, y, z) ds^2_{\text{基底}} \qquad (21.146)$$

（ここに $g_{ij\,\text{基底}} = \delta_{ij}$）は，磁場がいたるところでゼロであるような電磁気学での初期値の事情に類似している（Brill の時間反対称の初期値問題）．しかし今われわれは一般的な $ds^2_{\text{基底}}$ の場合を考えている．

等角 3–幾何学の 6 個の計量係数 g_{ij} は，3 個の座標 x^i の変化によって変化を受ける．そして任意点で共通の位置に依存する掛け算の因子まで決まらず，空間点あたり $6-3-1=2$ 個の情報を保持する．この点について，それらはゼロ発散の磁場 $\mathcal{B}$ の成分のようである．対応する場の運動量 $\pi^i_{EM} \propto \mathcal{E}^i$（コラム 21.1）は電荷密度によって指定される発散をもち，したがってまた

空間点あたり（電荷密度について指定された情報の他に）2 個の情報 (21.147)

を保持する．$\mathcal{B}$ の成分と計量係数とを比較することはいささか誤っている．計量係数は物理学的に重要な場の成分のようであるよりも，ポテンシャルのようである．

幾何力学での “場” の適切な度量は曲率テンソルである．しかし等角 3–幾何学のように未発達の幾何学に対して曲率テンソルを定義することはいかにして可能であるか？ York (1971) はこの質問を提起し答えた．Weyl の等角–曲率テンソル［式 (13.50) および練習問題 13.13］は，高次元の空間で，計量係数に掛けられる位置に依存する因子 ψ^4 に無関係であるが［正規 $\binom{2}{2}$ 表示で］，しかし 3 次元空間で恒等的にゼロである（練習問題 21.21）．1 階高い微分へ行くときにのみ曲率のゼロでない等角的に不変な度量に到達する（練習問

*65 等角 3–幾何学の意味

*66　題 21.22)．このようにして，**York の曲率** $\tilde{\beta}^{ab}$（ここでは Y^{ab} とよばれる）以下の性質をもつテンソル密度に達する．

$$Y^{ab} = Y^{ba} \ \text{(対称)},$$

$$Y^a_a = 0 \ \text{(ゼロトレース)},$$

$$Y^{ab}{}_{|b} = 0 \ \text{(横の)}$$

$$Y^{ab}, \quad \text{等角的なスケール因子での位置に依存する変化について不変},$$

$$Y^{ab} = 0, \quad \text{3–幾何学が等角的に平坦であるときに限り} \tag{21.148}$$

Y^{ab} は York が Σ に内在的な 3–幾何学の純粋なスピン 2 表示とよぶものを与える．それは空間的な初期値の同時的な曲面上での電気力学の場 $\mathcal{B}$ の類似物である．それは等角的な 3–幾何学についての物理学的情報を直接保持する．

"ポテンシャル" $g_{ij}/g^{1/3}$ によって指定され，そして "場の成分" Y^{ij} によって測定される等角的な幾何学 $^{(3)}<$ の他に，また Σ 上で対応する共役な運動量を指定しなければならない．

$$\tilde{\pi}^{ab} = \tilde{\pi}^{ba} \ \text{(対称)}, \qquad \tilde{\pi}^a_a = 0 \ \text{(ゼロトレース)},$$

*67

$$\tilde{\pi}^{ab}{}_{|b} = 0 \quad \text{(横の)}, \quad \text{空間にエネルギーの流れが存在しない場合},$$

$$\tilde{\pi}^{ab}{}_{|b} = 8\pi(\text{エネルギーの流れの密度})^a, \quad \text{それ以外の場合}$$

空間点あたりの 2 個の情報（エネルギーの流れについての定められた情報の他に）

(21.149)

3–幾何学は等角的な因子の異なる値によって互いに区別されるのであるが，式 (21.148) および (21.149) で，重み（weight）5/3（21.2 節をみよ）のテンソル密度の共変微分をいずれの 3–幾何学について計算するかを指定することは，本質的であるようにみえるだろう．しかし，York は条件 (21.149) はどのような方法でも等角的な因子 ψ^4 の値に依存しないことを示した．

York が "重み 5/3 の運動量密度" とよぶものに対するこれらの式

$$\tilde{\pi}^{ab} = g^{1/3}\left(\pi^{ab} - \frac{1}{3}g^{ab}\mathrm{Tr}\boldsymbol{n}\right) \tag{21.150}$$

は線形である．したがって標準的な方法で解析される．York（1973a,b）が "Riemann 多様体上での対称テンソルの等角的に不変な直交分解" を与えたことはこの計画での大きな助けである．それはこれらの要求（"横のゼロトレース"，"等角的な Killing"，および "トレース" 部分は，それぞれ，幾何学の等角的な部分の変形，単なる再座標化，およびスケールの変化を測定する）の解を生成させる．計量の等角的に同等なすべてのクラスに対して，すなわち，与えられた

---

*66　York の曲率テンソル

*67　関連した運動量

$$\tilde{g}_{ab} = g^{-1/3} g_{ab} \tag{21.151}$$

に対して，g_{ab} および ψ そのものがいかに異なろうとも，同じ $\tilde{\pi}^{ab}$ をもつことは，York が指摘するように，さらなる助けである．

*68 等角的な 3–幾何学および "重み 5/3 の運動量密度" がひとたびとられると，残る初期値方程式 (21.116) は等角的な因子 ψ の決定に対して "スケール" 方程式，

$$8\nabla^2\psi - {}^{(3)}R\psi + M\psi^{-7} + Q\psi^{-3} - \frac{3}{8}\tau^2\psi^5 = 0 \tag{21.152}$$

となる．ここに ∇^2 は Laplacian

$$\nabla^2\psi \equiv g^{-1/2}(\partial/\partial x^a)g^{1/2}g^{ab}(\partial\psi/\partial x^b) \tag{21.153}$$

を意味する．それは，${}^{(3)}R$，M，および Q のように，基底空間に関係する．

$$\nabla^2 - \frac{1}{8}{}^{(3)}R$$

は等角的に不変な波動演算子である．これに反して ∇^2 そのものはそうでないことは興味深い．York の解析における量 M は

$$M \equiv g^{-5/3} g_{ac} g_{bd} \tilde{\pi}^{ab} \tilde{\pi}^{cd} \tag{21.154a}$$

に対する略語である．そして

$$Q \equiv 16\pi\rho_{\text{基底}} (= 16\pi\psi^8\rho = 16\pi\psi^8\rho_{\text{最終的な 3–幾何学で}}) \tag{21.154b}$$

閉じた多様体にわたって連続であり，いたるところで実数で正である解 ψ を求める．楕円型の方程式 (21.152) のこのような解 ψ はいつ存在するか？ それはいつ一義的であるか？ つねに（$M > 0$ および $\tau \neq 0$ であるとき）は，O'Murchadha and York（1973）の結果である．また Choquet-Bruhat（1972）の以前の研究をみよ．この種の問題に入る物理学的な考察の若干は Wheeler（1964a, pp.370–381）によって議論されている．

21.12 Mach の原理と慣性の起源

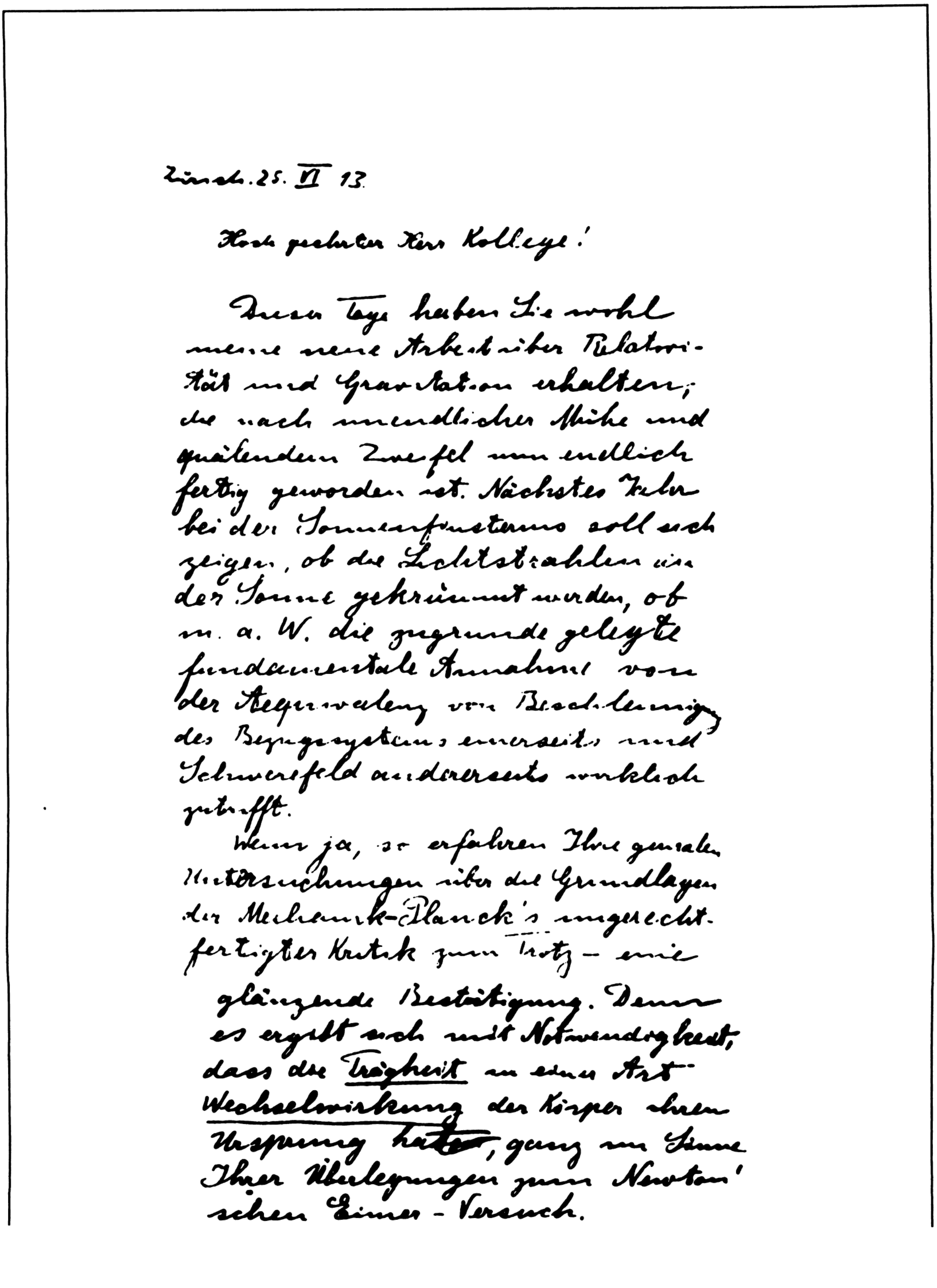
私の意見では，一般相対性理論はそれが世界を空間的に自ら閉じているとみなす場合に限りこの［慣性の］問題を解くことができる．

ALBERT EINSTEIN（1934), p.52.

1913 年 6 月 25 日，Einstein が彼の名前をもつ幾何力学の法則を発見する 2 年前，Ernst Mach に彼は Mach のアイデアから彼の努力に対して彼が導いたひらめきに対する感謝を表す手紙（図 21.5）を書いた．彼の偉大な本，**力学の科学**（The Science of Mechanics）

*68 等角的な因子に対する一義的な解

[(1912)，2 章 6 節] で，Mach は絶対空間に相対的な質量の加速度について語ることは意味をなさないだろうと推論した．神秘主義的なアイデアの物理学を明らかにしようと試みる者なら誰でも遠い星に相対的な加速度について語るのがよりよいだろう，と彼は推論した．しかし 10^9 光年の距離にある星がいかにしてここでのそして現在の慣性に寄与できる

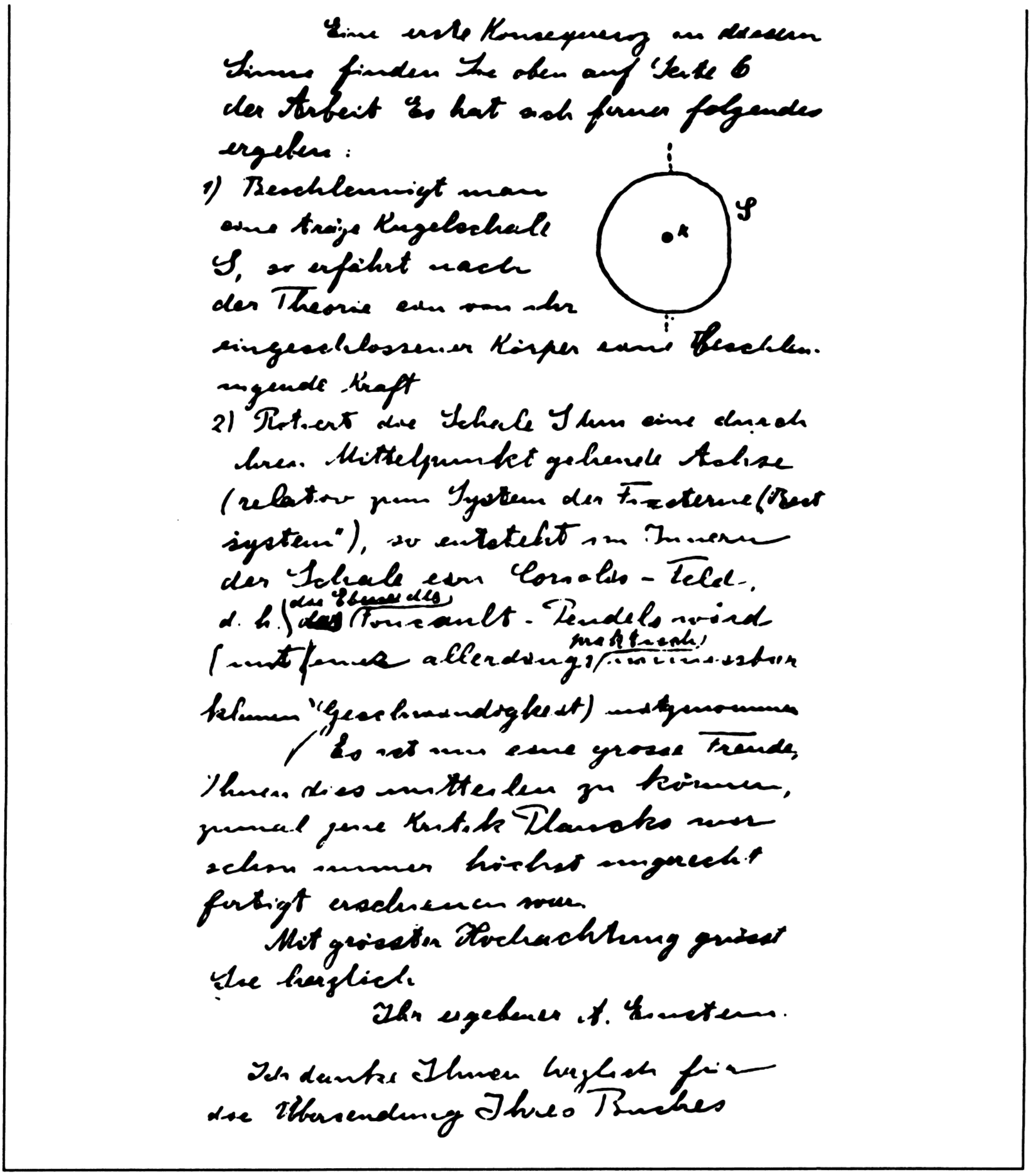


Zürich. 25. VI. 13.

Hoch geehrter Herr Kollege!

Dieser Tage haben Sie wohl meine neue Arbeit über Relativität und Gravitation erhalten, die nach unendlicher Mühe und quälendem Zweifel nun endlich fertig geworden ist. Nächstes Jahr bei der Sonnenfinsternis soll sich zeigen, ob die Lichtstrahlen an der Sonne gekrümmt werden, ob m. a. W. die zugrunde gelegte fundamentale Annahme von der Aequivalenz von Beschleunigung des Bezugsystems einerseits und Schwerefeld andererseits wirklich zutrifft.

Wenn ja, so erfahren Ihre genialen Untersuchungen über die Grundlagen der Mechanik – Planck's ungerechtfertigter Kritik zum Trotz – eine glänzende Bestätigung. Denn es ergibt sich mit Notwendigkeit, dass die <u>Trägheit</u> in einer Art <u>Wechselwirkung</u> der Körper ihren Ursprung hat, ganz im Sinne Ihrer Überlegungen zum Newton'schen Eimer-Versuch.



Eine erste Konsequenz in diesem Sinne finden Sie oben auf Seite 6 der Arbeit. Es hat sich ferner folgendes ergeben:

1) Beschleunigt man eine träge Kugelschale S, so erfährt nach der Theorie ein von ihr eingeschlossener Körper eine beschleunigende Kraft.

2) Rotiert die Schale S um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse (relativ zum System der Fixsterne („Restsystem")), so entsteht im Innern der Schale ein Coriolis-Feld, d. h. die Ebene des Foucault-Pendels wird (mit einer allerdings praktisch unmessbar kleinen Geschwindigkeit) mitgenommen.

Es ist mir eine grosse Freude, Ihnen dies mitteilen zu können, zumal jene Kritik Plancks mir schon immer höchst ungerechtfertigt erschienen war.

Mit grösster Hochachtung grüsst Sie herzlich

Ihr ergebener A. Einstein.

Ich danke Ihnen herzlich für die Übersendung Ihres Buches

図 21.5 Einstein は標準的な一般相対論の最終的な 1915 年 11 月の定式化に達するべく激しく研究していた中で，1913 年 6 月 25 日 Ernst Mach 宛に書かれた，Einstein の Mach についての評価．来るべき食についての確認に関して："もしそうならば，力学の基礎についての貴方の幸せな探求は，Planck の正当化されない批判にもかかわらず，輝かしい確証を受けるだろう．なぜなら，まったく Newton のバケツの実験についてのあなたの考察の意味において，必然的に慣性は物体間の一種の相互作用に基づくという結果になるからである．最初の結果は私の論文の 6 ページにある．以下の付加的な点が浮かび上がる．(1) もし物質の重い殻 S を加速するならば，その殻によって取り囲まれている質量は加速的な力を経験する．(2) もし殻を恒星に相対的に恒星の中心を通る軸周りに回転するならば，殻の内部で Coriolis の力が生ずる．すなわち，Foucault 振り子の平面は引きずり回される (実際には測定できないほど小さい角速度で)"．Mach の死後，Einstein (1916a) は Mach および彼の仕事への賛辞を書いている．Albert Einstein, Heln Dukas および Otto Nathan, 遺言執行者の遺産の親切な許可で複写される．

か？ 長い物語を短くするために，Einstein の理論は（1）重力をそこでの物質がここでの
*69 慣性に影響を及ぼす機構と同定する．(2) この結合は空間的な超曲面上で起こると述べる［より厳密な吟味なしに，因果律の原理の破れであると誤って考えるかもしれないことについて，電気力学での同様の見かけのパラドックスの議論と解明に対しては Fermi（1932）をみよ．また Einstein（1934），をみよ．“さらに，どのような座標変換であれそれについて不変な重力の法則は因果関係の原理と矛盾していることを一般的な考察に基づいて示すことができると私は信じた．これらは私に 2 年の過度に激しい仕事を要した思索の誤りであって，1915 年の終わりに初めて最終的にそのことを認めた”］．(3) 幾何力学の初期値方程式でこの結合を記述する数学的な道具を提供する．(4) もし初期値方程式がよく定められた［そして，われわれが今日知っているように，一義的な］4–幾何学を与えるべきであるとするならば，初期値方程式についての境界条件として，空間について幾何学が閉じることを要求する［1 つの推測，Wheeler（1959,1964c）および Hönl（1962）をみよ］．そして，(5) この生ずる時空内の任意点の近くの局所 Lorentz 系の集合をその点での慣性について話すことによって定量的に意味するものと同定する．これが，そこでの質量–エネルギーの密度および流れによってここで定まる慣性を得る方法である．

*70 Mach の原理についての文献には，反 Machnian とよべる多くの論文を含めて—Lenin による論文（英語の翻訳，1927）さえも—，多くの論文がある．そしてそれらの多くは興味深い点をつくる［とくに “慣性と宇宙” について Weyl（1924a）による楽しい討論，および Sciama の論文（1957）および本（1961）をみよ］．しかし，それらの多くはわれわれが今日有する初期値問題の理解のような何かをもつ以前に書かれた．したがって本自身が要求するであろう文献を要約したり解析したりする試みはなされないだろう．さらに，Mach の原理はここで紹介されているように，Einstein がかつて文献で評価したよりも鋭く定式化されている［宇宙は閉じていなければならないと論じる彼の考察を除いて，Einstein の本（1950），pp.107, 108 をみよ］．そして Mach は確かにその文献を否認したであろう．なぜなら，彼はけっして一般（あるいは特殊さえも）相対論を受け入れようとしなかったからである．にもかかわらず，Mach の原理—そこでの物質はここでの慣性を支配すること—および Riemann のアイデア—空間の幾何学は物理学に反応しそして物理学に参加すること—は 2 つの偉大な思想の流れであった．Einstein は彼の強力な等価原理によって，現在の重力と運動の幾何学的な記述へそれらを結合した．

*71 “質量–エネルギーの分布と流れをいたるところで指定せよ．それによっていたるところで，そしてすべての時間ですべての試験粒子の慣性的な性質を定めよ”．詳しく説明すれば，この処方は（1）“いたるところで” について表している方法：空間的な超曲面 Σ を要求する—Einstein と一致して—．(2) それは閉じた 3–幾何学である．そして便宜のために，必要性からではなくて，(3) τ は Σ 上で位置に無関係である，と主張しよう．(4) この 3–幾何学を等角的な計量を与える程度まで指定せよ．少なくともこれくらい 3–幾何学

---

*69　外観にかかわらず，因果律の破れはない
*70　膨大な文献
*71　Mach の原理，最新のものにされそして詳しく説明される

を指定しなければ，“どこに”質量–エネルギーが位置されるべきかを述べる明白な方法はないだろう．(5) 密度 $\rho_{基底}$ をこの等角的な 3–幾何学での位置の関数として与えよ．(6) 重力以外の場の質量–エネルギーのみを与えることは空間を通して質量–エネルギーの分布を指定する不適当な方法であることを認めよ．形式的には，確かに，重力場は Einstein の場の方程式の右辺に位置する源の項に何の寄与もしないしそしてできない．しかし，重力波の解析（18 章および 35 章）は，観測のスケールに比べて小さいスケールの幾何学についての摂動は有効な質量–エネルギーの内容を保持するとみなされねばならないことを示している．さらに，ジオン（geon）[Wheeler（1955），Brill and Hartle（1964），重力波のエネルギーについてより多くのことに対しては 35.14 節をみよ] では，電磁波（あるいは重力波，あるいはニュートリノ，あるいはこれら 3 つの任意の組合せ）からなる物体，それは波の振動の特徴的な周期に比べて長い時間自らを保持する，をもつ．たとえその内部のどこかに指を置いて“ここに質量がある”と言えなくとも，それは遠いところからは任意の別な質量のようにみえる．したがってそれは，任意の別な質量のように，“慣性についてその影響”をもたなければならない．しかしこの質量を明記するには，同時的な超曲面 Σ 上で完全に重力波を特徴づけるに十分な情報を与えなければならない．このためには $^{(3)}$ < で有する空間点あたりの 2 つの“波の座標”をただ与えるだけでは十分でない．さらに (7) York の“重み 5/3 の運動量密度” $\tilde{\pi}^{ab}$ に現れる空間点あたり，2 つの“波の運動量”を与えなければならない．そして同時に，この操作のはずせない部分として，(8) 場のエネルギーの流れの密度を指定しなければならない．(9) 等角因子 ψ に対して解け．(10) そうすると一般相対論の初期値方程式を満たす完全な初期値データをもつ．(11) これらのデータが今や既知であるから，残る力学的な場の方程式の成分は過去および未来への 4–幾何学を定める．(12) このようにして，すべての試験粒子の慣性的な性質はいたるところですべての時間で定められ，Mach の原理に具体的な現実化を与える．

これらの式の背後の物理学を詳しく説明し，この物理学が作動しているのをみるには，なお多くのことがなされなければならない．若干の重要な進歩が初期値方程式の理解について現段階までにすでにこの方向になされている．とくに興味深いのは Einstein（1950）によって彼の本，**相対論の意味**（*The Meaning of Relativity*）の第 3 版で議論されている，Thirring [(1918) および (1921)] そして Thirring and Lense（1918）の結果である．

*72 地理学的な極の近くに少しばかりの固い地面を考え，そこに支柱が立てられ，それから振り子を吊り下げる．空は曇っているけれども，観測者は，Foucault 振り子が 360 度ゆっくりと回転するときその軌跡を注視する．それから空が晴れて，奇跡の中の奇跡，振り子ははるか彼方の星に相対的に固定された円弧上をつねに振動しているのが見出される．もし“そこの質量がここの慣性を支配する”ならば，Mach によって想像されるように，いかにしてこれはありうるか？

質問を広げる．等しい質量は等しくつくられるという民主主義の原理によって，地球の質
*73 量は Foucault 振り子の簿記に入らなければならない．その回転面はいわゆる“恒星（fixed

---
*72 Foucault 振り子
*73 慣性系の引きずられ

stars)" に相対的に，わずかな角速度 $\omega_{引きずられ}$ で引きずられなければならない．$\omega_{引きずられ}$ はどれだけであるか？　そしてもし振り子が角速度 $\omega_{殻}$ で急速にスピンしている質量 M および半径 $R_{殻}$ の球殻によって取り囲まれているとすれば $\omega_{引きずられ}$ はどれだけであるか？

Einstein の理論は慣性は時空の幾何学の表示であると述べる．それはまた幾何学は因子 $G/c^2 = 0.742\times10^{-28}\mathrm{cm/g}$ に比例する程度まで物質の存在によって影響を受けることを述べる．単純な次元的な考察は，引きずられの時間的な割合は形式

$$\omega_{引きずられ} = k\frac{G}{c^2}\frac{m_{殻,\,慣習}}{R_{殻}}\omega_{殻} = k\frac{m_{殻}}{R_{殻}}\omega_{殻} \tag{21.155}$$

の表現に比例すると述べる以外に余地を残さない．ここに k は詳細な計算によってのみ見出されるべき数値的な因子である．Lense and Thirring [(1918) および (1921)] は，平坦な背景時空多様体で出発して 18 章の弱い場の近似で計量に関する質量の動きの流れの効果を計算した．極座標で表すと，計量はゼロでない係数 $g_{\phi t}$ を得る．測地線の運動方程式に挿入すると，この非対角線の計量係数は歳差運動を引き起こす．この歳差運動（ここでは回転軸に平行な軸周りに定義され，局所的な鉛直線周りにでない）は，形式 (21.155) の表現によって与えられる．ここに歳差運動の因子 k は値

$$k = 4/3 \tag{21.156}$$

をもつ．

Maxwell の場の磁気的な成分と Einstein の場の歳差運動の成分との間には密接な類似がある．いずれの場においても静止している源はまた静止している試験粒子に作用するときには新しい種類の効果を生み出さない．磁場を生み出すように円電流を設計する．そして試験電荷は，この磁場に反応するために，また運動していなければならない．同様にここでも振り子の振動がなければ振り子の歳差運動はない．さらに，歳差運動の方向は回転している質量殻に相対的な，振り子の存在する場所に依存する．歳差運動の因子 k は以下の値をもつ．

$k = 4/3$　回転している質量殻の内部の任意の場所にある振り子に対して，

$k = 4/3$　北極あるいは南極にある振り子に対して，　(21.157)

$k = -2/3$　回転している質量殻のごく外部の赤道上にある振り子に対して

引きずられ，$\omega_{引きずられ}$ のこの位置依存性は，磁気との類似をさらにいっそう明白にする．回転している荷電球の場は球の中心で北を指し，両極で北を指すが，赤道で南を指す．

Foucalt 振り子が仮想的に地球の中心に位置しようとあるいは実際に北極に位置しようと，予期される引きずられの大きさの程度

$$\begin{aligned}\omega_{引きずられ} &\sim \frac{m_{地球}}{R_{地球}}\omega_{地球} \sim \frac{0.44\,\mathrm{cm}}{6\times10^8\,\mathrm{cm}}\frac{1\,\mathrm{rad}}{13{,}700\,\mathrm{sec}} \\ &\sim 5\times10^{-14}\,\mathrm{rad/sec}\end{aligned} \tag{21.158}$$

は，これまでつくられたどのような装置によって，実際に測定されるだけでは，発見を許すには小さすぎる．しかし現在構成されているジャイロスコープによっておそらく測定可

能であろう（40.7 節）．対照的に，急速にスピンしている中性子星の近くではあるいは相当な角運動量を与えられているブラックホールの近くでは，計算された引きずられ効果は発見可能であるだけでなく，それは正に重要である（回転しているブラックホールの物理学については 33 章をみよ）．

遠方の星は，空間の曲率が Thirring and Lense の計算にかなりの補正を導入し始めるほど遠く離れていない（$r \sim$ 宇宙の半径）限り，Foucault 振り子の振動の自然な平面に，近傍の回転している物質殻が影響するように影響しなければならない．言い換えれば，すべて
*74
の質量は対等の立場で取り扱われるべきでない理由は明白でない．したがって式 (21.158) はより適切に，また少し象徴的に表すならば，

$$\omega_{\text{Foucault 振り子の振動面}} \sim \frac{m_{\text{殻}}}{R_{\text{殻}}}\omega_{\text{殻}} + \sum_{\text{遠く離れた “星”}} \frac{m_{\text{“星”}}}{r_{\text{“星”}}}\omega_{\text{“星”}} \tag{21.159}$$

となる．さらに，近傍の物質殻が存在しないとき，あるいはそれが無視できる効果をもつときには，振り子の振動面は，もし経験が任意の規準であるならば，遠く離れた “星群” によって定義された系について回転できない．この事象では ω_{Foucault} は $\omega_{\text{星}}$ あるいは “慣性に対する和” に同等でなければならない．

$$\sum_{\text{遠く離れた “星”}} \frac{m_{\text{“星”}}}{r_{\text{“星”}}} \sim \frac{m_{\text{宇宙}}}{r_{\text{宇宙}}} \tag{21.160}$$

は 1 の程度でなければならない．宇宙の質量内容と最大膨張の位相での宇宙半径の間の近似的な同等のまさにこのような関係は，Friedman 模型および閉じた宇宙の他の単純な模型（27 章および 30 章）の特有の特徴である．この点について，Mach の原理についての Einstein の理論は満足すべき程度の自己無矛盾を示している．

最大膨張の段階以外の宇宙の力学の位相では，$r_{\text{宇宙}}$ は $m_{\text{宇宙}}$ に比べて任意に小さくなりうる．そうすると比 (21.160) は 1 から 10 のべきだけそれうる．この事情にもかかわらず，“慣性に対する和” の**有効な**値は，遅れなどに対する収縮あるいは膨張の力学に対して，すべての補正がなされた後には依然 1 であると理解する以外に選択の自由をもたない．そうしてのみ ω_{Focault} は $\omega_{\text{遠く離れた星}}$ との避けられない同一性を保持できる．幸いに “慣性に対する和” の教理を，慣性の適当な説明をもつべくこれらの詭弁の極限まで追跡する必要はない．そこでの質量はここでの慣性を定めるという Mach のアイデアはすでに詳しく説明されているように，Einstein の幾何力学の法則で完全な数学的説明をもっている．相対論的宇宙論の背景で慣性系の引きずられの最初の強い場の解析に対しては，Brill and Cohen (1966) および Cohen and Brill (1967) をみよ．また回転しているブラックホールによる引きずられに対しては 33.4 節をみよ．

Mach の原理が意味するものおよびそれがいかに用いられているかについてさらに別な
*75
明瞭化が要求される．試験粒子の慣性的な性質はその粒子が理想的な Minkowski 空間内で運動しているときに完全によく定められる．反 Mach 的な批評家は，“この慣性の原因

*74 “慣性に対する和”

*75 閉じた 3–幾何学の極限としての Minkowski 幾何学

となっている質量” を “どうぞ指摘してください” と述べる．答えとして，Einstein の理論は幾何力学の法則を含むだけでなく，また Einstein の観点として，宇宙は閉じているという境界条件を含んでいることを思い出せ．こうして平坦である時空の部分は無限としてでなく，閉じた宇宙の部分としてみられるべきである（2 次元の類似物に対しては，ゴム風船を水で満たしそれをガラスのテーブルの上面に置き下からそれをみる）．曲がっている宇宙の部分はその曲率をその質量–エネルギーの実際の内容のために得る，あるいは—もし重力波によってのみ生かされるならば—その質量–エネルギーの有効な内容のために得る．この質量–エネルギーが，実在であれあるいは有効であれ，一見して宇宙内にまったく単独でみえた試験粒子の慣性の性質の原因となっているとみられるべきである．

注意を，Minkowski 平坦さの領域，および宇宙のすべての他の大きさが 10 倍拡大された（“10 倍大きい風船，10 倍大きい面”）模型宇宙に向けても結果の定性的な特徴はまったく変わらない．模型宇宙の曲がった部分の曲率および密度は 100 の因子だけ下がり，体積は 1000 の因子だけ上がり，質量は 10 の因子だけ上がる．しかし質量の半径に対する比，あるいは “慣性に対する和”（完全な初期値計算に対する無能な者の代用品）は不変である．

Einstein は彼の理論に対する由来を Mach の原理に負うていることを認めた（図 21.5）．したがって Mach の原理はお返しに今日その解明を Einstein の理論に負うているはずであることはもっぱらの道理である．

［練習問題］

21.21　なぜ Weyl の等角的な曲率テンソルはゼロになるか

Riemann 曲率テンソルは 3 次元空間でどれだけこの独立な成分をもつか？　Ricci 曲率テンソルはどれだけこの独立な成分をもつか？　2 つのテンソルは公式

$$R^d{}_{abc} = \delta^d_b R_{ac} - \delta^d_c R_{ab} + g_{ac} R^d{}_b - g_{ab} R^d{}_c + \frac{1}{2} R(\delta^d_c g_{ab} - \delta^d_b g_{ac})$$

によって関係していることを，Riemann テンソルのさらなる詳細を（より高い次元におけるように）指定するためにどのような Weyl の等角的な曲率テンソルをも必要とせずに示せ．Weyl のテンソルは，練習問題 13.13 におけるように式 (13.50) の n 次元修正から，$n = 2$ に対してゼロになることを示せ．

21.22　York の曲率

［York（1971）.］(a) テンソル［Eisenhart（1926）］

$$R_{abc} = R_{ab|c} - R_{ac|b} + \frac{1}{4}(g_{ac} R_{|b} - g_{ab} R_{|c})$$

を定義せよ．

(b) 3–幾何学は $R_{abc} = 0$ なるときに限り等角的に平坦であることを示せ．

(c) 以下の恒等式が成り立ち，R_{abc} の独立な成分の数を 5 に帰着させることを示せ．

$$R^a{}_{ac} = g^{ab} R_{bac} = 0,$$

$$R_{abc} + R_{acb} = 0,$$

$$R_{abc} + R_{cab} + R_{bca} = 0$$

(d) York の曲率

$$Y^{ab} = g^{1/3}[aef]\left(R_f{}^b - \frac{1}{4}\delta_f{}^b R\right)_{|e} = -\frac{1}{2}g^{1/3}[aef]\,g^{bm}R_{mef}$$

は等角的に不変であり，そして式 (21.148) にリストされている性質をもつことを示せ．

21.23 POYNTING 束ベクトルを "空から (OUT OF THE AIR)" 引き寄せる

結合された Einstein の場と Maxwell の場に対する Hamilton–Jacobi の汎関数 $S(g_{ij}, A_m)$（作用積分の極値）は，表向き 6 個の計量係数 $g_{ij}(x,y,z)$ および 3 個のポテンシャル $A_m(x,y,z)$ に依存しているが，実際には空間的な超曲面の 3–幾何学とこの超曲面上の磁場の強さの分布のみに依存するという条件から，幾何力学的な場の運動量 $\pi^{ij} = \delta S/\delta g_{ij}$ は形式

$$\pi^{ij}{}_{|j} = c[imn]\mathcal{E}_m\mathcal{B}_n$$

の条件を満たすことを示せ．そしてこの式における係数 c を求めよ［Wheeler (1968b)］．
ヒント：変換

$$x^i \longrightarrow x^i - \xi^i,\quad g_{ij} \longrightarrow g_{ij} + \xi_{i|j} + \xi_{j|i}$$

はまったく 3–幾何学そのものを変えない．したがって対応する S での引き起こされる変化，

$$\delta S = \int\left[\frac{\delta S}{\delta g_{ij}}\delta g_{ij} + \frac{\delta S}{\delta A_m}\delta A_m\right]d^3x$$

は $\xi^i(x,y,z)$ の任意の選択（それは自動車のフェンダー上に罫線を引かれた透明なゴムのシーツを滑らせた等価物を評価する）に対して恒等的にゼロにならなければならない．

21.24 Hilbert の作用原理と関連する極値的な作用は等角的な 3–幾何学と外在的な時間に依存する［K. Kuchař (1972) および J. York (1972)］

2 つの境界づける空間的な超曲面のおのおのでの Hilbert の作用原理

$$\delta\int {}^{(4)}R(-{}^{(4)}g)^{1/2}d^4x = 0$$

によって要求されるデータは，(1) 超曲面の等角的な 3–幾何学 ${}^{(3)}<$ および (2)

$$\tau = \frac{2}{3}g^{-1/2}\mathrm{Tr}\boldsymbol{n} = \frac{4}{3}\mathrm{Tr}\boldsymbol{K}$$

によって定義される外在的な時間変数（それは空間点あたり 1 つの数によって評価され，そして 3–幾何学の計量での等角的な因子に無関係であり，絵文字 $\curlyvee$ によって便利に表される）からなることを示せ．これがなされると，なぜこの幾何力学の定式化で Hamilton–Jacobi の関数（$\hbar\times$ 半古典的なあるいは JWKB 近似での波動関数の位相）は，形式

$$S = S\left({}^{(3)}<, \curlyvee\right)$$

で適切に表されるかを簡潔に説明せよ．

21.13 接合条件

初期値形式でこのような基本的な役割を演じた，超曲面の内在的なおよび外在的な曲率は，また“接合条件”の解析で強力な道具である．

*76 電気力学の接合条件を思い出せ．任意の面（たとえば，コンデンサーの極板）を横切って，電場の接線部分 $\boldsymbol{E}_{\parallel}$ および磁場の法線部分 $\boldsymbol{B}_{\perp}$ は，連続でなければならない．こうして，

$$[\boldsymbol{E}_{\parallel}] \equiv (\boldsymbol{E}_{\parallel}\text{での不連続})$$
$$\equiv (\boldsymbol{E}_{\parallel}\text{面の“}+\text{”側で}) - (\boldsymbol{E}_{\parallel}\text{面の“}-\text{”側で})$$
$$\equiv \boldsymbol{E}^{+}_{\parallel} - \boldsymbol{E}^{-}_{\parallel} = 0 \tag{21.161a}$$
$$[\boldsymbol{B}_{\perp}] \equiv \boldsymbol{B}^{+}_{\perp} - \boldsymbol{B}^{-}_{\perp} = 0 \tag{21.161b}$$

他方，部分 $\boldsymbol{E}_{\perp}$ および $\boldsymbol{B}_{\parallel}$ における“飛躍”は電荷密度（単位面積あたりの電荷）σ，電流密度（単位面積あたりの電流）$\boldsymbol{j}$，および面に対する単位法線 $\boldsymbol{n}$ に公式

$$[\boldsymbol{E}_{\perp}] = \boldsymbol{E}^{+}_{\perp} - \boldsymbol{E}^{-}_{\perp} = 4\pi\sigma\boldsymbol{n} \tag{21.161c}$$
$$[\boldsymbol{B}_{\parallel}] = \boldsymbol{B}^{+}_{\parallel} - \boldsymbol{B}^{-}_{\parallel} = 4\pi\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{n} \tag{21.161d}$$

によって関連づけられなければならない．またこれらの接合条件は面上に中心をもつ“薬箱”にわたって Maxwell の方程式を積分することによって導かれることを思い出せ．

同様の方法で導かれうる同様の接合条件は，重力場（時空の曲率）およびそれを生成するストレス–エネルギーに当てはまる*．注意を時空を横切る特定の 3 次元の薄片—図 21.6 上の 3–曲面 Σ に集中せよ．曲面は空間的［単位法線 $\boldsymbol{n}$ 時間的：$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}) = -1$］あるいは時間的［$\boldsymbol{n}$ 空間的：$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = +1)$］とする．ヌルの場合は後で議論されるだろう．接続条件を導くについての助けとして，Σ の近傍に Gauss 規準座標を導入する［式 (21.82) に先立つ節をみよ］．Σ および近傍の 3–曲面 $n =$ 一定の内在的なおよび外在的な曲率を用い

*77 て，Einstein テンソルおよび Einstein の場の方程式は成分

$$G^{n}{}_{n} = -\frac{1}{2}{}^{(3)}R + \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}\{(\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})^2 - \mathrm{Tr}(\boldsymbol{K}^2)\} = 8\pi T^{n}{}_{n} \tag{21.162a}$$
$$G^{n}{}_{i} = -(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}\{K_{i}{}^{m}{}_{|m} - (\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})_{|i}\} = 8\pi T^{n}{}_{i} \tag{21.162b}$$
$$G^{i}{}_{j} = {}^{(3)}G^{i}{}_{j} + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}\{(K^{i}{}_{j} - \delta^{i}{}_{j}\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})_{,n} - (\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})K^{i}{}_{j} + \frac{1}{2}\delta^{i}{}_{j}(\mathrm{Tr}\boldsymbol{K})^2 + \frac{1}{2}\delta^{i}{}_{j}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{K}^2)\} = 8\pi T^{i}{}_{j} \tag{21.162c}$$

をもつ［式 (21.77)，(21.81)，(21.76)，および (21.82) をみよ］．

---

* 重力的な接合条件の最初の定式化は Lanczos（1922, 1924）から生じた．内在的なおよび外在的な曲率を用いた，ここで与えられている定式化は，Darmois（1927），Misner and Sharp（1964），および Israel（1966）によって展開された．広範囲にわたる文献へのさらなる参照に対しては，Israel をみよ．

*76 電気力学に対する接合条件

*77 “3 + 1” 形式での Einstein の方程式

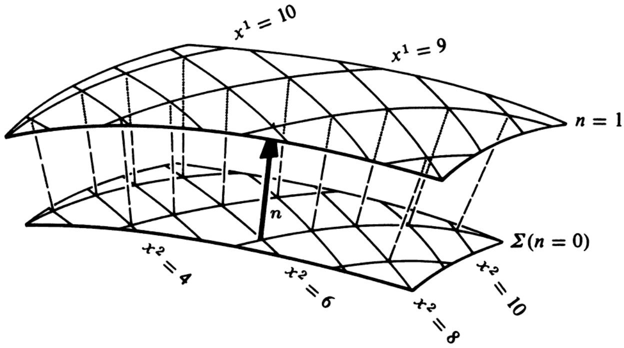


図 21.6 3–曲面 Σ の近傍における Gauss 基準座標．Gauss 基準座標における計量は形式

$$ds^2 = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})^{-1}dn^2 + g_{ij}dx^i\,dx^j$$

をもつ．ここに $\boldsymbol{n} = \partial/\partial n$，もし曲面が空間的であるならば，$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}) = -1$．そしてもし曲面が時間的であるならば $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}) = 1$（練習問題 27.2 をみよ）．曲面 $n =$ 一定の外在曲率は $K_{ij} = -\frac{1}{2}\partial g_{ij}/\partial n$ である．そして "3+1" 形式で書かれた Einstein の場の方程式は (21.62) である．

ストレス–エネルギーテンソル $T^\alpha{}_\beta$ が Σ で "デルタ関数的な特異性" を含んでいると想定せよ．すなわち，Σ は単位面積あたり有限の 4–運動量（電気力学における面電荷および
*78 面電流の類似物）をもつ 2 次元の曲面の "世界管" であると想定せよ．それから **Σ 上の面ストレス–エネルギーテンソルを**，Σ を通して垂直に測定された，固有距離 (n) についての $T^\alpha{}_\beta$ の積分であると定義せよ．

$$S^\alpha{}_\beta = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} T^\alpha{}_\beta\,dn\right] \tag{21.163}$$

*79 時空幾何学上のこの曲面層の効果を見出すために，Einstein の場の方程式 (21.162) の "薬箱積分" を遂行せよ．

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} G^\alpha{}_\beta\,dn\right] = 8\pi S^\alpha{}_\beta \tag{21.164}$$

$G^\alpha{}_\beta$ の積分を吟味する．もし 3–計量 g_{ij} が Σ でデルタ関数あるいは不連続を含むべきであるとするならば，Σ は曲面層が存在する場合でもどのようなよく定義された 3–幾何学ももたないだろう．それは物理学的に許されない状況である．g_{ij} に，デルタ関数 $\delta(n)$ が存在しないことは ${}^{(3)}R$ にデルタ関数が存在しないことを意味する．g_{ij} に不連続が存在しないことは $K_{ij} = -\frac{1}{2}g_{ij,n}$ にデルタ関数が存在しないことを意味する．こうして，式 (21.162) は積分されると，

$$\int G^n{}_n\,dn = 0 = 8\pi S^n{}_n \tag{21.165a}$$

$$\int G^n{}_i\,dn = 0 = 8\pi S^n{}_i \tag{21.165b}$$

$$\int G^i{}_j\cdot dn = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})(\gamma^i{}_j - \delta^i{}_j\mathrm{Tr}\boldsymbol{\gamma}) = 8\pi S^i{}_j \tag{21.165c}$$

*78 面ストレス–エネルギーテンソル
*79 接合条件の導出

を述べる．ここに $\gamma^i{}_j$ は外在曲率の成分における“飛躍”である

$$\gamma \equiv [\boldsymbol{K}] \equiv (\boldsymbol{K}\quad \Sigma\text{の“}n = +\varepsilon\text{ 側”で}) - (\boldsymbol{K}\quad \Sigma\text{の“}n = -\varepsilon\text{ 側”で}) \quad (21.166)$$
$$\equiv \boldsymbol{K}^+ - \boldsymbol{K}^-$$

*80　デルタ関数的な表面層が存在しない場合には，前述の接合条件は，単純に，$\boldsymbol{\gamma} \equiv [\boldsymbol{K} = 0]$ を述べる．言葉で表すと，もし，いかに Σ がその“上方の”面の上で時空に埋め込まれているか，そしていかに Σ がその“下方の”面の下で時空に埋め込まれているかを吟味するならば，同一の埋め込みすなわち，同一の外在曲率 $\boldsymbol{K}$ を見出さねばならない．もちろん，Σ の内在曲率は上から見ようが下から見ようがまた同じでなければならない．より簡単に

$$(\text{表面層が存在しない}) \rightleftarrows (g_{ij}\text{および } K_{ij}\text{の“連続性”}) \quad (21.167)$$

*81　もし表面層が存在するならば，Σ は物質の 2 次元層の世界管でなければならない．そして Σ に対する法線は空間的 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = +1$ でなければならない．接合条件 (21.165a), (21.165b) はそうすると単純な物理学的意味

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{n}, \cdots) = 0 \leftrightarrows \begin{pmatrix} \text{運動量の流れは完全に}\Sigma\text{内にある．すなわち，} \\ \text{表面層に関連した運動量は}\Sigma\text{から流れ出ない．} \\ \text{すなわち,}\Sigma\text{は表面層の世界管である} \end{pmatrix} \quad (21.168\text{a})$$

をもち，それは何も新しいことを述べていない．接合条件 (21.165c) は曲面のストレス–エネルギーは外在曲率における不連続性（Σ の“上”と“下”で時空への異なる埋め込み）を生成することを述べており，それは

$$\gamma^i{}_j - \delta^i{}_j \mathrm{Tr}\boldsymbol{\gamma} = 8\pi S^i{}_j \quad (21.168\text{b})$$

によって与えられる．もちろん，Σ の内在的な幾何学は上から見ても下から見ても同じでなければならない．

$$g_{ij}, \quad \Sigma\text{を横切って連続である} \quad (21.169)$$

表面層を解析するときには，接合条件 (21.168a) から (21.169) までのみならず，曲面 Σ のおのおのの側でそれぞれ適用される 4 次元の Einstein の場の方程式，そしてまた曲面のストレス–エネルギーに対する運動方程式をも用いる．運動方程式は場の方程式 $G^n{}_i = 8\pi T^n{}_i$ [式 (21.162b)] における飛躍を吟味することによって導かれる．こうして $[G^n{}_i] = 8\pi[T^n{}_i]$ は

$$(\gamma_i{}^m - \delta_i{}^m \mathrm{Tr}\boldsymbol{\gamma})_{|m} = -8\pi[T^n{}_i]$$

を述べている．接合条件 (21.168b) によって $S_i{}^m$ を用いて再表現すると，それは

---

*80　表面層が存在しない場合での接合条件

*81　表面層に対する接合条件

*82

$$S^{im}{}_{|m} + [T^{in}] = 0 \tag{21.170}$$

を述べている［この運動方程式への直感に対しては，練習問題 21.25 および 21.26 をみよ．“曲面層の定式化” の応用に対しては練習問題 21.27，また Israel (1966)，Kuchař (1968)，Papapetrou and Hamoui (1968) をみよ］．

*83

注意をヌル面 Σ を横切る接合条件に向けると，空間的および時間的な場合における条件とかなり異なる結果を見出す．場の方程式の “薬箱” 積分は真空においてさえも外在曲率は不連続になるであろうことを明らかにする．ヌル面を横切って K_{ij} における不連続性は，それを生み出すどのようなストレス–エネルギーもなしに，**重力波の衝撃前面**（流体力学における衝撃前面の類似物）の幾何学的な表示である．定量的な詳細に対してはたとえば，Pirani (1957)，Papapetrou and Treder (1959, 1962)，Treder (1962)，およびとくに Choquet–Burhat (1986b) をみよ．

曲率テンソルにおける不連続性が光速で伝播できるということはすべての重力効果は，すべての電磁効果のように，因果律に従うという合図である．空間的な初期値超面上の初期値データは一義的に生ずる時空の幾何学を定める［Cartan, Stellmacher, Lichnerowicz, および Burhat（また Fourès–Burhat and Choquet–Bruhat の名のもとで）の仕事および Burhat の論文 (1962) に引用され要約されている他の仕事をみよ．］が，しかしそれは因果律と両立する仕方で定められている．こうして初期値 3–幾何学の限定された領域を通してのこれらのデータにおける変化は，また限定され，元の領域よりもごくわずかだけ大きい領域内のみのわずか後の超面上で感じられる．

古典力学から量子力学に向かうときには，注意を空間的な初期値超曲面に集中させる新しい理由がある．このような超面上の異なる点での観測可能な量は互いに交換する．すなわち，原理的に同時に観測可能である．

すべての 4 次元多様体が大域的な特異性のない空間的な超曲面を容認するとは限らない．このような超曲面を容認する多様体は物理学と関係しないものよりも関係するより多くのものをもっている，それは信じることができる．

空間的な超曲面を容認する多様体においてさえ，注意は古典論の背景において，時には空間的でなくヌル測地線を収容できるという意味で “特徴的である” 超曲面上の初期値データに与えられている［たとえば，Sachs (1964) およびそこに引用されている文献をみよ］．このような状況では未来を予言できるが過去を予言できない，あるいは過去を予言できるが未来を予言できないというのが特徴的である．

明るさの子どもたちおよび暗さの子どもたちは物理学の他の分野からと同じく，本章から現れる物理学の光景である．明るさの子どもたちは現在から未来を予言する微分方程式である．暗さの子どもたちはこれらの初期条件を固定する要素である．

---

*82 表面層に対する運動方程式

*83 重力波の衝撃前面

[練習問題]

21.25　表面層に対する運動方程式

(a) $\boldsymbol{u}$ を表面層における物質の "平均 4–速度" とする—4–速度 $\boldsymbol{u}$ で動いている観測者がゼロエネルギー束をみるように定義されている．σ をこのような "共運動（comving）観測者" によって測定されたときの単位の固有の表面積あたりの全質量–エネルギーとする．表面ストレス–エネルギーテンソルは形式

$$\boldsymbol{S} = \sigma \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} + \boldsymbol{t}, \quad \text{ここに} \quad (\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u}) = 0 \tag{21.171}$$

で表されうることを示せ．ここに $\boldsymbol{t}$ は対称なストレス テンソルである．

(b) 運動方程式 (21.170) の $\boldsymbol{u}$ に沿う成分は

$$d\sigma/d\tau = -\sigma u^j{}_{|j} + u_j t^{jk}{}_{|k} + u_j[T^{jn}] \tag{21.172}$$

ここに $d/d\tau = \boldsymbol{u}$ であることを示せ．各項に対する物理学的な解釈を与えよ．

(c) a_j を共運動観測者の 4–加速度の表面層 Σ 内に存在する部分とする．運動方程式 (21.170) を $\boldsymbol{u}$ に垂直に射影することによって，

$$\sigma a_j = -P_{ja}\{t^{ab}{}_{|b} + [T^{an}]\} \tag{21.173}$$

ここに P_{ja} は射影演算子

$$P_{ja} = g_{ja} + u_j u_a \tag{21.174}$$

であることを示せ．式 (21.172) の各項の物理学的な解釈を与えよ．

21.26　ちりの薄い殻

真空（$[T^{jn}] = 0$, $\boldsymbol{t} = 0$）によって取り囲まれたちりの薄い殻に対して，以下の式を導け

$$d\sigma/d\tau = -\sigma u^b{}_{|b} \tag{21.175a}$$

$$a^+ + a^- = 0 \tag{21.175b}$$

$$a^+ - a^- = (4\pi\sigma)\boldsymbol{n} \tag{21.175c}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = 8\pi\sigma\left(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}\right) \tag{21.175d}$$

ここに a^+ および a^- は殻の外側および内側にしっかり固定されている加速度計によって測定された 4–加速度であり，そして $\boldsymbol{g}$ は殻の 3–計量である．これらの式の第 1 は "静止質量の保存" の法則である．

21.27　ちりの球殻

練習問題 21.25 の形式を崩壊しているちりの球殻に適用せよ [Israel（1967b)]．殻の内部および外部の計量に対して，平坦な時空で真空の Schwarzschild の表現（23 章）をとれ．

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \qquad (\text{内部で}), \tag{21.176a}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \qquad (\text{外部で}) \tag{21.176b}$$

殻の“半径”は，殻上で測定された固有時間の関数として，

$$R \equiv \frac{1}{2\pi} \times (\text{殻の固有の円周}) = R(\tau) \tag{21.176c}$$

とする．殻の質量密度は時間とともに

$$\sigma(\tau) = \mu/4\pi R^2(\tau), \qquad \mu = \text{一定} = \text{“全静止質量”} \tag{21.176d}$$

のように変化することを示せ．そして運動方程式

$$M = \mu\left\{1 + \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2\right\}^{1/2} - \frac{\mu}{2R} \tag{21.176e}$$

を導き，そして解け．

22章
熱力学，流体力学，電気力学，幾何光学，および運動論

[本章は完全にトラック–2である．これまでのトラック–2の教材は本章に対する準備として必要でない．しかし5章（ストレス–エネルギーテンソル）は有用であるだろう．
22.5節（曲がった時空における幾何光学）は34章（大域的な方法．地平線および特異点定理）に対する準備として必要である．本章の残りは後の章に対する準備として必要でない．しかしそれは重力理論（23–40章）のたいていの応用できわめて有用であるだろう．]

22.1 本章の目的

重力理論の宇宙物理学的な応用は41–44章を除いて，本書の残りの中心である．おのおのの応用—星，星団，宇宙論，崩壊，ブラックホール，重力波，太陽系の実験—は本章での教材に関係なく，基本的なレベルでそれ自身追求されうる．しかし応用の深い理解は熱力学，流体力学，電気力学，幾何光学，および運動論などすべてを，曲がった時空の状況でのすべてを，あらかじめ理解しておくことを要求する．したがって，たいていのトラック–2の読者はこの点でこれらの題目を調べることを望むだろう．

22.2 曲がった時空における熱力学*

具体性と単純さのために，固定された化学組成をもつ完全流体（"単純な完全流体"）—たとえば，崩壊している超質量星のガス状の内部の平衡熱力学を考える．流体要素の熱力学的な状態は，事象 $\mathcal{P}_0$ を通過するとき，n, ρ, p, T, s, μ のような，種々の熱力学的ポテンシャルによって特徴づけられうる．
*1 $\mathcal{P}_0$ でのおのおののポテンシャルの数値は流体要素とともに動く観測者の固有基準系（13.6節）で，すなわち，流体要素の"静止系で"測定される．ポテンシャルを測定するための静止系のこの使用にもかかわらず，ポテンシャルは系によらない関数（スカラー場）である．選ばれた事象 $\mathcal{P}_0$ で，与えられたポテンシャル（たとえば，n）は一義的な値 $n(\mathcal{P}_0)$ をもつ．したがって n は系によらない完全によい関

* この題目のより詳しい取り扱いに対しては，たとえば，Stueckelberg and Wanders (1953), Kluitenberg and de Groot (1954), Meixner and Reik (1959), およびそこに引用されている文献をみよ．また22.3節の初めに引用されている流体力学についての文献，および22.6節の初めに引用されてある運動論についての文献をみよ．

*1 熱力学的ポテンシャルは流体の静止系で定義される

数である.

n, ρ, p, T, s, μ の値は流体要素の静止系で以下の量を測定する.

*2 n : バリオンの数密度. すなわち, 静止系の単位 3 次元体積あたりのバリオンの数, 反バリオン (たとえ何であっても) はマイナスに勘定される.

ρ : 全質量–エネルギーの密度. すなわち, 静止系の単位の 3 次元体積に含まれている全質量–エネルギー (静止質量, 熱エネルギー圧縮エネルギー等を含む).

p : 静止系での等方性の圧力.

T : 静止系での温度.

s : 静止系でのバリオンあたりのエントロピー (単位体積あたりのエントロピーは ns である).

μ : 静止系でのバリオンの化学ポテンシャル [式 (22.8) をみよ].

*3 流体の化学組成 (水素分子の数密度, 水素原子の数密度, 自由な陽子および電子の数密度, 光子の数密度, ^{238}U 核の数密度, Λ ハイペロンの数密度…) は 2 つの熱力学的な変数, たとえば, バリオンの全数密度 n およびバリオンあたりのエントロピー s によって一義的に固定されると仮定されている. この意味で流体は “単純流体” である. 単純流体は化学的な存在量が “凍結されている” (反応率が関心のある時間スケールについて重要であるには小さすぎる場合, たとえば, 爆発的に燃えている間および e^-–e^+ 対生成に対して十分高い温度にある場合を除く超重量星内で) ときにはつねに生ずる. 単純流体はまた完全な化学平衡の反対の極限 (反応率が, 変化している密度およびエントロピーにかかわらず平衡を保持するに十分なだけ小さい. たとえば, 高い圧力がすべての反応速度を上げる中性子星の内部) においても生ずる. 対流のない星内での核燃焼, あるいは爆発的な核燃焼, あるいは高温度での対生成およびニュートリノエネルギー損失を吟味するときには, 流体を通常 “多重成分” として取り扱わなければならない. それから n および s によって固定されていない存在量をもつおのおのの化学的な種に対して, 数密度 n_J および化学ポテンシャル μ_J を導入する. さらなる詳細に対しては, たとえば, Zel'dovich and Novikov (1971) をみよ.

熱力学のもっとも基本的な法則, すなわち “第 1” および “第 2” 法則よりもさらに基本

*4 的であるのは**バリオン保存**である. 流体要素を考え, その動いている壁はバリオンの出入りがないように流体に結びつけられているとする. 流体要素が, 途中で変形しながら時空を通して動くとき, その体積 V は変化する. しかしその内部のバリオンの数は固定されたままでなければならない. したがって

$$\frac{d}{d\tau}(nV) = 0 \tag{22.1}$$

体積についての変化は近傍のわずかな流体が離れたり近づいたりする流れによって生み出される. 明確に

---

*2 熱力学的ポテンシャルの定義

*3 “単純流体” の定義

*4 バリオン保存の法則

$$dV/d\tau = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})V \tag{22.2}$$

ここに $\boldsymbol{u} = d/d\tau$ は流体の 4–速度である．したがって，バリオン保存式 (22.1) は

$$0 = \frac{dn}{d\tau} + \frac{n}{V}\frac{dV}{d\tau} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} n + n(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla} n + n(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot(n\boldsymbol{u})$$

すなわち，

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S} = 0 \tag{22.3}$$

$$\boldsymbol{S} = n\boldsymbol{u} = \text{バリオン数の束ベクトル} \tag{22.4}$$

として再表現されうる（5.4 節および練習問題 5.3 をみよ）．さらに，この抽象的な幾何学的バージョンの法則は平坦な時空におけるのとまさに同じように曲がった時空において成り立たなければならない（等価原理）．

電気力学における電荷の保存則，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} = 0$（練習問題 3.16）およびエネルギー–運動量保存の局所的な法則，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 0$（5.9 および 16.2 節）との類似に注意せよ．非常に深い意味で，これら 3 つの法則の形式は Gauss の定理によって定められる（5.9 節，およびコラム 5.3, 5.4）．

*5　**熱力学の第 2 法則**は，平坦な時空であるいは曲がった時空で，エントロピーは生成されうるが消滅されえないことを述べている．この法則をバリオンの固定された数 N を含む体積 V の流体要素に適用する．それが含むエントロピーは

$$S = Ns = nsV$$

である．エントロピーは流体要素の面を横切って出入りする（隣接した流体要素間の“熱の流れ”）．しかし単純さのためにエントロピーの出入りはないと仮定する．あるいはもしエントロピーの出入りがあるとするならば，手元の問題に対して何らかの意味をもつにはあまりにもゆっくり流れると仮定する．そうすると流体要素内のエントロピーは増大しうるだけである．

$$d(nsV)/d\tau \geq 0 \qquad \begin{pmatrix}\text{隣接する流体要素間のエント}\\ \text{ロピー交換が無視できるとき}\end{pmatrix}$$

すなわち［式 (22.1) と結びつける］

$$ds/d\tau \geq 0 \qquad \text{（エントロピーの交換がない）} \tag{22.5}$$

流体要素が熱力学的な平衡にとどまる限り，そのエントロピーは実際保存されるだろう［式
*6　(22.5) における“=”］．しかし平衡が一瞬破れるような衝撃波の場合には，エントロピーは増大するだろう（隣接する流体要素の“相対的な運動エネルギー”の熱への転換）．［特殊および一般相対論における熱の流れの議論に対しては，練習問題 22.7 をみよ．衝撃波の議論に対しては，Taub (1948)，de Hoffman and Teller (1950)，Israel (1960)，May

*5　熱力学の第 2 法則
*6　衝撃波と熱の流れ

and White (1967), Zel'dovich and Rayzer (1967), Lichnerwicz (1967, 1971), および Thorne (1973a) をみよ.]

*7 **熱力学の第 1 法則**は，流体要素の固有基準系においては，平坦な時空における第 1 法則に同じである（"等価原理"）．そして平坦な時空では第 1 法則はたんにエネルギー保存の法則である．

$$d\begin{pmatrix}\text{バリオンの固定された数}, A\text{を}\\ \text{含む体積要素内のエネルギー}\end{pmatrix} = -p\,d(\text{体積}) + T\,d(\text{エントロピー})$$

すなわち，

$$d(\rho A/n) = -p\,d(A/n) + T\,d(As)$$

すなわち，

$$d\rho = \frac{\rho+p}{n}dn + nT\,ds$$

質問：どのような種類の "d" がここに現れるか？ 単純な流体に対しては，2 つのポテンシャル，たとえば，n および s の値は，すべての他の量を一義的に固定する．したがって ρ における**任意の**変化は n および s における変化によって一義的に定められなければならない．変化が与えられた流体要素の世界線に沿って測定されるか，あるいは何か他の方向について測定されるかどうかは問題でない．こうして，第 1 法則における "d" は外微分として解釈されうる．

$$\boldsymbol{d}\rho = \frac{\rho+p}{n}\boldsymbol{d}n + nT\boldsymbol{d}s \tag{22.6}$$

そして流体内の与えられた方向に沿う（与えられた接線ベクトル $\boldsymbol{v}$ に沿う）変化は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\rho \equiv \langle \boldsymbol{d}\rho, \boldsymbol{v}\rangle &= \frac{\rho+p}{n}\langle \boldsymbol{d}n, \boldsymbol{v}\rangle + nT\langle \boldsymbol{d}s, \boldsymbol{v}\rangle \\ &= \frac{\rho+p}{n}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}n + nT\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}s\end{aligned}$$

と書ける．

式 (22.6) は 2 つの反対の意味での解釈に適する．媒体の質量–エネルギー密度を圧力についての情報から（n および s の関数として）および温度についての情報から（n および s の関数として）導き出す方法として，そして逆に，2 つの関数 $p(n,s)$ および $T(n,s)$ を 1 つの関数 $\rho(n,s)$ から導き出す方法として．第 2 の方法をまず考えるのが自然である，理性的な利益をつくる戦略を好まない者はいない．ρ を n および s の既知の（あるいは計算できる）関数とみなして，式 (22.6) から
*8

$$\frac{\rho+p}{n} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)_s$$

$$nT = \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_n$$

*7 熱力学の第 1 法則

*8 $\rho(n,s)$ から計算される圧力および温度

を，したがって圧力と温度，

$$p(n,s) = n\left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_s - \rho \tag{22.7a}$$

$$T(n,s) = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_n \tag{22.7b}$$

をそれぞれ導き出す（“2 つの状態方程式を 1 つの状態方程式から”）．解析は，すでにいたるところで同じ組成であると仮定されているが，流体，またいたるところでバリオンあたり同じエントロピー s を与えられ，断熱的な流れの状態にある（衝撃あるいは熱伝導がない）ときにはさらに単純になる．そうすると密度 $\rho = \rho(n,s)$ は 1 変数の関数に帰着し，その関数から系の流体力学および重力物理学に対して必要とされるすべてのもの (ρ, p, μ) を導き出す（次章）．“基本の熱力学的ポテンシャル” の他の選択は，他の状況のもとで適切である（コラム 22.1 をみよ）．

コラム 22.1　流体を記述する “基本の熱力学的ポテンシャル” の主要な選択肢

基本の熱力学的ポテンシャルおよび，これにもっとも適切に依存すると想像される量	$d\left(\frac{\rho}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right) - T\,ds = 0$ を用いて，あるいは用いずに，基本の量の微分によって得られる “2 次的な” 熱力学的な量	好都合で適切で，関連している条件
“密度”，単位体積あたりの全質量–エネルギー（静止＋熱＋⋯）の総量 $\rho = \rho(n,s)$	$p(n,s) = n\left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_s - \rho$ $T(n,s) = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_n$ $\mu(n,T) = \frac{p+\rho}{n} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_s$	s が流線に沿って一定にとどまる断熱的な流れの条件（衝撃あるいは熱伝導がない）
“物理学的な自由エネルギー” $a(n,T) = \frac{\rho}{n} - Ts$	$p(n,T) = n^2\left(\frac{\partial a}{\partial n}\right)_T$ $s(n,T) = -\left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_n$ $\rho(n,T) = -nT^2\left[\frac{\partial(a/T)}{\partial T}\right]_n$	バリオンあたりの指定された体積および温度の条件に対して，a（あるいは統計力学の “状態についての和”）を知る，あるいは計算できる
“化学的な自由エネルギー” $f(p,T) = \frac{\rho+p}{n} - Ts$	$1/n(p,T) = \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_T$ $s(p,T) = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_p$ $\rho(p,T) = \frac{f - T(\partial f/\partial T)_p}{(\partial f/\partial p)_T} - p$	圧力と温度が指定されているとき平衡を定めるために重要である

“化学ポテンシャル”（“バリオンあたり”を単位として表された“注入すべきエネルギー”） $\mu(p,s)=\frac{p+\rho}{n}$	$1/n(p,s)=\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)_s$ $T(p,s)=\left(\frac{\partial\mu}{\partial s}\right)_p$ $\rho(p,s)=\frac{\mu}{(\partial\mu/\partial p)_s}-p$	注入すべきエネルギー［相対論的な，あるいは相対論的でない理想的な Fermi ガスに対する Fermi エネルギー，練習問題 22.3 をみよ］が考慮の中心であるとき

$\rho(n,s)$ の微分により $p(n,s)$ および $T(n,s)$ に通じても，任意の 2 つの関数 $p(n,s)$ および $T(n,s)$ をとって“逆方向”に進んで（積分によって）“本来の関数” $\rho(n,s)$ に進むことができるわけではない．熱力学の第 1 法則 (22.6) と両立するには，2 つの関数は無矛盾
*9 の要求を満たさなければならない［“Maxwell の関係”，ρ の 2 階の偏微分が等しい］.

$$(\partial p/\partial s)_n = n^2(\partial T/\partial n)_s \tag{22.7c}$$

*10 化学的ポテンシャル μ もまた n および s の一義的な関数である．それは以下のように定義される．(1) 固定された熱力学的な状態における（固定された n および s）単純流体の例をとる．(2) 大きい見本と同じ熱力学的な状態（同じ n および s）における δA 個のバリオンを含む，同じ流体のはるかに小さい見本を別にとる．(3) 大きい方の見本の体積を注入過程の間固定したまま，小さい方の見本を大きい方の見本に注入する．(4) 注入された全質量–エネルギー

$$\delta M_{\text{注入された}} = \rho \times (\text{注入された流体の体積}) = \rho(\delta A/n)$$

と注入を遂行するために要求される仕事

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{注入すべき}} &= \begin{pmatrix}\text{注入される流体のために大きい見本内に空間を開け}\\ \text{るために，大きい見本の圧力に反してなされる仕事}\end{pmatrix}\\ &= p(\text{注入される流体の体積}) = p(\delta A/n)\end{aligned}$$

を加えたものは，$\mu\,\delta A$ に等しい．

$$\mu\,\delta A = \delta M_{\text{注入された}} + \delta W_{\text{注入すべき}} = \frac{\rho+p}{n}\delta A$$

より簡単に述べると，

---

*9 Maxwell の関係

*10 化学的ポテンシャルはバリオンあたりの固定されたエネルギーおよび固定された全体積で“注入すべきエネルギー”に等しい

$$\mu = \begin{pmatrix} s\text{ あるいは見本の体積を変えずに，わずかな流体の付} \\ \text{加量を“生成し”そして与えられた見本に注入するた} \\ \text{めに，要求されるバリオンあたりの全質量–エネルギー} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\rho + p}{n} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_s \tag{22.8}$$

[熱力学の第 1 法則 (22.6) によって]

熱力学のすべての以上の法則および方程式は，曲がった時空において平坦な時空におけるのと同じである．そして（相対論的な）平坦な時空において古典的な非相対論的熱力学におけるのと同じである—ρ および μ について，静止質量および，質量–エネルギーのすべての他の形の包含を除いて．理由は単純である．法則はすべて，流体の静止系で測定される熱力学的な変数をつなぐスカラー方程式として定式化されている．

22.3　曲がった時空における流体力学 *

*11 単純な完全流体が時空を流れる．それは地球の重力場内で循環している地球の大気であってもよい．それは太陽自身の重力場内で静止している太陽のガス状の内部であってもよい．それはブラックホールに付着する星間ガスであってもよい．しかし，たとえ流体がどのよ
*12 うなものであろうともまたどこに存在していようとも，その運動は曲がった時空の熱力学の法則（22.2 節）と，エネルギー運動量保存の局所的な法則，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 0$ によって支配されるだろう．本節のおもな目的は式 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 0$ を使うのに便利な形に転換することである．転換は抽象的な記号を用いて本文で遂行されるだろう．読者は添字の記号を用いて転換をくり返してもらいたい．

完全流体に対するストレス–エネルギーテンソルは，曲がった時空で，平坦な時空におけるように（等価原理!），

$$\boldsymbol{T} = (\rho + p)\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} + p\boldsymbol{g} \tag{22.9}$$

である（5.5 節をみよ）．その発散は，鎖則，“$\boldsymbol{g}$ と $\boldsymbol{\nabla}$ 間の共存可能関係” $\boldsymbol{\nabla g} = 0$，恒等式 $(\boldsymbol{\nabla} p)\cdot\boldsymbol{g} = \boldsymbol{\nabla} p$（それは添字の記号を用いて容易に確かめられる）を用いて，容易に計算される．

$$0 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{\nabla}(\rho + p)\cdot\boldsymbol{u}]\boldsymbol{u} + [(\rho + p)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}]\boldsymbol{u} + [(\rho + p)\boldsymbol{u}]\cdot\boldsymbol{\nabla u} + (\boldsymbol{\nabla} p)\cdot\boldsymbol{g}$$

[第 1 の投入口上での発散]

---

* この題目のより詳細な取り扱いに対しては，たとえば，Ehlers (1961)，Taub (1971)，Ellis (1971)，Lichnerowitz (1967)，Cattaneo (1971)，およびそこに引用されている文献をみよ，また 22.6 節の初めに引用されている運動論についての文献をみよ．

*11　熱の流れあるいは粘性のない単純流体に対する流体力学の法則

*12　(1) 法則の起源

$$= [\nabla_{\boldsymbol{u}}\rho + \nabla_{\boldsymbol{u}}p + (\rho+p)\nabla\cdot\boldsymbol{u}]\boldsymbol{u} + (\rho+p)\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} + \nabla p \tag{22.10}$$

この式の 4–速度に沿う成分はとくに簡単である ($\boldsymbol{u}^2 \equiv -1$ であるから $\boldsymbol{u}\cdot\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}^2 = 0$ であることを思い出せ).

$$0 = \boldsymbol{u}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T}) = -[\nabla_{\boldsymbol{u}}\rho + \nabla_{\boldsymbol{u}}p + (\rho+p)\nabla\cdot\boldsymbol{u}] + \nabla_{\boldsymbol{u}}p$$
$$= -\nabla_{\boldsymbol{u}}\rho - (\rho+p)\nabla\cdot\boldsymbol{u}$$

これをバリオン保存の式 (22.3) と結びつけよ．結果は

*13
$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{(\rho+p)}{n}\frac{dn}{d\tau} \tag{22.11a}$$

である．これは，バリオンあたりのエントロピーは流線に沿って保存される

$$ds/d\tau = 0 \tag{22.11b}$$

という仮定を流線に沿って適用した熱力学の第 1 法則 (22.6) に同等であることに注意せよ．この結果は驚くにあたらない．熱力学的な平衡を主張することとエントロピーが一定にとどまることを要求することは流体の 1 つの要素と他の要素との間での熱の交換がゼロであることを要求することである．しかしストレス–エネルギーテンソル (22.9) は熱の交換が存在しないことを認めている．どのような熱の交換も $\boldsymbol{T}$（たとえば，練習問題 22.7）にエネルギーの流れの項として現れるだろう．しかしこのような項は存在しない．したがって，$\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T}) = 0$ を求めることによって局所的なエネルギーの保存を調べるときには，ストレス–エネルギーテンソルは熱の流れが生じていないこと，すなわち $ds/d\tau = 0$ を知らせる．

$\nabla\cdot\boldsymbol{T} = 0$ の 3 個の成分は存続する：$\nabla\cdot\boldsymbol{T}$ の成分は流体の 4–速度に直交する．$\boldsymbol{u}$ に沿う成分を残し，“射影テンソル”

$$\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{g} + \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} \tag{22.12}$$

を用いて，$\nabla\cdot\boldsymbol{T} = 0$ からそれらをもぎ取ることができる（練習問題 22.4 をみよ）．$\boldsymbol{P}$ を $\nabla\cdot\boldsymbol{T} = 0$［式 (22.10)］で縮約すると

*14
$$(\rho+p)\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{P}\cdot(\nabla p) \equiv -[\nabla p + (\nabla_{\boldsymbol{u}}p)\boldsymbol{u}] \tag{22.13}$$

が与えられる．これは相対論的な流体力学の “**Euler の方程式**” である．それは対応する平坦な時空の Euler の方程式と正確に同じ形をもち，

$$\begin{pmatrix}\text{単位体積あたりの慣性}\\ \text{質量［練習問題 5.4］}\end{pmatrix} \times (\text{流体の 4–加速度}) = -\begin{pmatrix}\text{4–速度に直交する}\\ \text{3–曲面内での圧力}\\ \text{勾配}\end{pmatrix} \tag{22.13$'$}$$

となる．圧力勾配（“重力” でない）はすべての流線の測地線からのずれの原因となっている．

コラム 22.2 は熱力学および流体力学の上述の法則を再組織し要約する．

*13　(2) 局所的なエネルギー保存：流れの断熱性
*14　(3) Euler の方程式

コラム 22.2　曲がった時空における単純な完全流体に対する熱力学と流体力学

A. 10 個の量が流体を特徴づける

すべて静止系で測定された熱力学的なポテンシャル

n：バリオンの数密度

ρ：全質量–エネルギーの密度

p：圧力

T：温度

s：バリオンあたりのエントロピー

μ：バリオンあたりの化学ポテンシャル

流体 4–速度の 4 個の成分

B. 流体の運動を支配する 10 個の式

2 個の状態方程式

$$p = p(n, s), \qquad T = T(n, s) \tag{1),(2}$$

共存制限（熱力学の第 1 法則から出る "Maxwell の関係式"）

$$(\partial p/\partial s)_n = n^2(\partial T/\partial n)_s$$

を受ける．

熱力学の第 1 法則

$$\boldsymbol{d}\rho = \frac{\rho + p}{n}\boldsymbol{d}n + nT\boldsymbol{d}s \tag{3}$$

これは積分できて $\rho(n, s)$ を与える．

化学ポテンシャルに対する式

$$\mu = (\rho + p)/n \tag{4}$$

これは $\rho(n, s)$ および $p(n, s)$ と組み合わせて，$\mu(n, s)$ を与える．

バリオン数の保存則

$$dn/d\tau \equiv \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} n = -n\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} \tag{5}$$

流線に沿うエネルギーの保存．それは（隣接する流体要素間にエネルギーの交換が存在しないことを仮定して）

$$ds/d\tau > 0 \tag{6}$$

となる衝撃波が存在しないところでの **“断熱流”** $ds/d\tau = 0$ を意味する．［衝撃波は本書で取り扱われていない．Taub (1948)，de Hofmann and Teller (1950)，Israel (1960), May and White (1967), Zel'dovich and Razer (1967), Licherwicz (1967, 1971)，および Thorne (1973a) をみよ．］

Euler の方程式

$$(\rho + p)\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{p} \qquad (7),(8),(9)$$

これは $\boldsymbol{u}$ を接線とする流線を定める．

4–速度の規格化

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = -1 \tag{10}$$

［練習問題］

22.1 流線の発散が体積変化をもたらす

流体要素の体積変化率に対する式 $dV/d\tau = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})V$ ［式 (22.2)］を導け．［ヒント：事象 $\mathcal{P}_0$ をとり瞬間的に流体とともに動く $\mathcal{P}_0$ での局所 Lorentz 系（“$\mathcal{P}_0$ での静止系”）で計算せよ．］［解：$\mathcal{P}_0$ 近傍の事象では流体は非常に小さい通常の速度 $v^j = dx^j/dt$ をもつ．したがって $\mathcal{P}_0$ で辺 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = L$ をもつ立方体の流体は時間 δt 後に量

$$\begin{aligned}\delta(\Delta x) &= [(dx/dt)\delta t]_{\text{“前方の面”}} - [(dx/dt)\delta t]_{\text{“後方の面”}}\\ &= (\partial v^x/\partial x)L\,\delta t,\\ \delta(\Delta y) &= (\partial v^y/\partial y)L\,\delta t,\\ \delta(\Delta z) &= (\partial v^z/\partial z)L\,\delta t\end{aligned}$$

だけその辺を変える．対応する体積についての変化は

$$\delta(\Delta x\Delta y\Delta z) = (\partial v^j/\partial x^j)L^3\delta t$$

である．したがって体積の変化率は

$$\partial V/\partial t = V(\partial v^j/\partial x^j)$$

である．しかし $\mathcal{P}_0$ でのおよびその近傍での局所 Lorentz 静止系（そこでは $x^\alpha = 0$）で，計量係数は $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(|x^\alpha|^2)$ である，そして通常の速度は $v^j = \mathrm{O}(|x^\alpha|)$ である．したがって

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{(-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu)^{1/2}} = 1 + \mathrm{O}(|x^\alpha|^2),$$

$$u^j = \frac{dx^j}{d\tau} = v^j + \mathrm{O}(|x^\alpha|^3)$$

こうして，$\mathcal{P}_0$ での微分 $\partial V/\partial t$ および $V(\partial v^j/\partial x^j)$ は

$$\partial V/\partial t = u^\alpha \partial V/\partial x^\alpha = u^\alpha V_{,\alpha} = dV/d\tau$$
$$= V(\partial v^j/\partial x^j) = V(\partial u^\alpha/\partial x^\alpha) = V u^\alpha{}_{;\alpha} = V(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})$$

である．Q.E.D.]

[平坦な時空で作業することによって，より容易に $\partial V/\partial t = dV/d\tau$ および $\partial v^j/\partial x^j = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}$ を推論しえたであろうこと，それから $dV/d\tau = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})V$ を結論したであろうこと，そして等価原理を発動してこの法則を曲がった時空に移したであろうことに注意せよ.]

22.2　連続の式

平坦な時空での非相対論的な極限でバリオン数の保存則 (22.3) は "連続の式"

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}(nv^j) = 0$$

となることを示せ.

22.3　理想的な Fermi 気体に対する化学ポテンシャル

理想的な Fermi 気体の化学ポテンシャルは，非相対論的であれ，あるいは相対論的であれ，その気体の Fermi エネルギー（最高の占拠されている運動状態のエネルギー）に等しい（温度ゼロで）ことを示せ.

22.4　射影テンソル

接線ベクトル $\boldsymbol{B}$ の "射影テンソル" $\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{g} + \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}$ による縮約は，$\boldsymbol{B}$ を 4–速度ベクトル $\boldsymbol{u}$ に直交する 3–面に射影することを示せ．[ヒント：$\boldsymbol{e}_{\hat{0}} = \boldsymbol{u}$ をもつ直交系で計算を遂行し，$\boldsymbol{B} = B^\alpha \boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}}$ と書け．それから $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{B} = B^{\hat{j}}\boldsymbol{e}_{\hat{j}}$ を示せ.] [もし $\boldsymbol{n}$ が単位の空間的なベクトルとするならば，$\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{g} - \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}$ は対応する射影演算子であることを示せ．**注意：** "ヌルベクトルに直交する射影" の**一義的な**概念は存在しない．なぜか？　[ヒント：1 つの空間次元を削除する平坦な時空で図を描け.]

22.5　定常的な重力場内での圧力勾配

完全流体が定常的な重力場 (計量係数は x^0 によらない) 内で静止している (流線は $x^j =$ 一定 をもつ)．"重力に逆らって流体を支える" ために（すなわち，その流線が測地線でなく $x^j =$ 一定 であるようにするために）要求される圧力勾配は

$$\frac{\partial p}{\partial x^0} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x^j} = -(\rho + p)\frac{\partial \ln\sqrt{-g_{00}}}{\partial x^j} \tag{22.14}$$

であることを示せ．Newton 的な極限でのこの圧力勾配を，座標系および式 (18.15c) の計量係数を用いて求めよ.

22.6　膨張，回転，およびずれ

流体の 4–速度 $\boldsymbol{u}(\mathcal{P})$ の場が与えられているとする.

(a) $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}$ は以下のように分解されうることを示せ.

$$u_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta P_{\alpha\beta} - a_\alpha u_\beta \tag{22.15a}$$

ここに $\boldsymbol{a}$ は流体の **4–加速度**

$$a_\alpha \equiv u_{\alpha;\beta}u^\beta \tag{22.15b}$$

であり，θ は流体の世界線の "膨張"

$$\theta \equiv \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = u^\alpha{}_{;\alpha} \tag{22.15c}$$

であり，$P_{\alpha\beta}$ は**射影テンソル**

$$P_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta \tag{22.15d}$$

であり，$\sigma_{\alpha\beta}$ は流体の**ずれテンソル**

$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}(u_{\alpha;\mu}P^\mu{}_\beta + u_{\beta;\mu}P^\mu{}_\alpha) - \frac{1}{3}\theta P_{\alpha\beta} \tag{22.15e}$$

である．そして $\omega_{\alpha\beta}$ は流体の**回転 2–形式**

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}(u_{\alpha;\mu}P^\mu{}_\beta - u_{\beta;\mu}P^\mu{}_\alpha) \tag{22.15f}$$

である．

(b) この分解のおのおのの成分部分は流体の局所静止系で単純な物理学的解釈をもつ．4–加速度 $\boldsymbol{a}$ の加速度計の読みによる解釈はよく知られているはずである．練習問題 22.1 は展開 $\theta = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}$ は流体要素の体積の増加率，

$$\theta = (1/V)(dV/d\tau) \tag{22.15g}$$

を記述することを示した．練習問題 22.4 は射影テンソル $\boldsymbol{P}$ の意味と使用を調べた．瞬間的に流体とともに動いている（$u^{\hat\alpha} = \delta^{\hat\alpha}{}_0$）局所 Lorentz 系（$g_{\hat\alpha\hat\beta} = \eta_{\hat\alpha\hat\beta}$, $\Gamma^{\hat\alpha}{}_{\hat\beta\hat\gamma} = 0$）で，$\sigma_{\hat\alpha\hat\beta}$ および $\omega_{\hat\alpha\hat\beta}$ は流体の古典的な（非相対論的な）ずれおよび回転に帰着することを確かめよ．[たとえば，ずれおよび回転の古典的なおよび相対論的な記述の両方に対して Ellis (1971) の 2.4 および 2.5 節をみよ．]

22.7　粘性をもつ流体力学と熱の流れ*

(a) Landau and Lifshitz (1959) の 15 節で，古典的な（非相対論的な）流体に対する粘性のあるストレスの解析を知る．その解析を相対論的な流体の局所 Lorentz 静止系に直接持ち越し，それから系によらない言葉に一般化することによって，粘性のストレス–エネルギーテンソルへの寄与は

$$\boldsymbol{T}^{(\text{粘性})} = -2\eta\boldsymbol{\sigma} - \zeta\theta\boldsymbol{P} \tag{22.16a}$$

* John M. Stewart によって与えられた練習問題

であることを示せ．ここに $\eta \geq 0$ は **“力学的な粘性の係数”** である．$\zeta \geq 0$ は **“巨大な粘性の係数”** である．そして $\boldsymbol{\sigma}, \theta, \boldsymbol{P}$ は流体のずれ，膨張，および射影テンソルである．

(b) 流体内での熱流の理想化された記述は流体の局所静止系で成分，

$$q^{\hat{0}} = 0, \qquad q^{\hat{j}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{\hat{j}}\text{に直交する単位面をよぎる} \\ \text{単位時間あたりのエネルギー} \end{pmatrix} \tag{22.16b}$$

をもつ**熱–束 4–ベクトル $\boldsymbol{q}$** を導入する．流体の静止系から系によらない言葉へ一般化することによって，熱束のストレス–エネルギーテンソルへの寄与は

$$\boldsymbol{T}^{(\text{熱})} = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{u} \tag{22.16c}$$

であることを示せ．それによって，この理想化された状況で，熱伝導をもつ粘性流体に対するストレス–エネルギーテンソルは

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + (p - \zeta\theta) P^{\alpha\beta} - 2\eta\sigma^{\alpha\beta} + q^\alpha u^\beta + u^\alpha q^\beta \tag{22.16d}$$

であると結論せよ．

(c) エントロピー 4–ベクトル $\boldsymbol{s}$ を

$$\boldsymbol{s} \equiv ns\boldsymbol{u} + \boldsymbol{q}/T \tag{22.16e}$$

によって定義せよ．流体の局所静止系での計算によって，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{s} &= \begin{pmatrix} \text{単位体積内でのエン} \\ \text{トロピーの増加率} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{熱と流体がエントロピーを} \\ \text{単位体積に運び入れる割合} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{エントロピーが単位体積} \\ \text{内で生成される割合} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{22.16f}$$

を示せ．それによって**熱力学の第 2 法則**の以下の形式に到達せよ．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{s} \geq 0 \tag{22.16g}$$

(d) 熱流をもつ粘性流体に対して，局所的なエネルギー保存則，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 0$ を計算せよ．熱力学の第 1 法則およびバリオン数の保存則と結びつけて

$$T\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{s} = \zeta\theta^2 + 2\eta\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} - q^\alpha(T_{,\alpha}/T + a_\alpha) \tag{22.16h}$$

を得よ．この式の各項をエントロピー生成への寄与として解釈せよ（**例**：$2\eta\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}$ は粘性のある加熱によるエントロピー生成を記述する）．［**注意**：項 $q^\alpha a_\alpha$ はその起源が相対論的である．それは流れる熱の慣性と関係している．］

(e) 流れる熱の慣性を考慮するときには，熱伝導の古典法則の以下の一般化を得る (Eckart 1940)．

$$q^\alpha = -\kappa P^{\alpha\beta}(T_{,\beta} + Ta_\beta) \tag{22.16i}$$

ここに κ は**熱伝導率**である．この式を用いて定常的な重力場（練習問題 22.5）内に静止している流体に対して

$$q_0 = 0, \qquad q_j = -\frac{\kappa}{\sqrt{-g_{00}}}(T\sqrt{-g_{00}})_{,j} \tag{22.16j}$$

を示せ．［こうして，熱平衡は一定の温度でなく，赤方偏移された温度分布 $T\sqrt{-g_{00}} =$ 一定に対応する; Tolmann（1934a），p.313.］また，理想化された熱伝導の法則 (22.16i) を用いてエントロピーの生成率を

$$\begin{aligned} T\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{s} &= \zeta\theta^2 + 2\eta\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} + (\kappa/T)P^{\alpha\beta}(T_{,\alpha} + Ta_\alpha)(T_{,\beta} + Ta_\beta) \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{22.16k}$$

として再表現せよ．［熱流についてのさらなる詳細および上述の理想化された記述の限界の議論に対しては，たとえば，Ehlers（1971）の 4.18 節，また Marle（1969），Anderson（1970），Stewart（1971），およびそこに引用されている論文をみよ．］

22.4 曲がった時空における電気力学

重力が存在する中での局所 Lorentz 系で，観測者は荷電粒子に対する通常の Lorentz 力
*15 の法則を用いて，電磁場 $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{B}$ を測定できる．特殊相対論におけるように，$\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{B}$ を電磁場のテンソルの成分とみなすことができる．

$$F^{\hat{0}\hat{j}} = -F^{\hat{j}\hat{0}} = E^{\hat{j}}, \qquad F^{\hat{j}\hat{k}} = \epsilon^{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}B^{\hat{l}}$$

電荷密度および電流密度は 4–ベクトル $J^{\hat{\alpha}}$ の成分とみなされ，そして Maxwell の方程式および Lorentz 力の式を特殊相対論的な形式に書くことができる．

$$F^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}{}_{,\hat{\beta}} = 4\pi J^{\hat{\alpha}}, \qquad F_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}} + F_{\hat{\beta}\hat{\gamma},\hat{\alpha}} + F_{\hat{\gamma}\hat{\alpha},\hat{\beta}} = 0,$$

$$ma^{\hat{\alpha}} = F^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}qu_{\hat{\beta}} \qquad \begin{pmatrix} m = \text{粒子の質量},\ q = \text{電荷} \\ u^{\hat{\alpha}} = \text{4–速度},\ a^{\hat{\alpha}} = \text{4–加速度} \end{pmatrix}$$

任意の他の系でもこれらの方程式は同じ形をもつだろう．しかしコンマはセミコロンで置き換えられる．

*16

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 4\pi J^{\alpha} \tag{22.17a}$$

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0 \tag{22.17b}$$

$$ma^{\alpha} = F^{\alpha\beta}qu_{\beta} \tag{22.17c}$$

これらは重力が存在するときの電気力学の基礎方程式である．それらから，他のすべて

*15 電磁場
*16 Maxwell の方程式および Lorentz 力の法則

のものが出る．たとえば，特殊相対論におけるように，ここでもまた（練習問題 22.9），それらは電荷保存の式

*17
$$J^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0 \tag{22.18a}$$

を含む．そして帯電物質と相互作用する電磁場（練習問題 22.10）に対して，それらはストレス–エネルギーテンソルの和に対するゼロ発散を意味する．

*18
$$(T^{(\text{電磁場})\alpha\beta} + T^{(\text{物質})\alpha\beta})_{;\beta} = 0 \tag{22.18b}$$

*19 特殊相対論におけるように，ここでもまた，ベクトルポテンシャル A^{μ} を導入することができる．A^{μ} を用いた $F^{\mu\nu}$ に対する通常の特殊相対論的な表現でコンマをセミコロンで置き換えて，

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} \tag{22.19a}$$

を得る．もしすべてが満足のいくものであれば，この式は（特殊相対論におけるように）Maxwell の方程式 (22.17b) が満たされることを保証するはずである．実際，練習問題 22.8 でみられるとおりである．ベクトルポテンシャルを支配する波動方程式を導くために，表現 (22.19a) を残りの Maxwell の方程式 (22.17a) に挿入し，

$$-A^{\alpha;\beta}{}_{\beta} + A^{\beta;\alpha}{}_{\beta} = 4\pi J^{\alpha} \tag{22.19b}$$

を得る．それから恒等式 (16.6c) を用いて，第 1 項での共変微分と交換して，

$$-A^{\alpha;\mu}{}_{\mu} + A^{\mu}{}_{;\mu}{}^{;\alpha} + R^{\alpha}{}_{\mu}A^{\mu} = 4\pi J^{\alpha} \tag{22.19b$'$}$$

を得る．最後に，特殊相対論の標準的な方法を採用して，Lorentz ゲージ条件

*20
$$A^{\mu}{}_{;\mu} = 0 \tag{22.19c}$$

を課する．それによって波動方程式 (22.19b′) を次の形

*21
$$(\varDelta_{dR}A)^{\alpha} \equiv -A^{\alpha;\beta}{}_{\beta} + R^{\alpha}{}_{\beta}A^{\beta} = 4\pi J^{\alpha} \tag{22.19d}$$

にできる．

ここに現れる “de Rham ベクトル波動演算子” $\varDelta$ は，符号を除いて，曲がった時空でのベクトルに対する一般化された d’Alambertian である．数学的にはそれは $-A^{\alpha;\beta}{}_{;\beta}$ よりも，そして（マイナス）d’Alamberation に帰着する特殊相対論でのどのような他の演算子よりも強力である［議論に対しては，de Rham（1955）をみよ］．

---

*17　電荷保存
*18　エネルギー運動量の局所的な保存
*19　ベクトルポテンシャル
*20　Lorentz ゲージ条件
*21　ベクトルポテンシャルに対する波動方程式

電気力学の方程式 (22.17a)–(22.19b) はすべて特殊相対論から，コンマをセミコロンに移す法則によって得られるけれども，ベクトルポテンシャルに対する波動方程式 (22.19d) は得られない（“曲率結合”，コラム 16.1 をみよ）．にもかかわらず，時空が平坦である（したがって $R^{\alpha}{}_{\beta}=0$）ときには，式 (22.19d) は特殊相対論の通常の波動方程式に帰着する．

[練習問題]

22.8 電気力学に対するベクトルポテンシャル

任意の座標系で接続係数は方程式 (22.19a) および (22.17b) の両方から相殺し，したがってそれらは

$$F_{\mu\nu}=A_{\nu,\mu}-A_{\mu,\nu} \tag{22.20a}$$

$$F_{\alpha\beta,\gamma}+F_{\beta\gamma,\alpha}+F_{\gamma\alpha,\beta}=0 \tag{22.20b}$$

と書かれうることを示せ（微分形式の言葉で，これらの方程式は $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{dA}, \boldsymbol{dF}=0$ である）．それからこの形式の方程式を用いて方程式 (22.19a) は，本文で主張されているように，方程式 (22.17b) を意味することを示せ．

22.9 重力が存在するときの電荷の保存

Maxwell の方程式 (22.17a), (22.17b) は，特殊相対論のときとまさに同じく，重力が存在するとき電荷保存の式 (22.18a) を意味することを示せ．［ヒント：$F^{\alpha\beta}$ の反対称性を用いよ．そして式 (16.6) を用いて取り扱われなければならない共変微分の非可換に注意せよ．その代わりとして，座標系で，式 (22.17a) は

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\sqrt{|g|}F^{\alpha\beta})=4\pi J^{\alpha} \tag{22.17a$'$}$$

と書かれ，そして式 (22.18a) は

$$J^{\alpha}{}_{;\alpha}\equiv\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\sqrt{|g|}J^{\alpha})=0 \tag{22.18a$'$}$$

と書かれ，座標系で証明を遂行できることを示せ．］

22.10 相互作用している電磁場と荷電物質

特殊相対論におけるように，重力が存在するときにもまた（“等価原理”），電磁場に対するストレス–エネルギーテンソルは

$$T^{(\text{電磁場})}{}_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\left(F_{\alpha\mu}F_{\beta}{}^{\mu}-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\right) \tag{22.21}$$

である．重力が存在するときに Maxwell の方程式 (22.17a), (22.17b) を用いて

$$T^{(\text{電磁場})\alpha\beta}{}_{;\beta}=-F^{\alpha\beta}J_{\beta} \tag{22.22}$$

を示せ．しかし $F^{\alpha\beta}J_\beta$ はちょうど，電磁場が荷電物質に作用する単位体積あたりの Lorentz 4–力である［Lorentz 力の式 (22.17c) をみよ．また式 (5.43) をみよ］．すなわち，それは $T^{(\text{物質})\alpha\beta}{}_{;\beta}$ である．したがって，上述の式は本文に引用されている形式 (22.18b) に書き直されうる．

22.5　曲がった時空における幾何光学*

クエーサー（quasar）3C279 からの電波は太陽の近くを通過し，太陽の重力場によって方向を変える．新しく生まれた銀河によって大昔にはるか彼方で放出された光線は宇宙の宇宙論的に曲がった時空を伝播する．そして地球の上空で銀河の曲率によって拡大された（しかしぼんやりした）像をつくって収束する（そして赤方偏移する）．

光および電波の伝播のこれらおよびたいていの他の例は幾何光学の法則に支配される．この節はこれらの法則を，曲がった時空で，Maxwell の方程式から導く．

*22　幾何光学の基本法則は以下のとおりである．(1) 光線はヌル測地線である，(2) 偏りのベクトルは光線に垂直であり，光線に沿って平行に伝播する，(3) 振幅は断熱不変量であり，それは量子論の言葉で，光子の数が保存されることを述べている．

*23　これらの法則が成り立つ条件は 3 個の長さについての条件で定義される．(1) 波の代表的な既約（reduced）波長，

$$\lambdabar \equiv \frac{\lambda}{2\pi} = \left(\begin{array}{l}\text{“単位の角運動量をもつ光子にもっ}\\ \text{とも接近する古典的な距離”}\end{array}\right) \tag{22.23a}$$

は代表的な局所 Lorentz 系で測定されている（たとえば，近くの銀河に相対的に静止している系），(2) 振幅，偏り，および波の波長が変化する代表的な長さ $\mathcal{L}$，たとえば，波面の曲率半径，あるいはクエーサー内での突然の爆発によって生み出される波束の長さ，(3) 波が伝播する時空の代表的な曲率半径 $\mathcal{R}$,

$$\mathcal{R} \equiv \left|\begin{array}{c}\text{代表的な局所 Lorentz 系で測定}\\ \text{された}\boldsymbol{Riemann}\text{の代表的な成分}\end{array}\right|^{-1/2} \tag{22.23b}$$

既約波長が存在する他のスケールのおのおのに比べて非常に短いときには，

$$\lambdabar \ll \mathcal{L} \qquad \text{および} \qquad \lambdabar \ll \mathcal{R} \tag{22.23c}$$

したがって波が**局所的に**，無視できる曲率の時空を伝播する平面波とみなされうるときに

---

* 部分的に William L. Burke による 1968 年の Caltech でのノートに基づいている．曲がった時空での幾何光学のより詳細な取り扱いに対しては，たとえば，Sachs (1961)，Jordan, Ehlers, and Sachs (1961)，および Robinson (1961)，また 41.11 節で議論され記載されている文献をみよ．

*22　幾何光学の概観

*23　幾何光学が成り立つための条件

は，幾何光学はつねに成り立つ．

*24 数学的には幾何光学の仮定，$\lambda \ll \mathcal{L}$ および $\lambda \ll \mathcal{R}$，を以下のように活用する．領域 $\leq \mathcal{L}$ にわたって，高度に単色光の波に注意を集中せよ（より複雑なスペクトルは重ね合わせによって，すなわち，Fourier 解析によって解析できる）．電磁気論のベクトルポテンシャルを急激に変化する実数の位相，

$$\theta \sim (\text{伝播距離})/\lambda$$

とゆるやかに変化する複素振幅（すなわち，実数部分と虚数部分をもつ振幅），

$$\boldsymbol{A} = \{\text{ 振幅} \times e^{i\theta}\}\text{ の実数部分} \equiv \boldsymbol{\mathcal{R}}\{\text{ 振幅} \times e^{i\theta}\}$$

に分割せよ．振幅変化のスケール $\mathcal{L}$，および時空曲率のスケール $\mathcal{R}$ を固定し，他方既約波長 λ を短く短くすると想像せよ．位相は時空内での任意の固定された事象でますます大きくなるだろう（$\theta \propto 1/\lambda$）．しかし時空内での位置の関数としての振幅はほとんど変化せずにとどまりうる．

$$\text{振幅} = \begin{bmatrix} \lambda\text{ によらない} \\ \text{支配的な部分} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{有限の波長による小さい補正} \\ (\text{幾何光学からのずれ}) \end{bmatrix}$$

この事情によって振幅を λ のべきについて展開することが許される*．

$$\begin{array}{ccccccc} \text{振幅} = \boldsymbol{a} & + & \boldsymbol{b} & + & \boldsymbol{c} & + & \cdots \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ [\lambda\text{ によらない}] & & [\propto \lambda] & & [\propto \lambda^2] & & \end{array}$$

[実際には，展開は次元をもたない数

$$\lambda/(\mathcal{L}\text{ および }\mathcal{R}\text{ の最小値}) \equiv \lambda/L \tag{22.24}$$

のべきについて続行される．応用数学者はこれを “2 個の長さのスケール展開” とよぶ．たとえば，Cole (1968) をみよ．ここでの基礎的な短波長近似は長い歴史をもつ．たとえば，Liouville (1837), Rayleigh (1912) をみよ．Debye の示唆に従って，それは Sommerfeld and Runge (1911) によって Maxwell の方程式に適用された．それは量子力学での WKB 近似としてよく知られている．また Keller, Lewis, and Seckler (1956) における参考文献一覧によって示されているように多くの他の応用をもつ．高次の項の寄与は Kline (1954) および Lewis (1958) によって考慮されている．とくに Fröman and Fröman (1965) の本をみよ．]

λ/L がゼロに近づくとき種々の項がいかに速くゼロ（あるいは無限大）に近づくかの記録をつけるパラメータ ε を導入することは有用である．

---

* $\boldsymbol{A}$ に対する式は線形である．したがって解析は，λ によらない振幅の代わりに，支配的な項 $\boldsymbol{a} \propto \lambda^n$，および $\boldsymbol{b} \propto \lambda^{n+1}$, $\boldsymbol{c} \propto \lambda^{n+2}$ などを仮定して同様によく進むだろう．結果は n によらない．$n = 1$ を選ぶと $\lambda \to 0$ のとき，場の強さ $F_{\mu\nu}$ およびエネルギー密度 $T_{\mu\nu} \propto F^2 \propto A^2/\lambda^2 \propto$ 定数 を与えるだろう．

*24　幾何光学の基礎となる “2 個の長さのスケール” 展開

*25
$$A_\mu = \boldsymbol{\mathcal{R}}\{(a_\mu + \varepsilon b_\mu + \varepsilon^2 c_\mu + \cdots)e^{i\theta/\varepsilon}\} \tag{22.25}$$

前に因子 ε^n をもつ任意の項は，非常に小さい波長の極限で $(\lambda/L)^n$ のように変化する $[\theta \propto (\lambda/L)^{-1}$，$c_\mu \propto (\lambda/L)^2$など]．約束によって，$\varepsilon$ は見せかけの展開パラメータであり，最終的な値は 1 である．したがってその項が有用でなくなるときには計算から落とすことができる．そして慣習によって，すべての“最終的な幾何光学の補正”は振幅項 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \cdots$ に入っている．θ には何も入っていない．

位相 θ は時空での位置の実関数であるが，振幅，したがってベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \cdots$ は複素数であることに注意せよ．たとえば，z 方向に伝播する右手円偏光の単色光波を記述するには，$\theta = \omega(z-t)$ および $\boldsymbol{a} = 1/\sqrt{2}a(\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y)$ と置けるだろう．ここに a は実数である．したがって

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\mathcal{R}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}a(\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y)e^{i\omega(z-t)}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}a\left\{\cos[\omega(z-t)]\boldsymbol{e}_x - \sin[\omega(z-t)]\boldsymbol{e}_y\right\}$$

ベクトルポテンシャルに対して仮定された形 (22.25) は幾何光学の数学的基礎である．幾何光学のすべての重要な式は，このベクトルポテンシャルを源をもたない波動方程式 $\varDelta\boldsymbol{A} = 0$ [式 (22.19d)] および Lorentz ゲージ条件 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0$ [式 (22.19c)] に挿入する
*26 ことから生ずる．生ずる方程式（以下に導かれている）は次のように表されるときにのみもっとも単純な形をとる．

*27
$$\text{“波動ベクトル”},\quad \boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{\nabla}\theta \tag{22.26a}$$

*28
$$\text{“スカラー振幅”},\quad a \equiv (\boldsymbol{a}\cdot\bar{\boldsymbol{a}})^{1/2} = (a^\mu \bar{a}_\mu)^{1/2} \tag{22.26b}$$

*29
$$\text{“偏りのベクトル”},\quad \boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{a}/a = \text{“}\boldsymbol{a}\text{に沿う単位複素ベクトル”} \tag{22.26c}$$

*30 （ここに $\bar{\boldsymbol{a}}$ は $\boldsymbol{a}$ の複素共役である．）**光線**は一定の位相 θ の曲面に垂直な曲線 $\mathcal{P}(\lambda)$ と定義される．$\boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{\nabla}\theta$ はこれらの曲面に垂直であるから，光線に対する微分方程式は

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = k^\mu(x) = g^{\mu\nu}(x)\theta_{,\nu}(x) \tag{22.26d}$$

である．この点についての研究に適切なコラム 22.3 は，偏りベクトル，波動ベクトル，一定の位相の曲面，および伝播する波に対する光線を示す．スカラー振幅は，そこでは示されていないが，たんにベクトル振幅 $\boldsymbol{a}$ の長さを告げる．複素偏りのベクトルへの洞察は，電気力学からはよく知られていないけれども，後で練習問題 22.12 で展開されうる．

*31 基礎はこれくらいにして，これからは計算をしてみる．まず幾何光学のベクトルポテンシャル (22.25) を Lorentz ゲージ条件に挿入する．

---

*25　幾何光学におけるベクトルポテンシャル
*26　幾何光学の基礎概念
*27　(1) 波動ベクトル
*28　(2) スカラー振幅
*29　(3) 偏りのベクトル
*30　(4) 光線
*31　幾何光学の法則の導出

$$0 = A^{\mu}{}_{;\mu} = \boldsymbol{\mathcal{R}}\left\{\left[\frac{i}{\varepsilon}k_{\mu}(a^{\mu}+\varepsilon b^{\mu}+\cdots)+(a^{\mu}+\varepsilon b^{\mu}+\cdots)_{;\mu}\right]e^{i\theta/\varepsilon}\right\} \tag{22.27}$$

主要な項（$1/\varepsilon$ の程度）は述べる．

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}=0 \qquad \text{(振幅は波動ベクトルに垂直である)} \tag{22.28}$$

あるいは，同等であるが

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{f}=0 \qquad \text{(偏りは波動ベクトルに垂直である)} \tag{22.28$'$}$$

この直交条件におけるポスト（post）幾何光学の破れはゲージ条件 (22.27) における高次の項［$\mathrm{O}(1)$, $\mathrm{O}(\varepsilon)$, $\mathrm{O}(\varepsilon^2),\cdots)$］によって支配される．たとえば，$\mathrm{O}(1)$ 項は述べる．

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{b}=i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a}$$

次にベクトルポテンシャル (22.25) を源をもたない波動方程式 (22.19d) に挿入する．

$$\begin{aligned}
0 &= (\varDelta_{dR}\boldsymbol{A})^{\alpha} = -A^{\alpha;\beta}{}_{\beta} + R^{\alpha}{}_{\beta}A^{\beta} \\
&= \boldsymbol{\mathcal{R}}\Big\{\Big[\frac{1}{\varepsilon^2}k^{\beta}k_{\beta}(a^{\alpha}+\varepsilon b^{\alpha}+\varepsilon^2 c^{\alpha}+\cdots) - 2\frac{i}{\varepsilon}k^{\beta}(a^{\alpha}+\varepsilon b^{\alpha}+\cdots)_{;\beta} \\
&\qquad -\frac{i}{\varepsilon}k^{\beta}{}_{;\beta}(a^{\alpha}+\varepsilon b^{\alpha}+\cdots) - (a^{\alpha}+\cdots)^{;\beta}{}_{\beta} + R^{\alpha}{}_{\beta}(a^{\beta}+\cdots)\Big]e^{i\theta/\varepsilon}\Big\}
\end{aligned} \tag{22.29}$$

$1/\varepsilon^2$ および $1/\varepsilon$ の次数の項を集めよ（$1/\varepsilon$ よりも高次の項はポスト幾何光学の補正を支配する）．

$\mathrm{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$:

$$k^{\beta}k_{\beta}a^{\alpha}=0$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=0 \qquad \text{(波動ベクトルはヌルである)} \tag{22.30}$$

$\mathrm{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$:

$$\underbrace{k^{\beta}k_{\beta}}_{[=0]}b^{\alpha} - 2i\left(k^{\beta}a^{\alpha}{}_{;\beta}+\tfrac{1}{2}k^{\beta}{}_{;\beta}a^{\alpha}\right)=0$$

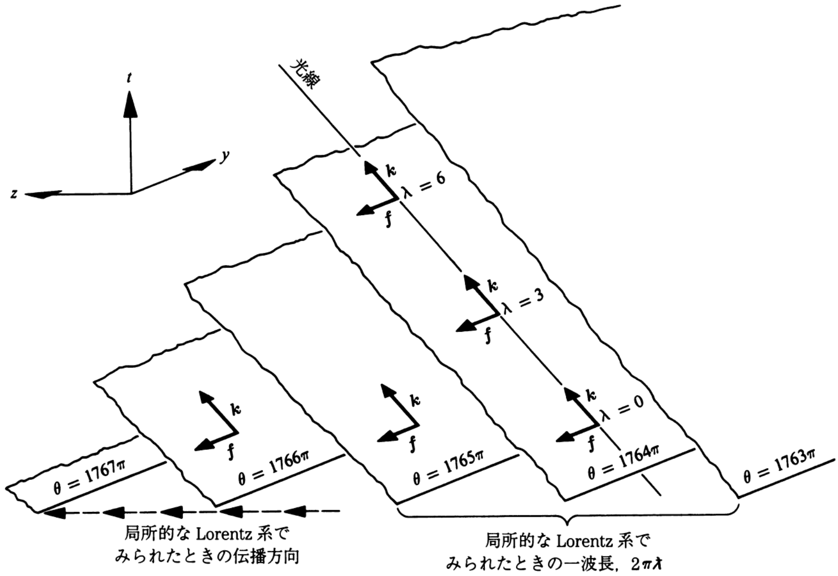
$$\Rightarrow\ \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{a} \qquad \text{(ベクトル振幅に対する伝播方程式)} \tag{22.31}$$

これらの式 (22.30), (22.31) は式 (22.28) とともに，以下のすべての結果を生み出す基礎である．最初の結果として，式 (22.30) から測地線の法則を得ることができる．$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=0$ の勾配をつくれ．

$$0=(k^{\beta}k_{\beta})_{;\alpha}=2k^{\beta}k_{\beta;\alpha}$$

および $k_{\beta}\equiv\theta_{,\beta}$ はスカラーの勾配であるという事実を用いて添字を交換せよ．$\theta_{;\beta\alpha}=\theta_{;\alpha\beta}$

コラム 22.3　電磁気的な波連の幾何学



図は，$t = 0$ を通して現れる局所的な Lorentz 系の“同時性の曲面” $\theta =$ 一定 の曲面を示している．示されている曲面は交互に波連の“山” ($\theta = 1764\pi, \theta = 1766\pi, \cdots$) および“谷” ($\theta = 1765\pi, \theta = 1767\pi, \cdots$) である．これらの曲面は 1–形式，$\tilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{d}\theta$ をつくり上げる．“対応するベクトル” $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{\nabla}\theta$ は“**波動ベクトル**（波数ベクトル）”である．波動ベクトルは Maxwell の方程式 (22.30) に従って，ヌル，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 0$ である．それゆえ，波動ベクトルは一定の位相の曲面内に存在する．

$$(\,\boldsymbol{k}\text{ によって貫通される曲面の数}\,) = \langle \boldsymbol{d}\theta, \boldsymbol{k}\rangle = \langle \tilde{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{k}\rangle = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 0$$

しかし波動ベクトルは一定の位相の曲面内に存在するばかりでなく，またその曲面に垂直である！ その曲面内の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は，曲面を貫通しないから $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} = \langle \tilde{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{d}\theta, \boldsymbol{v}\rangle = 0$ を満たさなければならない．

幾何光学は既約波長 $\lambda\!\!\!^{-}$ が，代表的な局所 Lorentz 系で測定されるとき，波連における不均質のスケール $\mathcal{L}$ に比べて小さい，そして時空の曲率半径 $\mathcal{R}$ に比べて小さいことを仮定する．こうして，$\lambda\!\!\!^{-}$ よりもずっと大きいが，しかし $\mathcal{L}$ あるいは $\mathcal{R}$ よりも小さい領域にわたって，波は前面が平面でありそして単色光であり，そして Lorentz 基準系が存在する（Riemann 規準座標）．これらの“拡張された”局所 Lorentz 系の 1 つで，位相は

$$\theta = k_\alpha x^\alpha + \text{定数}$$

でなければならない．他の表現は $\boldsymbol{\nabla}\theta = \boldsymbol{k}$ を与えないだろう．対応するベクトルポテ

ンシャル (22.25) は

$$A^{\mu} = \mathcal{R}\{a^{\mu} \exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - k^0 t]\} + (\text{“ポスト幾何光学の補正”})$$

となるだろう．したがって，

$$k^0 = 2\pi/(\text{波の周期}) = 2\pi\nu = \omega \equiv (\text{角振動数}),$$
$$|\boldsymbol{k}| = 2\pi/(\text{波の波長}) = 1/\lambda\!\!\!^{-} = \omega,$$
$$\boldsymbol{k}\ \text{は波の伝播方向を示す}$$

時空内の各事象に波動ベクトルが存在する．そしてこれらの波動ベクトルは，端に端を結びつけると，曲線群—“光線” あるいは単純に “線”（ray, 以下光線とよぶ）—をつくる，その接線ベクトルが $\boldsymbol{k}$ である．光線は，それらの接線ベクトルと同じく，一定の位相の曲面内に存在し，そしてこの曲面に垂直である．

光線のアフィンパラメータ λ （波長 $2\pi\lambda\!\!\!^{-}$ と混同されるべきでない）は $\boldsymbol{k} = d/d\lambda$ を満たす．したがってそれは

$$\lambda = t/k^0 + \text{定数} = t/\omega + \text{定数}$$

によって与えられる．ここに t は，光線そのものによってでなく（光線の固有時間はゼロである！），角振動数 ω をみる局所 Lorentz 観測者によって測定されるときの光線に沿う固有時間である．こうして，ω は系に依存する量でありそして t もまた系に依存する量であるが，それらの比 t/ω は光線に沿って（**光線を離れてでない**）測定されるときには系によらないアフィンパラメータである．粒子に対してはアフィンパラメータ λ を固有時間 τ と同定することは可能であり自然である．光線に対してはこの同定は不自然であり不可能である．光線に沿う固有時間の経過は恒等的にゼロである．消滅した τ の代わりに λ の出現は，可能であると想像しなかったことをなす道具を与えてくれる．事象 $\mathcal{A}$ で放射され事象 $\mathcal{B}$ を通過する光線が与えられると，固有時間（ゼロ！）とは直接何の関係ももたないが，アフィンパラメータの等しい増加 $(\lambda_{\mathcal{C}} - \lambda_{\mathcal{B}} = \lambda_{\mathcal{B}} - \lambda_{\mathcal{A}})$ によって定義されている，新しい意味で “離れている”，$\mathcal{B}$ からよりも 2 倍 $\mathcal{A}$ から “離れている” 同じヌル世界線に沿う 3 番目の事象 $\mathcal{C}$ を与えることができる．“アフィンパラメータ” は，それだけを切り離してさえ解析される任意のヌル測地線に対して意味をもつ．この点について，アフィンパラメータは曲がった時空を通過する放射の伝播を取り扱うときにときどき導入され，共通の源からくる 2 個あるいはより多くの光線の拡散によって定義されるいわゆる “照度距離” と区別されるべきである．

本文で研究された Maxwell の方程式 (22.28′) は複素偏りベクトル $\boldsymbol{f}$ は波動ベクトル $\boldsymbol{k}$ に垂直であり，したがって，一定の位相の曲面内に存在する（図をみよ）ことを保証する．偏りのベクトルについての直観は練習問題 22.12 で展開されている．

あるいは

$$0 = k^{\beta}k_{\beta;\alpha} = k^{\beta}k_{\alpha;\beta}$$

*32　となり，結果は

$$\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k} = 0 \qquad (\text{波動ベクトルに対する伝播方程式}) \tag{22.32}$$

*33　である．これは測地線の式であることに注意せよ！ 式 (22.30) と結合されると，曲がった時空における Maxwell の方程式から導かれる陳述は，幾何光学の最初の主要な結果である．光線はヌル測地線である，というものである．

さて伝播ベクトル $\boldsymbol{k} = \nabla\theta$ から波の振幅 $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{f}$ に変え，大きさ a および偏り $\boldsymbol{f}$ に対する別々の式を得よ．式 (22.31) を用いて

$$2a\partial_{\boldsymbol{k}}a = 2a\nabla_{\boldsymbol{k}}a = \nabla_{\boldsymbol{k}}a^2 = \nabla_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{a}\cdot\bar{\boldsymbol{a}}) = \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\nabla_{\boldsymbol{k}}\bar{\boldsymbol{a}}$$
$$= -\frac{1}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{k})(\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\bar{\boldsymbol{a}}) = -a^2\nabla\cdot\boldsymbol{k}$$

したがって

$$\partial_{\boldsymbol{k}}a = -\frac{1}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{k})a \qquad (\text{スカラー振幅に対する伝播方程式}) \tag{22.33}$$

となる．次に式 (22.31) で $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{f}$ と書いて

$$0 = \nabla_{\boldsymbol{k}}(a\boldsymbol{f}) + \frac{1}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{k})a\boldsymbol{f} = a\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}\left[\nabla_{\boldsymbol{k}}a + \frac{1}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{k})a\right] = a\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{f}$$

あるいは

$$\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{f} = 0 \qquad (\text{偏りのベクトルに対する伝播方程式}) \tag{22.34}$$

*34　を得る．これは式 (22.28′) とともに，**偏りのベクトルは光線に垂直であり，そして光線に沿って平行に伝播する**という，幾何光学の 2 番目の主要な結果をつくる．式 (22.30) および (22.31) から導かれる，これらの結果はゲージ条件 (22.28) と両立することをみるのは今や可能である．一点で指定されている，ベクトル $\boldsymbol{k}$ および $\boldsymbol{f}$ は，それらの伝播方程式によって全光線に沿って固定される．しかし両方の伝播方程式は平行移動の法則であるから，条件 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 0$, $\boldsymbol{f}\cdot\bar{\boldsymbol{f}} = 1$，および $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{f} = 0$ は，一度一点でのベクトルに課せられると，全光線に沿って満たされるだろう．

スカラー振幅に対する式 (22.33) は保存則として再定式化されうる．$\partial_{\boldsymbol{k}} \equiv (\boldsymbol{k}\cdot\nabla)$ であるから，式を $(\boldsymbol{k}\cdot\nabla)a^2 + a^2\nabla\cdot\boldsymbol{k} = 0$ あるいは

*35
$$\nabla\cdot(a^2\boldsymbol{k}) = 0 \tag{22.35}$$

---

*32　幾何光学の主法則

*33　(1) 光線はヌル測地線である

*34　(2) “偏り” のベクトルは光線に垂直であり，光線に沿って平行に伝播する

*35　(3) “光子数” の保存

と書き直す．したがってベクトル $a^2\boldsymbol{k}$ は "保存される流れ" であり，そして積分 $\int a^2 k^\mu d^3\Sigma_\mu$ は光線からつくられるある管を切る各 3–体積に対して固定された，不変の値をもつ（管は $a^2\boldsymbol{k}$ の管の壁にわたる積分がゼロを与えるように光線でつくられなければならない）．何が保存されるか？ 純粋に古典的にとどまるには，それは "光線の数" であると言い，そして a^2k^0 を $x^0=$ 一定の超面上での "光線の密度" とよべるだろう．しかし適切な対応とより具体的な物理学的解釈は，式 (22.35) を**光子数の保存則**とよぶことを好むだろう．それは幾何光学の 3 番目の主要な結果である．光子数は，もちろん，つねに保存されるとはかぎらない．それは断熱不変量であり，光子の振動数に比べてゆっくり変化する（$\mathcal{R}\gg\lambda\!\!\!^{-}$）影響（たとえば，時空の曲率，$\sim 1/\mathcal{R}^2$）によって変わらない量である．

コラム 22.4 は練習問題で導かれる他の式とともに，幾何光学の上述の式を要約する．

[**練習問題**]

22.11 電磁場とストレスエネルギー

$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{T}$ に対するコラム 22.4 の D に与えられている式を導け．

22.12 偏り

幾何光学波が通過する事象 $\mathcal{P}_0$ で，伝播方向に沿って z 軸をもつ局所 Lorentz 系を導入せよ．そうすると $\boldsymbol{k}=\omega(\boldsymbol{e}_0+\boldsymbol{e}_z)$．偏りのベクトルは $\boldsymbol{k}$ に直交するから，それは $\boldsymbol{f}=f^0(\boldsymbol{e}_0+\boldsymbol{e}_z)+f^1\boldsymbol{e}_x+f^2\boldsymbol{e}_y$，そして $\boldsymbol{f}\cdot\bar{\boldsymbol{f}}=1$ であるから，それは $|f^1|^2+|f^2|^2=1$ をもつ．

(a) 偏りのベクトルの成分 f^0 は与えられた系で測定される電場および磁場に影響をもたないことを示せ．すなわち，どのような物理学的な測定にも影響せずに，$\boldsymbol{k}$ の倍数を $\boldsymbol{f}$ に加えることができることを示せ．

(b) 以下の偏りのベクトルはリストされている偏りの型に対応することを示せ．

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{e}_x,\ x\ \text{方向への直線偏り},$$
$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{e}_y,\ y\ \text{方向への直線偏り},$$
$$\boldsymbol{f}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x+i\boldsymbol{e}_y),\ \text{右手系円偏り},$$
$$\boldsymbol{f}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x-i\boldsymbol{e}_y),\ \text{左手系円偏り},$$
$$\boldsymbol{f}=\alpha\boldsymbol{e}_x+i(1-\alpha^2)^{1/2}\boldsymbol{e}_y,\ \text{右手系楕円偏り}$$

(c) 偏りの型（直線，円，与えられた楕円の離心率をもつ楕円）は与えられた光線に沿って任意の事象での任意の局所 Lorentz 系で眺めたときには同じであることを示せ．［**ヒント**：Lorentz 変換と成分計算よりもむしろ図と抽象的な計算を用いよ．］

コラム 22.4　曲がった時空における幾何光学（本文および練習問題で導かれる結果の要約）

A. 幾何光学の仮定

時空に源が存在しない領域を伝播する電磁波は，局所的に平面の正面をもちそして単色光である（既約波長 $\lambda\!\!\!^{-} \ll$ スケール $\mathcal{L}$，そのスケールにわたって，振幅，波長，あるいは偏りが変化する．そして $\lambda\!\!\!^{-} \ll \mathcal{R} =$ 時空の曲率の平均半径）．

B. 光線，位相，そして波動ベクトル（コラム 22.3 をみよ）

すべてのもの（振幅，偏り，エネルギー，など）は**光線**に沿って移動される．そして 1 つの光線上の量は他の光線上の量に影響を及ぼさない．光線は接線ベクトル（“**波動ベクトル**”）$\boldsymbol{k}$

$$\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k} = 0$$

をもつ，曲がった時空のヌル測地線である．光線は一定の位相，$\theta =$ 一定 の曲面内に存在し，またこの曲面に垂直である．そしてそれらの接線ベクトルは θ の勾配である．

$$\boldsymbol{k} = \nabla\theta$$

局所 Lorentz 系で k^0 は “角振動数” であり，$k^0/2\pi$ は波の通常の振動数である．そして

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/k^0$$

は波の伝播方向を指し示す単位の 3–ベクトルである．

C. 振幅と偏りのベクトル

波は実振幅 a と単位長の複素偏りのベクトル $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}\cdot\bar{\boldsymbol{f}} = 1$，によって特徴づけられる（基本的な量，$\theta, \boldsymbol{k}, a, \boldsymbol{f}$ の中で $\boldsymbol{f}$ を除くすべての量は実数である．$\boldsymbol{f}$ のより深い理解に対しては練習問題 22.12 をみよ）．偏りのベクトルはいたるところで光線に垂直である $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{f} = 0$，そして光線に沿って平行移動される $\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{f} = 0$．振幅に対する伝播の法則は

$$\partial_{\boldsymbol{k}} a = -\frac{1}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{k})a$$

である．この伝播の法則は**光子の保存則**（古典的には光線の保存則）に同等である．$a^2\boldsymbol{k}$ は $\nabla\cdot(a^2\boldsymbol{k}) = 0$ を満たす “保存される流れ” である．そして $(8\pi\hbar)^{-1}\int a^2k^0\sqrt{|g|}d^3x$ は任意の $x^0 =$ 一定の超曲面上での積分の 3–体積内での光子（光線）の数であり，この体積が光線に沿って運ばれる限り一定である．伝播の法則は一定の位相の各超曲面

上でそれぞれ成り立つ．そこではそれは $a^2\mathcal{A}$ の保存と解釈されうる．ここに $\mathcal{A}$ は光子あるいは光線のパルスの 2 次元の断面積である．練習問題 22.13 をみよ．

D. ベクトルポテンシャル，電磁場，およびストレス–エネルギー運動量

任意の事象で Lorentz ゲージでのベクトルポテンシャルは

$$\boldsymbol{A} = \mathcal{R}\{ae^{i\theta}\boldsymbol{f}\}$$

である．ここに $\mathcal{R}$ は実数部分を意味する．電磁場のテンソルは光線に垂直である，$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k} = 0$．そして

$$\boldsymbol{F} = \mathcal{R}\{iae^{i\theta}\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{f}\}$$

によって与えられる．対応する電場および磁場は任意の局所 Lorentz 系で

$$\mathbf{E} = \mathcal{R}\{iak^0e^{i\theta}(\boldsymbol{f}\text{ の }\boldsymbol{k}\text{ に垂直な射影})\},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{n}\times\mathbf{E},\quad \text{ここに } \mathbf{n} \equiv \mathbf{k}/k^0$$

である．ストレス–エネルギーテンソルは波長にわたって平均すると，

$$\boldsymbol{T} = (1/8\pi)a^2\boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{k}$$

であり，局所 Lorentz 系で，

$$T^{00} = (1/8\pi)(ak^0)^2$$

のエネルギー密度および

$$T^{0j} = T^{00}n^j$$

のエネルギー束に対応している．したがってエネルギーは光の速さで光線に沿って（$\mathbf{n} = \mathbf{k}/k^0$ 方向に）流れる．これは 4–運動量 $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ をもつ光子のビームによって生み出されるストレス–エネルギーテンソルと同一である．

エネルギー運動量の保存 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 0$ は，光線の保存則 $\boldsymbol{\nabla}\cdot(a^2\boldsymbol{k}) = 0$ および測地線の法則 $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k} \equiv (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{k} = 0$ から出る．

$$8\pi\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(a^2\boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{k}) = [\boldsymbol{\nabla}\cdot(a^2\boldsymbol{k})]\boldsymbol{k} + a^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{k} = 0$$

断熱的な（幾何光学）不変量である，“光線の数”a^2k^0 あるいは単位体積内の “光子の数”$(8\pi\hbar)^{-1}a^2k^0$ は，エネルギー $(8\pi)^{-1}a^2(k^0)^2$ を振動数 k^0 で割ったものに比例し正確に単振動の断熱不変量 E/ω に対応する [Einstein (1916)，Landau and Lifshitz (1960)]．

E. 幾何光学の光子による再解釈

幾何光学の法則は以下のように再解釈されうる．この再解釈は電磁場の標準的な量子論の基礎になる（たとえば，Baym（1969）の 1 章および 13 章をみよ）．そしてその量子論の古典的な極限は標準的な Mawell の電気力学である．光子は時空のヌル測地線に沿って動くゼロ静止質量の粒子である（ヌル光線）．光子の 4–運動量はヌル光線（波動ベクトル）の接線ベクトルに $\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k}$ によって関連している．アフィンパラメータの再規格化，

$$(\text{新しいパラメータ}) = (1/\hbar) \times (\text{古いパラメータ})$$

は $\boldsymbol{p}$ を光線への接線ベクトルにする．各光子は偏りのベクトル $\boldsymbol{f}$ をもっており，このベクトルは光子の 4–運動量に垂直である $(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{f} = 0)$．そして光子はこのベクトルを測地線の世界線に沿って平行移動する $(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{f} = 0)$．すべてほとんど同じ 4–運動量 $\boldsymbol{p}$ と偏りのベクトル $\boldsymbol{f}$（平行移動によって比べたときに）をもつ，光子の群は古典的な電磁波をつくり上げる．波のスカラー振幅 a は波のストレス–エネルギーテンソル

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{8\pi} a^2 \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{k} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{a}{\hbar}\right)^2 \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{p}$$

を数の束ベクトル $\boldsymbol{S}$ をもつ光子の群のストレス–エネルギーテンソル，

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{S}$$

に等しく置くことによって定まる［式 (5.18) をみよ］．**結果：**

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{a}{\hbar}\right)^2 \boldsymbol{p} = \frac{1}{8\pi\hbar} a^2 \boldsymbol{k}$$

あるいは，任意の局所 Lorentz 系で，

$$a = (8\pi\hbar^2 S^0/p^0)^{1/2} = (8\pi)^{1/2}\hbar \left(\frac{\text{光子の数密度}}{\text{1 個の光子のエネルギー}}\right)^{1/2}$$

22.13　光線の束の領域

式 (22.31) を座標の 1 つが $x^0 = \theta$，位相（遅延時間座標）であるように選ばれている座標系で書け．

(a) $g^{00} = 0$ および微分 $\partial/\partial\theta$ が式 (22.33) に現れないことを示せ．したがって a の伝播は $\theta =$ 一定 の超曲面内でのみ記述されうる．

(b) 以下の構成を遂行せよ（図 22.1 をみよ）．光線 $\mathcal{C}_0$ を取り上げて a がそれに沿って伝播されるものとする．2 次元の断面をもつ光線の束を取り上げて，(i) すべての光線は $\mathcal{C}_0$ と同じ一定の位相の曲面内に存在する．そして (ii) $\mathcal{C}_0$ を取り囲むようにする（曲面は 3 次元であるから，その曲面を埋める任意の束は 2 次元の断面をもつ）．任意の事象 $\mathcal{P}_0$ で，

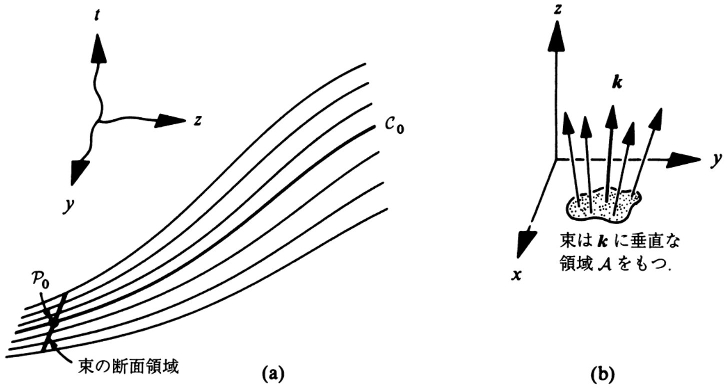


図 22.1　2 次元の断面積をもつ光線の束に対する幾何光学，すべての束は一定の位相，$\theta=$ 一定の曲面内に存在する．スケッチ（a）は 1 個の空間次元が削除された時空図で，中心的な光線 $\mathcal{C}_0$ を取り囲む束を示す．スケッチ（b）は事象 $\mathcal{P}_0$ での局所 Lorentz 系で同時的な薄片上でみられたときの束を示す．束を薄く切ることはおのおのの光線を“光子”に変える．したがって束は光子で満たされた 2 次元の曲面になる．この光子で満たされた曲面の領域 $\mathcal{A}$ は以下の法則に従う（練習問題 22.13 および 22.14 をみよ）．(1) $\mathcal{A}$ は Lorentz 系の選択によらない，$\mathcal{A}$ は光線 $\mathcal{C}_0$ に沿う位置 $\mathcal{P}_0$ にのみ依存する．(2) 波の振幅 a は

$$\mathcal{A}a^2 = \text{光線 } \mathcal{C}_0 \text{に沿ってすべて一定}$$

を満たす（**“光子の束の保存”**）．(3) $\mathcal{A}$ は **“伝播方程式”** (22.36) に従う．

そこでの任意の局所 Lorentz 系で，“同時薄片”$x^0=$ 一定 上で束の断面領域 $\mathcal{A}$ を測定せよ．(**注意：**測定される領域は 3 次元 Euclid 的な意味で $\boldsymbol{k}$ に垂直である．それは $\boldsymbol{k}$ 方向に，並んで伝播する光子の集団によって瞬間的に占められる領域と考えられうる．) 領域 $\mathcal{A}$ は，与えられた事象 $\mathcal{P}_0$ で，**どのような Lorentz 系がそれを測定するために用いられるかに関係なく同じであることを示せ．しかし領域は，光線の互いに他からの発散あるいは互いに他への収束の結果として，光線 $\mathcal{C}_0$ に沿う点から点へ変化する．**

$$\partial_{\boldsymbol{k}}\mathcal{A} = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{k})\mathcal{A} \tag{22.36}$$

それから $\mathcal{A}a^2$ は光線 $\mathcal{C}_0$ に沿っていたるところ一定であることを示せ（“光子束の保存”）．[**ヒント：**(i) 束内の隣接する光線を結ぶ任意のベクトル $\boldsymbol{\xi}$ は $\boldsymbol{k}$ に垂直である．なぜなら $\boldsymbol{\xi}$ は一定の θ の曲面内に存在し，そして $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi} = \langle\bar{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{\xi}\rangle = \langle \boldsymbol{d}\theta,\boldsymbol{\xi}\rangle =$ ($\boldsymbol{\xi}$ に沿う θ における変化) $=0$ であるからである．(ii) 単純さのために，特定の事象 $\mathcal{P}_0$ での特定の局所 Lorentz 系内で眺めたときに長方形の断面をもつ束を考えよ [稜ベクトル $\boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=0$ (稜は直交する) そして $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{e}_0 = 0$ (稜は一定時間の曲面内にある) および $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{k}=0$ (稜ベクトルは束の隣接する光線を結んでいるから)]．$\mathcal{P}_0$ での任意の他の Lorentz 系で稜ベクトルは，ある α および β に対して $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}+\alpha\boldsymbol{k}$ および $\boldsymbol{w}'=\boldsymbol{w}+\beta\boldsymbol{k}$ であることを図で示せ．$\mathcal{P}_0$ でのすべての Lorentz 系で断面は同一の形と同一の領域をもち，そして伝播の方向に空間的に直交する ($\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{w}=0$) ことを結論せよ．(iii) 局所 Lorentz 系での計算によって $\partial_{\boldsymbol{k}}\mathcal{A}=(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{k})\mathcal{A}$ を示せ．(iv) $\partial_{\boldsymbol{k}}a = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{k})a$ から $\partial_{\boldsymbol{k}}(\mathcal{A}a^2)=0$ を結論せよ．]

22.14　焦点定理

すべて一定の位相の同じ曲面内に存在する光線の束の断面領域 $\mathcal{A}$ は束の中心光線に沿っ

て式 (22.36) の割合で変化する（図 22.1 をみよ）.

(a) $\mathcal{A}^{1/2}$ の 2 次微分に対する以下の式 (“**焦点方程式**”) を導け．

$$\frac{d^2\mathcal{A}^{1/2}}{d\lambda^2} = -\left(|\sigma|^2 + \frac{1}{2}R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta\right)\mathcal{A}^{1/2} \tag{22.37}$$

ここに λ は中心光線に沿うアフィンパラメータであり ($\boldsymbol{k} = d/d\lambda$)，“光線のずれの大きさ”$|\sigma|$ は

$$|\sigma|^2 \equiv \frac{1}{2}k_{\alpha;\beta}k^{\alpha;\beta} - \frac{1}{4}(k^\mu{}_{;\mu})^2 \tag{22.38}$$

によって定義される．［**ヒント**：これは添字操作についての強力な練習問題である．操作に必要とされる重要な式は，$\mathcal{A}_{,\alpha}k^\alpha = (k^\alpha{}_{;\alpha})\mathcal{A}$ ［式 (22.36)］，$k^\alpha{}_{;\beta}k^\beta = 0$ ［光線に対する測地線の式 (22.32)］，$k_{\alpha;\beta} = k_{\beta;\alpha}$ ［それは $k_\alpha \equiv \theta_{,\alpha}$ から出る］，そしてベクトルの共変微分の交換に対する規則である ［式 (16.6c)］.］

(b) 原点で $\boldsymbol{k} = \omega(\boldsymbol{e}_t + \boldsymbol{e}_z)$ である局所 Lorentz 系で

$$|\sigma|^2 = \frac{1}{4}(k_{x,x} - k_{y,y})^2 + (k_{x,y})^2 \tag{22.39}$$

を示せ．こうして，$|\sigma|^2$ は負でなく，絶対値の符合の使用を正当化する．

(c) **議論**：量 $|\sigma|$ は光線の束の**ずれ**とよばれる，なぜならそれは近傍の光線が互いに他を横切る程度を測定するからである［たとえば，Sachs (1964) をみよ］．したがって，焦点方程式 (22.37) は，ずれが光線の束を集中するという ($d^2\mathcal{A}^{1/2}/d\lambda^2 < 0$ とする)．そして時空の曲率もまた，もし $R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta > 0$ ならば光線の束を集中する．しかしもし $R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta < 0$ ならば光線の束を発散する（もともと円形の断面の爪楊枝の束がずれによって楕円形の断面に締めつけられる）.

(d) エネルギー密度 $T_{\hat{0}\hat{0}}$ は，時空内の任意の場所での任意の観測者によって測定されるとき，負でないと仮定せよ．中心的な式 (22.37) を Einstein の場の方程式と結びつけることによって，

$$\frac{d^2\mathcal{A}^{1/2}}{d\lambda^2} \le 0 \qquad \begin{pmatrix}\text{時空内の任意の場所で，すべて}\\ \text{一定の位相の同じ曲面内に存在}\\ \text{する光線の任意の束に対して}\end{pmatrix} \tag{22.40}$$

(**焦点定理**)．この定理はブラックホール物理学（34.5 節）において，および特異点の理論（34.6 節）において決定的な役割を演じる.

22.6 曲がった時空における運動論 *

銀河内の星は，それぞれ自らの測地線の世界線上にあり，それぞれすべての他の星が感じる時空の曲率の生み出しに役立ちながら，時空をさまよう．ビッグバンの熱い段階からとり残された光子は，宇宙の均質さと等方性についてのデータを自らもたらしながら，地球を満たす．これらの，および多くの他の問題の理論的な解析は，もしひとつひとつの星や光子の運動の軌道をたどろうと試みるならば，取り扱うことができない．しかし統計的な記述は正確な結果を与え，そして有力である．さらに，天体物理学および宇宙論におけるたいていの問題に対して，統計的な記述のもっとも単純なもの—衝突を無視するもの—は適切である．通常衝突は系の大きいスケールの振る舞い（たとえば銀河）に対して重要でない，あるいは衝突は非常に重要であって流体の記述が可能である（たとえば星の内部において）．

そこで，衝突せずに，測地線の世界線上を時空内で動く粒子（星，あるいは光子，あるいはブラックホール，あるいは…）の群れを考えよ．単純さのために，粒子はすべて同じ静止質量をもつと仮定せよ．そうすると粒子についての統計的な性質のすべての情報は 1 つの関数，“**分布関数**” あるいは “**位相空間における数密度**”，$\mathcal{N}$ に取り入れられうる．

*36 $\mathcal{N}$ を曲がった時空内の特定の事象 $\mathcal{P}_0$ での特定の局所 Lorentz 観測者によってなされる測定によって定義せよ．観測者に 3–体積 $\mathcal{V}_x$ をもつ（そして仮想の壁をもつ）箱を与えよ．観測者に何個の粒子 N が箱の内部にあるか，そして局所 Lorentz 運動量成分 p^j を領域

$$P^j - \frac{1}{2}\Delta p^j < p^j < P^j + \frac{1}{2}\Delta p^j$$

にもつかを尋ねよ．（観測者は粒子のエネルギー p^0 を無視することができる．なぜならすべての粒子は同じ静止質量 m をもち，エネルギー

$$p^0 = (m^2 + \boldsymbol{p}^2)^{1/2}$$

は運動量によって一義的に固定されるからである．）N 個の粒子によって占められている運動量空間での体積は $\mathcal{V}_p = \Delta p^x \Delta p^y \Delta p^z$ である．そして**位相空間での体積は**

$$\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}_x \mathcal{V}_p \tag{22.41}$$

*37 **である**．最初の観測者に対して動いている $\mathcal{P}_0$ での別な観測者は，これらの同じ N 個の粒子が占める空間体積 $\mathcal{V}_x$ と運動量体積 $\mathcal{V}_p$ について意見を異にするだろう．

$$\mathcal{V}_x \text{ および } \mathcal{V}_p \text{ は Lorentz 系の選択に依存する} \tag{22.42}$$

---

* この題目のより詳細なそして高度の取り扱いに対しては，たとえば，Tauber and Weiberg (1961)，および Lindquist (1966)，Marle (1969)，Ehlers (1971)，Stewart (1971)，Israel (1972)，およびそれらに引用されている文献をみよ．Ehlers (1971) はとくによい入門的なレビュー文献である．

*36 同じ粒子の群に対する位相空間での体積

*37 位相空間での体積の Lorentz 不変性

しかし，すべての観測者は積 $\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}_x \mathcal{V}_p$（“位相空間での体積”）の値について一致するだろう．

$$\text{時空内の与えられた事象で } N \text{ 個の同じ粒子の与えられた組によって占められる位相空間の体積 } \mathcal{V} \text{ は，測定される局所 Lorentz 系によらない} \tag{22.43}$$

（証明に対してはコラム 22.5 をみよ．）さらに，同じ N 個の粒子がそれらの測地線の世界線に沿って時空を（そして運動量空間を）動くとき，それらが位相空間内で広げる体積 $\mathcal{V}$ は一定にとどまる．

*38 $$N \text{ 個の粒子の与えられた群によって占められる } \mathcal{V} \text{ は，群の世界線に沿う位置によらない（“曲がった時空における Liouville の定理”）} \tag{22.44}$$

（証明に対してはコラム 22.6 をみよ．）

N 個の粒子の与えられた組によって占められる位相空間における体積 $\mathcal{V}$ よりも，これらの粒子の 1 つの近傍における **“位相空間における数密度”**（**“分布関数”**）は，応用に対してより好都合である．*39

$$\mathcal{N} \equiv N/\mathcal{V} \tag{22.45}$$

この数密度は何に依存するか？　それは測定がなされる時空内の位置 $\mathcal{P}$ に依存する．それはまたその近傍で測定がなされる粒子の 4–運動量 $\boldsymbol{p}$ に依存する．しかし粒子はすべて同じ静止質量をもつから，$\boldsymbol{p}$ は $\mathcal{P}$ での接線空間で任意のそしてすべての値をとることができない．むしろ，$\boldsymbol{p}$ は $\mathcal{P}$ での “前方の質量双曲面” に閉じ込められる．

$$\boldsymbol{p}^2 = m^2, \qquad \boldsymbol{p}\text{は未来の光円錐内に存在する}$$

こうして，

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}\left[\begin{pmatrix}\text{時空内の}\\ \text{位置，}\mathcal{P}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathcal{P}\text{ での接線空間の前方の質}\\ \text{量双曲面上に存在しなけれ}\\ \text{ばならない 4–運動量 }\boldsymbol{p}\end{pmatrix}\right] \tag{22.46}$$

測地線の世界線 $\mathcal{P}(\lambda)$ [$\lambda =$（アフィンパラメータ）=(もし粒子が有限の静止質量をもつならば，固有時間)] と，4–運動量 $\boldsymbol{p}(\lambda)$ をもつ群の中のある 1 個の粒子をとれ．この粒子の世界線に沿う各点でのこの粒子の近傍における位相空間内の密度を吟味せよ．

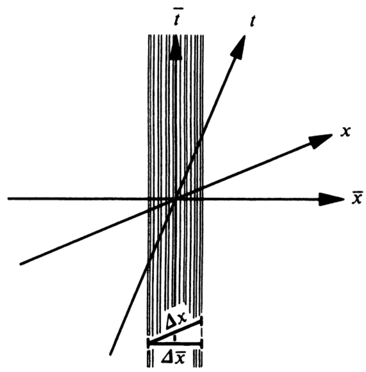
---

*38　Liouville の定理（位相空間における体積の保存）
*39　位相空間における数密度（分布関数）

コラム 22.5　位相空間における体積

A. ゼロでない静止質量をもつ同じ粒子の群に対して

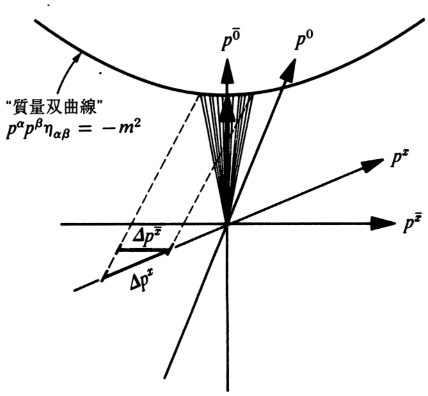
“$\boldsymbol{P}$” と名づけられる 4–運動量をもつ “John” という名の粒子が通過する事象 $\mathcal{P}_0$ をとれ．$\mathcal{P}_0$ での John の局所 Lorentz 静止系（“バーのついた系”，$\bar{\mathcal{S}}$）で，この粒子を含む小さい 3–体積 $\mathcal{V}_x \equiv \Delta\bar{x}\Delta\bar{y}\Delta\bar{z}$ を選べ．また “運動量空間内の小さい 3–体積” $\mathcal{V}_{\bar{p}} \equiv \Delta p^{\bar{x}}\Delta p^{\bar{y}}\Delta p^{\bar{z}}$ を，John の運動量 $P^{\bar{x}} = P^{\bar{y}} = P^{\bar{z}} = 0$ を中心にして選べ．注意を $\mathcal{V}_{\bar{x}}$ を通過する世界線をもち，そして $P^{\bar{j}} = 0$ を取り囲む領域 $\mathcal{V}_{\bar{p}}$ 内の運動量 $p^{\bar{j}}$ をもつすべての粒子に集中せよ．



この束を静止系に相対的に速さ β で動く，$\mathcal{P}_0$ での別な局所 Lorentz 系（“バーをもたない系”，$\mathcal{S}$）で吟味せよ．系の相対的な運動が x 方向と $\bar{x}$ 方向を向くように軸を位置づけよ．そうすると新しい系内で占められる空間体積 $\mathcal{V}_x$ は $\Delta y = \Delta\bar{y}, \Delta z = \Delta\bar{z}$ をもつ（横方向に運動の効果はない），そして $\Delta x = (1-\beta^2)^{1/2}\Delta\bar{x}$（縦方向に Lorentz 収縮）．したがって $\mathcal{V}_x = (1-\beta^2)^{1/2}\mathcal{V}_{\bar{x}}$（“空間体積に対する変換則”）あるいは，同等に［$P^0 = m/(1-\beta^2)^{1/2}$ であるから］

$$P^0\mathcal{V}_x = m\mathcal{V}_{\bar{x}} = (\text{一定, Lorentz 系によらない})$$

時空の図に類似の運動量空間の図は，束内の粒子に対する運動量の広がりを表現し，そして $\Delta p^x = \Delta p^{\bar{x}}/(1-\beta^2)^{1/2}$ を示す．$\bar{\mathcal{S}}$ から $\mathcal{S}$ への Lorentz 変換は運動量の横成分に影響を及ぼさない，$\Delta p^y = \Delta p^{\bar{y}}, \Delta p^z = \Delta p^{\bar{z}}$．したがって $\mathcal{V}_p = \mathcal{V}_{\bar{p}}/(1-\beta^2)^{1/2}$（“運動量体積に対する変換則”）あるいは，同等に



$$\frac{\mathcal{V}_p}{P^0} = \frac{\mathcal{V}_{\bar{p}}}{m} = (\text{一定, Lorentz 系によらない})$$

空間の 3–体積 $\mathcal{V}_x$ および $\mathcal{V}_{\bar{x}}$ は 1 つの系から別の系へと異なり，そして運動量 3–体積 $\mathcal{V}_p$ および $\mathcal{V}_{\bar{p}}$ は異なるけれども，6 次元

位相空間での体積は Lorentz 不変量である．

$$\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}_{\bar{x}}\mathcal{V}_{\bar{p}} = \mathcal{V}_x\mathcal{V}_p$$

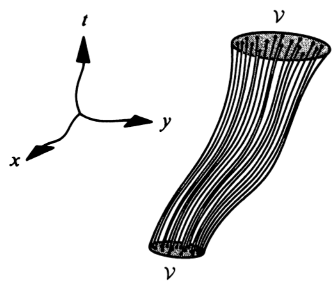
それは系によらない幾何学的対象である！

B. ゼロ静止質量をもつ同じ粒子の群に対して

それぞれ，より小さい静止質量と実験室に相対的により高い速度の粒子をもつ系の連続を吟味せよ．各系内の粒子のすべての束に対して，$P^0\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_p/P^0$，および $\mathcal{V}_x\mathcal{V}_p$ は Lorentz 不変量である．したがって，$m\to 0$, $\beta\to 1$，および $P^0 = m/(1-\beta^2)^{1/2}\to$ 有限値（光の速さで動くゼロ静止質量の粒子）の極限で，$P^0\mathcal{V}_x$ および $\mathcal{V}_p/P^0$ および $\mathcal{V}_x\mathcal{V}_p$ は，依然 Lorentz 不変な幾何学的量である．

コラム 22.6　位相空間における体積の保存

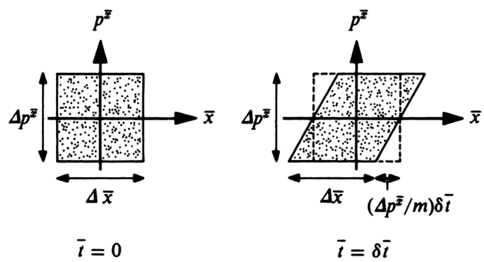
曲がった時空を通って近傍の測地線上を動く同じ粒子の非常に小さい束を吟味せよ．位相空間内の束の体積 $\mathcal{V}$（任意の局所 Lorentz 系で $\mathcal{V} = \mathcal{V}_x\mathcal{V}_p$）を，束の中心の測地線に沿うアフィンパラメータ λ の関数として測定せよ．以下の計算は



$$d\mathcal{V}/d\lambda = 0 \qquad \begin{pmatrix}\text{“曲がった時空における}\\ \text{Liouville の定理”}\end{pmatrix}$$

を示す．

有限の静止質量の粒子に対する証明： 時間間隔 $\delta\tau$ 間の粒子の運動を中心粒子の局所 Lorentz 静止系を用いてを吟味せよ．すべての速度はこの系で小さいので，



各粒子は図での高さに比例する速度 $d\bar{x}/d\bar{t}$ で動く，

$d\bar{x}/d\bar{t} = p^{\bar{x}}/\mathrm{m}$

そしてその運動量を保存する，$dp^{\bar{x}}/d\bar{t} = 0$．したがって粒子の占める領域は形を変えるが，その面積を保存する．$(y-p^y)$ および $(z-p^z)$ に対しても同じことが成り立つ．

$$p^{\bar{j}} = m dx^{\bar{j}}/d\bar{t}$$

したがって（図をみよ）運動量および位置についての広がりは $\Delta\bar{x}\Delta p^{\bar{x}}$, $\Delta\bar{y}\Delta p^{\bar{y}}$，および $\Delta\bar{z}\Delta p^{\bar{z}}$ を保存する．すなわち，

$$\frac{d\mathcal{V}}{d\tau} = \frac{\delta(\Delta\bar{x}\Delta\bar{y}\Delta\bar{z}\Delta p^{\bar{x}}\Delta y^{\bar{y}}\Delta p^{\bar{z}})}{\delta\bar{t}} = 0$$

しかしある任意定数 a および b に対して $\tau = a\lambda + b$，したがって $d\mathcal{V}/d\lambda = 0$.

ゼロ静止質量の粒子に対する証明：局所 Lorentz 系，そこでは中心粒子は $\boldsymbol{P} = P^0(\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_x)$ をもつ，系での粒子の運動を吟味せよ．この系では，すべての粒子は $p^y \ll p^0$, $p^z \ll p^0$, $p^x = p^0 + O([p^y]^2/P^0) \approx P^0$ をもつ．アフィンパラメータの適切な規格化に対して $p^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ である（コラム 22.4 をみよ）から，$dx^j/dt = p^j/p^0$．すなわち，

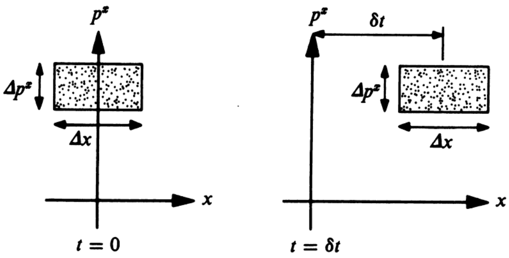
$$\frac{dx}{dt} = 1 + \mathrm{O}([p^y/P^0]^2 + [p^z/P^0]^2)$$

$$\approx 1,$$

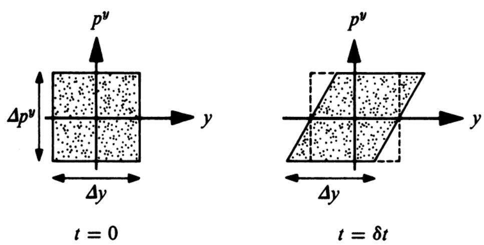
$$\frac{dy}{dt} = \frac{p^y}{P^0}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{p^z}{P^0}$$

したがって（図をみよ）$\Delta x \Delta p^x$, $\Delta y \Delta p^y$, および $\Delta z \Delta p^z$ はすべて保存される．そして

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \frac{\delta(\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p^x \Delta p^y \Delta p^z)}{\delta t} = 0$$



各粒子（"光子"）は局所 Lorentz 系で $dx/dt = 1$ そして $dp^z/dt = 0$ で動く．粒子の占める領域の面積および形は保存される．



粒子（"光子"）の速度は図での高さに比例する

$$dy/dt = p^y/p^0$$

そして $dp^y/dt = 0$．したがって，粒子の占める領域は形を変えるが，その面積を保存する．$z - p^z$ についても同じことが成り立つ．

しかし中心粒子の t およびアフィンパラメータ λ は $t = P^0\lambda$ によって結ばれている［式 (16.4) を参照せよ］．こうして

$$d\mathcal{V}/d\lambda = 0$$

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}[\mathcal{P}(\lambda), \boldsymbol{p}(\lambda)]$$

$\mathcal{N}(\lambda)$ を以下のように計算せよ．(1) 世界線上の最初の事象 $\mathcal{P}(0)$ と，粒子を含む位相空間の体積 $\mathcal{V}$ をとれ．(2) $\mathcal{P}(0)$ で $\mathcal{V}$ に含まれるすべての粒子を赤いペンキで覆え．(3) 赤い粒子が最初の粒子と並んで時空を通って動くのを注視せよ．(4) 赤い粒子が動くにつれて，それらが占める位相空間の領域は形を大きく変える．しかしその体積 $\mathcal{V}$ は固定されたままである（Liouville の定理）．さらに，粒子はその位相空間の領域に入ったりあるいは離れたりできない（一度中に入ればつねに中にいて，一度外に出ればつねに外にいる．位相空間の領域の境界は粒子に結びついておりそして粒子とともに動く）．(5) したがって，最初の粒子の世界線に沿う任意の λ で，粒子は不変の体積 $\mathcal{V}$，不変の粒子数 N，および不変の比 $\mathcal{N} = N/\mathcal{V}$ の位相空間の領域内にある．

*40
$$\frac{d\mathcal{N}[\mathcal{P}(\lambda), \boldsymbol{p}(\lambda)]}{d\lambda} = 0 \tag{22.47}$$

位相空間内で粒子の軌道に沿う $\mathcal{N}$ の保存に対するこの式は “衝突のない Boltzmann 方程式,” あるいは “運動論的な方程式” とよばれる．

光子は Boltzmann 方程式の重要な応用を与える．しかし光子を議論するときには通常位相空間での数密度によって考えない．むしろ，与えられた振動数 ν で，与えられた方向 $\boldsymbol{n}$
*41 に従う放射の，指定された局所 Lorentz 系で測定されたときの “比強度” I_ν について話す．

$$I_\nu \equiv \frac{d(\text{エネルギー})}{d(\text{時間})d(\text{領域})d(\text{振動数})d(\text{立体角})} \tag{22.48}$$

（図 22.2 をみよ.）局所 Lorentz 系での単純な計算は

$$\mathcal{N} = h^{-4}(I_\nu/\nu^3) \tag{22.49}$$

*42 を示す．ここに h は Planck の定数である（図 22.2 をみよ）．こうして，もし時空内の同じあるいは異なる事象での 2 人の異なる観測者が同じ光子（そして近傍の光子）の通過を考察するならば，彼らは異なる振動数 ν（“Doppler 偏移”，“宇宙論的な赤方偏移”，“重力による赤方偏移”），および異なる比強度 I_ν をみるだろう．しかし彼らは比 I_ν/ν^3 に対して同じ値を得るだろう．こうして I_ν/ν^3 は $\mathcal{N}$ のように，観測者から観測者へそして与えられた光子の世界線に沿う事象から事象へ不変である．

［練習問題］

22.15　束に対する逆 2 乗則

与えられた源から望遠鏡に入る放射の **比束** は

$$F_\nu = \int I_\nu \, d\Omega \tag{22.50}$$

によって定義される．ここに積分は観測者の領域に源によって張られる全立体角（$\ll 4\pi$ と仮定されている）にわたる．Boltzmann の方程式を用いて（I_ν/ν^3 の保存），平坦な時空で互いに相対的にすべて静止している観測者に対して $F_\nu \propto$（源からの距離）$^{-2}$ を示せ．

22.16　太陽の明るさ

太陽の表面は地球上に立っている学生に対するよりも水星上に立っている宇宙飛行士に対して少しでもより明るくみえるか？

22.17　黒体放射

黒体放射の “光学的に厚い” 源（たとえば，星の表面，あるいはビッグバン直後の宇宙を満たしている熱い物質）は，源の近くで静止している観測者によって眺められたときに，

*40　衝突のない Boltzmann 方程式（運動論的な方程式）
*41　比強度 I_ν によって表される光子に対する分布関数
*42　I_ν/ν^3 の不変性と保存

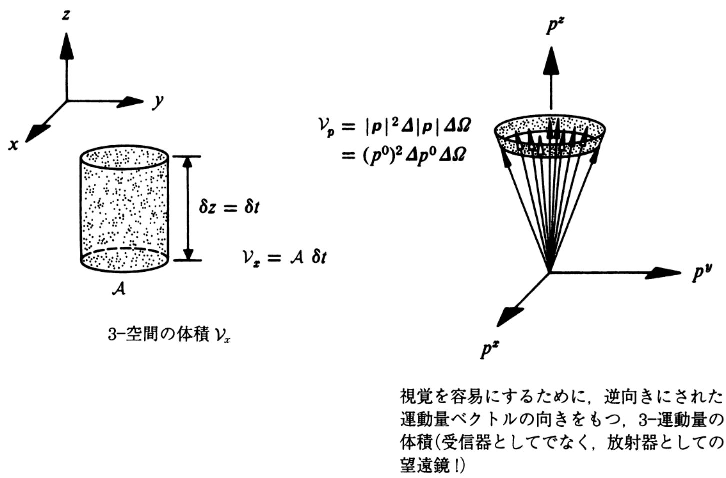


図 22.2 比強度 I_ν によって解釈される，光子に対する位相空間における数密度．天文学者は z 方向について小さい立体角 $\Delta\Omega$ 内から達し，そして p^0 と $p^0+\Delta p^0$ の間のエネルギーをもつ光子のみを容認するフィルター（濾波器）つきの望遠鏡をもつ．彼の望遠鏡が収集する領域，$\mathcal{A}$ は x, y 平面内に存在する（入射する光子のビームに垂直である）．δN は時間間隔 δt 内に領域 $\mathcal{A}$ を横切る光子の数とする．[すべてのエネルギー，領域，時間，および長さは，天文学者が彼の（多分加速されている）世界線に沿って自らとともに Fermi–Walker 移動する直交系（“固有基準系”，13.6 節）で，あるいは，同等であるが，天文学者について瞬間的に静止している局所 Lorentz 系で測定される．] δN 個の光子は，ちょうど時間間隔 δt が始まる前には，上に示されている領域 $\mathcal{A}$ および高さ $\delta z = \delta t$ の円柱内に存在する．δN 個の光子の空間 3–体積はこうして $\mathcal{V}_x = \mathcal{A}\,\delta t$ である．δN 個の光子の運動量 3–体積は $\mathcal{V}_p = (p^0)^2 \Delta p^0 \Delta\Omega$（図をみよ）．したがって，位相空間におけるそれらの数密度は

$$\mathcal{N} = \frac{\delta N}{\mathcal{V}_x \mathcal{V}_p} = \frac{\delta N}{\mathcal{A}\,\delta t (p^0)^2 (\Delta p^0) \Delta\Omega} = \frac{\delta N}{h^3\,\mathcal{A} \delta t \nu^2 \Delta\nu \Delta\Omega}$$

ここに ν は望遠鏡によって測定される光子の振動数である（$p^0 = h\nu$）．

光子の比強度 I_ν（天文学における標準的な概念）は，単位面積あたり，単位時間あたり，単位振動数あたり，ビームに直交する面を横切る単位立体角あたりのエネルギーである．すなわち，

$$I_\nu = \frac{h\nu\,\delta N}{\mathcal{A}\,\delta t \Delta\nu \Delta\Omega}$$

直接の比較は $\mathcal{N} = h^{-4}(I_\nu/\nu^3)$ を明かす．

こうして，光子の世界線に沿う $\mathcal{N}$ の保存は I_ν/ν^3 の保存を意味する．この保存則は宇宙論（たとえば，コラム 29.2 および練習問題 29.5）および重力レンズ効果において，重要な応用を見出す（Refsdal 1964）．また練習問題 22.15–22.17 をみよ．

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{22.51}$$

によって与えられる（Planck の放射則）比強度で等方的に光子を放出する．ここに T は源の温度である．宇宙の任意の場所で，任意の局所 Lorentz 系で，自らを横切って流れるこの放射を吟味する任意の観測者は，また黒体スペクトルをみるであろうことを示せ．さらに，もし観測者が任意の 1 つの振動数での比強度 I_ν を測定することによって温度を計算するならば，そしてもし観測者がスペクトルの形から温度を計算するならば，それらの温度は一致するだろう（放射は “灰色の物体” に “薄められる” よりもむしろ黒体にとどまる）．最後に，観測者が測定する温度は，任意の与えられた光子の振動数が赤方偏移されるのと正確に同じ因子だけ赤方偏移されることを示せ．

$$\frac{T_{\text{観測される}}}{T_{\text{放出される}}} = \left(\frac{\nu_{\text{観測される}}}{\nu_{\text{放出される}}}\right) \qquad \text{与えられた光子に対して} \tag{22.52}$$

[赤方偏移は，原因が “Doppler” であり，“宇宙論的” であり，“重力的” である，あるいはある分離できない混合でありうることに注意せよ．重要なことは，すべて，光子の 4–運動量に対する平行移動の法則に $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{p}=0$ が，赤方偏移，$\nu_{観測される}/\nu_{放出される}$ は放出される振動数によらないことを保証するという事実である.]

22.18　ストレス–エネルギーテンソル

(a) 事象 $\mathcal{P}_0$ で同じ粒子の群に対するストレス–エネルギーテンソルは $\mathcal{P}_0$ での運動量空間の質量双曲面にわたる積分として書かれうることを示せ.

$$\boldsymbol{T}=\int(\mathcal{N}\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p})(d\mathcal{V}_p/p^0) \tag{22.53}$$

$$\frac{d\mathcal{V}_p}{p^0}\equiv\frac{dp^x dp^y dp^z}{p^0}\quad \text{局所 Lorentz 系で} \tag{22.54}$$

（コラム 22.5 から，$d\mathcal{V}_p/p^0$ は質量双曲面の任意の部分に対して Lorentz 不変な体積要素であることに注意せよ.）

(b) Boltzmann の方程式, $d\mathcal{N}/d\lambda=0$ は, 同じ粒子の任意の群に対して $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}=0$ を意味することを確かめよ．[ヒント：$\boldsymbol{T}$ に対する上述の表現を用いて, そして形式 $Dp^\mu/d\lambda=0$ での測地線の方程式を用いて，局所 Lorentz 系で $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}$ を計算せよ.]

22.19　同一でない粒子に対する運動論

静止質量の広い分布をもつ粒子の群に対して,

$$\mathcal{N}=\frac{\Delta N}{\mathcal{V}_x\mathcal{V}_p\Delta m} \tag{22.55}$$

を定義せよ．ここに $\mathcal{V}_x$ および $\mathcal{V}_p$ は空間 3–体積と運動量 3–体積である，そして ΔN は $m-\Delta m/2$ および $m+\Delta m/2$ 間の静止質量をもつ，領域 $\mathcal{V}_x\mathcal{V}_p$ における粒子の数である．以下のことを示せ.

(a) $\mathcal{V}_x\mathcal{V}_p\Delta m$ は Lorentz 系および粒子の束の世界管上の位置によらない.

(b) $\mathcal{N}$ は時空内の位置 $\mathcal{P}$ および $\mathcal{P}$ での接線空間の未来の光円錐内部の 4–運動量 $\boldsymbol{p}$ の関数とみなされうる.

$$\mathcal{N}=\mathcal{N}(\mathcal{P},\boldsymbol{p}) \tag{22.56}$$

(c) $\mathcal{N}$ は衝突のない Boltzmann の方程式（運動論的な方程式）を満たす.

$$\frac{d\mathcal{N}[\mathcal{P}(\lambda),\boldsymbol{p}(\lambda)]}{d\lambda}=0\qquad \text{任意の粒子の測地線軌道に沿って} \tag{22.57}$$

(d) $\mathcal{N}$ は局所 Lorentz 系で

$$\mathcal{N}=\frac{\Delta N}{[(p^0/m)\Delta x\Delta y\Delta z][\Delta p^0\Delta p^x\Delta p^y\Delta p^z]} \tag{22.58}$$

と書き直されうる.

(e) 事象 $\mathcal{P}$ でのストレス–エネルギーテンソルは運動量空間の未来の光円錐の内部にわたる積分として，局所 Lorentz 系で（積分に対するトラック–1 記号，コラム 5.3 をみよ),

$$T^{\mu\nu} = \int (\mathcal{N} p^\mu p^\nu) m^{-1} dp^0 dp^1 dp^2 dp^3 \tag{22.59}$$

局所 Lorentz 系で（トラック–2 記号，コラム 5.4 をみよ），

$$\boldsymbol{T} = \int (\mathcal{N} \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{p}) m^{-1} {}^{*}\mathbf{1} \qquad \text{系によらない記号で}$$

$$= \int (\mathcal{N} \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{p}) m^{-1} \boldsymbol{d}p^0 \wedge \boldsymbol{d}p^1 \wedge \boldsymbol{d}p^2 \wedge \boldsymbol{d}p^3 \tag{22.59$'$}$$

と書かれうる．

パート **V**

相対論的な星

魔法の杯と幾何力学の力で武装した読者は，いかにして星を征服するか．

23章 球状の星

23.1 序　　文

*1 重力理論は美しいけれども，それが現実の物理学的な世界に触れるまでは不毛の題目である．実験および天文学的な観測の厳しい現実のみが重力理論を活気づかせることができる．そして星の（パートV），宇宙の（パートVI），星の崩壊およびブラックホールの（パートVII），重力波とその源の（パートVIII），そして重力実験の（パートIX）理論的な模型をつくることによってのみ，重力理論と現実間の接触を明瞭に理解できる．

本書での模型構成は理論物理学の伝統に従うだろう．各パート（星，宇宙，崩壊,…）は考えられうるもっとも徹底的に単純化された模型で始まるだろう．続いて現実の物理学的な系の最小の複雑さと接触するのに必要な現実主義の付加的な修正のみを加えるだろう．結果はより大きな現実主義によって要求される付加的な複雑さを支持し組織するための準備をする，試された知的な骨組みであるだろう．より大きな現実主義は本書で試みられないだろう．しかしそれを求める読者はZel'dovich and Novikov（1971, 1974）による**相対論的な天体物理学**についての2巻の取り扱い以上のより良い出発点を得られないだろう．

さて，相対論的な星に対する模型から始めよ．主要な単純化として，研究されるすべての星は静的であると（初めに）主張せよ．それによって爆発している星や脈動している星
*2 だけでなく，定常的な回転運動している平静な星すらも除外せよ．静的な仮定，および，星は“完全流体”からつくられている（せん断応力は許されない!）という要求，および，Einsteinの場の方程式から，おそらく星は球対称であることが出てくるだろう．しかし，誰もいまだ証明を与えていない．[より制限された仮定のもとでの証明に対しては，Avez（1964）およびKunzle（1971）をみよ.] 証明が存在しないまま，結果を仮定せよ．研究されるすべての星は静的であるとともに球対称であると主張せよ．

23.2 静的な球状の系に対する座標と計量

*3 静的な球状の星に対する，あるいは任意の他の静的で球状の系に対する重力場を導き出すために，球対称の形式での特殊相対論（重力がない）の計量

*1 本書の残りの概観
*2 静的な星は球状でなければならない
*3 任意の静的で，球状の系に対する計量

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2\,d\Omega^2 \tag{23.1}$$

から始める．ここに

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2 \tag{23.2}$$

*4 である．この計量を，球対称性を保持しながら星の重力の影響による曲率を認めるように修正することを試みよ．もっとも単純でもっとも明白な推測は，式 (23.1) ですでにゼロでない計量成分が異なる値

$$ds^2 = -e^{2\Phi}\,dt^2 + e^{2\Lambda}\,dr^2 + R^2\,d\Omega^2 \tag{23.3}$$

をとることを認めることである（静的な仮定は $\partial g_{\mu\nu}/\partial t = 0$ を要求する）．ここに Φ，Λ，および R は r のみの関数である．この推測がよいことを確かめるために，星の模型を構成するときにそれを用いて，生ずる模型が Newton の理論におけるのと同じ一般性（自由に指定できる量の同じ組）をもつことを検査せよ．明らかにより一般的な計量

$$ds^2 = -a^2\,dt^2 - 2ab\,dr\,dt + c^2\,dr^2 + R^2\,d\Omega^2 \tag{23.4}$$

は実際，任意の物理学的な意味で，より一般的でない．

$$e^{\Phi}\,dt' = a\,dt + b\,dr \tag{23.5}$$

によって定義される新しい時間座標 t' への座標変換を遂行できる．これを式 (23.4) に代入し，そして $e^{2\Lambda} \equiv b^2 + c^2$ を定義することによって，t^*のダッシュを除けば，仮定された線要素 (23.3) を得る．

一般相対論で任意の座標を認める必要性は理論を定式化するときに厄介になるかもしれない．しかしそれは，問題を定式化して解くときにつねに利用しようと試みる何か，すなわち付加された順応性を与える．式 (23.3) での $g_{rt} = 0$ という単純化（**座標条件**とよばれ
*5 る）は，t 座標の好都合な選択から生ずる．しかし，r 座標もまた，自由になる（球対称を尊重するように選ぶ限り，こうして $r' = r + \cos\theta$ はよくない）．この自由度を利用して

$$r' = R(r) \tag{23.6}$$

によって定義される新しい座標 $r'(r)$ を導入することができる．

半径方向の座標のこの選択と，ダッシュ記号を落として，式 (23.3) は

$$ds^2 = -e^{2\Phi}\,dt^2 + e^{2\Lambda}\,dr^2 + r^2\,d\Omega^2 \tag{23.7}$$

---

* もちろん，式 (23.5) はもしそれが t' に対する微分方程式として積分可能であるならば，新しい時間座標 t' を定義するのに成功するということにすぎない．積分因子 e^{Φ} がちょうど $e^{\Phi} = a(r)$ であるように選ぶことによって，$t' = t + \int[b(r)/a(r)]dr$ は式 (23.5) の積分であることがわかる．こうして，式 (23.4) での関数 $a(r)$，$b(r)$，$c(r)$，および $R(r)$ が何であろうと，要求される t' 座標はつねに存在する．

*4 (1) 平坦な時空から一般化される

*5 (2) “Schwarzschild 形式” に限定される

ちょうど2個の未知関数，$\Phi(r)$ および $\Lambda(r)$ をもつ線要素に帰着する．この座標系と計量は，Schwarzschild (1916b)，Tolmann (1939)，および Oppenheimer and Volkoff (1939b) の開拓者的な仕事以来，相対論的な星に対するたいていの理論的な模型で用いられてきた．これらの特別な座標は時には "曲率座標" そして，ときには "Schwarzschild 座標" とよばれる．これらの座標の中心的なアイデアは，要するに，(Schwarzschild r 座標)=(固有の円周)/2π である．

*6　任意の静的で球状の系で，計量を単純な形式 (23.7) にもたらして，Schwarzschild 座標が導入されうるというより厳密な証明に対しては，本章の終わりのコラム 23.3 をみよ．

[練習問題]

23.1　等方性の座標と Newton 的な極限

静的で，球状の系に対してときどき用いられる座標の別な組は "等方的な座標系" $(t, \bar{r}, \theta, \phi)$ である．等方的な座標での計量は形

$$ds^2 = -e^{2\Phi}\,dt^2 + e^{2\mu}[d\bar{r}^2 + \bar{r}^2\,d\Omega^2] \tag{23.8}$$

をもつ．ここに Φ および μ は $\bar{r}$ の関数である．

(a) Schwarzschild 座標 (23.7) を等方的な座標 (23.8) に結びつける座標変換を示せ．

(b) 式 (16.2a) [あるいは同等であるが，式 (18.15c)] から，Newton 的な極限で，等方的な線要素の計量係数 Φ は Newton 的なポテンシャルになる．そして μ は $-\Phi$ に等しくなることを示せ．(a) と結びつけることによって，Newton 的な極限で $\Lambda = r\,d\Phi/dr$ を発見せよ．

23.3　Schwarzschild 座標の物理学的な解釈

一般相対論では，任意の座標の使用が許されるから，テンソルあるいはベクトルの成分および他の量についての陳述の物理学的な重要性は必ずしも明白でない．しかし，解釈がほとんど特殊相対論におけるように簡明であるような場合がある．もっとも明白な例は，局所慣性座標系の中心点であり，そこでは等価原理はすべての局所的な量（時空曲率を含まない量）を正確に特殊相対論におけるように取り扱うことを認める．球状の系に対する Schwarzschild 座標は2番目の例であることがわかる．

*7　新しい計量に出会ったときにはまず，重力場について学ぶためでなく座標について学ぶために，曲率テンソルがより直接にその知識を与える計量を吟味すべきである（たとえば，

---

*6　(3) より厳密に導かれる

*7　任意の計量の形は用いられている座標の性質を表すことができる

座標はある点で局所慣性的であるか?).

座標に与えられる名前は本質的な意味をもたない．座標変換 $t' = \theta$, $r' = \phi$, $\theta' = r$, $\phi' = t$ は完全に許される．そして相対論的な問題の物理学あるいは数学に影響をもたない．座標変換が影響する唯一のことは，座標変換を採用する研究者とその仲間の間の容易な意
*8 志の疎通である．こうして Schwarzschild 座標 (23.7) に対する名前 $tr\theta\phi$ は，座標*の幾
*9 何学的な内容を指摘する記憶術を与える．とくに，名前 θ, ϕ は一定の r および t のそれぞれの 2 次元の曲面上で，2 個の近くの事象間の距離が，半径 r の球上の標準的な θ, ϕ 座標としてふさわしく，$ds^2 = r^2\,d\Omega^2$ によって与えられるという事実によって正当化される．この 2 次元の球の表面積は明らかに

$$A = \int (r\,d\theta)(r\sin\theta\,d\phi) = 4\pi r^2 \tag{23.9}$$

*10 である．したがって，計量 (23.7) はそれが用いる r 座標を測定する方法を告げる．値 $r(\mathcal{P})$ が望まれる点 $\mathcal{P}$ に回転的に同等なすべての点からなる球の表面積 A を，ただ（固有の長さの単位で）測定することができる．そして計算できる．

$$r(\mathcal{P}) = (\text{点}\ \mathcal{P}\ \text{を通る球の固有面積}/4\pi)^{1/2} \tag{23.9$'$}$$

Schwarzschild 座標は座標を測定する機械をつくりうるのが容易になるためでなく，好都合さのためにとられてきた．これは r, θ, ϕ を測定する機械よりも t を測定する機械を設計することをより困難にする．

*11 測定装置の基礎となりうる t の幾何学的性質は，(1) 一定の r, θ, ϕ の世界線間の時間によらない距離 ($\partial g_{\alpha\beta}/\partial t = 0$)，(2) これらの世界線の $t =$ 一定の超曲面に対する直交性 ($g_{tr} = g_{t\theta} = g_{t\phi} = 0$)，(3) これらの超曲面に，時空が平坦になる空間の無限遠での Minkowski（特殊相対論）の座標時間によってラベルをつける，などである．このラベルは計量 (23.7) で制限

$$\Phi(\infty) = 0 \tag{23.10}$$

を生む．[数学的には，この制限は単純な再スケール変換 $t' = e^{\phi(\infty)}t$ によって，それからプライム記号を落とすことによって課せられる.]

*12 このような t 座標を構成し（心の中で），そして構成の過程で t 座標を測定する 1 つの "機

---

* 間違った方向に導く名前の例に対しては，式

$$ds^2 = -e^{2\Phi(\theta')}d\phi'^2 + e^{2\Lambda(\theta')}d\theta'^2 + \theta'^2(dt'^2 + \sin^2 t'dr'^2)$$

における名前を考えよ．この式は式 (23.7) に同等であるが，しかし座標 $t' = \theta$, $r' = \phi$, $\theta' = r$, $\phi' = t$ を使っている．

*8 Schwarzschild 座標の幾何学的な意味

*9 (1) θ, ϕ は球上の角度である

*10 (2) r は球の表面積を測定する

*11 (3) t は 3 個の特別な幾何学的性質をもつ

*12 (4) t を測定する "機械" の記述

械”構想は，以下のとおりである．レーダー装置を用いる観測者は座標直線 $r, \theta, \phi =$ 一定に沿って動くように準備する．彼らはおのおのが近傍からの，あるいは漸近的に平坦な空間での“基準点”からのレーダー反響が，同じ往復時間となるまで繰り返し，彼らの速度を調整することによってこれを成す．同じことであるが，おのおのの戻ってくるエコーはゼロ Doppler 偏移を示さなければならない．エコーは送られた振動数と同じ振動数で戻らなければならない．次に基本的な時計が空間の無限遠近くに（星から遠く離れて）設置される．それは固有時間を測定し—その固有時間は，測定に対して，“無限遠での” Minkowski 時間である—標準的な 1 Hz の信号を放出するように構成されている．各観測者は自分の“座標時計”の割合が基本的な時計から受ける信号に合わせて時を刻むように調整する．彼の“座標時計”のゼロを設定するために，今やその割合が正しいから，レーダー信号が基本的な時計から彼に伝わるのに要する座標時間 Δt を考慮して基本的な時計と合わせる［通過時間を計算するために，彼はレーダー信号に対して $(t_{\text{反射}} - t_{\text{放出}}) = (t_{\text{帰還}} - t_{\text{反射}}) = \Delta t$ を仮定する．したがってエコーは反射事象についての時間反転によって得られる．この時間反転不変性は計量 (23.7) における時間 t を式 (23.4) によって許される，より一般的な t 座標から区別する］．座標直線（$r, \theta, \phi =$ 一定）に沿って動く各観測者は今や自らの近傍で座標時間 t を測定する時計をもつ．

上述の議論は式 (23.7) の Schwarzschild 座標をそれらの固有の幾何学的な性質と同一視する．r および t は，それぞれ，半径方向の変数および時間変数である（$\partial/\partial r$ および $\partial/\partial t$ は，それぞれ，空間的および時間的であり，そしてまた回転対称性によって定義される球に直交するということで）ばかりでなく，特別な性質をもつ［$4\pi r^2 =$ 表面積，$\partial g_{\mu\nu}/\partial t = 0$, $\partial/\partial r \cdot \partial/\partial t = g_{rt} = 0$, $\partial/\partial t \cdot \partial/\partial t = g_{tt} = -1$］，それは Schwarzschild
*13 座標を他の可能な座標選択［$r' = f(r)$, $t' = t + F(r)$］から区別する．これらは理性的に r および t とよばれるであろう唯一の座標であるという要求はなされない．代わりの選択（“等方性の座標”）に対しては，練習問題 23.1 をみよ．しかし，Schwarzschild 座標は理性的な，明白な，有用な選択で，しばしば用いられている．

23.4　星の内部にある物質の記述

*14 高い精度まで，任意の星の内部にある物質は完全流体である（ずれのストレスは無視でき，そしてエネルギー輸送は“流体力学的な時間スケール”で無視できる）．こうして，物質を完全流体のパラメータによって記述することは模型構成において理にかなっている．

*15 $\rho = \rho(r) =$ 流体の静止系での質量–エネルギーの密度，

*16 $p = p(r) =$ 流体の静止系での等方的な圧力，

$$n = n(r) = \text{流体の静止系でのバリオンの数密度}, \tag{23.11}$$

---

*13　他の座標は可能であるが，Schwarzschild はとくに単純である

*14　星の内部にある物質は完全流体として理想化される

*15　完全流体を記述するパラメータ

*16　(1) ρ, p, n

$$\begin{aligned} u^\mu &= u^\mu(r) = \text{流体の 4–速度} \\ T^{\mu\nu} &= (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \\ &= \text{流体のストレス–エネルギーテンソル} \end{aligned} \tag{23.12}$$

(トラック–1 の議論に対しては，コラム 5.1 をみよ．より大きなトラック–2 の詳細に対しては，22.2 および 22.3 節をみよ)．星が静的であるためには，流体の各要素は静的な座標系でつねに静止していなければならない．すなわち，各要素は一定の r，θ，ϕ の世界線に
*17 沿って動かなければならない．すなわち，各要素は 4–速度の成分

$$u^r = dr/d\tau = 0, \quad u^\theta = d\theta/d\tau = 0, \quad u^\phi = d\phi/d\tau = 0 \tag{23.13a}$$

をもたなければならない．

4–速度の規格化，

$$-1 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = g_{tt}u^t u^t = -e^{2\Phi}u^t u^t$$

は u^t を定める．

$$u^t = dt/d\tau = e^{-\Phi}, \qquad \boldsymbol{u} = e^{-\Phi}\partial/\partial t \tag{23.13b}$$

そしてこれは，ストレス–エネルギーテンソルの一般的な形式 (23.12) および計量の形式
*18 (23.7) とともに，$T^{\mu\nu}$ を定める．

$$\begin{gathered} T^{00} = \rho e^{-2\Phi}, \quad T^{rr} = pe^{-2\Lambda}, \quad T^{\theta\theta} = pr^{-2}, \quad T^{\phi\phi} = pr^{-2}\sin^{-2}\theta \\ T^{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{もし } \alpha\neq\beta \text{ ならば}) \end{gathered} \tag{23.14}$$

Schwarzschild 座標におけるストレス–エネルギーテンソルのこれらの成分は計算に対して有用であるけれども，規格化の因子 $e^{-2\Phi}$，$e^{-2\Lambda}$，r^{-2}，$r^{-2}\sin^{-2}\theta$ はこれらの成分の物理学的な解釈を不都合にする．流体要素によって運ばれる直交テトラッド（tetrad，四つ組）についての成分はより好都合である（“固有の規準系”，13.6 節をみよ）．

*19
$$\boldsymbol{e}_{\hat{t}} \equiv \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{e^\Phi}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \boldsymbol{e}_{\hat{r}} = \frac{1}{e^\Lambda}\frac{\partial}{\partial r}, \quad \boldsymbol{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \boldsymbol{e}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{23.15a}$$

*20
$$\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} = e^\Phi \boldsymbol{d}t, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{r}} = e^\Lambda \boldsymbol{d}r, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} = r\boldsymbol{d}\theta, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} = r\sin\theta\,\boldsymbol{d}\phi \tag{23.15b}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_{\hat{t}}, \quad u^{\hat{t}} = 1, \quad u^{\hat{r}} = u^{\hat{\theta}} = u^{\hat{\phi}} = 0 \tag{23.15c}$$

$$T_{\hat{t}\hat{t}} \equiv T_{\hat{0}\hat{0}} = \rho, \quad T_{\hat{r}\hat{r}} = T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = p, \quad T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0 \quad \text{もし } \alpha\neq\beta \text{ ならば} \tag{23.15d}$$

以下の練習問題 23.2 をみよ．

---

*17 (2) $\boldsymbol{u}$
*18 (3) $\boldsymbol{T}$
*19 流体の固有基準系
*20 固有基準系における $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{T}$ の成分

星の構造すなわち，関数の組 $\Phi(r)$，$\Lambda(r)$，$\rho(r)$，$p(r)$，$n(r)$ は，部分的に Einstein の場の方程式，$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}$ によって，そして部分的に流体におけるエネルギー運動量の局所保存則，${T^{\mu\nu}}_{;\nu} = 0$ によって定まる．しかし，これらは構造を一義的に固定するには十分でない．圧力 p および密度 ρ のバリオンの数密度 n への関数的な依存性もまた必要である．

$$p = p(n), \qquad \rho = \rho(n) \tag{23.16}$$

*21 通常 n の知識のみから p および ρ を導き出すことはできない．さらに，温度 T あるいは
*22 バリオンあたりのエントロピー s を知らなければならない．そうすると熱力学の法則および状態方程式がすべての残りの熱力学的な変数を定めるだろう．

$$p = p(n, s), \qquad \rho = \rho(n, s), \cdots$$

*23 (完全なトラック–2 の議論に対しては 22.2 節およびコラム 22.1 をみよ.) 与えられた熱力学的な知識，$p(n, s)$ および $\rho(n, s)$ から望まれる知識，$p(n)$ および $\rho(n)$ へ移行するには，星の熱的な性質についての，そしてとくにエネルギー生成および熱の流れが重なり合ってエントロピー，$s = s(n)$ を分布する方法についての情報を必要とする．

$$p(n) = p[n, s(n)], \qquad \rho(n) = \rho[n, s(n)]$$

相対論的な星：中性子星，白色わい星，超重量星（$M \gtrsim 10^3 M_\odot$ をもつ星，それは理論によれば存在するであろうが，しかしその存在は観測によっていまだ確認されていない）の
*24 理論の 3 つの重要な応用が存在する．すべての 3 つの場合には，幸いにも，$p = p(n, s)$，$\rho = \rho(n, s)$ から，$p = p(n)$，$\rho = \rho(n)$ への移行は自明である．

*25 最初に中性子星を考えよ．通常の標準によれば熱いけれども，中性子星は任意の核物質の温度のスケールによれば非常に冷たく，本質的にすべての熱的自由度は凍結している（“縮退したガス，量子流体”）．中性子星の物質の詳細な取り扱いは現在の理論の可能性（バリオンとバリオン間の相互作用を認める，ハイペロンと中間子の十分な高圧力での生成）を越えているということは重要でない．単純な事実は原子核での物質の密度（$2\times10^{14}\ \mathrm{g/cm^3}$）およびそれより高い密度と同程度の密度の物質を取り扱っているということである．核物質についてわかっているすべてのこと（たとえば，Bohr and Mottelson (1969) をみよ）は，中性子星は縮退しているということ，および中性子星が理想的な Fermi 中性子ガスであるかのように取り扱うことによって，その縮退温度を大きさの程度について評価できるということを告げる（正常な原子核では，すべてのバリオンの 50%よりわずかに多いのが中性子であり，残りは陽子である．中性子星では 99%ほどが中性子である）．中性子星の物質を理想的な Fermi 中性子ガスとして近似するとき，中性子は自由粒子の量子状態を占め

---

*21　状態方程式
*22　(1) 一般
*23　(2) “1 パラメータ形式” $p = p(n)$，$\rho = \rho(n)$ に理想化される
*24　理想化された状態方程式に対する正当化
*25　(1) 中性子星において

ると考える．おのおのの占められた状態には反対方向のスピンをもつ 2 個の粒子が存在し，粒子のエネルギーが “Fermi エネルギー” のレベルに上がるときには量子状態の 100%の占有から空の状態へ急降下する［このような理想的な Fermi ガスについてより多くのことに対しては，Kittel (1958) 19 節をみよ．あるいは入門レベルでは，Sears (1953) 16–5 節をみよ］．核密度での物質では Fermi エネルギーは

$$E_{\text{Fermi}} \sim 30\,\text{MeV} \qquad \text{あるいは} \qquad 3\times10^{11}\,\text{K}$$

の程度である．そしてより高い密度で縮退を解きほぐすのに要求される温度はさらに大きい．言い換えれば，核密度でのおよびそれ以上の物質に対しては，すでにゼロ温度で粒子の運動エネルギー（Pauli の排他原理によって支配され，そして Fermi エネルギーによって支配される）は圧力の第 1 の源である．核力はこの圧力に大きい補正をする．しかし $T \lesssim 30\,\text{MeV} = 3\times10^{11}\,\text{K}$ に対しては，熱的なゆさぶりのエネルギーは補正をしない．

星は，正常な状態から中性子星の状態へ崩壊するときに（24 章をみよ），温度 $\gtrsim 10^{10}\,\text{K}$ でニュートリノの巨大な束を放出する．そしてそれによって $T \ll 3\times10^{11}\,\text{K}$ まで形成後，数秒以内で冷却する．したがって，数秒よりも後のすべての中性子星では圧力および密度への熱的な寄与を無視することができる．すなわち，

$$p(n,s) = p(n, s=0) = p(n), \qquad \rho(n,s) = \rho(n, s=0) = \rho(n)$$

*26 白色わい星は，ここでは電子が中性子よりも Fermi ガスの圧力と縮退の源であるということを除いて同じである．代表的な白色わい星の温度は

$$kT \ll E_{\text{Fermi 電子}}$$

を満たす．Fermi の運動エネルギー（Pauli の排他原理）がおもに圧力とエネルギー密度の原因となっており，ランダムな kT エネルギーが原因となっていない．そして

$$p(n,s) = p(n, s=0) = p(n), \qquad \rho(n,s) = \rho(n, s=0) = \rho(n)$$

と置くことができる．

*27 超重量星（24 章をみよ）においては，事情はまったく異なる．そこでは圧力とエネルギー密度に関する限り，温度とエントロピーがほとんどすべてである．しかし，対流が星をかき混ぜ続け一様なエントロピー分布を生み出す．

$$s = \text{半径に無関係に一定}$$

したがって

$$p(n,s) = p_s(n), \qquad\qquad \rho(n,s) = \rho_s(n)$$

［星における，バリオンあたりの一様なエントロピー s に依存する関数］

*26 (2) 白色わい星において
*27 (3) 超重量星において

と書くことができる．

すべての3つの例—中性子星，白色わい星，超重量星—において関係$p(n)$および$\rho(n)$を“状態方程式”とみなす．そしてそれらを指定して，さらなる星の熱的性質に関係なしに星の構造を計算できる．

[練習問題]

23.2　流体要素の固有基準系

(a) 式(23.15a)，(23.15b)は時空内の各事象で，直交テトラッドとその1–形式の双対基底を定義することを確かめよ．

(b) これらのテトラッドに相対的な流体の4–速度の成分は式(23.15c)によって与えられることを確かめよ．なぜこれらの成分はテトラッドが流体要素に対する“固有基準系”をつくることを保証するか？

(c) ストレス–エネルギーテンソルの成分に対する式(23.15d)を確かめよ．

23.5　構造の方程式

*28 相対論的な星の構造は5個の半径rの関数［計量関数$\Phi(r)$，$\Lambda(r)$，圧力$p(r)$，質量–エネルギーの密度$\rho(r)$，およびバリオンの数密度$n(r)$］によって定まる．したがって，構造を一義的に定めるには，5個の構造の方程式に加えて境界条件を必要とする．2個の構造方程式，状態方程式$p(n)$および$\rho(n)$は，すでに手元にある．残りの3個はEinsteinの場の方程式の，そして局所的なエネルギー運動量保存の法則$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$の，本質的な内容でなければならない．

流体に対する局所的なエネルギー運動量保存の法則はEinsteinの場の方程式から恒等式として出ることがわかっている．情報の損失なしに，したがってすべての10個の場の方程式を課し，局所的なエネルギー運動量保存を無視することができる．しかしそれは非
*29 有効的な進め方である．ほとんどつねに式$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$は，場の方程式よりもさらに容易に利用可能な形式に帰着されうる．したがって，もっとも有効な手続きは，(1) 4個の式$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$を求める，(2) 十分な場の方程式（6個）を求めて完全な組（$6+4=10$）を得る，そして(3) 残りの4個の場の方程式を(1)および(2)の結果のチェックとして求めることである．

トラック–2の読者は完全流体に対する方程式$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$は，(1) 流体自身の4–速度$\boldsymbol{u}$上に射影されるとき，および(2) $\boldsymbol{u}$に直交して射影されるとき，とくに単純な形をとるこ

*28　5個の星の構造関数: Φ，Λ，p，ρ，nを定めるのに必要な5個の方程式

*29　Einstein方程式を解くためののもっとも有効な手続き

とを知っている（22.3 節）．$\boldsymbol{u}$ に沿う射影（$u_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$）は局所的なエネルギー保存則 (22.11a)

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -(\rho + p)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\rho + p}{n}\frac{dn}{d\tau}$$

を与える．ここに $\boldsymbol{u} = d/d\tau$，すなわち，τ は流体の任意の選ばれた要素の世界線に沿う固有時間である．静的な星に対して，あるいは任意の他の静的な系に対して，この式の両辺は恒等的にゼロにならなければならない（流体要素は自らの密度にいかなる変化もみない）．

*30 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ の $\boldsymbol{u}$ に直交する射影は理にかなった式

(単位体積あたりの慣性質量)×(4–加速度) = −($\boldsymbol{u}$ に垂直に射影された圧力勾配)

すなわち，

$$(\rho + p)\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} = -[\boldsymbol{\nabla} p + (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} p)\boldsymbol{u}]$$

を与える［式 (22.13) をみよ］．静的な星に適用されるときには，この式は，流体要素が落下するのを防ぐのにどれだけの圧力勾配が必要とされるかを告げる．この式の半径方向の成分のみが内容をもつ，なぜなら圧力は r のみに依存するからである．Schwarzschild 座標系における半径方向の成分は

$$\begin{aligned}(\rho + p)u_{r;\nu}u^\nu &= -(\rho + p)\Gamma^\alpha{}_{r\nu}u_\alpha u^\nu = -(\rho + p)\Gamma^0{}_{r0}u_0 u^0 \\ &= (\rho + p)\Phi_{,r} = -p_{,r}\end{aligned} \tag{23.17}$$

を述べる［線要素 (23.7) および 4–速度成分 (23.13) をみよ］（トラック–1 の読者は節の終わりにある走り書き，練習問題 23.3 からこれを導くことができる）．Newton 的な極限で，Φ は Newton 的なポテンシャルになる（なぜなら $g_{00} = -e^{2\Phi} \approx -1 - 2\Phi$ であるから），そして圧力は質量–エネルギー密度よりもはるかに小さくなる．したがって式 (23.17) は

$$\rho\Phi_{,r} = -p_{,r} \tag{23.17N}$$

となる．これが重力と圧力勾配間の平衡を記述する式の Newton 的なバージョンである．

*31 流体要素が落下するのを防ぐ圧力勾配は Einstein の理論では加速度の源として現れる．この加速度は，流体要素を固定された r の値に保持することによって，流体要素を測地線の運動から（“規準の世界線” から，星の中心への自由落下の運動から）それさせる．Newton 的な理論は，他方，固定された r の値にとどまる流体要素を規準の世界線として眺める．それは “重力” を，固定された r の世界線から測地線の世界線へ粒子を引っ張ろうと努める（成功なしに，なぜなら圧力勾配によって平衡を保たされるから）ものとみなす．2 つの理論で加速度の値は，“実際に生じている”（Einstein 理論）あるいは “生じようとしている”（Newton 的な理論）にかかわらず最低次まで同じである（しかし方向が逆である）．したがって式 (23.17) および (23.17N) は詳細においてのみ異なることは驚きでない．

*30 流体静力学的な平衡の方程式が導かれる
*31 流体静力学的な平衡の Newton と Einstein の観点の比較

次に Einstein の場の方程式に向かおう．ここでは，しばしばそうであるように，流体の直交系 (23.15a), (23.15b) での場の方程式の成分は座標基底での成分よりも単純である．直交系でのストレス–エネルギーテンソル $T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ ［式 (23.15d)］をすでに知っている．そしてトラック–2 の読者はすでに Einstein テンソル $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$（練習問題 14.13，トラック–1 の読者はこの節の終わりで仕事，練習問題 23.4 に直面するだろう）を計算してある．残っているすべては $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$を $8\pi T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ に等しく置くことである．まず場の方程式の $\hat{0}\hat{0}$ 成分を吟味せよ．[*32]

$$\begin{aligned}G_{\hat{0}\hat{0}} &= r^{-2} - r^{-2}e^{-2\Lambda} - r^{-1}(d/dr)(e^{-2\Lambda})\\ &= r^{-2}(d/dr)[r(1-e^{-2\Lambda})] = 8\pi T_{\hat{0}\hat{0}} = 8\pi\rho\end{aligned}$$

この式は量 $e^{-2\Lambda}$ について**線形**の微分方程式であることに気がつけばすぐに容易に解かれる．それからわずかな整頓で注意が量 $r(1-e^{-2\Lambda})$ に集中する．この量に名前 $2m(r)$ を与えよ（今までのところ名前だけ!）．こうして，

$$2m \equiv r(1-e^{-2\Lambda}), \qquad e^{2\Lambda} = (1-2m/r)^{-1} \tag{23.18}$$

この記号で Einstein テンソルの $\hat{0}\hat{0}$ 成分は

$$G_{\hat{0}\hat{0}} = \frac{2}{r^2}\frac{dm(r)}{dr} = 8\pi\rho$$

となる．積分して

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho\, dr + m(0) \tag{23.19}$$

を見出せ．積分定数 $m(0)$ に対して，ゼロ値は原点で滑らかな（物理学的に受け入れられる）空間幾何学を意味する，ゼロでない値は原点で特異点をもつ（物理学的に受け入れられない．$r=0$ で局所 Lorentz 系が存在しない）幾何学を意味する．

$$\begin{aligned}ds^2 &= [1-2m(0)/r]^{-1}\,dr^2 + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2)\\ &\approx -[r/2m(0)]dr^2 + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2) \qquad \text{もし } m(0)\neq 0 \text{ ならば } r\approx 0 \text{ で,}\\ ds^2 &= [1-(8\pi/3)\rho_c r^2]^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2) \qquad (23.20)\\ &\approx dr^2 + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2) \qquad \text{もし } m(0)=0 \text{ ならば } r\approx 0 \text{ で}\end{aligned}$$

[*33] 式 (23.18) によって定義され，そして $m(0)=0$ をもつ式 (23.19) から計算される量 $m(r)$ は，“半径 r の内部にある質量–エネルギー” の相対論的な類似物である．コラム 23.1 はその類似を詳細に説明する．

---

*32　Λ に対する式が導かれる

*33　“半径 r の内部にある質量–エネルギー” $m(r)$ が，定義される

コラム 23.1 半径 r の内部にある質量–エネルギー

孤立した星の全質量–エネルギー M はよく定義されている（19章）．しかし その質量–エネルギーの，星の内部の点から点へのおよび星の重力場（一義的な“重力的ストレス–エネルギーテンソル”は存在しない）における分布は，一般に，よく定義されていない．これは 20.4 節（トラック–2）の決定的な主旨であった．

主旨は一般に真実である．しかし球状の星の場合に対しては，そしてその場合に対してのみ，主旨はその辛辣さを失う．球対称性は物理学的に理にかなった全質量–エネルギーの分布を選ぶことを認める．Schwarzschild 座標では，全質量–エネルギーは

$$\text{“半径 } r \text{ の内部にある全質量–エネルギー”} \equiv m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho \, dr \qquad (1)$$

によって定義される．この定義に対する完全に納得のいく議論は，時間に依存する球対称の星（脈動している，崩壊している，あるいは爆発している星．26章および32章，そしてとくに練習問題 32.7 をみよ）への一般化を考えることによってのみ見出される．それらの星に対しては，与えられた物質の球（固定されたバリオン数）と関連した質量–エネルギー m は，局所的に測定可能なエネルギーの束が球の境界で認められうる程度までのみ，時間について変化できることを見出す［このようなエネルギーの束は動く境界面に対する圧力によって費やされる工率，あるいは熱の束，あるいは放射（光子あるいはニュートリノ）の束でありうるだろう．しかし球対称な重力波は存在しないから（35章と36章），物理学的な直感も Einstein の方程式も，局所化される重力波のエネルギーの問題に直面することを要求しない］．こうしてエネルギー m は数学的な慣習によってでなく，エネルギーの移行（m のこの定義をもつ）が局所的な測定によって認められうるという事情によって局所化される．［時間に依存する場合における $m(r,t)$ の数学的な詳細に対しては，Misner and Sharp（1964），Misner（1965），および練習問題 32.7 をみよ．］

上に記述された $m(r)$ の決定的な“局所的なエネルギーの束”という性質の他に，$m(r)$ の質量–エネルギーとしての同定を確かめる3つのさらなる性質がある．それらは，(1) 星の外部のいたるところで

$$m(r) = M \equiv \begin{pmatrix} \text{遠い惑星に対する Kepler の第 3 法則から} \\ \text{測定されるときの星の全質量–エネルギー} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

である，証明に対しては 23.6 節をみよ．(2)“半径 r の内部にある質量”が一義的な意味をもつ Newton 的な星に対しては，$m(r)$ はその質量である．(3) 相対論的な星に対しては，$m(r)$ は“静止質量–エネルギー” $m_0(r)$ ＋“内部エネルギー” $U(r)$ ＋“重力ポテンシャルエネルギー” $\Omega(r)$ に正確に分かれる．

分割

$$m(r) = m_0(r) + U(r) + \Omega(r) \tag{3}$$

を認めそして評価することは以下のように進む．まず質量–エネルギーの全密度 ρ を静止質量による部分 $\mu_0 n$，そして内部の熱的なエネルギー，圧縮的なエネルギー等による部分 $\rho - \mu_0 n$ に分割する．ここに μ_0 は存在するバリオン的な種類の平均的な静止質量である．次に厚さ dr の殻の固有体積は

$$d\mathcal{V} = 4\pi r^2 (e^{\Lambda} dr) = 4\pi r^2 (1 - 2m/r)^{-1/2}\, dr \tag{4}$$

であって，$4\pi r^2\, dr$ でない．したがって，半径 r の内部にある全静止質量は

$$m_0 = \int_0^r \mu_0 n\, d\mathcal{V} = \int_0^r 4\pi r^2 (1 - 2m/r)^{-1/2} \mu_0 n\, dr \tag{5}$$

である．そして全内部エネルギーは

$$U = \int_0^r (\rho - \mu_0 n) d\mathcal{V} = \int_0^r 4\pi r^2 (1 - 2m/r)^{-1/2} (\rho - \mu_0 n) dr \tag{6}$$

である．

これらを全質量–エネルギー，m から引くと，残される量は重力的なポテンシャルエネルギーでなければならない．

$$\begin{aligned} \Omega &= -\int_0^r \rho[(1 - 2m/r)^{-1/2} - 1] 4\pi r^2\, dr \\ &\approx -\int_0^r (\rho m/r) 4\pi r^2\, dr \end{aligned} \tag{7}$$

↑[Newton 的な極限，$m/r \ll 1$]

(練習問題 23.7 をみよ．)

*34　次に場の方程式の $\hat{r}\hat{r}$ 成分に向かう．

$$\begin{aligned} G_{\hat{r}\hat{r}} &= -r^{-2} + r^{-2} e^{-2\Lambda} + 2r^{-1} e^{-2\Lambda} d\Phi/dr \\ &= 8\pi T_{\hat{r}\hat{r}} = 8\pi p \end{aligned}$$

Φ の微分に対するこの式を解き，そして $e^{-2\Lambda}$ を $1 - 2m/r$ によって置き換えて，ポテンシャル Φ の勾配に対する表現を得る．

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)} \tag{23.21}$$

この表現は Newton 的な極限でよく知られた公式

$$d\Phi/dr = m/r^2 \tag{23.21N}$$

*34　Φ に対する方程式が導かれる

に帰着する．

星の構造のたいていの研究では，式 (23.17) を (23.21) の助けを借りて得られる同等の式，

*35
$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)} \tag{23.22}$$

によって置き換える．これは流体静力学的な平衡の Oppenheimer–Volkoff（OV）方程式とよばれる．その Newton 的な極限，

$$dp/dr = -\rho m/r^2 \tag{23.22N}$$

*36 はよく知られている．1 つは相対論的でありそして他は Newton 的である 2 つの星の模型を比較せよ．与えられた半径 r［両方の場合に（固有面積）$= 4\pi r^2$ によって定まる］で，2 つの形態は ρ，p，および m の同じ値をもつ．そうすると相対論的な模型では圧力勾配は

$$\begin{aligned}\frac{dp}{d(\text{固有の半径方向の距離})} &= \frac{dp}{e^{\Lambda}\,dr} \\ &= -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r^2(1 - 2m/r)^{1/2}}\end{aligned} \tag{23.23}$$

対照的に，Newton 的な理論は圧力勾配に対して

$$\frac{dp}{d(\text{固有の半径方向の距離})} = \frac{dp}{dr} = -\frac{\rho m}{r^2} \tag{23.23N}$$

を与える．勾配に対する相対論的な表現は Newton 的な表現よりも大きい．なぜなら，(1) 分子がより大きく，（両方の因子における加えられた圧力項）そして (2) 分母がより小さいためである［収縮因子 $(1 - 2m/r)^{1/2}$］．したがって，星の内部深く進むにつれて，Newton 的な重力理論が予言するよりも圧力がさらに速く増大するのを見出す．さらに，圧力についてのこの上昇は，ある意味で "自己再生成的" である．圧力が増大すればするほど，式 (23.23) の分子において圧力補正項が大きくなる．そしてこれらの項が大きくなるほど，星の内部へさらに深く調査するとき，圧力のさらなる上昇は速くなる．式 (23.23) の分母における幾何学的な因子 $[1 - 2m(r)/r]^{1/2}$ は中心に向かって再生成的な圧力の上昇をさらに増大させる．一般相対論は Newton 的な理論よりも定常的な物体でより強い重力を予言するということによってこの事情を適切に要約することができる．これらの力は，他の重要な効果の中で，Newton 的な理論が安定な流体静力学の平衡を予言したであろう状況のもとで，ある白色わい星や超重量星を重力崩壊に引っ張りうる（24 章をみよ）．新しい因子が安定性の解析で明るみに出たというもっとも基本的な示唆として，流体静力学の平衡にある星は決して $2m(r)/r \geq 1$ をもちえないことに注意せよ（1 つの例示に対するコラム 23.2 および議論に対する 23.8 節をみよ）．これは Newton 的な理論に相入れない現象である．

*37 今や 5 つの構造関数 ρ，p，n，Φ，Λ に対する 5 つの構造の方程式［2 つの状態方程式 (23.16)，ρ の体積積分として $m(r) = \frac{1}{2}r(1 - e^{-2\Lambda})$ を表す式 (23.19)，Φ に対する源の

*35　"OV" 形式に書き換えられた流体静力学的な平衡の方程式
*36　Newton 的な星と相対論的な星における圧力勾配の比較
*37　星の構造の方程式が要約される

方程式 (23.21)，および流体静力学の平衡の OV 方程式 (23.22)] が手元にある．もし上に要約されたような相対論的な星の理論がよく主張されるならば，残りの 8 つの Einstein の場の方程式 $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 8\pi T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ のおのおのは空虚であるか（“0=0”），あるいは 5 つの構造の方程式の結果であるかのいずれかでなければならない．これは実際，簡明なしかし退屈な計算によって確かめることができて，事実である．

星の模型を構成するには，構造方程式とともに境界条件を必要とする．境界条件の提供を容易にするために，次の節は星の外部の重力場を吟味するだろう．

[練習問題]

23.3　局所的なエネルギー運動量保存の法則（22 章を学ばなかった読者に対して）

式 (23.7) の Schwarzschild 座標系におけるストレス–エネルギーテンソル (23.14) に対する式 $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ の 4 つの成分を求めよ．[答え：$T^{r\beta}{}_{;\beta} = 0$ のみが空虚でない結果を与え，式 (23.17) である．]

23.4　Einstein の曲率テンソル（14 章を学ばなかった読者に対して）

Schwarzschild 座標における Einstein の曲率テンソル，$G_{\alpha\beta}$ の成分を計算せよ．それから変換を遂行して式 (23.15a)，(23.15b) の直交系における成分 $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ を得よ．[コラム 8.6, コラム 14.2 および式 (14.7) をみよ.]

23.5　星の内部にあるバリオンの総数

もし $r = R$ が静的な星の表面の位置であるならば，星の内部にあるバリオンの総数は

$$A = \int_0^R 4\pi r^2 n e^{\Lambda}\, dr \tag{23.24}$$

であることを示せ．[ヒント：コラム 23.1 における m_0 の議論をみよ.]

23.6　星の内部における浮力

相対論的な星の内部のある点に静止している観測者は，体積 V の小さい流体要素への，半径方向の圧力による浮力，$F_{浮力}$ を測定する．観測者が通常の実験室での技術を用いることを認めよ．観測者に彼が相対論的な星の中にいると告げて彼を混乱させるな．$F_{浮力}$ に対して，ρ，p，m，V，dp/dr を用いて，どのような値が見出されるであろうか？　もし観測者がこの浮力を同じで逆方向の重力に等しいとおくならば，$F_{重力}$ は ρ，p，m，V，および r を用いてどのような値になるだろうか？ [式 (23.22) を用いよ]．これらの結果は対応する Newton 的な結果といかに異なるだろうか？

23.7　Newton 的な星の重力エネルギー

Newton の理論で重力から得るであろうエネルギーを，もし内部から外部へ 1 つの物質の球殻を他の物質の球殻の頂上に加えることによって星を構成するものとして計算せよ．Lalace の方程式 $(r^2\Phi_{,r})_{,r} = 4\pi r^2 \rho$ および流体静力学の平衡の方程式 $p_{,r} = -\rho\Phi_{,r}$ を用いて，答えを以下の同等の形式で述べよ．

$$
\begin{aligned}
(\text{重力から得られるエネルギー}) &\equiv -(\text{重力ポテンシャルエネルギー}) \\
&= \int_0^R (\rho r \Phi_{,r}) 4\pi r^2\, dr = \int_0^R (\rho m/r) 4\pi r^2\, dr \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^R (\rho\Phi) 4\pi r^2\, dr = \frac{1}{8\pi}\int_0^R (\Phi_{,r})^2 4\pi r^2\, dr \\
&= 3\int_0^R 4\pi r^2 p\, dr
\end{aligned}
$$

23.6 外部の重力場

星の外部では密度および圧力はゼロになるので，計量パラメータ Φ および $\Lambda = -\frac{1}{2}\ln(1-2m/r)$ のみが考慮される必要がある．式 (23.19) から "半径 r の内部にある質量" $m(r)$ は，R よりも大きい r の値に対して（星の外部）一定であることがわかる．その定数の値は M によって記される．

$$m(r) = M \qquad [r > R \text{ に対して (すなわち，星の外部で)}] \tag{23.25}$$

$p = 0$ および $m = M$ をもつ式 (23.21) を積分し，そして $r = \infty$ で Φ に境界条件 (23.10)（"$r = \infty$ で時間のスケールについての規格化"）を課すことによって，

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}\ln(1 - 2M/r) \qquad (r > R \text{ に対して}) \tag{23.26}$$

*38 を見出す．したがって，星の外部では時空の幾何学［式 (23.7)］は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - 2M/r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{23.27}$$

となる．これは "Schwarzschild 幾何学" あるいは "Schwarzschild 重力場" あるいは "Schwarzschild 線要素" とよばれる．なぜなら Karl Schwarzschild（1916a）はそれを Einstein が一般相対論を定式化した数ヶ月後に，Einstein の場の方程式に対する厳密解として発見したからである．

幾何学がほとんど平坦であるような，時空の領域，$r \gg 2M$ では，Newton の重力理論が成り立つ．そして Newton のポテンシャルは

$$\Phi = -M/r \qquad (r > R,\ r \gg 2M \text{ に対して}) \tag{23.26N}$$

*39 である．したがって，M は遠方の Newton の重力場内にある惑星の Kepler の運動を支配する質量である．すなわち，それは星の "全質量–エネルギー" である（19 章および 20 章をみよ）．星の外部遠く離れた計量 (23.27) は正確に対角型である（$g_{ij} \equiv 0$）から，星の全角運動量はゼロでなければならない．この結果は内部の流体の運動が存在しないことと一致している．

---

*38 星の外部の時空は "Schwarzschild" 幾何学を有する

*39 星の全質量–エネルギー

23.7　いかにして星の模型を構成するか

*40　星の構造の方程式 (23.16), (23.19), (23.21), (23.22), および関連した境界条件（以下で議論されるはずである), すべてを線要素とともに一緒に集めると, 以下のようである.

線要素

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + \frac{dr^2}{1-2m/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{23.27$'$}$$

$$= -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \qquad (r > R \text{ に対して})$$

質量方程式

$$m = \int_0^r 4\pi r^2 \rho\, dr, \qquad m(r=0) = 0 \text{ をもつ} \tag{23.28a}$$

流体静力学の平衡の OV 方程式

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho+p)(m+4\pi r^3 p)}{r(r-2m)}, \qquad p(r=0) = p_c = \text{中心圧力をもつ} \tag{23.28b}$$

状態方程式

$$p = p(n), \tag{23.28c}$$

$$\rho = \rho(n) \tag{23.28d}$$

Φ に対する源方程式

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{(m+4\pi r^3 p)}{r(r-2m)}, \qquad \Phi(r=R) = \frac{1}{2}\ln(1-2M/R) \text{ をもつ} \tag{23.28e}$$

*41　星の模型を構成するには以下のように進むことができる. まず状態方程式 (23.28c), (23.28d) および中心圧力 p_c の値を指定する. また $\Phi(r=0)$ に対して, 任意の（後に規格化されなければならない）値 Φ_0 を指定せよ. 境界条件 $p(r=0) = p_c$, $\Phi(r=0) = \Phi_0$, $m(r=0) = 0$ は, 連立方程式 (23.28) に対する解を一義的に定めるに十分である. これらの連立方程式を外に向かって $r = 0$ から圧力がゼロになるまで積分せよ. [OV 方程式 (23.28b) は, 状態方程式がすべての $p \geq 0$ に対して理にかなった制限 $\rho \geq 0$ に従う限り, 圧力は単調に減少するであろうことを保証する]. 圧力がゼロに達する点は星の表面である. そこでの r の値は星の半径, R である. そしてそこでの m の値は星の全質量–エネルギー, M である. 表面に達してから, Φ が境界条件 (23.28e) を満たすように, いたるところでそれに定数を加えることによって Φ を規格化せよ. 結果は構造関数 Φ, m, ρ, p, n が構造方程式を満たすような相対論的な星の模型である.

---

*40　星の構造の方程式が集められている
*41　星の構造の方程式をいかに解くか

状態方程式 $p = p(n)$，$\rho = \rho(n)$ の任意の固定された選択に対して，星の模型は 1–パラメータ列（パラメータ p_c）をつくる．一度中心圧力が指定されれば，模型は一義的に定まる．

次章は上述の手続きによって数値的に構成される多様な現実的な星の模型を記述する．解析的に構成された理想化された星の模型に対しては，コラム 23.2 をみよ．

[練習問題]

23.8　一様な密度の Newton 的な星

一様な密度の配置の構造を Newton の理論で計算せよ．コラム 23.2 の相対論的な配置は弱い重力の極限で Newton 的な配置に同一になることを示せ．また Newton の理論で質量あるいは半径の限界が存在しないことを示せ．

コラム 23.2　一様な密度の相対論的な模型の星

現実的な状態方程式（次章をみよ）に対して，星の構造の方程式 (23.28) は解析的に積分されえず，数値積分が必要である．しかし，解析的な解は種々の理想化された，そして**特別**な状態方程式に対して存在する．もっとも有用な解析的な解の 1 つ［Karl Schwarzschild（1916b）］は一様な密度の星を記述する．

$$\rho = \rho_0 = \text{一定} \qquad (\text{すべての } p \text{ に対して}) \tag{1}$$

この模型を興味あるものとして受け入れるために“非圧縮性の流体”の虚構にふける必要はない．非圧縮性は無制限の大きさの音の速さ，$v = (dp/d\rho)^{1/2}$ を意味するだろう．したがって光の速さを越えて，物理学的な作用が速さ $v > 1$ で伝播されえないという特殊相対論の中心原理（“因果律”）と矛盾する．（もし源が 1 つの局所 Lorentz 系で作用をそんなに速くもたらすことができるならば，源が作用する前に結果が起こるような別な局所 Lorentz 系が存在するだろう！）しかし，高い圧力の領域内での流体の部分が低い圧力の領域内での流体の部分と同じ密度をもつということは，もし 1 つの r 値から別な r 値へ変化する（“手づくりの［hand–tailored］”）成分をもつ流体を考えさえすれば，容易に認められるアイデアである．この線に沿って考えようが，あるいは単純に大きさについて地球規模よりもごく小さな部分に制限された水の球を考えようが，Schwarzschild の模型に，Einstein の理論の枠内でなされる流体静力学の教育的な例をもつことになる．

質量方程式 (23.28a) はただちに

$$m = \begin{cases} (4\pi/3)\rho_0 r^3 & r < R \text{ に対して} \\ M = (4\pi/3)\rho_0 R^3 & r > R \text{ に対して} \end{cases} \tag{2}$$

を与える．それから計量についての長さの補正因子

$$\frac{d(\text{固有の距離})}{dr} = e^{\Lambda} = [1 - 2m(r)/r]^{-1/2} \tag{3}$$

が出る．視覚化を容易にするために，星を通る赤道の薄片の空間幾何学 (r, ϕ) が Euclid 的 3–幾何学（z, r, ϕ）［23.8 節をみよ］にはめ込まれたものとして眺められるときには，平面 $z = 0$ からの“持ち上げ”は

$$z(r) = \begin{cases} (R^3/2M)^{1/2}[1 - (1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2}] & r \leq R \text{ に対して} \\ (R^3/2M)^{1/2}[1-(1-2M/R)^{1/2}] + [8M(r-2M)]^{1/2} - [8M(R-2M)]^{1/2} & \\ & r \geq R \text{ に対して} \end{cases} \tag{4}$$

である．$m(r)$ の知識は (2) から，流体静力学の平衡の方程式 (23.28b) が積分されて圧力

$$p = \rho_0 \left\{ \frac{(1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2} - (1 - 2M/R)^{1/2}}{3(1 - 2M/R)^{1/2} - (1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2}} \right\} \qquad r < R \text{ に対して} \tag{5}$$

を与えることを許す．圧力は今度は式 (23.28e) を経由して計量における時間補正因子

$$\frac{d(\text{固有時間})}{dt} = e^{\Phi} = \begin{cases} \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2} & r < R \text{ に対して} \\ (1 - 2M/r)^{1/2} & r > R \text{ に対して} \end{cases} \tag{6}$$

に通ずる．

これらの一様な密度の配置のいくつかの特徴は注目に値する．(1) 固定されたエネルギー密度 ρ_0 に対して，中心圧力

$$p_c = \rho_0 \left\{ \frac{1 - (1 - 2M/R)^{1/2}}{3(1 - 2M/R)^{1/2} - 1} \right\} \tag{7}$$

は，半径 R が増大し，そして，したがって，また，質量 $M = (4\pi/3)\rho_0 R^3$，および比（“重力の強さ”）

$$2M/R = (8\pi/3)\rho_0 R^2 \tag{8}$$

が増大するにつれて，単調に増大する．これは自然である．なぜなら，(1) 物質がますます多く星に加えられるにつれて，ますます大きい圧力が物質を支えるのに要求される．(2) M，R，および $2M/R$ が極限値

$$R_{\rm lim} = (9/4)M_{\rm lim} = (3\pi\rho_0)^{-1/2} \tag{9}$$

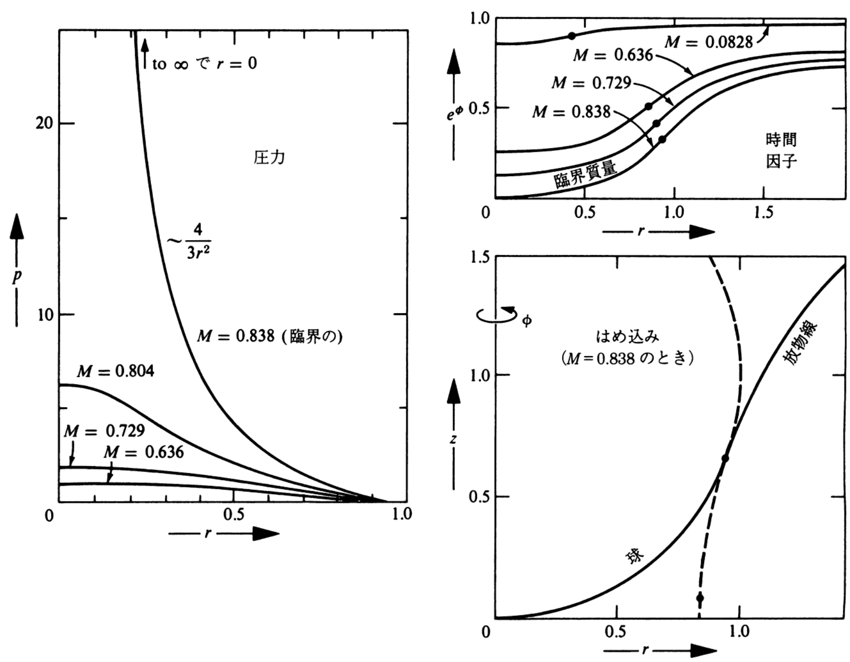
$$(2M/R)_{\rm lim} = 8/9 \tag{10}$$

に達するとき中心圧力は無限大になる．一様な密度の星はこれらの極限を越える質量および半径をもつことができない．これらの極限は純粋に相対論的な現象である．このような極限は Newton の理論に生じない．(3) 星の内部では空間幾何学（超曲面 $t=$ 一定の幾何学）は曲率半径

$$a = (3/8\pi\rho_0)^{1/2} \tag{11}$$

をもつ 3 次元の球状の空間幾何学である［上の式 (4) をみよ］．星の外部では (Schwarzschild) 空間幾何学は 3 次元の回転放物面の空間幾何学である．内部と外部の幾何学は滑らかに結合する．すべてのこれらの詳細は以下の 3 つの図に示されている．そこではすべての量は以下の幾何学的な単位である（g についての質量あるいは $\mathrm{g/cm^3}$ についての密度を cm についての質量あるいは $\mathrm{cm^{-2}}$ についての密度に変換するには，$0.724\times10^{-28}\,\mathrm{cm/g}$ によって掛けよ）．単位 $(3/8\pi\rho_0)^{1/2}$ についての長さ，単位 ρ_0 についての圧力，単位 $(3/32\pi\rho_0)^{1/2}$ についての質量で与えられている．

“集合後” の質量は M とよばれる物である．無限大に離れた小滴にまき散らされた同じ流体の質量は，以下の表では $M_{\text{前}}$ とよばれる．



$M_{前}$	小さい	0.0882	0.894	1.0913	1.374
M	小さい	0.0828	0.636	0.729	0.838（臨界の）
差（結合）	$\frac{3}{10}M^{5/3}$	0.0054	0.258	0.362	0.536

23.8　静的な星に対する時空の幾何学

高度に相対論的な星に対しては，時空の幾何学は Euclid–Lorentz 平坦さから強く離れる．したがって，表面積 $4\pi r^2$，したがってまた半径方向の座標 r は，星の中心から外部へ動くにつれて単調に増大するだろうと期待する**先験的**な理由は存在しない．幸いに，$\rho \geq 0$ である限り，そして星が静的である（平衡）限り，**星の構造の方程式は r が星の中心での 0 から，星から無限大の距離離れているところでの ∞ へ，単調に増大するであろうことを保証する．**

*42

*43

r の単調性は以下のようにみられうる．新しい半径方向の座標として星の中心からの固有距離 l を導入せよ．計量に対する表現 (23.27′) のおかげで l および r は

$$dr = \pm(1-2m/r)^{1/2}dl \tag{23.29}$$

によって関係している．r は星の中心（そこでは $m \propto r^3$）でゼロである，そして r は定義によってつねに負でないことに注意せよ．したがって r は最初は $l=0$ から外部へ動くにつれて l とともに増大しなければならない．$r(l)$ は後に最大に達することができる，そして $2m/r$ が 1 になる点で初めて減少し始める［式 (23.29) をみよ］．このような振る舞いは閉じた模型宇宙，一様な密度と半径 a の 3–球で，そこでは

$$r(l) = a\ \sin(l/a)$$

［27章，とくにコラム 27.2 (A) のはめ込み図をみよ］で，起こりうるし，そして起こる．しかし，場の方程式はこのような系は動的であることを要求する．ここでは逆に，条件が静的である系に注意が制限されている．このような系では，流体静力学の平衡の条件 (23.28b) が妥当する．それから圧力勾配は分母に因子［$1-2m(r)/r$］をもつ表現によって与えられる．もし $2m/r$ が星のある領域で，増大する l とともに 1 に近づくならば，圧力勾配がそこで非常に大きくなるので $2m(r)/r$ が 1 の値に達するであろう任意点に来る前に，点 $p=0$（星の表面）に来る．さらに，星の表面が通過された後には，m は一定にとどまる，$m(r)=M$，そして $2m(r)/r$ は減少する．したがって，$2m/r$ **はつねに 1 より小さく**，そ

*42　球の表面積，$4\pi r^2$

*43　(1) 星の中心から外部へ単調に増大する

して $r(l)$ は最大をもつことができない．Q.E.D.（証明の詳細は練習問題 23.9 として読者に残される）．

曲率半径 r，および対応する球状の表面積 $4\pi r^2$ は，星の中心から外部へ単調に増大する
*44 けれども，それらは平坦な時空におけるのと同じ割合で増大しない．平坦な時空では増大の割合は dr/d(固有の半径方向の距離) $= dr/dl = 1$ によって与えられる．星ではそれは $dr/dl = (1-2m/r)^{1/2} < 1$ によって与えられる．したがって，もし相対論的な星の中心から外部へ，おのおのの球殻に対してその Schwarzschild r 値（"固有の円周"$/2\pi$）を測定しながら長いはしごを登らなければならないとすれば，これらの r 値は驚くほど緩やかに増大するのを見出すだろう．

*45 この奇妙な振る舞いは "はめ込み図" によってもっとも容易に視覚化される．もし全体の曲がった 4 次元多様体をある高次元の平坦な空間にはめ込もうと試みようとするならば，それはどのような容易な視覚化に対しても手に負えないだろう．[しかし，5+1 次元への全面的なはめ込みに対しては Fronsdal (1959) および Clarke (1970) をみよ．そして 4+2 次元への局所的なはめ込みに対しては Kasner (1921b) をみよ．] 平坦でない真空の計量 ($G_{\mu\nu}=0$) を 5 次元の平坦な空間にはめ込むことはけっしてできない (Kasner, 1921c)．それゆえ，より単純な状況を求める (Flamm 1916)．静的な系の状況での 1 つの時間での空間は，別な時間での空間と同じ 3–幾何学をもつ．したがって，3–空間を 1 つの時間，$t=$ 一定におけるようにのみ描け．さらに，任意の 1 つの時間で空間自身は球対称性をもつ．したがって，空間を対称的に半分に分割する（たとえば，赤道の薄片，$\theta=\pi/2$)，中心 $r=0$ を通る 1 つの薄片は，中心を通る他のこのような薄片（任意の方位角で，任意の選ばれた傾斜面）と同じ 2–幾何学をもつ．したがって赤道の薄片の 2–幾何学に注意を制限せよ．この薄片上の幾何学は線要素

$$ds^2 = [1-2m(r)/r]^{-1}dr^2 + r^2\,d\phi^2 \tag{23.30}$$

によって記述される．さてこの 2 次元の曲がった空間の幾何学を Euclid 的な 3 次元多様体の平坦な幾何学にはめ込むことができるだろう．

*46 もし 2 次元の薄片の曲率がゼロあるいは無視できるならば，はめ込みは無意味である．この事象では 2–幾何学を Euclid 3–空間の薄片 $z=0$ と同定せよ．さらに，その 3–空間に軸対称性をもつ任意の問題に対して用いる，よく知られた円柱座標 z，r，ϕ を導入せよ（さらなる詳細に対しては図 23.1 およびコラム 23.2 をみよ）．それから平坦な 2 次元の薄片を 0 から 2π まで及ぶ ϕ と，0 から ∞ まで及ぶ r をもつ，$z=0$ の Euclid 空間の点の組と認める．薄片の r および ϕ を Euclid 3–空間の r および ϕ と同定した．

赤道の断面が現実の星を通って取られるときのように，もし 2–幾何学が曲がっているならば，薄片の r，ϕ と Euclid 3–幾何学の r，ϕ との間の同定を保持せよ．しかし平面 $z=0$（原点，$r=0$ を除いて）から薄片を曲げあげよ．同時に，湾曲は軸対称であると主張せよ．

---

*44 (2) しかし平坦な時空におけるよりもさらに緩やかに増大する
*45 高次元の平坦な空間に時空をはめ込む
*46 星を通る赤道の薄片に対する "はめ込み" 図の構成

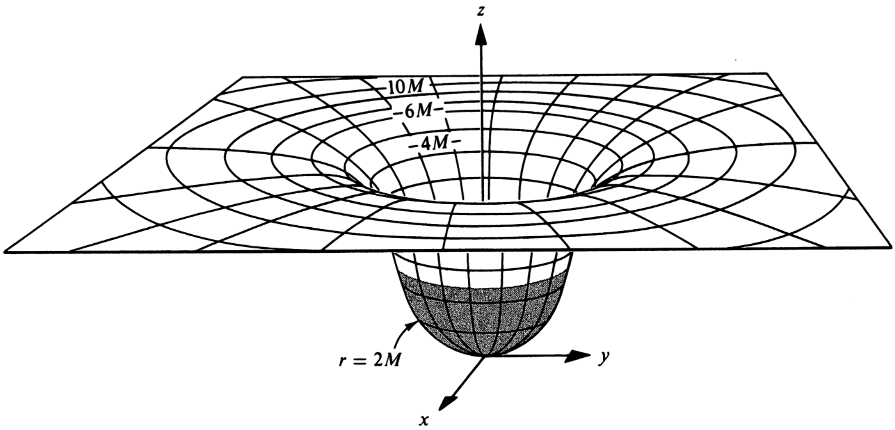


図 **23.1**　半径 $R = 2.66M$ の星の内部（灰色）および周囲（白色）の幾何学が図式で表示されている．星は流体静力学の平衡にありそしてゼロ角運動量をもつ（球対称）．星を通る赤道の薄片（$\theta = \pi/2$，$t =$ 一定）の 2 次元幾何学

$$ds^2 = [1 - 2m(r)/r]^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2$$

が，2 個の近傍点（r, ϕ）および（$r + dr, \phi + d\phi$）間の距離が正しく再現されるような方法で，Euclid 3–空間にはめ込まれて表されている．曲がった曲面から離れて測定された距離は物理学的な意味をもたない．曲面が物理学的な意味をもたない離れた点，そして Euclid 3–空間自身は物理学的な意味をもたない．曲がった 2–幾何学のみが意味をもつ．Schwarzschild 座標半径 r の円は固有の円周 $2\pi r$ をもつ（注意は星の赤道面，$\theta = \pi/2$ に制限される）．Schwarzschild 座標時間 t の任意の選ばれた瞬間で星の内部でおよび周囲で全 3–幾何学を視覚化するために，すべての他の円に対するのと同様に，この円を固有の領域 $4\pi r^2$ の球によって置き換える．因子 $[1 - 2m(r)/r]^{-1}$ は $r = 2M$ 内部で r が減少するときに特異点を展開しない．なぜなら $m(r)$ は減少する r とともに十分に速く減少するからである．

言い換えれば，平面 $z = 0$ の上に“上がる高さ”の量は r についての依存性が何であろうとも，ϕ に無関係であるように要求せよ．こうしてはめ込みの全説明は唯一の関数，上がる高さ

$$z = z(r)(\text{“はめ込みの公式”})$$

によって要約される．

Euclid 空間におけるこの曲がった 2 次元の軌跡についての幾何学（つくり上げられた 3–空間，それは現実の世界と関係する何ものももたない）は，実際の星を通る 2 次元の赤道の薄片の幾何学と同等であるはずである．言い換えれば 2 つの場合における線要素は同等であるはずである．この要求を数学的な用語で達成するには，3 次元 Euclid 空間での線要素を形式

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2\, d\phi^2 \tag{23.31}$$

で書く．選ばれた軌跡（“持ち上げられた曲面”）に，$z = z(r)$ あるいは $dz = (dz/dr)dr$ と書くことによって，限定せよ．こうして 3–幾何学における 2 次元の軌跡についての

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz(r)}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2\, d\phi^2 \tag{23.32}$$

を実際の星における

$$ds^2 = [1 - 2m(r)/r]^{-1} dr^2 + r^2\, d\phi^2$$

と同一視しなければならない．比較して

$$\left(\frac{dz(r)}{dr}\right)^2 + 1 = [1 - 2m(r)/r]^{-1} \tag{23.33}$$

を結論せよ．この式は r の関数としての持ち上げを見出すのに十分な情報である．こうして，

$$z(r) = \int_0^r \frac{dr}{\left[\dfrac{r}{2m(r)} - 1\right]^{1/2}} \qquad (\text{いたるところで}) \tag{23.34a}$$

$$z(r) = [8M(r - 2M)]^{1/2} + \text{定数} \qquad (\text{星の外部で}) \tag{23.34b}$$

*47 星の外部でこのはめ込まれた曲面は回転放物面の部分である．星の内部の形は質量 m が r の関数としていかに変化するかに依存する．$m(r)$ は星の中心の近くで $(4\pi/3)\,\rho_c r^3$ として変化することを思い出せ．はめ込まれた曲面はそこで半径 $a = (3/8\pi\rho_c)^{1/2}$ の球の部分のようにみえることを結論せよ．こうして，

$$[a - z(r)]^2 + r^2 = a^2, \qquad r \ll a = (3/8\pi\rho_c)^{1/2}\text{に対して} \tag{23.34c}$$

一様な密度をもつ星（コラム 23.2）の特別な場合には，内部全体が球状の形 (23.34c) である．一般の場合にはそうでない．一般の場合には，$r > 2m(r)$ のゆえに，式 (23.34a) は互いに他の単調増大関数として，z および r をもつ曲面を生む．これははめ込まれた曲面がつねにおわん（bowl）のように上方にそして外部に開いていることを意味し，つねに定性的に図 23.1 のようにみえる．けっしてくびれをもたず，$r = \infty$ で漸近的に平たくなる以外，けっして平たくならない．星の表面で，密度が不連続にゼロに落ちたとしても（$p = 0$ のとき ρ は内部で有限である，ρ は外部でゼロである)，内部と外部の幾何学は滑らかに互いに結合するだろう［dz/dr は，式 (23.33) によって与えられるように，連続である］.

星の幾何学に関する限り，はめ込まれた 2–曲面上に存在する点のみが物理学的な意味をもつことは強調されなければならない．図 23.1 のおわんの内部と外部の 3 次元の領域は物理学的に意味がない．Euclid 的なはめ込み空間もそうである．それはたんに星の周りの空間の幾何学を好都合な方法で視覚化することを許す．

［**練習問題**］

23.9　r の良い振る舞い

本節の初めにある $2m/r$ は，つねに 1 より小さい，そして r は l の単調関数であるという，証明の完全な詳細を明確に実行せよ．

23.10　極端に相対論的な極限での理想的な Fermi ガスによって占められる星の中心

非常に高度に圧縮されて粒子が相対論的なエネルギーをもち，それに比べると粒子がもつどのような静止質量も無視できる，温度ゼロの理想的な Fermi ガス［理想的な中性子星，

*47　はめ込まれた曲面の記述

Oppenheimer and Volkoff (1939) をみよ] からつくられるという星の理想化は，非圧縮性流体からつくられる星の理想化に逆である．位相空間内の体積 h^3 の占められたセルあたり 2 個の粒子をもつ，この極限で，

$$(\text{Fermion の数密度}) = n = (2/h^3)4\pi \int_0^{p_{\mathrm{F}}} p^2\,dp = 8\pi {p_{\mathrm{F}}}^3/3h^3,$$

$$(\text{質量–エネルギーの密度}) = \rho = (2/h^3)4\pi \int_0^{p_{\mathrm{F}}} cp\cdot p^2\,dp = 2\pi c{p_{\mathrm{F}}}^4/h^3$$

をもつ．そして最後に粒子でなく放射を取り扱っているように（p_{F}=Fermi 運動量，最高の占有状態の運動量），

$$p = -\frac{d(\text{粒子あたりのエネルギー})}{d(\text{粒子あたりの体積})} = -\frac{d(\rho/n)}{d(1/n)} = 2\pi c{p_{\mathrm{F}}}^4/3h^3 = \rho/3$$

(a) 状態方程式 $p = \rho/3$ を満たす物質に対する流体静力学の平衡の相対論的な方程式を書け．

(b) $m(r)/r$ が値 3/14 をもつ，無限大の中心密度の極限的な場合に対するよく定義された解析的な解が存在することを示せ．

(c) $\rho(r)$，$p(r)$，および $n(r)$ をみつけよ．

(d) $n(r)$ が原点で無限大であるという事実にもかかわらず，任意の有限の r–値までの粒子の数は有限であることを示せ．

(e) 3–幾何学は $r = 0$ で “円錐形の特異点” をもつことを示せ．

(f) この 3–幾何学に対する “はめ込み図” をつくれ ［$z(r)$ を式 (23.34) から r の関数として “持ち上げよ”］．（$r = 0$ での円錐形の特異点は，そうでなければ物理学的に理にかなっておらず，質量–エネルギーの密度がその点で無限大になるから生ずることに注意せよ．また系の計算された質量は $r \to \infty$ につれて無限大に発散することに注意せよ．実際，減少する密度とともに Fermi 運動量は相対論的な値から非相対論的な値に落ち，状態方程式はその数学的な形を変え，そして全質量 M は有限値に収束する）．

コラム 23.3　球対称な線要素の厳密な導出

23.2 節は一般的な球対称な線要素 (23.7) の発見に役立つ導出を与えた．このコラムは静的な系とともに，静的でない系にも適用できる，より厳密な導出を試みる．

Lorentz 記号の計量 ds^2 が定義されている多様体 M^4 で始めよう．すべての曲線の長さを保存し，任意の 3×3 回転行列 A にそこでは M^4 の写像（回転）が対応する，すなわち A （$A : M^4 \to M^4 : \mathcal{P} \to A\mathcal{P}$）とよばれる，という意味で M^4 は球対称であると仮定せよ．さらなる仮定および構成は (i)，(ii) 等と番号をつけられるだろう．したがって線要素 (23.7) に到達するにはどのような特殊化が必要とされるかをみ

ることができる．ダガー（†）はある他の物理学的に興味ある事情に適用することができないと見出される仮定を指す．

任意点 $\mathcal{P}$ に対して，回転のもとで $\mathcal{P}$ に同等なすべての点の集合 $s = \mathcal{S}(\mathcal{P}) = \{A\mathcal{P}{\in}M^4|A{\in}SO(3)\}$ をつくる．(i)† s は 2 次元の曲面である（s がゼロ次元である中心点を除いて），そして（ii）s 上の計量は標準的な 2–球の計量であると仮定せよ．そうすると s 上では

$$(ds^2)_s = R^2(s)d\Omega^2 \tag{1}$$

をもつだろう．ここに $d\Omega^2$ は単位球の標準的な計量（s 上で定義されるある θ，ϕ に対して $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$）である．そして $2\pi R$ は s の円周である．もし M^2 がすべてのこのような曲面 s の集合であるならば，$\mathcal{S}$: $M^4 \to M^2 : \mathcal{P} \to s = \mathcal{S}(\mathcal{P})$ は，$R : M^2 \to \mathcal{R} : s \to R(s)$ ［式 (1) によって定義されるように M^2 上の "円周関数"］から，ある場合には究極的に M^4 上で座標として用いられうる対応する関数 $R : M^4 \to \mathcal{R} : \mathcal{P} \to R(\mathcal{S}(\mathcal{P}))$ M^4 上で得ることを許す（**注意：**$\mathcal{R}$ はここでは実数を表す）．

さて（iii)† もし $\mathcal{P} = \mathcal{C}(\tau)$ が $\boldsymbol{u} = d/d\tau$ をもつ $\boldsymbol{u}$ の 1 つの軌跡であるならば，回転によって得られるおのおのの曲線 $\mathcal{P} = A\mathcal{C}(\tau)$ もまた $\boldsymbol{u}$ の軌跡でなければならないように定義されている，球対称な 4–速度場 $\boldsymbol{u}$ が存在すると仮定せよ．2–球上で回転不変なゼロでないベクトル場は存在しないから，$\boldsymbol{u}$の任意の球 s 上への直交射影はゼロでなければならない．こうして $\boldsymbol{u}$ はおのおのの s に直交する．また，もし $\boldsymbol{u}$ の 2 つの軌跡がある同じ球 s 上で出発し，したがって $\mathcal{C}_1(0) = A\mathcal{C}_2(0)$ であるならば，同じ回転 A はつねにそれらを関係づけるであろう，$\mathcal{C}_1(\tau) = A\mathcal{C}_2(\tau)$．なぜなら軌跡は軌跡上の任意の 1 点によって一義的に定義されるからである．そうすると，$\mathcal{S}(\mathcal{C}_1(\tau))$ および $\mathcal{S}(\mathcal{C}_2(\tau))$ はともに M^2 において同じ曲線である，その接線 $d/d\tau$ をまた $\boldsymbol{u}$ とよぶことができる．このようにして M^2 上のベクトル場 $\boldsymbol{u}$ を得る．M^2 上の $\boldsymbol{u}$ の各軌跡に異なるラベル r を与えて M^2 上の関数 $r(s)$ を定義せよ．$r = r(\mathcal{S}(\mathcal{P}))$ によって $dr/d\tau = 0$ をもつ M^4 上の対応する関数 r を表せ．M^4 上の関数およびそれらの勾配は M^2 上の対応する量を定義するから，$\boldsymbol{df}{\cdot}\boldsymbol{dg}$ のような内積は M^4 上のそれらの値によって M^2 上で定義されうる．こうして，M^4 上の計量から M^2 上の計量を得る．それから式 (23.5) によってあるいは同じことであるが M^2 において $r =$ 一定の線に直交する曲線を描き，そしておのおのに異なるラベル t を与えることによって，$g^{rt} = \boldsymbol{dr}{\cdot}\boldsymbol{dt} = 0$ をもつ座標を得る．r ラベルと t ラベルはともに対応する曲線上で任意に割り当てられたから，変換 $t' = t'(t)$ および $r' = r'(r)$ は除外されないことは明白である．

M^4 における 1 つの 2–球上の，$t = 0$ の超曲面上で，極（$\theta = 0$）および基本的な子午線（$\phi = 0$）を任意にとることによって θ，ϕ 座標の組を選べ．それから θ および ϕ が各 2–球 s に直交する曲線上で一定であることを要求することによって，すなわ

ち，$(\partial/\partial r)_{\theta\phi}$ が $t=0$ で各 s に直交することを要求することによって，θ，ϕ の定義を $t=0$ の超曲面にわたって拡張せよ．θ および ϕ が接線 $\boldsymbol{u}$ をもつ曲線上で一定である．したがって $(\partial/\partial t)_{r\theta\phi}\propto\boldsymbol{u}$ を要求することによって，θ および ϕ の定義を $t\neq 0$ にまで拡張せよ．しかし各 s は一定の r および t の曲面である．したがって $(\partial/\partial\theta)_{rt\phi}$ および $(\partial/\partial\phi)_{rt\theta}$ は s に接する．しかるに $\boldsymbol{u}\propto(\partial/\partial t)$ は各 s に直交し，さきほど構成された $tr\theta\phi$ 座標系で

$$g_{t\theta}=(\partial/\partial t)\cdot(\partial/\partial\theta)=0 \tag{2}$$

および

$$g_{t\phi}=(\partial/\partial t)\cdot(\partial/\partial\phi)=0 \tag{3}$$

ベクトル $(\partial/\partial r)_{t\theta\phi}$ は1つの球 s 上の θ，ϕ 座標の本来の選択で導入された任意の方向に依存しない．それは変換 $\theta=\theta(\theta',\phi')$，$\phi=\phi(\theta',\phi')$ の下で不変である．しかし θ および ϕ を除く何ものも回転不変でない要素を議論に導入しなかった．したがって $(\partial/\partial r)_{t\theta\phi}$ は回転不変なベクトル場でなければならない（たとえば，$\partial/\partial\phi$ のようでない）．それは，$\boldsymbol{u}$ のように，各 2–球 s に直交する．この不変性はそうすると

$$g_{r\theta}=(\partial/\partial r)\cdot(\partial/\partial\theta)=0 \tag{4}$$

$$g_{r\phi}=(\partial/\partial r)\cdot(\partial/\partial\phi)=0 \tag{5}$$

を与える．それは，すでに確立されているように $g^{tr}=0$ とともに，$g_{tr}=0$ を与える．結果は形式 (23.3) の線要素である．さらなる特殊化，半径方向の座標と時間座標の R および T への変化，ここに R は上述の (1) によって定義され，そして記号の変化によって生じる

$$\boldsymbol{d}T=e^{\psi}\left[\frac{1}{g_{rr}}\frac{\partial R}{\partial r}\boldsymbol{d}t-\frac{1}{g_{tt}}\frac{\partial R}{\partial t}\boldsymbol{d}r\right]$$
$$e^{\psi}=(\text{積分因子})$$

は，Schwarzschild 座標と線要素 (23.7) に通ずる．このような変換は $\boldsymbol{d}R\wedge\boldsymbol{d}T\neq 0$,

$$(\boldsymbol{\nabla}R)^2=\frac{(\partial R/\partial t)^2}{g_{tt}}+\frac{(\partial R/\partial r)^2}{g_{rr}}\neq 0$$

である場合に限り可能である（すなわち，特異性をもたない）．

もし (iv)† 時空が漸近的に平坦であるならば，$r\to\infty$ は計量がその特殊相対論の値をとりうる領域である．そうすれば t 座標についての任意性 $t'=t'(t)$ は，$r\to\infty$ のとき $g_{tt}=-1$ を要求することによって消去されうる．そうすれば $(\partial/\partial t)_{r\theta\phi}$ は自然な要求によって一義的に定まり（任意の θ，ϕ の選択に関係なく），そして時間によらない幾何学のさらなる物理学的な仮定 (v)† をすることが望まれるときにはいつでも，これは $\partial g_{\mu\nu}/\partial t=0$ として適切に述べ直されうる．

24章
パルサーと中性子星，クエーサーと超重量星

行け，不思議な生物よ，科学が導くところへ登れ．
行け，地球を測定せよ，空気の重さを量れ，そして潮汐を語れ．
惑星がどのような軌道を回るかを教えよ，
古い時間を訂正せよ，そして太陽を規制せよ．

ALEXANDER POPE (1733)

24.1 概　　観

*1 相対性理論の効果が重要であるような5種類の星の構成が認められている．白色わい星，中性子星，ブラックホール，超重量星，および 相対論的な星団である．構成のおのおのの型についての重要な事実はコラム24.1に要約されている．そしてもっとも重要な詳細は本章の本文に記述されている（24.2節における白色わい星，24.2節および24.3節における中性子星とそれらのパルサーとの関係，24.4節および24.5節における超重量星とそれらのクエーサーおよび銀河核とのありうる関係，そして24.6節における相対論的な星団．ブラックホールの詳細な議論は33章まで延期される）．

Zel'dovich and Novikov による本 "**Stars and Relativity**" (1971) は，相対論的な星の理論のすべてのこれらの天体物理学の応用の明白で完全な取り扱いを提供している．ある意味で，その本は本書に対する仲間の本とみなされうる．それは，本書が重力的な強調で取り扱うすべての題目を，天体物理学的な目線で取り上げている．本章は，"**Stars and Relativity**" で見出される材料の簡単な概観を読者に与えることのみを意図している．

コラム 24.1　相対論の効果が重要である星の構成

[これらの全題目についての詳細な解析および文献に対しては，Zel'dovich and Novikov (1971) をみよ.]

A. 白色わい星

白色わい星は，約5,000 km の半径および約 10^6 g/cm^3〜1 t/cm^3 の密度をもつ，1太陽質量の星である．また重力に対して縮退した電子の圧力によって自らを支えてい

*1 相対性理論が重要であるような星の構成の型

る．核燃料を燃やすことをやめてしまい，残っている熱エネルギーの蓄えを放射するにつれて徐々に冷却されていく．

理論的に理解されるはるか以前に，観測され天文学的に研究された．

歴史的に重要な点：

1926 年 8 月に Dirac（1926）は，Fermi（2 月）のあとを継いで，Fermi–Dirac 統計を定式化した．1926 年 12 月に R. H. Fowler（1926）は，白色わい星の性質を説明するために Fermi–Dirac 統計を用いた．彼は重力の内向きの引力に対して星を支えるために電子の縮退圧を考え出した．1930 年に S. Chandrasekhar（1931a,b）は，縮退した電子の状態方程式に特殊相対論の効果を考慮して，白色わい星の模型を計算した．彼は**白色わい星は ∼1.2 太陽質量（“Chandrasekhar 極限”）よりも重くなりえない**ことを発見した．1932 年に L. D. Landau（1932）は，Chandrasekhar 極限の基本的な説明を与えた．1949 年に S. A. Kaplan（1949）は，重い白色わい星に対する質量–半径の曲線について一般相対論の効果を導き，半径が 1.1×10^3 km よりも小さくなるとき，一般相対論はおそらく不安定さを誘因することを導いた．

白色わい星における一般相対性理論の役割：

構造についての影響は無視できる．安定性についての，脈動の振動数についての，そして Chandrasekhar 極限近くの（すなわち，重い白色わい星における）質量–半径の曲線の形については重要な影響を及ぼす．電子捕獲もまた重要である．たとえば，Zel’dovich and Novikov（1971），Faulkner and Gribbin（1968）をみよ．

B. 中性子星

中性子星は，約 10 km の半径および約 10^{14}g/cm^3 の密度（原子核の密度と同じ）をもつ約 1 太陽質量の星である．重力に対して縮退した中性子の圧力および核子–核子間の強い相互作用の力によって支えられていて，核エネルギーを燃やしていない．放射されているエネルギーは，回転のエネルギーと残っている内部熱エネルギーの蓄えである．

理論的な計算はそれらの存在を 1934 年に予言したが，1968 年まで観測的に存在することが確かめられなかった．

歴史的に重要な点：

1932 年に，中性子が Chadwick（1932）によって発見された．1933–1934 年に，Badde and Zwicky（1934a,b,c）は，(1) 中性子星の概念を考案した．(2) 彼らが “超新星” とよんだ新しいクラスの天文学的な対象を同定した．(3) 超新星は正常な星の崩壊によって創造され，中性子星をつくることを提案した（図 24.1 をみよ）．1939 年に Oppenheimer and Volkoff（1939）は，中性子星の構造の最初の詳細な計算を遂行した．23 章に紹介されているように，星の構造の一般相対論的な理論に基礎を置いた（図 24.1 をみよ）．1942 年に，Duyvendak（1942）および Mayall and Oort（1942）は，かに星雲（Crab nebula）は西暦 1054 年に中国の天文学者によって観測された超新星爆発の残骸であると推論した．Baade（1942）および Minkowskii（1942）は，かに星雲の中心近くの “南前方の星” をおそらく 1054 年に爆発した星の（崩壊した）残骸であ

ると同定した（口絵をみよ）. 1967 年に，パルサーが Hewish *et al.* (1968) によって発見された. 1968 年に Gold (1968) は，パルサーは回転している中性子星であるというアイデアを提起した. そして続いてなされた観測はこの提案を確認した. 1969 年に Cocke, Disney, and Taylor (1969) は，かに星雲の "南前方の星" はパルサーであること，したがって超新星，中性子星，およびパルサー間の関係を確定することを発見した.

中性子星における一般相対論の役割：

構造と振動の周期についての重要な効果（2 の因子ほどの大きさ），重力放射の反作用は半径方向でない振動を減衰させる主要な力であるだろう.

C. ブラックホール

星がその幾何学化された質量の 2 倍よりも小さい（$R < 2M \sim (M/M_{\odot}) \times 3\,\mathrm{km}$）大きさに崩壊するときに創造される対象である. したがってもはや外部の宇宙と意志を疎通できないような強い時空の曲率を生み出す（33 章および 34 章にブラックホールの詳細な解析がある）.

一般相対論を受け入れる者はブラックホールがわれわれの銀河内に存在しなければならないという予言から逃れるいかなる方法も見出していない. この予言はブラックホールを形成する崩壊の複雑さに，あるいは高密度での物質の未知の性質に，まったく依存しない. しかし，ブラックホールの存在は観測的にいまだ確認されていない.

歴史的に重要な点：

1795 年に Laplace (1795) は，Newton の重力および Newton の光の粒子説によれば，光は十分に重い対象から逃れることができないことを指摘した（図 24.1）. 1939 年に Oppenheimer and Snyder (1939) は，圧力のない流体の均質な球の崩壊を，一般相対論を用いて計算し，そして球は宇宙の残りから切り離されていることを発見した. これがブラックホールがいかに形成されうるかの最初の計算であった（図 24.1）. 1965 年に，ブラックホール物理学の集中的な理論的研究の時代が始まる.

ブラックホール物理学における一般相対論の役割：

Newton の理論で可能なブラックホールの賢明な説明はない. ブラックホールの物理学は，始まりから終わりまで Einstein の重力の記述を要求する.

D. 超重量星

典型的に標準的な星での密度よりも小さい密度の熱いプラズマから構成される，10^3 太陽質量～10^9 太陽質量をもつ星である. おもに，プラズマ内にとらえられてプラズマと熱平衡にある，光子の圧力によって支えられる. 展開でのある段階で核エネルギー（水素）を燃やす.

理論的な計算によると，超重量星は銀河およびクエーサーの中心に，そしておそらく他のところにも存在することが暗示される（しかし完全な信頼をもってでない）. 超重量星はあるクエーサーおよび銀河核に対するエネルギー源でありうると想像される. しかし，天文学的な観測は，いまだそれらの存在，あるいはもし存在するならば宇宙

における それらの役割について決定的な証拠を与えていない．

歴史的に重要な点：

1963 年に Hoyle and Fowler（1963a,b）は，超重量星のアイデアを思いつき，それらの性質を計算し，それらが銀河核およびクエーサーと関係しているかもしれないと提案した．

1963–64 年に，Chandrasekhar（1964a,b）および Feynman（1964）は，星の脈動について一般相対論の理論を展開した．そして Feynman はその理論を用いて，超重量星は構造的には Newton 的であるけれども，一般相対論的な不安定さを受けやすいことを示した．

1964 年およびその後に，多くの研究者による計算は Hoyle and Fowler のアイデアを練りそして拡張したが，目を見はらせる突破口は何も生まなかった．

超重量星における一般相対論の役割：

小型で，速く回転している，円盤状の構成の極端な場合を除いて，構造についての影響は無視できる［Bardeen and Wagoner（1971），Salpeter and Wagoner（1971）をみよ］．安定性についての重要な影響．

E. 相対論的な星団

非常に星団の密度が大きいので，Newton の理論への相対論的な補正がそれらの構造を修正する．

理論的な計算によると，相対論的な星団がある銀河やクエーサーの中核内に形成されるだろうことが示唆される．しかし実際は多分形成されないだろう．もし相対論的な星団が形成されようとするならば，それらは星と星との衝突によって形成中に破壊され，超重量星あるいは星とガスの密な集合体に変換するだろう．天文学的な観測は相対論的な星団の存在について，いまだ，決定的な証拠を与えていない．

歴史的に重要な点：

1965 年に，Zel'dovich and Podurets（1965）は相対論的な星団のアイデアを思いつき，それらの構造の理論を一般相対論と運動論を用いて展開し（25.7 節を参照せよ），そしてそれらの安定性について推測した．

1968 年に Ipser（1969）は，星団の安定性の理論を展開し，（Zel'dovich–Podurets の推測と一致して）それがあまりに密になると，崩壊してブラックホールを形成し始めることを示した．

星団における一般相対論の役割：

中心から無限遠への重力による赤方偏移が $z_c \equiv \Delta\lambda/\lambda \sim 0.05$ を越えるときに構造についての重要な効果を及ぼす．

中心の赤方偏移が $z_c \approx 0.50$ に達するときに星団の崩壊を誘導して，ブラックホールを形成する．

24.2 星の展開の終点

展開の標準的な段階の後に，星は種々の過程によって“死ぬ”．ある星は自らを星間媒体にまき散らして爆発する．他の星は白色わい星の状態に収縮する．そして他の星は，現在進行中の理論によれば，中性子星の状態，あるいはさらに，ブラックホールへ崩壊する．現在，星の最終状態への力学的な展開についてほとんど知らないけれども，最終状態そのものについて多くのことが知られている．最終状態は，ここでは興味がない分散された星雲，本節の題目である冷たい星の形態，そしてパート VII の題目である“ブラックホール”を含む．

*2 “星の展開の最終状態”という術語は原理的に何を意味するか？ A 個の与えられたバリオンを含む星で出発し，そして熱核燃焼の絶対的な，燃え尽きた終点まで星を展開させよ（A–バリオン系に対する可能な最小の質量–エネルギー）．もし熱核燃焼の正常な過程が遅すぎるならば，触媒作用によってスピードを上げよ．もし爆発が起こるならば，出て行く物質を集め，その運動エネルギーを抽出して，その物質を系に戻せ．燃え尽きるまでに必要とされるだけこの操作を繰り返せ（燃え尽きとは，適度な圧力のもとで系の部分が冷たい Fe^{56}，中心により近い領域で他の核種，全体に“熱核燃焼の終点まで，触媒作用を及ぼされた冷たい物質”）．最後に，すべての角運動量は除去され，すべての熱が取り去られて，温度は絶対ゼロにあり，そしてゼロ角速度をもつ，絶対的に最低のエネルギー状態にある系で終われ．このような“死んだ”系は，その質量およびその履歴に依存して（ある A–値に対しては2つの異なるエネルギーの最小），冷たい星の構成（中性子星，あるいは“白色”わい星）として，あるいは“死んだ”ブラックホールとして終わる．

*3 冷たい星の構成の解析は状態方程式を要求する．温度はゼロに固定されている．核の組成は原理的に密度によって一義的に指定される．したがって圧力もまたひとたび密度が指定されてしまうと一義的に固定される［“冷たい触媒作用を及ぼされた物質”に対する状態方程式 $p(\rho)$］．

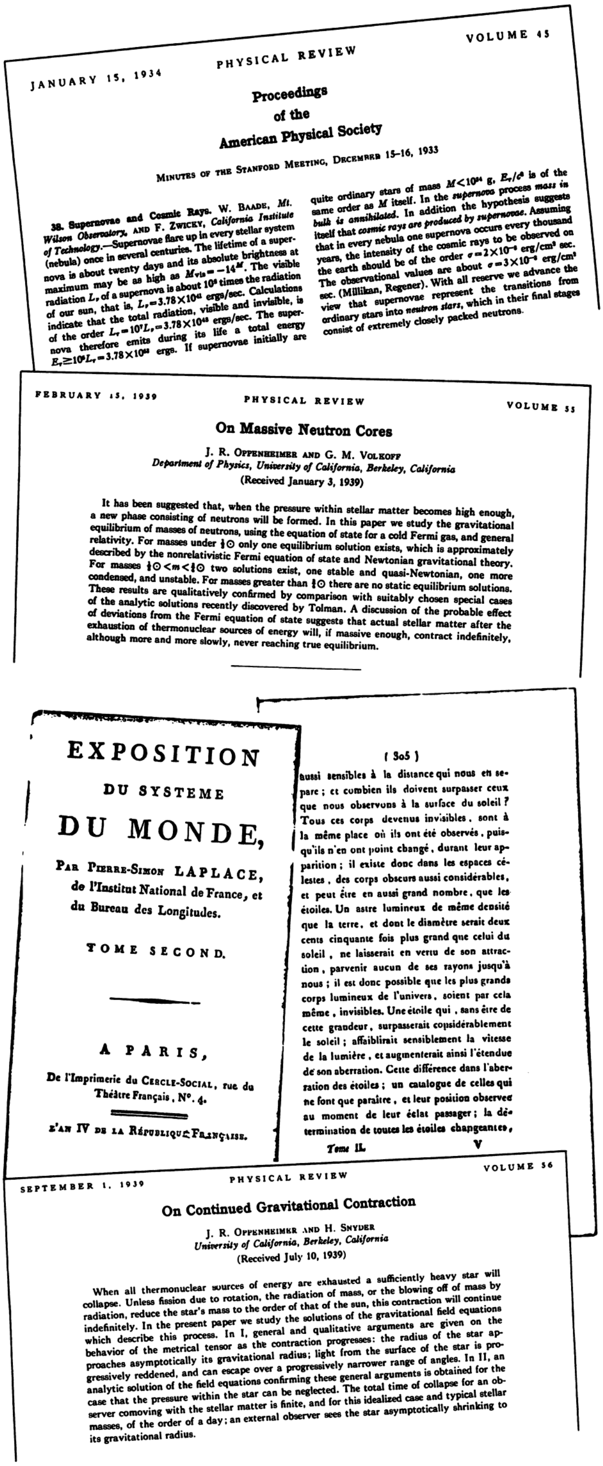
天文学者によって観測された白色わい星および中性子星は，実際には冷たい触媒作用を及ぼされた物質からつくられていない．しかしそれらの内部の物質は，熱核展開の終点に十分近くそして十分冷たいので，それはかなりの精度で冷たい触媒作用を及ぼされたと理想化されうる．

冷たい触媒作用を及ぼされた物質に対する，状態方程式 $p(\rho)$ は，図 24.2 にグラフで示されている．状態方程式のこのバージョンは Harrison and Wheeler によって 1958 年に構成された．より最近構成された他のバージョンは（文献に対しては Cameron（1970）および Baym，Bethe，and Pethick（1971）をみよ），核の密度，$\rho < 3\times10^{13}\mathrm{g/cm^3}$ より十分小さい密度で，Harrison–Wheeler のバージョンにほとんど同じである．核の密度およびそれ以上の密度で，すべてのバージョンは核子–核子相互作用について異なる仮定のゆえに異なる．図 24.2 における状態方程式を用いて構造の方程式 (23.28) を数値的に積分す

---

*2 “星の展開の最終状態”，そして“冷たい触媒作用を及ぼされた物質”が定義される

*3 冷たい，触媒作用を及ぼされた物質に対する状態方程式



JANUARY 15, 1934　　PHYSICAL REVIEW　　VOLUME 45

Proceedings of the American Physical Society

MINUTES OF THE STANFORD MEETING, DECEMBER 15–16, 1933

38. Supernovae and Cosmic Rays. W. BAADE, *Mt. Wilson Observatory*, AND F. ZWICKY, *California Institute of Technology*.—Supernovae flare up in every stellar system (nebula) once in several centuries. The lifetime of a supernova is about twenty days and its absolute brightness at maximum may be as high as $M_{vis} = -14^M$. The visible radiation L_ν of a supernova is about 10^8 times the radiation of our sun, that is, $L_\nu = 3.78 \times 10^{41}$ ergs/sec. Calculations indicate that the total radiation, visible and invisible, is of the order $L_\tau = 10^7 L_\nu = 3.78 \times 10^{48}$ ergs/sec. The supernova therefore emits during its life a total energy $E_\tau \geq 10^5 L_\tau = 3.78 \times 10^{53}$ ergs. If supernovae initially are quite ordinary stars of mass $M < 10^{34}$ g, E_τ/c^2 is of the same order as M itself. In the *supernova* process *mass in bulk is annihilated*. In addition the hypothesis suggests itself that *cosmic rays are produced by supernovae*. Assuming that in every nebula one supernova occurs every thousand years, the intensity of the cosmic rays to be observed on the earth should be of the order $\sigma = 2 \times 10^{-3}$ erg/cm² sec. The observational values are about $\sigma = 3 \times 10^{-3}$ erg/cm² sec. (Millikan, Regener). With all reserve we advance the view that supernovae represent the transitions from ordinary stars into *neutron stars*, which in their final stages consist of extremely closely packed neutrons.

FEBRUARY 15, 1939　　PHYSICAL REVIEW　　VOLUME 55

On Massive Neutron Cores

J. R. OPPENHEIMER AND G. M. VOLKOFF
Department of Physics, University of California, Berkeley, California
(Received January 3, 1939)

It has been suggested that, when the pressure within stellar matter becomes high enough, a new phase consisting of neutrons will be formed. In this paper we study the gravitational equilibrium of masses of neutrons, using the equation of state for a cold Fermi gas, and general relativity. For masses under $\frac{1}{3}\odot$ only one equilibrium solution exists, which is approximately described by the nonrelativistic Fermi equation of state and Newtonian gravitational theory. For masses $\frac{1}{3}\odot < m < \frac{3}{4}\odot$ two solutions exist, one stable and quasi-Newtonian, one more condensed, and unstable. For masses greater than $\frac{3}{4}\odot$ there are no static equilibrium solutions. These results are qualitatively confirmed by comparison with suitably chosen special cases of the analytic solutions recently discovered by Tolman. A discussion of the probable effect of deviations from the Fermi equation of state suggests that actual stellar matter after the exhaustion of thermonuclear sources of energy will, if massive enough, contract indefinitely, although more and more slowly, never reaching true equilibrium.

EXPOSITION
DU SYSTEME
DU MONDE,
PAR PIERRE-SIMON LAPLACE,
de l'Institut National de France, et
du Bureau des Longitudes.

TOME SECOND.

A PARIS,
De l'Imprimerie du CERCLE-SOCIAL, rue du
Théâtre Français, N°. 4.
L'AN IV DE LA RÉPUBLIQUE FRANÇAISE.

(305)

aussi sensibles à la distance qui nous en sepàre ; et combien ils doivent surpasser ceux que nous observons à la surface du soleil ? Tous ces corps devenus invisibles, sont à la même place où ils ont été observés, puisqu'ils n'en ont point changé, durant leur apparition ; il existe donc dans les espaces célestes, des corps obscurs aussi considérables, et peut être en aussi grand nombre, que les étoiles. Un astre lumineux de même densité que la terre, et dont le diamètre serait deux cents cinquante fois plus grand que celui du soleil, ne laisserait en vertu de son attraction, parvenir aucun de ses rayons jusqu'à nous ; il est donc possible que les plus grands corps lumineux de l'univers, soient par cela même, invisibles. Une étoile qui, sans être de cette grandeur, surpasserait considérablement le soleil ; affaiblirait sensiblement la vitesse de la lumière, et augmenterait ainsi l'étendue de son aberration. Cette différence dans l'aberration des étoiles ; un catalogue de celles qui ne font que paraître, et leur position observée au moment de leur éclat passager ; la détermination de toutes les étoiles changeantes,

Tome II.　　V

SEPTEMBER 1, 1939　　PHYSICAL REVIEW　　VOLUME 56

On Continued Gravitational Contraction

J. R. OPPENHEIMER AND H. SNYDER
University of California, Berkeley, California
(Received July 10, 1939)

When all thermonuclear sources of energy are exhausted a sufficiently heavy star will collapse. Unless fission due to rotation, the radiation of mass, or the blowing off of mass by radiation, reduce the star's mass to the order of that of the sun, this contraction will continue indefinitely. In the present paper we study the solutions of the gravitational field equations which describe this process. In I, general and qualitative arguments are given on the behavior of the metrical tensor as the contraction progresses: the radius of the star approaches asymptotically its gravitational radius; light from the surface of the star is progressively reddened, and can escape over a progressively narrower range of angles. In II, an analytic solution of the field equations confirming these general arguments is obtained for the case that the pressure within the star can be neglected. The total time of collapse for an observer comoving with the stellar matter is finite, and for this idealized case and typical stellar masses, of the order of a day; an external observer sees the star asymptotically shrinking to its gravitational radius.

図 **24.1**　天体物理学の舞台での 2 つの重要な到達．中性子星（1933）およびブラックホール（1795, 1939）．いずれの適当な記述も一般相対論なしで済ますことはできない．

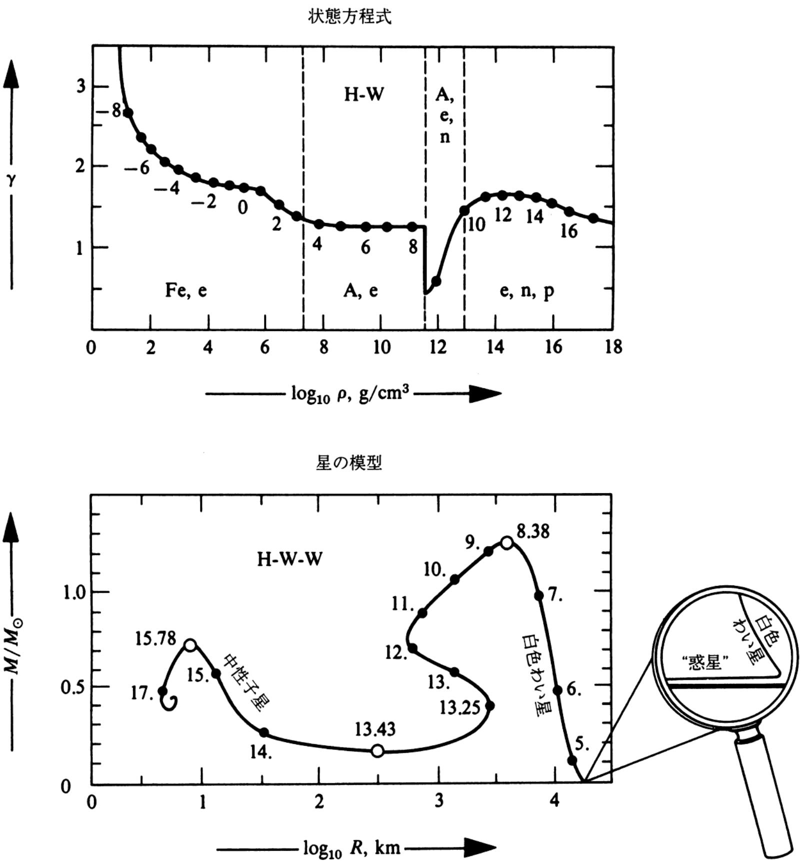


図 24.2 熱核展開の絶対的な終点での冷たい物質に対する Harrison–Wheeler 状態方程式，および対応する Harrison–Wakano–Wheeler の星の模型．状態方程式は，質量–エネルギーの密度 ρ の関数として "圧縮指数" のグラフで表されている．

$$\gamma = \frac{\rho + p}{p}\,\frac{dp}{d\rho}$$

(小さい γ は容易に圧縮に対応する．) 曲線は g/cm^3 の単位で，圧力の対数，$\log_{10} p$ [ρ と同じ単位，$p(\mathrm{g/cm^3}) = (1/c^2)\times p(\mathrm{dyne/cm^2})$] によってパラメータ化されている．密度の関数としての物質の化学組成は以下のように示されている．Fe：Fe^{56} 核，A：Fe^{56} より以上の豊富な中性子をもつ核，e：電子，n：自由な中性子，p：自由な陽子．

熱力学の第 1 法則 (22.6) は，冷たい物質（ゼロエントロピー）に適用されるとき $d\rho/(\rho + p) = dn/n$．すなわち，

$$n = \frac{\rho + p}{\mu_{\mathrm{Fe}}/56}\exp\left(-\int_0^p \frac{dp}{\rho + p}\right)$$

ここに μ_{Fe}（Fe^{56} 原子の静止質量）は，ゼロ密度の極限では $\rho + p \approx \rho$ と $n/56$ との間の比である．この式と $\rho(p)$ の知識から（図をみよ）$n(p)$ を計算することができる．

平衡の形状は全質量–エネルギー，M 対半径，R の曲線によって描かれている（R は $4\pi R^2$ が星の表面積であるように定義されている)．$M(R)$ 曲線は g/cm^3 で測定された，中心密度の対数 $\log_{10}\rho_c$ によってパラメータ化されている．曲線の 2 個の分枝に沿う形状のみが小さい摂動に逆らって安定であり，したがって自然界に存在しうる．$\log_{10}\rho_c < 8.38$ では白色わい星であり，$13.43 < \log_{10}\rho_c < 15.78$ では中性子星である（コラム 26.1 をみよ)．

状態方程式と平衡の形状の両方についてのさらなる詳細に対しては，Harrison, Thorne, Wakano, and Wheeler (1965) をみよ．また，状態方程式の最新の表に対しては，Hartle and Thorne (1968) をみよ．

ることによってこの状態方程式から構成される冷たい星の模型の性質が示される．

状態方程式は，冷たい触媒作用を及ぼされた物質の試料がより高い密度に圧縮されるにつれて起こる変換に従うことによって理解されうる．圧縮での各段階で，おのおのの可能な熱核反応は，その終点まで触媒作用を及ぼされなければならない．そして生ずる熱エネルギーは除去されなければならない．

試料がゼロ圧力にあるときには，それは純粋な冷たい Fe^{56} の球である．なぜなら Fe^{56} はすべての核の中でもっとも固く結合されているからである．それは密度 7.86 g/cm^3 をもつ．試料が圧縮されるにつれて，その内部圧力は最初標準的な固体状態の力によって与えられる．しかし原子はすぐに互いに非常に密接に圧縮されるので電子はまったくそれらの核に気づかなくなり，そして縮退した Fermi ガスをつくり始める．$\rho = 10^5$g/cm^3 の密度に達するときまでに，荷電子力は完全に無視でき，縮退した電子の圧力が支配する，そして圧縮指数 γ（図 24.2 に対する説明をみよ）は非相対論的に縮退した Fermi ガスに対する値 5/3 となる．10^5g/cm^3 $\sim$ 10^7g/cm^3 で，圧力を与える電子は徐々に相対論的に縮退するようになり，そして γ は 4/3 に近づく．$\rho = 1.4\times10^7$g/cm^3 を越えると，62 個の Fe^{56}_{26} 核の静止質量，44 個の電子の静止質量および Fermi の海の頂上に存在する 44 個の電子のやや大きい Fermi の運動エネルギーは，56 個の Ni^{62}_{28} 核の静止質量よりまさる．したがって，物質の触媒作用を及ぼされた試料が $\rho = 1.4\times10^7$g/cm^3 を越えて圧縮されると，核反応

$$62\,Fe^{56}_{26}\,(\text{高度に圧縮された中性原子}) \rightarrow 56\,N^{62}_{28}\,(\text{高度に圧縮された中性原子}) \qquad (24.1)$$

はエネルギーの解放を伴って終点まで行く．圧縮がこの点を越えて続くにつれて，電子の上昇する Fermi のエネルギーは式 (24.1) に似た，しかし異なる核を含む新しい核反応を引き起こす．これらの反応でますます多くの電子が吸収されて，新しい核はますます多くの中性子を含む新しい核をつくる．密度が $\rho = 3\times10^{11}$g/cm^3 に達するとき，核は高度に多くの中性子を含むので (Y^{122}_{39})，中性子が核を離れて落ち始める．物質は今や短い時間の間で，高度に圧縮可能になる ($3\times10^{11} \lesssim \rho \lesssim 4\times10^{11}$)．なぜなら残っている電子の多くが，中性子が離れていく核によって非常に速く吸収されるからである．$\rho \sim 4\times10^{11}$g/cm^3 より上では自由な中性子が豊富になり，それらの縮退圧力は電子の縮退圧力を越える．$\rho \sim 10^{13}$g/cm^3 へのさらなる圧縮は完全に残りの核を分解し，試料に $\gamma = 5/3$，非相対論的に縮退した Fermi ガスに対する値，をもつほとんど純粋な中性子を残す．中性子を崩壊から防ぐちょうど十分なだけの電子と，電荷の中性を保持するにちょうど十分なだけの陽子が中性子と混じっている．$\rho \sim 10^{13}$g/cm^3 を越える圧縮は試料を核密度の領域に押しやる．そこでは物質の物理学は十分に理解されていない．状態方程式のこの Harrison–Wheeler のバージョンは，核密度および核密度以上でのすべての核子–核子相互作用を無視する．それは物質を，中性子が支配的である，相互作用をしない中性子，陽子および電子の混合として理想化する．そしてそれは，中性子が非相対論的である間は 5/3 の圧縮指数を示すが，中性子が相対論的な Fermi エネルギーに到達した後には 4/3 の圧縮指数を示す．状態方程式の他のバージョンは核子–核子相互作用を種々の方法で考慮することを試みる (Cameron (1970), Baym, Bethe, and Pethick (1971)，およびそこに引用されている多くの文献をみよ)．

*4 中心密度 ρ_c のおのおのの値に対応して，1つの星の平衡の構成が存在する．平衡である．しかしその平衡は安定であるか？ 安定性の研究（26章，とくにコラム26.1）は，模型の多くは小さい半径方向の摂動に対して不安定であることを示している，それは重力崩壊に
*5 通ずる．領域 $\log_{10}\rho_c < 8.4$ にある白色わい星および領域 $13.4 \lesssim \log_{10}\rho_c \lesssim 15.8$ にある中性子星のみが安定である．8.4と13.4の間の $\log_{10}\rho_c$ の値の領域に対する不安定さは，(1) 重力が相対論的に強まり，(2) 原子核による電子捕獲および中性子の落ちこぼれに起因する物質の高い圧縮性によって引き起こされる．中性子星は単純な理由のために安定である．中性子が支配的な物質は非常に圧縮しがたいので相対論的に強められた重力さえもそれにうち勝つことはできない．$\log_{10}\rho_c \sim 15.8$ より上では，重力は十分に核物質の圧力にうち勝つにたるほど強くなり，そして星はすべて不安定である．[白色わい星および中性子星の他に，安定な平衡の構成の第3の群が存在するかもしれないという可能性に対しては Gerlach (1968) をみよ．しかし，彼はそれをありそうもないと評価する．]

*6 白色わい星は $1.2M_\odot$ 以下の質量および $\sim 3{,}000$ と $\sim 20{,}000$ km の間の半径をもつ．それらはほとんど完全に縮退した電子ガスの圧力によって支えられている．Newton 的な構造からの相対論的な逸脱は1%の分数に過ぎない．しかし安定性と脈動についての相対論的な効果は，$\rho_c \approx 10^8\,\mathrm{g/cm^3}$ から $\rho_c = 10^{8.4}\,\mathrm{g/cm^3}$ での白色わい星の群の上限値まで重要である［たとえば，Faulkner and Gribbin (1968) をみよ］．白色わい星模型の性質は，計算に用いられる状態方程式のバージョンにほとんど関係ない．

*7 中性子星の性質は，用いられる状態方程式に適度に依存する．しかし，すべてのバージョンは質量と中心密度の上限および下限に通ずる．正しい下限はおそらく領域

$$
\begin{aligned}
13.4 \lesssim \log_{10}\rho_{c\,\text{最小値}} &\lesssim 14.0,\\
0.05M_\odot \lesssim M_{\text{最小値}} &\lesssim 0.2M_\odot
\end{aligned}
\tag{24.2}
$$

に，正しい上限はおそらく領域

$$
\begin{aligned}
15.0 \lesssim \log_{10}\rho_{c\,\text{最大値}} &\lesssim 16.0,\\
0.5M_\odot \lesssim M_{\text{最大値}} &\lesssim 3M_\odot
\end{aligned}
\tag{24.3}
$$

に存在する［Rhoads (1971) をみよ］．中性子星は代表的に ~6 km と~100 km の間の半径をもつ．Newton 的な構造からの相対論的な逸脱は大きく，時には50%以上である．

冷たい星の構成は $\sim 5M_\odot$ を越える質量をもちえないように確かに思われる［Rhoades (1971)］(Harrison–Wheeler の状態方程式によれば，図24.2のように $1.2M_\odot$)．これよりもさらに重いいかなる星も，もしそれが静かな闇に薄れていくべきであるとするならば，
*8 この極限以下にその質量を減じなければならない．さもなければ，相対論的な重力は白色

---

*4 冷たい，触媒作用を及ぼされた物質に対する平衡の構成
*5 (1) 形成と安定
*6 (2) 白色わい星
*7 (3) 中性子星
*8 (4) ブラックホール

わい星の半径を通り過ぎ，中性子星の半径を通り過ぎて重力崩壊を起こし，数 km の大きさのブラックホールに星を究極的に引き込むだろう（パート VII をみよ）.

24.3 パルサー

理論によると，$1.2M_\odot$ の Chandrasekhar の極限よりも重い星は，その中核内の核エネルギーを使い尽くし，白色わい星の密度までその中核を圧縮し，不安定性により星を大変動の崩壊へ押すことを予言する．中核は，核子–核子斥力が内方への爆発を停止させるま
*9 で，自ら内方へ爆発する．結果は，中核の質量が非常に大きくて重力が核子–核子斥力を打ち負かし，星を引っ張ってブラックホールをつくるのでなければ，中性子星である．星の質量は，すべて中性子星あるいはブラックホールの部分になるわけではない．星の多くの量，おそらく大部分は，崩壊に伴う激しさによって星間空間に吐き出されうる—閃光的な核燃焼による激しさ，衝撃波，およびニュートリノによるエネルギー輸送（“崩壊によって点火される星の中心にあるダイナマイトの棒”）.

*10 崩壊した中核は，吐き出された外皮よりも重力理論に対して興味深い．その中核は，ブラックホールの結末を避けるに十分な小さい質量をもつことを認めて，最初は熱く，乱雑に脈動し，速い回転をしている，埋め込まれた強い磁場をもつ核物質の塊であるだろう（図 24.3 をみよ）．脈動は急速に死に絶えなければならない．脈動は重力放射の巨大な束を放つ．そして放射の反作用は ~1 秒の特徴的な時間で脈動を減衰させる［Wheeler（1966），Thorne（1969a）］．さらに，脈動は中核の内部で Fermi エネルギーを上げ下げすることによって，素粒子を押したり引いたりして前後への反応を起こす．これらの粒子反応は，脈動のエネルギーが重力によって放射されるのとほぼ同じ割合で，脈動のエネルギーを熱に変換することができる．［Langer and Cameron（1969）をみよ．また詳細と文献に対しては Zel'dovich and Novikov（1971）の 11.5 節をみよ．］

結果は，数秒後には，速い回転をし遠心力で平たくされた，強い磁場（おそらく 10^{12} gauss）をもつ中性子星である．すべての脈動は消えてしまっている．もし星が軸対称からゆがめられるならば（たとえば，遠心力や非対称な磁場によって），その回転は重力波の定常的に
*11 出て行く流れを生み，それは星に反作用して回転のエネルギーをもち去る．これが起こるにせよ起こらないにせよ，回転している磁場そのものは電磁波を放射する．それらは回転を遅らせ，そしてエネルギーを周りの，爆発しているガスの雲（星雲）に輸送する［基礎的な考察に対しては Pacini（1968），Goldreich and Julian（1968），および Ostriker and Gunn（1969）をみよ］.

しかしどうしたわけか，誰も理由を詳細に理解していないが，回転している中性子星はコヒーレントな電波および光を空間に送る．ビームが地球を通り過ぎるたびに光学的な望遠鏡および電波望遠鏡は放射のパルスをみる．光は電波と同時に放出されるが，しかし光

---
*9　星の崩壊による中性子星の誕生
*10　新しく生まれた中性子星の力学
*11　パルサーとしての中性子星

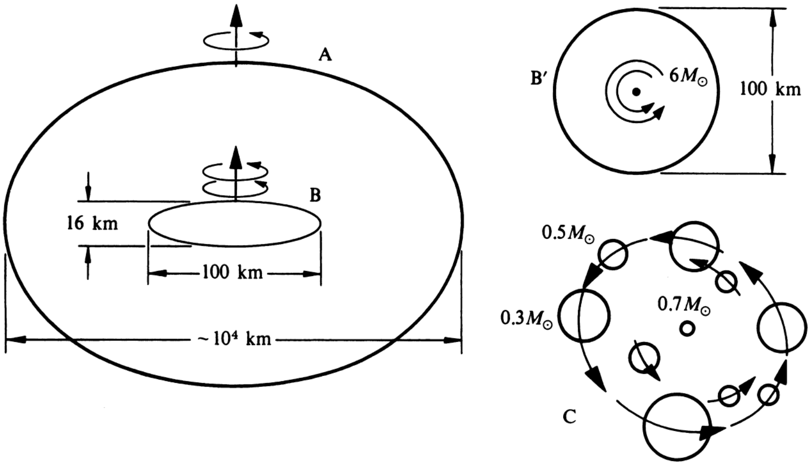


図 24.3　“崩壊，追跡，そして激突の筋書き”［Ruffini and Wheeler（1971b）からの概略図］．
・ゆるやかに回転している，白色わい星核をもつ星（A）．
　・簡明な天体物理学によって展開する．
　・重力の不安定点に達する．
　・崩壊する．
　・速く勢いよく回っている中性子星のパンケーキとして終わる（B, B′）．
・星はそれからばらばらになる（C）．なぜなら星は 1 個の安定な物体に崩壊するにはあまりにも大きい角運動量をもっているからである．もし中性子星のパンケーキが非圧縮性流体であったならば，分裂はよく知られそしてしばしば観測される現象と密接な絆をもつだろう（“滴の形成”）．しかし，中性子星がより重く，より小さいならば，筋書きのこの段階そして次の段階への洞察は補正あるいは改善をする必要性がある．分裂がそもそも生ずるということを今日保証することができないにもかかわらず，分裂は以下において仮定されるだろう．
・破片はエネルギーと角運動量を重力放射によって霧散させる．
・破片は回転するにつれて 1 つずつ合体する（“追跡と激突の筋書き”）．
・おのおののこのような激突において重力放射のパルスが現れる．
・残骸の破片は，それらの角運動量を変えて合体された物体（場合によっては中性子星あるいはブラックホール）に落下する．
・究極的に，別個の中性子星，ブラックホールあるいは両方は，最終的な重力放射のパルスをもつ 1 個のこのような崩壊した物体に結合する．
・完全な筋書きの詳細は，進化している 1 つの星と別な星とで，
　・核の質量，
　・この核の角運動量，
に依存して完全に異なる．
・したがって完全に異なる種類の描像が，これら 2 つのパラメータの変更された値に対して描かれなければならない．
・製図において採用されているこれらのパラメータの値に対してさえ，現在の描像はせいぜい定性的な妥当性のみをもつ．
・詳細なコンピュータによる解析が，あらゆる選択された筋書きの経過についてのどのような堅固な予言に対しても本質的であるだろう．

のパルスは，通路沿いのプラズマによる電波の遅延ゆえに地球により早く（かに星雲内にあるパルサーに対しては ~1 秒）達する．これが多くの天体物理学者によって受け入れられている，パルサーについての 1973 年の理論の本質である．

*12　コヒーレントな放出の機構は理解されていないけれども，パルサー放射はそれでもやはり中性子星の実験的な研究での有力な道具でありうる．星の回転率に影響するものは何でも，地球でのパルスの計時に微小な（10^{-9} ほども小さい微小な変化）測定可能な不規則性

*12　中性子星を研究するための道具としてのパルサー放射

を生むだろう．もし星の表層部およびマントルが結晶質状であるならば，1973 年の理論が予言するように，電波および光は，慣性モーメント，したがって回転率を変化させ，裂け目ができたり，欠陥ができたり，あるいはずれ（“星の振動”）を起こすだろう．星に落下する岩屑もまた星の回転を変化させるだろう．原因がいずれであろうと，このような傷害の後に星はしばらく異なる回転をするだろう．そしていかに星が固定した回転に戻るかは星の深い内部での超流動のような現象に依存するだろう．こうして，パルサー計時のデータは究極的に中性子星の内部および表層部についての，したがって（理論との結合によって）星の質量および半径についての情報を与える．これらの問題は，Zel'dovich and Novikov（1971）におけるとともに，Ruderman（1972）によるレビュー論文で詳細に議論されている．

24.4　超重量星と星の不安定性

*13　質量 M の Newton 的な星が基本的なモードで断熱的に振動するとき，その半径についての変化 δR は，調和振動子の方程式,

$$M\delta\ddot{R} = -k\,\delta R \tag{24.4}$$

に従う．“バネ定数”k は，星の平均断熱指数 $\bar{\Gamma}_1$ ［$\Gamma_1 \equiv (n/p)(\partial p/\partial n)_{一定のエントロピー}$ を思い出せ］に，重力ポテンシャルエネルギー Ω に，質量分布の第 2 モーメントのトレース $I = \int \rho r^2 d\mathcal{V}$ に，そして質量 M に依存し,

$$k = 3M(\bar{\Gamma}_1 - 4/3)|\Omega|/I \tag{24.5}$$

と表される（コラム 24.2 をみよ）．もし $\bar{\Gamma}_1 > 4/3$ であるならば Newton 的な星は安定であり振動する．もし $\bar{\Gamma}_1 < 4/3$ であるならば星は，初期条件と包括的なエネルギー論に依存して，不安定であり，崩壊するかあるいは爆発する．この結果は，Newton 的な星の理論における有名な定理であるが，それは断熱的な振動に対してのみ重要である．

コラム 24.2　Newton 的な星の振動

以下は半径方向の振動の，最低モードの体積について平均された解析である．このような解析は星の定性的な振る舞いや安定性を理解することについて有用である［それらの広範囲にわたる開拓に対しては Zel'dovich and Novikov（1971）をみよ］．しかし，明確な定量的結果に対しては，より詳細な解析を遂行しなければならない［たとえば，Ledoux and Walraven（1958）をみよ，また本書の 26 章をみよ］．

1. 以下のように記号を定める．

*13　Newton 的な星の安定性の理論

$M=$ 星の全質量

$R=$ 星の半径

$\bar{\rho}=$ 平均密度 $=(3/4\pi)M/R^3$

$\bar{p}=$ 平均圧力

$\bar{\Gamma}_1=$ 平均断熱指数 $=(\bar{n}/\bar{p})(\partial\bar{p}/\partial\bar{n})_{断熱的}$

$\quad=(\bar{\rho}/\bar{p})(\partial\bar{p}/\partial\bar{\rho})_{断熱的}$ (Newton 的な極限で，$\rho=$ 定数$\times n$)

2. それから平均的な圧力による浮力 $\bar{F}_{浮力}$ および釣り合っている重力 $\bar{F}_{重力}$ は，平衡状態にある星においては

$$\begin{aligned}\bar{F}_{浮力}&=\bar{p}/R\\&=\bar{F}_{重力}=\bar{\rho}M/R^2=(4\pi/3)\bar{\rho}^2R\end{aligned}$$

3. 振動している星が膨張したりあるいは収縮したりするとき，その半径は $R+\delta R$ である．そうするとその平均密度は

$$\bar{\rho}+\delta\bar{\rho}=(3/4\pi)M[R^{-3}+\delta(R^{-3})]=\bar{\rho}-3(\bar{\rho}/R)\delta R$$

に変化しただろう．そしてその平均圧力は

$$\bar{p}+\delta\bar{p}=\bar{p}+(\bar{p}/\bar{\rho})\bar{\Gamma}_1\,\delta\bar{\rho}=\bar{p}-3(\bar{\Gamma}_1\bar{p}/R)\delta R$$

であるだろう．力についての対応する変化は

$$\delta\bar{F}_{浮力}=\frac{\delta\bar{p}}{R}-\frac{\bar{p}}{R^2}\delta R=-(3\bar{\Gamma}_1+1)\frac{\bar{p}}{R}\frac{\delta R}{R}=-(3\bar{\Gamma}_1+1)\bar{F}_{浮力}\left(\frac{\delta R}{R}\right),$$
$$\delta\bar{F}_{重力}=\left(\frac{4\pi}{3}\right)(2\bar{\rho}R\,\delta\bar{\rho}+\bar{\rho}^2\,\delta R)=\left(\frac{4\pi}{3}\bar{\rho}^2R\right)\left(-5\frac{\delta R}{R}\right)=-5\bar{F}_{重力}\left(\frac{\delta R}{R}\right)$$

であるだろう．したがって，復元力は（$\bar{F}_{浮力}=\bar{F}_{重力}$ を思い出せ）

$$\delta\bar{F}_{重力}-\delta\bar{F}_{浮力}=3\left(\bar{\Gamma}_1-\frac{4}{3}\right)\bar{F}_{重力}\left(\frac{\delta R}{R}\right)$$

であるだろう．

4. この復元力は加速度を生む．

$$\delta\bar{F}_{重力}-\delta\bar{F}_{浮力}=-\bar{\rho}\,\delta\ddot{R}$$

したがって，振動に対する運動方程式は

$$\delta\ddot{R}=-3(\bar{\Gamma}_1-4/3)(4\pi/3)\bar{\rho}\,\delta R$$

であり，$\omega^2=4\pi(\bar{\Gamma}_1-4/3)\bar{\rho}$，および $k=M\omega^2$ によって与えられ，“バネ定数”k および角振動数 ω に対応する．

5. より正確に近い解析（詳細に対しては練習問題 39.7 をみよ．あるいは代わりの導出に対してはコラム 26.2 をみよ）は，振動数の 2 乗に対して改善された公式

$$\omega^2 = 3(\bar{\Gamma}_1 - 4/3)|\Omega|/I,$$

$$\Omega = \begin{pmatrix}\text{星自身の重力}\\ \text{エネルギー}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int \rho\Phi\, d\mathcal{V} = -\frac{1}{2}\int \frac{\rho\rho'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d\mathcal{V}\, d\mathcal{V}',$$

$$I = \begin{pmatrix}\text{星の質量分布の第 2}\\ \text{モーメントのトレース}\end{pmatrix} = \int \rho r^2\, d\mathcal{V}$$

を与える．

6. $\bar{\Gamma}_1 > 4/3$ は安定な振動に対応することに注意せよ．$\bar{\Gamma}_1 < 4/3$ は指数関数的に展開する崩壊あるいは爆発に対応する．

現実の星では，振動は正確には断熱的でない．温度についての振動は星の暗さについておよび核燃焼率についての対応する振動を引き起こす．これらはガスの振動にエネルギーを注入するか，あるいはガスの振動からエネルギーを抽出する．

これまで観測され，そして研究されたすべての主系列の星は $60M_{\odot}$ 以下の質量をもつ．このような小さい質量に対しては，理論はガスの圧力は放射の圧力より抜きんでるに十分低い温度であることを予言する．そして断熱指数はほぼ非相対論的なガスの平均断熱指数 $\bar{\Gamma}_1 \approx 5/3$ である．このような星は安定的に振動する．振動している暗さおよび燃焼率の正味の効果は通常，振動からエネルギーを抽出することである．こうして，振動は減衰する（Cepheid 変光星の振動は注目すべき例外である）．

*14 約 $60M_{\odot}$ 以上の質量をもつ主系列の星はいまだみられていない．これは以下のように説明される．$60M_{\odot}$ 以上の質量に対しては，温度は非常に高いはずなので放射の圧力はガスの圧力より抜きんでており，断熱指数 $\bar{\Gamma}_1$ は純粋な放射に対する値 4/3 よりわずかばかり上である．したがって星の “バネ定数” は，正であるけれども非常に小さい．振動の内向きの打撃で中心温度は上がり，そして核の燃焼が速くなる（核の燃焼率は中心温度の非常に高いべきのように進む．たとえば，重い星 HCNO では燃焼は割合 $\varepsilon_{\mathrm{HCNO}} \propto {T_c}^{11}$ でエネルギーを解放する）．バネ定数は非常に小さいので，内向きの打撃は長時間続き，高められた核燃焼は熱エネルギーの重大な過多と圧力を生む．したがって，外向きの打撃で，星は収縮された “エンジン” よりもさらに活発に膨張する．相次ぐ振動はますます大きな振幅まで駆動される．究極的に，計算により星は爆発するか，あるいはその活発な振動によって十分な質量を放出して $M \sim 60M_{\odot}$ の極限値以下に落ちることが提案される．したがって，$60M_{\odot}$ 以上の質量の星は天文学者がそれらを発見する適度な確率をもちうるほど十分長く生きているはずはない．

*15 もちろん，この “エンジン作用” は超重量星がつくられ，短い時間生き，それから自らを破

*14 安定性の理論は $M > 60M_{\odot}$ の星に対する “エンジン駆動の振動” および急速な死を予言する
*15 超重量星の可能な存在

壊することを妨げない．このような可能性はとりわけ**超重量星**［$10^3 M_\odot$ と $10^9 M_\odot \sim 0.01\times$（銀河の質量）間の M］に対して興味がある．このような星は非常に稀であるけれども，それらの巨大な質量および爆発エネルギーの巨大な開放によって超重量星は宇宙において重要な役割を演ずるだろう．さらに，このような星の振動は，Cepheid 変光星の振動のように，長い時間（100 万年？）大きい振幅で持続されるだろうということはありうる．しかしながらそれは振動のさらなる成長を妨げる非線形減衰過程をもっている．

*16 理論は，一般相対論の効果は超重量星の振動に強く影響するはずであることを提案する．内向きの打撃に基づく物質の殻に作用する "重力" の増加 $\delta F_{\text{重力}}$ は，Newton の理論におけるよりも一般相対論におけるほうがより大きい．そして外向きの打撃に基づく減少はさらに大きい．したがって重力の "有効指数" $\Gamma_{1\ \text{臨界}}$ は，4/3 の Newton の値以上に増大する．こうして，

$$\begin{pmatrix}\text{バリオンの数密度におけ}\\ \text{る単位の微小変化あたり}\\ \text{の“重力の圧力的な力”}\\ \text{におけるわずかな増加}\end{pmatrix} \equiv \Gamma_{1\ \text{臨界}} = (4/3) + \alpha(M/R) + O(M^2/R^2) \qquad (24.6)$$

ここに α は星の構造に依存する 1 程度の定数である（コラム 26.2 をみよ）．重力に抵抗するには，星の相対論的な物質の弾性のみをもつ．

$$\begin{pmatrix}\text{バリオンの数密度における単位}\\ \text{の微小変化あたりの“圧力的な}\\ \text{抵抗力”におけるわずかな増加}\end{pmatrix} = \bar{\Gamma}_1 = \left\langle \frac{p}{n}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_s \right\rangle_{\substack{\text{星についての}\\ \text{有効的な平均}}} \qquad (24.7)$$

星の振動に対する有効的なバネ定数は，これらの 2 つの指数間の微妙な差によって支配される．

$$\begin{aligned} k &= (\text{有効的なバネ定数}) = (\text{“弾性力” の寄与}) - (\text{重力の寄与}) \\ &= 3M(\bar{\Gamma}_1 - \Gamma_{1\ \text{臨界}})\frac{|\Omega|}{I} \end{aligned} \qquad (24.8)$$

（26 章での導出．）重力の有効指数における 4/3 を越える相対論的な増加 (24.6) は，それがなければ安定を予期したであろう条件のもとで，安定（正の k，振動）から不安定（負の k，爆発あるいは崩壊）への転移をもたらす．超重量星に対して，Fowler and Hoyle (1964) は

$$\bar{\Gamma}_1 = 4/3 + \zeta(M/M_\odot)^{-1/2}$$

を示す．ここに ζ は 1 程度の定数である．新しく形成された超重量星は，内向きに収縮するにつれて加熱されるが，その核燃料に点火するほどいまだ十分熱くなく，崩壊に逆らってますます不安定に近づく．燃焼が収縮を止めなければ，崩壊は半径 $R_{\text{臨界}}$ で始まる．それは

---

*16 超重量星における相対論的な不安定性

$$\bar{\Gamma}_1 = 4/3 + \zeta(M/M_\odot)^{-1/2} = \Gamma_{1\,\text{臨界}} = 4/3 + \alpha M/R$$

すなわち，

$$R = (\alpha/2\zeta)(M/M_\odot)^{1/2} \times (\text{Schwarzschild の半径}) \sim 10^4 \times (\text{Schwarzschild の半径})$$
$$(\text{もし } M = 10^8 M_\odot \text{ ならば})$$

で与えられる．星が非常に重いときには相対論的な不安定は Schwarzschild の半径のはるか外で起こる．相対論は星の構造をほとんど変えない．しかし Newton 的な振動における $\delta\bar{F}_{\text{重力}}$ と $\delta\bar{F}_{\text{浮力}}$ 間の微妙な釣り合い（コラム 24.2）のために，これらの力に対するわずかな相対論的な補正は完全に安定性を変えることができる．

*17 *18 実際，超重量星の事情はここで示されたよりもはるかに複雑である．回転は超重量星をしばらくの間相対論的な崩壊に逆らって安定化できる．しかし，星が臨界値 $J_{\text{臨界}} = M^2$（"極端な Kerr 限界"，33 章をみよ）を超過してすべての角運動量を失った後，および星が Schwarzschild の半径近くまで収縮した後には，回転は内方への爆発を防ぐのに役立たない．星はその質量と角運動量に依存して，相対論的な崩壊が始まる前にあるいは始まった後に，そして Schwarzschild の半径を通過して内方への爆発が起こる前にあるいは後に，その燃料に点火するだろう．燃料に点火されるときには，星は大破壊を与えることができる．なぜならたとえ星がそのとき内方へ爆発していなくても，その断熱指数はその臨界値に非常に近くなるだろう．そして燃焼はますます高い振幅へ振動を駆り立てるだろう．これらの過程は非常に複雑なので，1973 年にはそれらの満足の行く解析は得られていない．しかし何がわかっており，そしてなされているかのレビューに対しては，読者は Fowler (1966)，Thorne（1967），および Zel'dovich and Novikov（1971）を調べることができる．

一般相対論における星の脈動の理論は，トラック–2 の読者に対しては本書の 26 章に紹介されている．

24.5　クエーサーおよび銀河核における爆発

*19 超重量星は Hoyle and Fowler（1963a,b）によって銀河核での爆発に対する説明として最初に考えられた．それから間もなく，クエーサーが発見されたとき，Hoyle and Fowler は当然のようにこれらのパズルの説明に対して超重量星の場合と同様の主張を行った．銀河核の爆発やクエーサーが超重量星によって動かされているかどうかは，本書が 1973 年，終わりに近づいているときにさえ天文学会で論議の題目として残っている．したがって，本書は以下の所見を除いてこの題目を避けるだろう．

クエーサーや銀河の爆発は何が原因であるにせよ，それは，大きい質量（M は $10^6 \sim 10^{10} M_\odot$）と小さい半径（光がその機械を通過する時間は，光の変化から推論するとき，たぶん 1 日より少ない）の機械でなければならない．機械はコヒーレントな物体であるかも

*17　回転による一時的な安定化
*18　超重量星の展開および死に対する可能な筋書き
*19　クエーサーおよび銀河核に対する可能なエネルギー源としての超重量星

*20 しれない．すなわち，超重量星あるいは通常の星と大量のガスの密集した混合であるかもしれない．実際これら 2 つの可能性は異なるものでないかもしれない．密集した星団の中での星と星との衝突は，星の合体およびいくつかの超重量星の段階的な形成につながりうる [Sanders (1970)，Spitzer (1971)，Colgate (1967)]．こうして，一生の 1 段階で，銀河核あるいはクエーサーは密集した星団の中での衝突によって駆り立てられるかもしれない．そして後の段階でそれは超重量星によって駆り立てられるかもしれない．そしてさらに後の段階で，その星は崩壊して後に重いブラックホール（$10^6 \sim 10^9 M_{\odot}$）を残すかもしれない．しかしブラックホールは依然として“生きており”活動している（33 章）．

24.6 相対論的な星団

*21 銀河核の標準的な天体物理学的な展開は，ある状況のもとで非常に密集した星団に通じ，一般相対論がその構造と展開に影響を及ぼすことが推測されている [Sanders (1970)，Spitzer (1971)]．相対論的な星団の理論は 23 章で展開されているように，相対論的な星の理論に密接に関係している．星は頻繁に衝突する気体分子の群である．星団はまれにしか衝突しない星の群である．しかし衝突の頻度は定常状態では比較的に重要でない．相対論的な星団の理論に対しては，本書の 25.7 節，Zel'dovich and Podurets (1965)，Fackerell, Ipser, and Thorne (1969)，Zel'dovich and Novikov (1971) の 12 章，およびそこに引用されている文献をみよ．相対論的な星団は潜在している火山である．直接的な崩壊によって（おそらく一時的に星である），あるいは最初超重量星に合体して後に崩壊することによって，爆発して巨大なエネルギーを重いブラックホールに解放することを除いて，それに対する将来のことは明白でない．

*20 他の可能な エネルギー源：密集した星団，ブラックホール

*21 相対論的な星団

25章
Schwarzschild幾何学における運動の新たな中心的な特徴——"ポテンシャルにおけるくぼみ"

"常軌を逸した，互いにからみ合った，しかし正常な，それらがもっとも不正常にみえるときにもっとも正常な，そしてそれらの運動に調和が完全である"

MILTON, 1665

[本章は図25.2と25.6，およびコラム25.6と25.7，それはトラック–1の読者が洞察と特質を求めて追求すべきである，を除いて完全にトラック–2である．これまでのトラック–2の教材は本章の準備として必要でない．

25.2節（対称性）は，コラム30.2（ミックスマスター（mixmaster）宇宙論）に対する準備として必要とされる．本章の残りは後のどの章に対しても本質的でないが，それは(1) 31–34章（重力崩壊とブラックホール），および(2) 40章（太陽系の実験）を理解するのに役立つだろう．]

25.1 Keplerの法則からSchwarzschildの幾何学における運動に対する有効ポテンシャルへ

*1 Newtonの重力理論が太陽系の主要な特徴について与える説明以上に，この理論に名誉を与えるものはない．運動している惑星は等しい時間に等しい面積を掃過する．その軌道は楕円であり，太陽に1つの焦点をもつ．楕円の長半径軸aの3乗に，軌道における惑星の平均角速度（$\omega = 2\pi/$周期）の2乗を掛けると，長さの次元をもちすべての惑星に対して同じ数（コラム25.1）を与える．それは太陽の質量に等しい．

$$M = \omega^2 a^3$$

正確に同じことは，木星（Jupiter）の衛星（図25.1），そして地球の衛星（コラム25.1）に対して，そして天のいたるところで真実である．Einsteinの重力理論が，今度は球対称な引力の中心の影響のもとで動いている試験物体のこの何世紀もの古い題目と取り組むとき，この理論についてNewtonの重力理論以上の何を期待することができるか？　第1の新しい結果はたった1つの文で述べられうる．粒子は以下の性質をもつ有効ポテンシャルに支配される．(1) 長い距離をもつ引力$-M/r$の振る舞い，(2) Newtonの重力理論の

*1 本章の概観

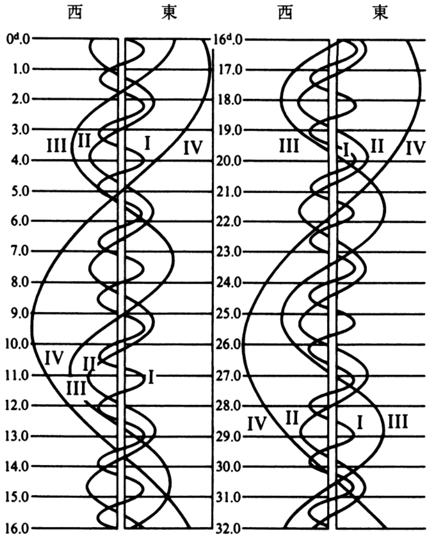


図 25.1 木星の衛星の動きを毎夜, 双眼鏡あるいは望遠鏡でみてみるとき, Newton の近似 (距離が Schwarzschild の半径に比べて大きい) における重力物理学の中心的なアイデアを自分で検査することができる. これらの衛星の実質的な円軌道に対して, Kepler の法則は $M^1 = \omega^2 r^3$ となる ("1–2–3 の原理"). そして軌道における速度は $\beta = \omega r$ である. 量 β, M, ω, r の任意の 2 個についての観測から他の 2 個を見出すことができる (おのおの質量 M をもち, 共通の重心の周りを分離 r で回っている, 2 個の物体の正しい楕円軌道のときの, 図 25.1 における西と東の両極端の場合には, 1 個の物体は $M = \omega^2 r^3/2$, $\beta = \omega r/2$ をもつ). 1964 年 12 月についてここで与えられている木星の衛星, I–IV の星位 ("宇宙時間" における日々 0.0, 1.0, 2.0, …, これに対しては任意のよい辞書あるいは百科辞典をみよ) は, **The American Ephemeris and Nautical Almanac for 1964** [米政府の印刷局 (Government Printing Office) (1962)] からとられている.

より短い反発力 (角運動量)$^2/r^2$ の振る舞いだけでなく, (3) さらに近い距離で①あまりにも接近する粒子をとらえる, ②このブラックホール捕獲過程に対する最接近の臨界距離を確立する, ③引力の中心と交差せずにこの臨界距離に接近する粒子に対して, Newton 的な期待に比べて方向転換させる時間を長くする, そしてそれによって (4) 半径方向の往復運動に対する周期を回転の周期よりも長くする, (5) (4) がなければ生ずる Kepler の軌道に歳差運動を起こさせる, そして (6) Newton の理論が予言するであろうよりも速い粒子や光子をより大きな角度だけ偏向させる, **ポテンシャルにおけるくぼみをもつ** (図 25.2 および 25.5, 25.6 節).

ポテンシャルにおけるくぼみはこうして Schwarzschild 幾何学における運動の新しい中心的な特徴であり, 主要な予言の源 (コラム 25.2) であるので, 有効ポテンシャルの概念およびその意味と応用へのもっとも直接的な道を探すことが適切である. この探求において Newton 力学以上に手近にいる案内人はいない.

コラム 25.1 平均の角振動数と長半径軸から求めた質量 : $M = \omega^2 a^3$

Newton 的な解析の適切さは, 質量の違いがまったくないことによって示される (あるいは "半分の Schwarzschild の半径", あるいは "ポテンシャルにおけるくぼみの

広がり”)．最後の前の列における長半径軸 a と最後の列のリストを比較して，Allen (1963) の収集からの基礎的なデータを用いた．

対　象	周期[a]（日）	ω (cm^{-1})	a (cm)	$\omega^2 a^3$ (cm)
惑　星				
水　星	87.9686	275.8×10^{-19}	0.5791×10^{13}	1.477×10^{5}
金　星	224.700	107.95	1.0821	1.477
地　球	365.257	66.41	1.4960	1.477
火　星	686.980	35.31	2.2794	1.477
木　星	4,332.587	5.599	7.783	1.478
土　星	10,759.20	2.255	14.27	1.477
天王星	30,685	0.7905	28.69	1.476
海王星	60,188	0.4030	44.98	1.478
冥王星	90,700	0.2674×10^{-19}	59.00×10^{13}	1.469×10^{5}
木星の主要な衛星				
イ　オ	1.769 138	13.711×10^{-16}	0.422×10^{11}	141.3
エウロパ	3.551 181	6.831	0.671	141.0
ガニメデ	7.154 553	3.391	1.070	140.8
カリスト	16.689 018	1.454×10^{-16}	1.883×10^{11}	141.1
地球の 2 つの衛星				
人工衛星 5[b]	95.6 min.	3.65×10^{-14}	6.916×10^{8}	0.442
月	27.32	0.888×10^{-16}	3.84×10^{10}	0.446

[a] 恒星周期：恒星に相対的に 1 回転するのに要する時間

[b] 太陽からの X 線および紫外放射を観測するために，1969 年 1 月 22 日に発射された軌道をまわる科学観測所．地球からは，近地点 531 km，遠地点 560 km.

慣習的および幾何学的な単位での，ある代表的な質量および時間．
質量に対する変換因子，$G/c^2 = 0.742\times10^{-28}$ cm/g を用いた．

質　量	銀　河	太　陽	木　星	地　球
$M_{慣習}$ (g)	2.2×10^{44}	1.989×10^{33}	1.899×10^{30}	5.977×10^{27}
M (cm)	1.6×10^{16}	1.47×10^{5}	112	0.444

時間に対する変換因子は，$c = 2.998 \times 10^{10}$ cm/sec，1 恒星年=365.256 日あるいは 3.1558×10^{7} 秒である．

周　期	1 秒	1 分	1 時間	1 日
$\omega_{慣習}$ (sec^{-1})	6.28	1.046×10^{-1}	1.75×10^{-3}	7.28×10^{-5}
ω (cm^{-1})	2.09×10^{-10}	3.48×10^{-12}	5.80×10^{-14}	2.42×10^{-15}
	1 週間	**1 ヶ月**	**1 年**	
	1.04×10^{-5}	2.39×10^{-6}	1.99×10^{-7}	
	3.46×10^{-16}	7.95×10^{-17}	6.63×10^{-18}	

コラム 25.2　Einstein の幾何力学の主要な応用に対する，中心的な離脱点とみなされる Schwarzschild 幾何学における運動

1. 太陽の惑星に対する，そして地球の月および人間に対する Newton 的な効果．

2. 太陽による光の屈曲．

3. 太陽からの光の赤方偏移．

4. 水星（Mercury）の太陽周りの近太陽点の歳差運動．

5. 重力崩壊の単純な典型としての，試験物体のブラックホールによる捕獲．

6. Schwarzschild の“格子宇宙”の模型から導かれる Friedmann 宇宙の力学．格子宇宙は，120 あるいはある他のマジック数の質量，各質量はそれがなければ空の自らの格子セルに存在する，の集中から構成される．おのおのの格子セルは，実際には多面体であるけれども，球として理想化される（固体物理学の Wigner–Seitz 近似をみよ）．2 個のセル間の境界領域にある試験物体はおのおののセルの中心に向かって落下する［Schwarzschild 幾何学における標準的な半径方向の運動，式 (25.27) に続く議論をみよ］．したがって 2 個の質量は計算可能な割合で互いに他に向かって落下する．この単純な議論から閉じた 3–球格子宇宙の全力学が，Friedmann 模型の予言と密接に一致して出る［Lindquist and Wheeler (1957) をみよ］．

7. Schwarzschild 幾何学の摂動 I．重力波が入射し，散乱され，そしてブラックホールに捕獲される．Schwarzschild の半径に比べて短い波長をもつ波は，粒子および光子の運動を取り扱うために本章で用いられているように，幾何光学の方法によってよい近似まで解析されうる（練習問題 35.15 および 35.16）．より長い波長に対しては，この幾何光学的な理想化への重要な物理光学的な補正が生ずる（35.8 節および練習問題 32.10，32.11 をみよ）．類似の考察は電磁波および de Broglie 波に当てはまる．

8. ブラックホールの幾何学（“重力場”）におけるもっとも低い量子状態にある電子に対するレプトン数は，このブラックホールの質量がある臨界質量 $M_{*e} = M^{*2}/m_e$ ($\sim 10^{17}$ g あるいは 10^{-11} cm) [Hartle (1971, 1972), Wheeler (1971b,c), Teitelboim (1972b,c)] に比べて大きいかあるいは小さいかに従って，限界を越える（電子の捕獲!）か（あるいは越えないか），で計算される．臨界質量に対しては別な値をもつバリオン数の保存に対しても同様である [Beckenstein (1972a,b), Teitelboim (1972a)]．“限界を越えるあるいは越えない”を解析するには量子力学の波動方程式を解かなければならない，粒子および光子の軌道に対する Hamilton–Jacobi の方程式はこの波動方程式の古典的な極限である．これらの量子波動方程式は，粒子および光子の運動に対して，—スピンに依存するおよび波長に依存する補正を除いて—同じ有効ポテンシャルを含む．

9. Schwarzschild 幾何学での摂動 II.　標準的な Schwarzschild ブラックホール幾何学において，時間について定常にとどまるような小さい変化は，“死んだ”ブラックホール”を質量とともに角運動量をもつ“生きている”ブラックホール，への変化を記述する（33 章をみよ）．ブラックホール幾何学におけるこのような変化を解析するには，また波動方程式，しかし今度は古典的な波動方程式を解かなければならない．再び波動方程式は Hamilton–Jacobi の方程式に密接に関係している．そしてそれらの有効ポテンシャルは粒子運動に対する有効ポテンシャルに密接に関連している．

解析力学は中心力の場における運動の問題を取り扱うべきいくつかの方法を提供する．そしてそれらの中で主に妥当な 2 つが存在する．(1) 運動の 2 階の微分方程式，Lagrange の方程式を積分定数をみつけて 1 階の方程式へと変換し，さらに異なる方法で運動を積分する世界線の方法．軌道の形 $\theta = \theta(r)$ や世界線上のある地点までの時間 $t = t(r)$ を要求することに応じて積分をする．そして (2) 運動を“波頭の通る多数のとりうる経路を考えて，それらの経路の波が建設的に干渉する”条件によって与える，波頭の方法．別に“アイコナル (eikonal) 方法”あるいは“Hamilton–Jacobi の方法”として知られている．こうして Hamilton–Jacobi の方程式から試験体の運動へのただ 1 つの飛躍をする．両方の方法がここでかわるがわる用いられる．なぜならおのおのは特別な洞察を与えるからである．Hamilton–Jacobi の方法（コラム 25.3）は速やかに主要な興味ある結果に通じ（コラム 25.4），それは量子原理に密接な絆をもつ．世界線の方法（25.2–25.4 節）は運動そのものの測地線の方程式から出発する．それは Hamilton–Jacobi の方法に慣れていない読者に対して題目へのよりよく知られた方法を与える．さらに，運動の測地線の方程式を解く試みで，幾何学の対称的な性質を解析しなければならない．Schwarzschild の幾何学から Kerr–Newman 幾何学（33 章）へ，そして Friedmann 宇宙論（27 章）からより一般的な宇宙論（30 章）へ進むときに配当を支払い続ける事業を解析しなければならない．

コラム 25.3 運動の Hamilton–Jacobi の方法による記述：量子原理によって承認されているから自然である

1. 純粋に古典的（非量子）.

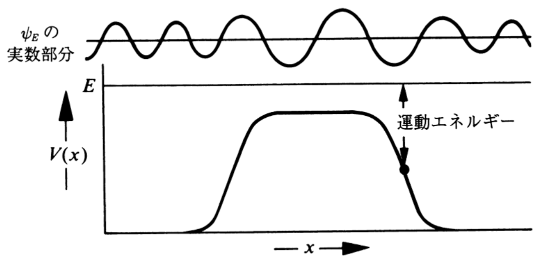
2. 力学はその特徴において光学に類似しているという確信から William Rowan Hamilton によって始められた．力学の“粒子世界線”は幾何光学の“光線”に類似した理想化である．光線のエネルギー局所化は近似にすぎない．その広がりは光の波長によって支配される（“幾何光学”）．Hamilton は粒子に対して同じアイデアが通用することを感じ取った：“量子物理学以前の量子物理学”．彼と Jacobi が Hamilton–Jacobi 関数 $S(x,t)$—ただ 1 個の自由度 x をもつ力学系の実例をとるために—を通して運動を解析するために展開した方法は，古典的なアイデアから量子的なアイデアへの，なしうるとわかるもっとも短い飛躍を生みだす．さらに，現実の世界は量子の世界である．古典力学は真空から生まれていない．それは量子力学の理想化であり，そして量子力学への近似である．

3. 重要なアイデアは，粒子の波長が非常に短いので量子力学的な広がりあるいは粒子の位置についての不確定性（あるいはより複雑な系の配置座標の広がり）が無視できるという，理想化である．量子力学の精神と古典力学の位置の精度を結合するよりよい方法は，いまだかつて発見されていない．

4. Hamiltonian を $H(p,x)=p^2/2m+V(x)$ とよび，粒子のエネルギーを E とよぶ．そうすると空間および時間における粒子の運動を記述するのに量子原理と両立するいかなる方法も存在しない．不確定性原理はそのような方法を禁止する（鋭く定義されたエネルギー $\Delta E\to 0$ は，$\Delta E\Delta t \geq \hbar/2$ で，不確定性 $\Delta t\to\infty$ を意味する．また $\Delta p\to 0$ は，$\Delta p\Delta x\geq\hbar/2$ で，$\Delta x\to\infty$ を意味する）．量子力学の波動関数は全空間にわたって広がっている．この広がりは，確率振幅関数に対するいわゆる半古典的なあるいは Wentzel–Kramers-Brilouin 近似［“WKB”，たとえば，Kemble（1937）をみよ］，

$$\psi_E(x,t) = (\text{ゆるやかに変化する振幅関数})\, e^{(i/\hbar)S_E(x,t)} \qquad (1)$$

に現れる．



5. 確率分布を局所化することについて，$\hbar = 1.054\times10^{-27}$g cm^2/sec［あるいは幾何学的な単位で $\hbar = (1.6\times10^{-33}\text{cm})^2$］は “作用の量” あるいは “Hamilton–Jacobi の関数 S の大きさ” あるいはたいていの日々の応用で遭遇する “力学的な位相 S に比べて非常に小さい，ということは何の助けにもならない．

6. 確率分布を局所化することについて，この力学的な位相は単純な Hamilton–Jacobi の伝播法則

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(\frac{\partial S}{\partial t}, x\right) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x) \tag{2}$$

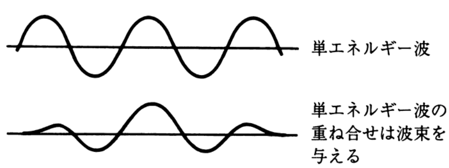
に従う，ということは何の助けにもならない．

7. 確率分布を局所化することについて，エネルギー E の粒子に対するこの方程式の解は特別に単純である，

$$S(x,t) = -Et + \int_{x_0}^{x} \{2m[E - V(x)]\}^{1/2} dx + \delta_E \tag{3}$$

（δ_E は任意の付加的な位相定数である）ということは何の助けにもならない．確率振幅は依然いたるところにわたってすべて広がっている．局所化された世界線，$x = x(t)$ のようないかなるもののほんのわずかな軌跡すら存在しない．

8. 粒子を局在するには，単振動数（単エネルギー）項を定性的に形式



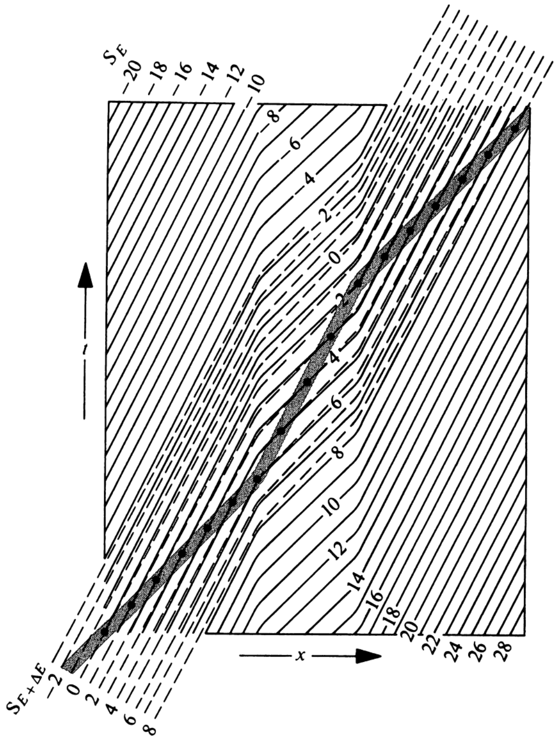
$$\psi(x,t) = \psi_E(x,t) + \psi_{E+\Delta E}(x,t) + \cdots \tag{4}$$

の処方に従って，重ね合わせることにより確率振幅の波束をつくれ．破壊的な干渉はほとんどいたるところで起こる．波束は構成的な干渉の領域に集中する．そこでは種々の波の位相が一致する．こうして

$$S_E(x,t) = S_{E+\Delta E}(x,t) \tag{5}$$

最後にいたるところでの波の広がりから局在化された波へ，そしてそこから，無制限に小さい波長の極限で，古典的な世界線へ進んだ．構成的な干渉のこの 1 つの式は x および t を結合する（x, t 図における世界線の軌跡）．滑らかな線 -20, -19, -18, 等は ψ_E の波頭，ダッシュのついた線は $\psi_{E+\Delta E}$ の波頭である．陰影のついた領域は構成的な干渉の領域（波束）である．黒い点は古典的な世界線の軌跡を示す．

$$\lim_{\Delta E\to 0} \frac{S_{E+\Delta E}(x,t) - S_E(x,t)}{\Delta E} = 0$$



9. 時空を通る世界線の Newton 的なコースは構成的な干渉のこの条件から，古典的な極限に行くとき（$\hbar$ は含まれる作用の量に比べて無視できる．したがって波長は無視できるほど小さい．したがってよく局在化された波束をつくるのに要求されるエネルギーの広がり ΔE もまた無視できる）ただちに出る．こうして

$$\frac{S_{E+\Delta E}(x,t)-S_E(x,t)}{\Delta E}=0$$

は

$$\frac{\partial S_E(x,t)}{\partial E}=0$$

に帰着する．この条件は今度は，式 (3) に適用されると，点 x まで進むのに要求される時間を与える．こうして，

$$-t+\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\{(2/m)[E-V(x)]\}^{1/2}}+t_0=0$$

ここに t_0 は量

$$t_0=d\delta_E/dE$$

に対する省略形である（“エネルギーの単位差あたりの力学的な位相の基礎値についての差”）．

10. 単純な理由のために，作用の量子の 1 つの軌跡もこの最終的な Newton 的な結果に入っていない．$\hbar$ は無視できるものとして取り扱われた，そして波長は無視でき

るものとして取り扱われた．この極限で波“束”の位置は波頭の位置に帰着する．波頭の位置は正確に $S_E(x,t)$ によって支配されるものである．そして“構成的な干渉”の条件 $\partial S_E(x,t)/\partial E = 0$ は近似なしに鋭く定義された Newton 的な世界線 $x = x(t)$ の位置を与える．

11. 力の中心場における運動の状況についての関連性？　有効ポテンシャルの概念へのもっとも素早い既知のルートである（コラム 25.4）．

コラム 25.4　Hamilton–Jacobi の方法によって解析される，主要な質量の重力のもとでの運動

A. 重力の Newton 理論

Hamiltonian
$$\tilde{H} = \frac{\tilde{p}_r{}^2}{2} + \frac{\tilde{p}_\theta{}^2}{2r^2} + \frac{\tilde{p}_\phi{}^2}{2r^2\sin^2\theta} - \frac{M}{r} \tag{1}$$

（エネルギー，運動量，等の上のチルド（～）は，単位質量の試験物体をさす．質量 μ の試験粒子は，エネルギー $E = \mu\tilde{E}$，運動量 $\boldsymbol{p} = \mu\tilde{\boldsymbol{p}}$ 等をもつ同じ運動にならう）．

波頭の伝播に対する Hamilton–Jacobi の方程式

$$-\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\phi}\right)^2 - \frac{M}{r} \tag{2}$$

を $\sqrt{a^2} \equiv \pm a$ という慣習のもとで，“変数分離の方法”によって解け．

$$\begin{aligned}\tilde{S} = -\tilde{E}t + \tilde{p}_\phi\phi &+ \int^\theta \left(\tilde{L}^2 - \frac{\tilde{p}_\phi{}^2}{\sin^2\theta}\right)^{1/2} d\theta \\ &+ \int^r \left[2\left(\tilde{E} + \frac{M}{r} - \frac{\tilde{L}^2}{2r^2}\right)\right]^{1/2} dr + \delta_{\tilde{p}_\phi,\tilde{L},\tilde{E}}\end{aligned} \tag{3}$$

（Hamilton–Jacobi の方程式に代入することによって検査せよ．4 個の独立変数に対応する 4 個の項の和としての解は，4 個の因子の積としての量子力学における確率振幅の表現と同一歩調をとる．なぜなら $iS/\hbar = i\mu\tilde{S}/\hbar$ は確率振幅に対する近似的な表現における指数であるからである．）

波の構成的な干渉：

(1) わずかに異なる $\tilde{E}$ の値で（“構成的な干渉の条件” $\partial\tilde{S}_{\tilde{p}_\phi,\tilde{L},\tilde{E}}(t,r,\theta,\phi)/\partial\tilde{E} = 0$ を課せ）．粒子はいつ与えられた r に達するかを告げる（すなわち，t と r 間の関係を与える）．

(2) “単位質量あたりの全角運動量のパラメータ” $\tilde{L}$ のわずかに異なる値で（構成的

な干渉の条件 $\partial\tilde{S}_{\tilde{p}_\phi,\tilde{L},\tilde{E}}(t,r,\theta,\phi)/\partial\tilde{L}=0$ を課せ) θ と r 間の相関（軌道の形の主要な特徴）を告げる．

(3) “単位質量あたりの方位角方向の角運動量のパラメータ” $\tilde{p}_\phi$ のわずかに異なる値（条件 $\partial\tilde{S}/\partial\tilde{p}_\phi=0$ を課せ）で，θ と ϕ 間の相関を与える．

$$0=\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\tilde{p}_\phi}=\phi-\int^\theta\frac{(\tilde{p}_\phi/\tilde{L})d\theta}{\sin\theta(\sin^2\theta-\tilde{p}_\phi^2/\tilde{L}^2)^{1/2}} \tag{4}$$

軌道の平面的な特徴：

この最後の積分の値を積分表の助けを借りて解くのか？ 計算せずに内容をとらえることが，より早くより明白である．粒子が平面内で動く．角運動量 $\tilde{L}$ と関係したベクトルはこの平面に垂直である．この角運動量の z 軸に沿う射影は $\tilde{p}_\phi=\tilde{L}\cos\alpha$ である（軌道の傾角，α の定義)．原点を粒子と結ぶ直線は単位球を点 $\mathcal{P}$ で切る．時間が経過するにつれて，$\mathcal{P}$ は単位球上で大円を描く．この大円の平面は赤道面を “結節点の線” で切る．その “関節線” で 2 つの平面は二面角 α によって分離されている．点 $\mathcal{P}$ の軌道は直交座標系で $\hat{x}=r\cos\psi$, $\hat{y}=r\sin\psi$, $\hat{z}=0$ によって記述される．この座標系で $\hat{y}$ は結節点の線に沿って走り $\hat{x}$ は**軌道**の平面内に存在する．y が結節点の線に沿って走り x が**赤道**の面内に存在する座標系では，

$$\begin{aligned}
&r\cos\theta=z=\hat{z}\cos\alpha+\hat{x}\sin\alpha=r\cos\psi\sin\alpha,\\
&r\sin\theta\cos\phi=x=-\hat{z}\sin\alpha+\hat{x}\cos\alpha=r\cos\psi\cos\alpha,\\
&r\sin\theta\sin\phi=y=\hat{y}=r\sin\psi
\end{aligned}$$

をもつ．直交座標との関係を消去せよ．そして，比をとることによって，また r との関係を消去せよ．こうして大円のルートの方程式をパラメータ形式で見出せ．

$$\tan\phi=\tan\psi/\cos\alpha$$

および

$$\cos\theta=\cos\psi\sin\alpha$$

ここで ψ の増大する値は，大円上の連続する点をわかりやすく説明する．ψ を関係式

$$\sec^2\psi-\tan^2\psi=1$$

で消去して

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\theta}-\tan^2\phi\cos^2\alpha=1$$

あるいは，より簡潔に，

$$\sec\phi=\tan\alpha\tan\theta \tag{5}$$

を見出せ．ϕ は式 (5) から計算されるとき式 (4) の積分を与えることが確かめられる．

こうして物理学的な議論の跡がまさにたどられることを確認する．さらに，式 (4) から生ずる積分の任意定数は，単純さのために式 (5) から除外されているが，そこでの ϕ を $\phi-\phi_0$ によって置き換える（結節点の線の新しい方位角への回転）ことによって容易に挿入される．θ と ϕ 間の関係の跡をたどるときにまさになされる物理学の本質は明らかに基本的な堅固な幾何学であって，それ以上のものでない．同じ幾何学の関係はまた Schwarzschild の幾何学における運動に対して，いかなる相対論の補正なしに（何がいかに存在するだろうか?!）現れる．したがってこの複雑さをここで，そして今後考慮から除くことが適切である．粒子が ϕ の増大する方向でなく，完全に θ の増大する方向に，動いているとする．すなわち，粒子はゼロ角運動量 $\hat{p}_\phi$（全角運動量ベクトル $\tilde{L}$ は角度 $\alpha=\pi/2$ で z 軸に傾いている）の軌道内で動いているとする．したがって力学的な位相 S（古典力学から量子力学へうつるとき，Schrödinger の波動関数の位相を得るには $\hbar$ によって割られるべきである）は

$$\tilde{S}=-\tilde{E}t+\tilde{L}\theta+\int^r\left[2\left(\tilde{E}+\frac{M}{r}-\frac{\tilde{L}^2}{2r^2}\right)\right]^{1/2}dr+\delta_{\tilde{L},\tilde{E}} \tag{6}$$

となる．

軌道の形：

$$0=\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\tilde{L}}=\theta-\int^r\frac{\tilde{L}\,dr/r^2}{[2(\tilde{E}+M/r-\tilde{L}^2/2r^2)]^{1/2}} \tag{7}$$

したがって

$$r=\frac{\tilde{L}^2/M}{1+e\cos\theta} \tag{8}$$

ここに e は軌道の離心率に対する略語である．

$$e=(1+2\tilde{E}\tilde{L}^2/M^2)^{1/2} \tag{9}$$

（正の $\tilde{E}$ のとき，e は 1 より大きく，双曲線軌道であり，$\tilde{E}$ がゼロのとき，e は 1 に等しく，放物線軌道であり，負の $\tilde{E}$ のとき，e は 1 より小さく，楕円軌道）．積分定数は単純さのために式 (8) から省略されている．それを再び設置するには，θ を $\theta-\theta_0$（軌道の平面内で主軸方向の回転）によって置き換えよ．軌道の他の特徴：

（楕円であるとき軌道の長半径軸）　$$a=\frac{\tilde{L}^2/M}{1-e^2}=\frac{M}{(-2\tilde{E})} \tag{10}$$

（楕円であるとき軌道の短半径軸）　$$b=\frac{\tilde{L}^2/M}{(1-e^2)^{1/2}}=\frac{\tilde{L}}{(-2\tilde{E})^{1/2}} \tag{11}$$

（双曲線軌道に対する“衝突係数”，あるいは“偏向が存在しないところでの最接近距離”）　$$b=\frac{(\text{単位質量あたりの角運動量})}{(\text{単位質量あたりの線形運動量})}$$

$$= \frac{\tilde{L}}{(2\tilde{E})^{1/2}} \tag{12}$$

（最接近の実際の距離）

$$r_{最小} = \frac{\tilde{L}^2/M}{(1+2\tilde{E}\tilde{L}^2/M^2)^{1/2}+1} \tag{13}$$

(双曲線軌道での偏向の角度)

$$\begin{aligned} \Theta &= \pi - 2\arccos(1/e) \\ &= 2\,\mathrm{arc\ tan}\,[M/(2\tilde{E})^{1/2}\tilde{L}] \\ &= 2\,\mathrm{arc\ tan}\,[M/2\tilde{E}b] \end{aligned} \tag{14}$$

(微分散乱断面積)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{2\pi b db}{2\pi \sin\Theta d\Theta} \\ &= \frac{M^2}{(4\tilde{E}\sin^2\Theta/2)^2} \quad \text{(Rutherford)} \end{aligned} \tag{15}$$

位置と関係づけられた時間：

$$0 = \frac{\partial\tilde{S}}{\partial\tilde{E}} = -t + \int^r \frac{dr}{\left[2\left(\tilde{E}+\frac{M}{r}-\frac{\tilde{L}^2}{2r^2}\right)\right]^{1/2}} \tag{16}$$

$$r = \frac{M}{(-2\tilde{E})}(1-e\cos u) \tag{17}$$

と書いて積分を単純化せよ.

$$t = \frac{M}{(-2\tilde{E})^{3/2}}(u - e\sin u) \tag{18}$$

$$(平均の円振動数) = \frac{2\pi}{(周期)} = \omega = \frac{(-2\tilde{E})^{3/2}}{M} = \left(\frac{M}{a^3}\right)^{1/2} \tag{19}$$

ここに u はいわゆる“平均の離心近点角（mean eccentric anomaly)”（Besselの時間パラメータ）である．この量を用いて，また

$$\sin u = \frac{(1-e^2)^{1/2}\sin\theta}{1+e\cos\theta},$$

$$\cos u = \frac{\cos\theta + e}{1+e\cos\theta},$$

$$\cos\theta = \frac{\cos u - e}{1-e\cos u},$$

$$\sin\theta = \frac{(1-e^2)^{1/2}\sin u}{1-e\cos u},$$

$$x = r\cos\theta = \frac{M}{(-2\tilde{E})}(\cos u - e) \tag{20}$$

$$y = r\sin\theta = \frac{\tilde{L}}{(-2\tilde{E})^{1/2}}\sin u \tag{21}$$

をもつ.

これらの表現は標準的なBessel関数である係数をもち，時間の調和関数へのFourier

解析を与える．

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z\sin u - nu)}du \tag{22}$$

$$x/a = -\frac{3}{2}e + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} k^{-1}J_{k-1}(ke)\cos k\omega t \tag{23}$$

$$y/a = (1-e^2)^{1/2}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} k^{-1}J_{k-1}(ke)\sin k\omega t \tag{24}$$

[これらおよびこの型のさらなる公式に対しては，たとえば，Wintner (1941), Siegel (1956), および Siegel and Moser (1971) をみよ]．このような Fourier 解析を用いて，基本的な円振動数 ω および倍音の振動数で放出される重力放射の強度を計算することができる（36 章をみよ）．

B. Einstein の重力の幾何学的な理論

曲がった空間内を動く静止質量 μ の試験粒子に対するエネルギーと運動量間の関係，

$$g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta + \mu^2 = 0 \tag{25}$$

重力は幾何学の曲率における以外の方法に現れず，その曲率の中で粒子はすべての "現実の" 力から自由なように動く．ずっと $\tilde{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}/\mu$ を取り扱うことによって，すべての量を単位静止質量の試験物体のものとして参照させよ．また $\tilde{p}_\alpha = \partial\tilde{S}/\partial x^\alpha$ と書け．こうして Schwarzschild 幾何学（星の外場，23.6 節）における波頭の伝播に対する Hamilton–Jacobi の方程式は

$$-\frac{1}{(1-2M/r)}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t}\right)^2 + (1-2M/r)\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\phi}\right)^2 + 1 = 0 \tag{26}$$

となる．Hamilton–Jacobi の方程式を解け．Newton 的な問題におけるように，増大する ϕ の方向でのすべての運動を消去することによって単純化せよ．こうして $0 = \tilde{p}_\phi = \partial\tilde{S}/\partial\phi$ と置け（ϕ によらない力学的位相）．そして

$$\tilde{S} = -\tilde{E}t + \tilde{L}\theta + \int^r [\tilde{E}^2 - (1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}\frac{dr}{(1-2M/r)} \tag{27}$$

を得よ．"構成的な干渉の原理" によって軌道の形を見出せ．こうして，

$$0 = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{L}} = \theta - \int^r \frac{\tilde{L}\, dr/r^2}{[\tilde{E}^2 - (1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}} \tag{28}$$

[式 (25.41) および本文での関連した議論をみよ．また図 25.6 をみよ]．わずかに異なる $\tilde{E}$ 値に属する “波頭の干渉” を考慮することによって，与えられた r に達する時間を見出せ．

$$0 = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{E}} = -t + \int^r \frac{\tilde{E}}{[\tilde{E}^2 - (1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}} \frac{dr}{(1-2M/r)} \tag{29}$$

[式 (25.32) および本文での関連した議論をみよ．また図 25.5 および練習問題 25.15 をみよ.]

25.2　対称性と保存則

*2　解析力学で，Lagrangian あるいは Hamiltonian の対称性は保存則につながることが知られている．練習問題 25.1 から 25.4 までは，これらの一般原理がいかに用いられて，Schwarzschild 時空の対称性から，星の外部の重力場内で自由落下する粒子の軌跡（測地線）に対する運動定数を導き出すかを記述している．同じ運動定数は，微分幾何学では別な言葉で得られる．そこでは “Killing ベクトル” が対称性の記述に対する標準的な道具である．本節は Schwarzschild 時空へ進む前に計量の対称性の一般的な問題を考える．

*3　ある座標基底 $\boldsymbol{d}x^\alpha$ に対する計量成分 $g_{\mu\nu}$ が座標の 1 つ x^K によらないとする．そうすると

$$\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\alpha = 0 \qquad (\alpha = K \text{ に対して}) \tag{25.1}$$

この関係は幾何学的な解釈をもつ．任意の曲線 $x^\alpha = c^\alpha(\lambda)$ は，x^K 方向に座標の移動 $\Delta x^K = \varepsilon$ だけ移して “合同の（congruent）”（同等な）曲線

$$x^\alpha = c^\alpha(\lambda) \;\; \alpha \neq K \qquad \text{および} \qquad x^K = c^K(\lambda) + \varepsilon$$

をつくることができる．元の曲線は $\lambda = \lambda_1$ から $\lambda = \lambda_2$ までで，長さ

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [g_{\mu\nu}(x(\lambda))(dx^\mu/d\lambda)(dx^\nu/d\lambda)]^{1/2}\, d\lambda$$

をもつとする．そうすると移動された曲線は長さ

$$L(\varepsilon) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\left\{ g_{\mu\nu}(x(\lambda)) + \varepsilon \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^K} \right\} (dx^\mu/d\lambda)(dx^\nu/d\lambda) \right]^{1/2} d\lambda$$

---

*2　(1) Lagrangian の方法あるいは Hamiltonian の方法によって，式 (2) Killing ベクトルの方法によって，対称性から保存則へ

*3　Killing ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ が定義される

をもつ．しかし被積分関数における ε の係数はゼロである．したがって新しい曲線の長さは元の曲線の長さに同じであり，$dL/d\varepsilon = 0$.

ベクトル

$$\boldsymbol{\xi} \equiv d/d\varepsilon = (\partial/\partial x^K) \tag{25.2}$$

は，これらの長さを保存する “並進” の無限小の記述を与える．それは “Killing ベクトル” とよばれ，Killing の方程式*を満たす．

*4

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \tag{25.3}$$

（ベクトル場 $\boldsymbol{\xi}$ についてのすべての長さが，変位 $\varepsilon\boldsymbol{\xi}$ によって保存されることを保証するのに必要十分な条件）．この条件は共変形式で表される．したがってこの条件をすべての座標系で成り立たせるには，それを式 (25.1) の選ばれた座標系で確立すれば十分である．その選ばれた座標系で，ベクトル場は，式 (25.2) によって，成分

$$\xi^{\mu} = \delta^{\mu}{}_{K}$$

をもつ．したがってこのベクトル場の共変微分は成分

$$\begin{aligned}
\xi_{\mu;\nu} = g_{\mu\alpha}\xi^{\alpha}{}_{;\nu} &= g_{\mu\alpha}\left(\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma}\xi^{\sigma}\right) \\
&= g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu K} = \Gamma_{\mu\nu K} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu K}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{K}} - \frac{\partial g_{\nu K}}{\partial x^{\mu}}\right) \\
&= \frac{1}{2}(g_{\mu K,\nu} - g_{\nu K,\mu})
\end{aligned} \tag{25.4}$$

をもつ．$\xi_{\mu;\nu}$ は，Killing の方程式に述べられているように，ラベル μ および ν について反対称であることがわかる［式 (25.3)］．Killing ベクトルの幾何学的な意味はコラム 25.5 にわかりやすく説明されている．

Killing の方程式，$\xi_{(\mu;\nu)} = 0$ および任意の測地線への接線ベクトル $\boldsymbol{p} = d/d\lambda$ に対す
*5 る測地線の方程式 $\Delta_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{p} = 0$ から，重要な定理が出る．**Killing ベクトル場 $\boldsymbol{\xi}$ によって記述される対称性を与えられた任意の幾何学では，任意の測地線に沿う運動はすべて，接線ベクトルと Killing ベクトルとのスカラー積を一定にとどめる．**

$$p_K = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\xi} = \text{一定} \tag{25.5}$$

この結果を確かめるために，代表的な測地線のコースに沿う定数 p_K の変化率を求めよ［アフィンパラメータ λ，結果はしたがって粒子に対するのと同じく光線（固有時間の経過はゼロ）に適用できる］．こうして，

---

* 歴史的な注意：Wilhelm K.J. Killing は，1847 年 5 月 10 日に Burbach，Westphalia に生まれ，1892–1920 年，Münster 大学で数学の教授，1923 年 2 月 11 日，Münster，Westphalia にて没．ここで考察されている種類の等長曲線に名前 “Killing ベクトル” を与える主要な論文はほぼ 1 世紀前に現れた［Killing (1892)］.

*4　Killing の方程式が導かれる

*5　測地線に沿う運動に対する $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\xi}$ の保存

$$dp_K/d\lambda = (p^\mu \xi_\mu)_{;\nu} p^\nu = (p^\mu{}_{;\nu} p^\nu)\xi_\mu + p^{(\mu} p^{\nu)} \xi_{[\mu;\nu]} = 0 \tag{25.6}$$

一般的な座標系から，対称性のKillingベクトル場自身が $\boldsymbol{\xi} = \partial/\partial x^K$ と書ける式 (25.1) の座標に戻れ．そうすると式 (25.5) のスカラー積は 一定 $\equiv p_\alpha \xi^\alpha = p_\alpha \delta^\alpha{}_K = p_K$ となる．**幾何学の対称性は，K 番目の座標に共変な運動量の成分の保存を保証する．**

時空内での時間的な測地線上で，質量 μ の試験粒子の運動量は

$$\boldsymbol{p} \equiv d/d\lambda = \mu \boldsymbol{u} = \mu d/d\tau \tag{25.7}$$

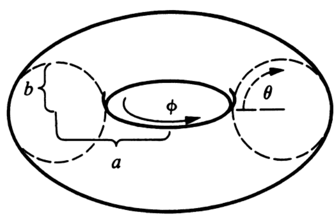
である．こうして上の解析でもっとも有用に用いられるアフィンパラメータ λ は，粒子に関係するときには，固有時間 τ でなくてむしろ比 $\lambda = \tau/\mu$ である．

*6 計量 $g_{\mu\nu}$ が座標 x^K によらないときには，その座標は循環とよばれる．そして対応する保存量 p_K は，非相対論的な力学から借りた術語で“その循環座標に共役な運動量”とよばれる．

コラム 25.5　Killingベクトルと等長性（ドーナツによって例示される）

A. 与えられた多様体上で（たとえば，時空，あるいはここに描かれているドーナツ），与えられた座標系で，計量成分が特別な座標 x^K によらない．ドーナツの例

$$ds^2 = b^2\, d\theta^2 + (a - b\cos\theta)^2 d\phi^2,$$
$$g_{\mu\nu} \text{ は } x^K = \phi \text{ によらない}$$

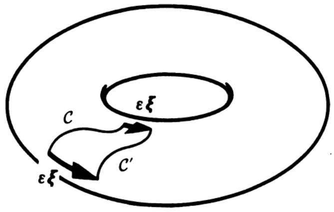


B. 任意の曲線 $\mathcal{C}$ を無限小変位

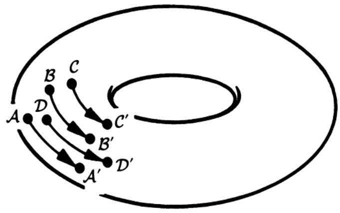
$$\varepsilon\boldsymbol{\xi} \equiv \varepsilon(\partial/\partial x^K) = \varepsilon(\partial/\partial\phi) \qquad (\varepsilon \ll 1)$$

だけ移動させて，新しい曲線 $\mathcal{C}'$ をつくる．座標の言葉で $\mathcal{C}$ は $\theta = \theta(\lambda)$, $\phi = \phi(\lambda)$．他方，$\mathcal{C}'$ は $\theta = \theta(\lambda)$, $\phi = \phi(\lambda) + \varepsilon$ である（$\Delta\phi = \varepsilon$ だけ，すべての点を移動させる）．$\partial g_{\mu\nu}/\partial\phi = 0$ であるから，曲線 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ は同じ長さをもつ（本文をみよ）．

*6 術語“循環座標”，“共役運動量”



C. 近傍点 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ の組をとれ，そしてそれらのおのおのを $\varepsilon\boldsymbol{\xi}$ だけ移動して点 $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{D}'$ を得よ．すべての曲線の長さはこの移動によって保存されるから，近傍点間の距離もまた保存される．



$$(\mathcal{A}' \text{ と } \mathcal{B}' \text{ 間の距離}) = (\mathcal{A} \text{ と } \mathcal{B} \text{ 間の距離})$$

しかし幾何学はすべての無限小の距離の表と等価である（コラム 13.1 をみよ）．**こうして多様体の幾何学はすべての点の $\varepsilon\boldsymbol{\xi}$ だけの移動によって完全に不変にとどまる．**［これは陳述 $\partial g_{\mu\nu}/\partial\phi = 0$ の座標に無関係なバージョンである．］$\boldsymbol{\xi} = \partial/\partial\phi$ **は多様体上での"等長変換"の生成子（あるいは"運動の群"）であると言われる．**

D. 一般に（本文をみよ），ベクトル場 $\boldsymbol{\xi}(\mathcal{P})$ は，Killing の方程式 $\xi_{(\alpha;\beta)} = 0$ を満たす場合に限り等長性を生成する．

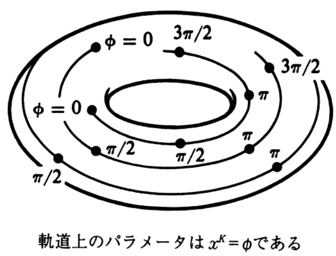
E. もし $\boldsymbol{\xi}(\mathcal{P})$ が等長性を生成するならば（すなわち，もし $\boldsymbol{\xi}$ が"Killing ベクトル"であるならば），

$$\mathcal{P}(x^K, \underbrace{\alpha_1, \cdots, \alpha_n})$$

［曲線上のパラメータ］（x^K を指す）　［"どの"曲線かを述べるラベル］（$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を指す）

$\boldsymbol{\xi}$ が接する $[\boldsymbol{\xi} = (\partial\mathcal{P}/\partial x^K)_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}]$ これらの曲線は"等長変換の軌道"とよばれる．

ドーナツ上の 3 個の異なる軌道



軌道上のパラメータは $x^K = \phi$ である

F. 幾何学は，多様体のすべての点のこれらの軌道に沿う同じ Δx^K だけの移動 $[\mathcal{P}(x^K, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \rightarrow \mathcal{P}(x^K + \Delta x^K, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 多くの "無限小運動" $\varepsilon\boldsymbol{\xi}$ から構成される "有限の運動"］のもとで不変である．

G. この等長変換は物理学的な表現で以下のように記述される．観測者の群を多様体全体にわたって配置せよ．各観測者に，中央管理するコンピュータに（1）彼の近傍の多様体の幾何学のすべての様相，および（2）すべての近傍の観測者への距離および方向（局所的な幾何学における非等方性によって定まる "選ばれた" 方向に対する方向）を報告させせよ．各観測者の位置を通って等長変換の一義的な軌道が伸びる．各観測者を同じ定められた Δx^K（たとえば，$\Delta x^K = 17$）だけ彼の軌道に沿って，多様体そのものを変えないままで動かせ．それから各観測者に彼の運動の前と同じ幾何学的な情報を中央管理するコンピュータに報告させせよ．運動後のコンピュータによって受け取られる情報は，運動前に受け取られる情報と同じであるだろう．幾何学的な測定によって，運動が起こったことを発見する方法は何も存在しない！　これが等長変換の意味である．

［練習問題］

25.1　Hamilton の原理から得られる運動の定数

$p_K \equiv \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\xi}$ の保存の上でみた定理を，Hamilton の原理（コラム 13.3）を測地線の経路に適用して，

$$\delta \int \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)(dx^\mu/d\lambda)(dx^\nu/d\lambda)d\lambda = 0 \tag{25.8}$$

から証明せよ．この作用原理で，$g_{\mu\nu}$ は経路に沿って，位置 x の既知関数とみなされるべきであり，そして経路そのもの，$x^\mu(\lambda)$ が，変化されるべきであることを思い出せ．

25.2　測地線の運動に対する超 Hamiltonian 形式

Hamiltonian 形式での微分方程式の組は，変分原理 $\delta I = 0$ で p_μ および x^μ を独立に変えることから生ずることを示せ．ここに

$$I = \int (p_\mu dx^\mu - \mathcal{H} d\lambda) \tag{25.9}$$

および

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(x) p_\mu p_\nu \tag{25.10}$$

である．"超 Hamiltonian" $\mathcal{H}$ は運動の定数であること，およびこれらの方程式の解は測地線であることを示せ．選択 $\mathcal{H} = +\frac{1}{2}$, $\mathcal{H} = 0$, $\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\mu^2$，あるいは $\mathcal{H} = -\frac{1}{2}$ は，測地線およびそのパラメータ化に対して何を意味するか？

25.3　平坦な時空における Killing ベクトル

平坦な Minkowski 時空における 10 個の 1 次独立な Killing ベクトルをみつけよ（定数係数をもつ線形関係に注意を限定せよ）.

25.4　運動の定数に対する鍵としての Poisson 括弧

もし $\boldsymbol{\xi}$ が Killing ベクトルであるならば，$p_K \equiv \xi^\mu p_\mu$ は前述の問題の Hamiltonian $\mathcal{H}$ と交換する（Poisson 括弧はゼロになる），$[\mathcal{H}, p_K] = 0$．したがって $dp_K/d\lambda = 0$（ヒント：好都合な座標系を用いよ）.

25.5　Killing ベクトルの交換子は Killing ベクトルである

たまたま交換しない 2 個の Killing ベクトル，$\boldsymbol{\xi}$ および $\boldsymbol{\eta}$ を考えよ［微分演算子として，すなわち，式 (8.13) の交換子はゼロにならない．適例として互いに垂直な方向の回転を考えよ］．こうして，

$$[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}] \equiv \boldsymbol{\zeta} \neq 0$$

(a) ただ 1 つの座標系は，式 (25.1) の意味で，$\boldsymbol{\xi}$ および $\boldsymbol{\eta}$ の両方の対称性に同時に適応されえないことを示せ（練習問題 9.9 をみよ）.

(b) $p_\xi = p_\mu \xi^\mu$, $p_\eta = p_\mu \eta^\mu$，および $p_\zeta = p_\mu \zeta^\mu$ とする．そのとき，Poisson 括弧の関係 $[p_\xi, p_\eta] = -p_\zeta$ を導け．対称性がこのように関係している幾何学では，p_ζ もまた運動の定数であることを示せ.

(c) $\boldsymbol{\zeta} = (\partial/\partial x^K)$ であるような座標系で，$\mathcal{H}$ を式 (25.10) におけるように定義せよ．そして $[\mathcal{H}, p_\zeta] = 0$ から $\boldsymbol{\zeta}$ は Killing ベクトルであることを示せ.

こうして 2 個の Killing ベクトルの交換子はそれ自身 Killing ベクトルである.

25.6　Killing ベクトルに対する固有値問題

任意の Killing ベクトルは $\xi^\mu{}_{;\mu} = 0$ を満たす．そして式

$$\xi^{\mu;\nu}{}_{;\nu} + R^\mu{}_\nu \xi^\nu = \kappa \xi^\mu \tag{25.11}$$

の，固有値 $\kappa = 0$ をもつ固有ベクトルであることを示せ．この固有値方程式に対する変分原理（Raleigh–Ritz 型）をみつけよ.

25.3　Schwarzschild 幾何学における運動に対する保存量

線要素

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)dr^2 + \frac{dr^2}{(1 - 2M/r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{25.12}$$

*7　によって記述される，Schwarzschild 幾何学内で動いている試験粒子を考える.

---

*7　ブラックホール周りの粒子の軌道に注目するわけ

幾何学に対するこの表現は，全質量–エネルギー M の任意の球対称な引力の中心外に当てはまる．それは，内部で幾何学が何であれ，外部での粒子の運動に対して相違をつくらない．なぜなら粒子はけっして引力の中心に達しないからである．粒子が引力の中心に達しうる前に，粒子は星の表面と衝突する—もし引力の中心が星，すなわち，流体静力学の平衡にある流体質量であるならば．このような平衡状態にある構成の各点で，Schwarzschild 座標 r は，量 $2m(r)$ の局所的な値を越える，23.8 節をみよ．それゆえ表面の Schwarzschild 座標 R は $2M$ を越える．したがって，表現 (25.12) は任意の平衡状態にある構成がいかに固く締まったものであろうと（$r > R > 2M$ は $r = 2M$ での "特異点" の問題に直面することはない)，その外部で当てはまる．しかし，構成がより固く締まるほど，試験粒子は Schwarzschild 幾何学のより多くを調査できる．理想的な極限は流体静力学の平衡にある星でない．それはブラックホールへと完全な重力崩壊を経た星である．そのとき式 (25.12) は $r = 2M$ の任意に近くまで当てはまる．この理想化がここ（"ブラックホール"）で仮定されている．なぜならそのときの解析が可能な状況を最大限覆うことができるからである．

試験粒子がどこに存在しようとも，そしてそれがいかに速く動こうとも，ある固定された r 値，たとえば，単位球 $r = 1$ の上に試験粒子の点を射影し，そしてその 3–速度を半径方向に射影せよ．点と速度は全体として単位球の表面上で点とベクトルを定義する．それらは今度は大円の始まりの印をつけ大円の全体を定義する．粒子が自らの道に沿って運動し続けるにつれて，その位置の半径方向の射影はその大円上に存在し続けるだろう．大円から 1 つの側あるいは他の側へそれることは，状況の対称性に反して単位球の 1 つの半球あるいは他の半球への優先を与えることになるだろう．

*8 軌道の半径方向の射影が赤道，曲座標の $\theta = \pi/2$ と一致するように座標系を方向づけよ (軌道のより一般的な方向づけの球面三角法，およびここで考察された赤道の軌道と対照的な，極軌道（polar orbit）への最終的な特殊化に対しては，コラム 25.4 をみよ)．このように方向づけられた極座標で，粒子は θ 方向についてのゼロ運動量を出発のときにもち，そしてもち続ける．こうして，

$$p^\theta = d\theta/d\lambda = 0$$

*9 線要素に対する表現 (25.12) は，幾何学は移動 $t \rightarrow t + \Delta t$, $\phi \rightarrow \phi + \Delta\phi$ によって影響を受
*10 けないことを示している．こうして座標 t と ϕ は "循環" である．したがって共役な運動
*11 量 $p_0 \equiv -E$ および $p_\phi \equiv \pm L$ ($L \geq 0$) は保存される．この事情は以下のように，ただちに，運動の主要な特徴を導き出すことを許す．

エネルギー運動量の 4–ベクトルの大きさは粒子の静止質量によって与えられる．

*12 $$g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta + \mu^2 = g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta + \mu^2 = 0 \tag{25.13}$$

あるいは

---

*8 粒子の半径方向の射影の軌道が "赤道", $\theta = \pi/2$ に存在するための座標の選択
*9 粒子の運動に対する保存量
*10 (1) E
*11 (2) L
*12 (3) μ

$$-\frac{E^2}{(1-2M/r)}+\frac{1}{(1-2M/r)}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+\frac{L^2}{r^2}+\mu^2=0 \tag{25.14}$$

さらに，等価原理から試験粒子は質量に関係なく同じ世界線に従うことを知っている．したがって粒子の運動に対して重要であるものはエネルギーと角運動量そのものでなくて，比

*13 $$\tilde{E}=E/\mu=(\text{単位静止質量あたりのエネルギー}),$$

*14 $$\tilde{L}=L/\mu=(\text{単位静止質量あたりの角運動量}) \tag{25.15}$$

である．また

$$\lambda=\tau/\mu=(\text{単位静止質量あたりの固有時間})$$

を思い出せ．そうすると式 (25.14) は静止質量が現れない，固有時間についての r 座標の変化を表す方程式

*15 $$\begin{aligned}\left(\tfrac{dr}{d\tau}\right)^2&=\tilde{E}^2-(1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)\\&=\tilde{E}^2-\tilde{V}^2(r)\end{aligned} \tag{25.16a}$$

になる．

ここに

$$\tilde{V}(r)=[(1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2} \tag{25.16b}$$

は 25.1 節および図 25.2 で述べられ，そして 25.5 節で議論されるべき“有効ポテンシャル”である．他の 2 つの関連する座標の固有時間についての変化率に対して，“順行”軌道 ($d\phi/d\tau>0$ で，$p_\phi=-L$ よりもむしろ $p_\phi=+L$) を仮定すると，

$$\frac{d\phi}{d\tau}=\frac{1}{\mu}\frac{d\phi}{d\lambda}=\frac{p^\phi}{\mu}=\frac{g^{\phi\phi}L}{\mu}=\frac{\tilde{L}}{r^2} \tag{25.17}$$

および

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\mu}\frac{dt}{d\lambda}=\frac{p^0}{\mu}=-\frac{g^{00}E}{\mu}=\frac{\tilde{E}}{1-2M/r} \tag{25.18}$$

をもつ．式 (25.16) から r を τ の関数として知り，式 (25.17) および (25.18) から ϕ および t の τ 依存性を見出しうる．対称性の考察は実質的に，測地線の運動の 4 個の連立 2 階の微分方程式 $p^\mu{}_{;\nu}p^\nu=0$ を，ただ 1 つの 1 次方程式 (25.16) にした．

ゼロ静止質量の物体に対しては，固有時間に関係させることは意味がない．したがってわずかに異なる取り扱いが必要である (25.6 節)．

25.5 節で，式 (25.16) から (25.18) までによって予言される運動をみる前に，定数 p_0 および p_ϕ の物理学的な重要性を解析し，そしてこれらの軌道を調べる際に，興味ある物理学的に重要な量を同定することは有用である．$E=-p_0$ を“無限遠でのエネルギー”とよ *16

*13　(4) $\tilde{E}\equiv E/\mu$

*14　(5) $\tilde{L}\equiv L/\mu$

*15　$\mu\neq 0$ であるとき，有効ポテンシャル $\tilde{V}$，および軌道に対する方程式

*16　“無限遠でのエネルギー”としての E および“角運動量”としての L の解釈

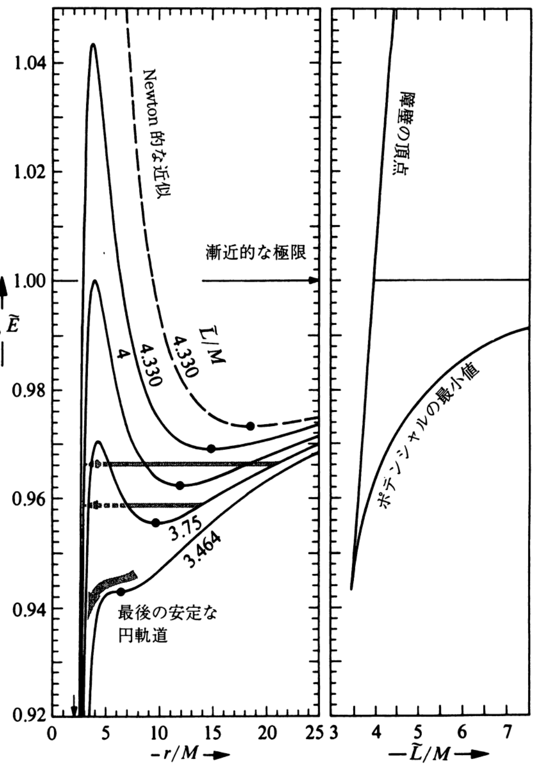


図 25.2 集中した質量 M の Schwarzschild 幾何学での，試験粒子の運動に対する有効ポテンシャル．エネルギーは，粒子の静止質量 μ を単位化するに伴い，$\tilde{E} = E/\mu$ と表され，角運動量は $\tilde{L} = L/\mu$ と表される．量 r は Schwarzschild の r 座標を表す．有効ポテンシャルは（また μ の単位で）式 (25.16) あるいは，同等であるが，式

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \tilde{V}^2(r) = \tilde{E}^2$$

によって定義される（また 25.5 節をみよ）．そして値

$$\tilde{V} = [(1 - 2M/r)(1 + \tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}$$

をもつ．それは粒子の半径方向の運動エネルギーが r で，ゼロになるときの $\tilde{E}$ の値を表す（r を "転換点" とする $\tilde{E}$ 値，$\tilde{V}(r) = \tilde{E}$．$\tilde{V}^2(r)$ を同等によく有効ポテンシャルとみなし，そして転換点を条件 $\tilde{V}^2 = \tilde{E}^2$ によって定義することができるだろうということに注意せよ．どちらの定義を選ぶかは，便利さに，意図されている応用に，原型の微分方程式 $\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = E$ との絆に，そして Newton 理論の有効ポテンシャルとの対応を強調したいかどうかに，依存する）．安定な円軌道は $\tilde{L}$ が $2\sqrt{3}M$ を越える場合にのみ可能である（代表点は有効ポテンシャルの最小値に位置する）．ある固定された $\tilde{L}$ 値に対しては，エネルギーがポテンシャルの最小値以上に上げられるとき運動は，円形からわずかに逸脱する（$\tilde{L} = 3.75M$ に対する 2 個の太い水平線をみよ）．古典物理学では，運動は正の運動エネルギーの領域に限られている．量子力学では，粒子は運動エネルギーが，古典的に計算されるときに，負である領域を突抜けることができる（太い水平線の破線の延長），そして "ポテンシャルにおけるくぼみ" に向かう（ブラックホールによる捕獲）．このようなポテンシャル障壁を突抜けることは，引力中心が任意の巨視的な次元をもつときには絶対的に無視される．しかし質量 10^{17} g（あるいは 10^{-11} cm）のブラックホールに対しては，もしこのような物体が原理的に存在しうるならば原理的に重要になる．

上の図は試験粒子の角運動量に依存するポテンシャルの最小値および最大値を与える．$\partial\tilde{V}/\partial r$ の根は，"既約された角運動量パラメータ" $L^\dagger = \tilde{L}/M = L/M\mu$ を用いて

$$r = \frac{6M}{1 + (1 - 12/L^{\dagger 2})^{1/2}},$$

$$\tilde{E}^2 = \frac{(L^{\dagger 2} + 36) + (L^{\dagger 2} - 12)(1 - 12/L^{\dagger 2})^{1/2}}{54}$$

$$[= 8/9 \quad (L^\dagger = (12)^{1/2} \text{ に対して}), \quad 1 \quad (L^\dagger = 4 \text{ に対して}),$$
$$(L^{\dagger 2}/27) + (1/3) + (1/L^{\dagger 2}) + \cdots \quad (L^\dagger \longrightarrow \infty \text{ に対して})]$$

（有効ポテンシャルの最大に対しては正の根，最小に対しては負の根，練習問題 25.18 をみよ）によって与えられる．

ぶ．そして赤道の軌道に対する $L = |p_\phi|$ を“全角運動量”とよぶ．これらの名前を正当化するために，それらを，試験粒子が Schwarzschild 座標系の赤道上に静止している観測者を横切ってその軌道を飛ぶときに，観測者によって測定される標準的な量と比較せよ．

$$\begin{aligned} E_{\text{局所}} &\equiv p^{\hat{0}} \equiv \langle \boldsymbol{\omega}^{\hat{0}}, \boldsymbol{p} \rangle \equiv \langle |g_{00}|^{1/2} \boldsymbol{d}t, \boldsymbol{p} \rangle = |g_{00}|^{1/2} p^0 \\ &= |g_{00}|^{1/2} dt/d\lambda = (1 - 2M/r)^{1/2} dt/d\lambda \end{aligned} \tag{25.19}$$

を観測者が彼の固有基準系で測定するエネルギーとせよ．そして

$$\begin{aligned} v_{\hat{\phi}} &\equiv \frac{p^{\hat{\phi}}}{p^{\hat{0}}} \equiv \frac{\langle \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}, \boldsymbol{p} \rangle}{E_{\text{局所}}} = \frac{\langle |g_{\phi\phi}|^{1/2} \boldsymbol{d}\phi, d/d\lambda \rangle}{E_{\text{局所}}} \\ &= \frac{r(d\phi/d\lambda)}{E_{\text{局所}}} = \frac{p_\phi}{r E_{\text{局所}}} \end{aligned} \tag{25.20}$$

は観測者が測定する通常の速度の接線成分であるとせよ［**注意：**$\boldsymbol{\omega}^{\hat{\alpha}}$ は観測者の固有基準系の基底 1–形式である．式 (23.15a)，(23.15b) をみよ］．これらの局所的に測定された量を用いて，無限遠でのエネルギーは

$$E = -p_0 = -g_{00} p^0 = |g_{00}|^{1/2} E_{\text{局所}} = (1 - 2M/r)^{1/2} E_{\text{局所}} = \text{一定} \tag{25.21}$$

である．それはしたがって因子 $|g_{00}|^{1/2}$ によって補正された，局所的に測定されたエネルギー $E_{\text{局所}}$ を表している．この観測者から $r = \infty$ まで自由に飛ぶ（測地線の運動）任意の粒子に対して，補正因子は 1 に帰着する．そして $E_{\text{局所}}$（今度は無限遠で，第 2 の観測者によって測定されるとき）は E と同じになる．同様に角運動量は式 (25.20) から

$$p_\phi = E_{\text{局所}} v_{\hat{\phi}} r = \text{一定} \tag{25.22}$$

これは，$E = -p_0$ のように，保存される量を表している．そして任意の軌道上で $r \to \infty$ に対するその解釈はよく知られている．最後に，2 個の衝突する粒子の全 4–運動量 $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ あるいは $(p_\mu)_1 + (p_\mu)_2$ は衝突点で（任意の r で）保存されることを思い出せ．したがって総量 $(E)_1 + (E)_2 = (-p_0)_1 + (-p_0)_2$ および $(p_\phi)_1 + (p_\phi)_2$ もまた保存される．衝突する粒子の 1 つは $r = \infty$ にけっして達しえないであろう軌道上にあるかもしれない．しかしこれは何の相違もつくらない．この保存原理は無限遠に達する軌道に対して成り立つ項 $E =$ “無限遠でのエネルギー” および “$L =$ 角運動量” を，無限遠に達しない軌道に対して引き継ぐことを許し，そして強制する．

［練習問題］

25.7　試験粒子の半径方向の速度

r での観測者が測定するであろう，速度の半径方向の成分 $v_{\hat{r}}$ に対する公式を求めよ［$v_{\hat{\phi}}$ に対しては式 (25.20) をみよ］．$E_{\text{局所}}$，$v_{\hat{r}}$，$v_{\hat{\phi}}$ を r，定数 E および p_ϕ を用いて表せ．

25.8 Schwarzschild 幾何学に対する回転 Killing ベクトル

(a) 練習問題 23.1 の等方性の座標で，Schwarzschild 幾何学に対する計量は形式

$$ds^2 = -(1 - M/2\bar{r})^2(1 + M/2\bar{r})^{-2}dt^2 + (1 + M/2\bar{r})^4(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2) \qquad (25.23)$$

をとることを示せ.

(b) これを形式

$$ds^2 = -(1 - M/2\bar{r})^2(1 + M/2\bar{r})^{-2}dt^2 + (1 + M/2\bar{r})^4(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (25.24)$$

$\bar{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ にもたらす座標変換を示せ.

(c) $\boldsymbol{\xi}_x = y(\partial/\partial z) - z(\partial/\partial y)$ および同様のベクトル $\boldsymbol{\xi}_y$ および $\boldsymbol{\xi}_z$ はおのおの Killing ベクトルであることを，Poisson 括弧［$\mathcal{H}, L_K$］が各 $L_K = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\xi}_K$, $K = x, y, z$, に対してゼロになることを確かめる（練習問題 25.5c をみよ）ことによって示せ.

(d) $\boldsymbol{\xi}_z = (\partial/\partial\phi)_{t,r,\theta}$ を示せ．そして赤道面内での軌道に対して $L_z = p_\phi$, $L_x = L_y = 0$ を示せ.

25.9 試験粒子の全角運動量の保存

Poisson 括弧の計算によって，全角運動量の 2 乗，$L^2 = p_\theta{}^2 + (\sin\theta)^{-2}p_\phi{}^2$ は任意の Schwarzschild の測地線に対して運動の定数であることを示せ.

25.10 変化されるものを選ぶことによって方程式を選ぶこと

Schwarzschild の計量 (25.12) の特別な場合に対する式 (25.8) において，変化される積分 I を書き下ろせ．$\delta I = 0$ の要求から，$\phi(\lambda)$ が変化される場合に限りどのような方程式が生ずるか？ $t(\lambda)$ が変化される場合に限ればどうか？

25.11 超 Hamiltonian から導かれる運動

Schwarzschild の計量の特別な場合に対する超 Hamiltonian (25.10) を書き下ろせ．その形式から p_0 および p_ϕ は運動の定数であることを導け．式 (25.14)，(25.17)，および (25.18) を超 Hamiltonian 形式から導け.

25.4 重力による赤方偏移

*17 $g_{0j} = 0$ をもつ，任意の時間によらない計量に対して，ゼロ静止質量およびゼロでない静止質量をもつ粒子に対して $|g_{00}|^{1/2}E_{局所} =$ 一定［式 (25.21)］の保存則は，“エネルギー赤方偏移の法則” とよばれることもある．それは任意の粒子あるいは光子が静的な重力場から登るかあるいはそこへ落ちるときに，それらの局所的に測定されたエネルギーはいかに変化する（“赤方偏移” あるいは “青方偏移” である）かを記述する．ゼロ静止質量の粒子（光子あるいはニュートリノ）に対しては，局所的に測定されたエネルギー $E_{局所}$，およ

*17 “エネルギー赤方偏移” の法則（“重力による赤方偏移”）

び波長 $\lambda_{局所}$（アフィンパラメータと混同されるべきでない！）は，$E_{局所} = h/\lambda_{局所}$ によって関係している．ここに h は Planck の定数である．したがって，エネルギー赤方偏移の法則は

$$\lambda_{局所}|g_{00}|^{-1/2} = 一定 \tag{25.25}$$

と書き直されうる．半径 r で重力場内に静止している原子によって放出され，無限遠で静止している天文学者によって受け取られる光子は，

$$z \equiv \Delta\lambda/\lambda = (\lambda_{受信} - \lambda_{放出})/\lambda_{放出} = |g_{00(r)}|^{-1/2} - 1$$

$$z = (1 - 2M/r)^{-1/2} - 1 \tag{25.26}$$

$$z \approx M/r \qquad (\text{Newton 的な極限で}) \tag{25.26N}$$

の量だけ赤方偏移される．これらの表現は光子がどのような経路に沿って進んでも成り立つことに注意せよ．

［練習問題］

25.12　時間の長さを決められたパルスによる赤方偏移

半径 r で静止している原子が連続して 2 個の光のパルスを放出すると考える．そのとき，光子の赤方偏移に対する表現 (25.26) を導け［ヒント：もし $\Delta\tau_{放出}$ が放出する原子によって測定されるときのパルス間の固有時間であり，そして $\Delta\tau_{受信}$ が $r = \infty$ での観測者によって測定されるときの固有時間差であるならば，$\lambda_{放出}$ を $\Delta\tau_{放出}$ として，そして $\lambda_{受信}$ を $\Delta\tau_{受信}$ として理想化することができる］．

25.5　粒子の軌道

さて注意をエネルギー赤方偏移から Schwarzschild 幾何学での粒子の軌道へ向けよ．固有時間の関数としての位置は式 (25.16a),

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \tilde{V}^2(r) = \tilde{E}^2 \tag{25.16a}$$

を解いて得られる．ここに $\tilde{V}$ は

$$\tilde{V}^2(r) = (1 - 2M/r)(1 + \tilde{L}^2/r^2) \tag{25.16b}$$

によって定義される "有効ポテンシャル" であり，図 25.2 およびコラム 25.6 に例示されている．コラム 25.6 での最初の図は r の関数としての $\tilde{V}^2(r)$ を与える．それは $\tilde{V}^2$ が負

である（31 章をみよ）“ブラックホール内部の領域”（$r < 2M$）においてさえ重要である．それは光子の軌道を解析するために 25.6 節で用いられる“有効ポテンシャル” $B^{-2}(r)$ に
*18 対する模型として役立ち，それに密接に関係している．コラム 25.6 での最後の図は $\tilde{V}(r)$ そのものを r の関数として与える．この図でのあるいは図 25.2 でのエネルギーは任意の慣習的なエネルギーレベル図におけるように解釈できる．2 つのレベル間のエネルギーの差は無限遠で測定されるときに，1 つのレベルから他のレベルへの遷移の際に放出される光子のエネルギーを表す．r の関数として $\tilde{V}(r)$ あるいは $\tilde{V}^2(r)$ を描くかどうかは主として便利さの問題である．重要な点は次のことである．$\tilde{V}(r)$ が利用できるエネルギー $\tilde{E}$ に等しくなる，あるいは $\tilde{V}^2(r)$ が $\tilde{E}^2$ に等しくなる r の値は，**“転換点（turing point）”**である．r が大きくなる方向へ動いていた粒子は，ひとたび転換点に達すると，向きを変え，r が小さくなる方向へ動く．あるいは r が小さくなる方向へ動いている粒子が転換点にくると，その運動を逆にし，r が大きくなる方向へ進む．転換点は平衡点でない．まっすぐ上に投げられた石はその飛行の頂上で平衡点に止まらない．しかし，$\tilde{E} - \tilde{V}(r)$，あるいは $\tilde{E}^2 - \tilde{V}^2(r)$ が唯一根をもたずに，2 重根をもつときは，平衡点を取り扱う（重力に逆らって戦う“遠心力”があるからこそ可能である）．この平衡が $\tilde{V}(r)$ の極小で生ずるときは，それは安定な平衡である．極大で生ずるときは，それは不安定な平衡である．こうして r 方向についての運動のすべての重要な特徴は r の関数としての有効ポテンシャルの見取り図（見取り図は $\tilde{L}$ の値に依存する）および $\tilde{E}$ 値の知識から読み取れる（図 25.2，さらなる詳細はコラム 25.6 にある）．

コラム 25.6　Schwarzschild 幾何学内で運動している粒子の軌道の定性的な特徴

A. 軌道を支配する方程式（導出については本文をみよ）

1. 運動の半径方向の成分に対する有効ポテンシャルの方程式

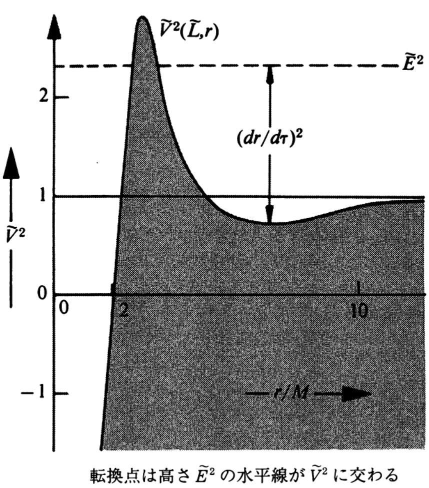
$$(dr/d\tau)^2 + \tilde{V}^2(\tilde{L}, r) = \tilde{E}^2,$$

$$\tilde{V}^2(\tilde{L}, r) = (1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2),$$

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix}\text{単位静止質量あたりの}\\ \text{無限遠でのエネルギー}\end{pmatrix},$$

$$\tilde{L} = (\text{単位静止質量あたりの角運動量})$$

2. “順行”軌道，$d\phi/d\tau > 0$ に対する角運動および時間運動に対する補足



転換点は高さ $\tilde{E}^2$ の水平線が $\tilde{V}^2$ に交わるところで起こる

*18　有効ポテンシャル図から分析される軌道の定積的な特徴

的な方程式

$$d\phi/d\tau = \tilde{L}/r^2,$$
$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\tilde{E}}{1-2M/r}$$

B. Newton 的な極限, $|\tilde{E}-1| \ll 1$, $M/r \ll 1$, $\tilde{L}/r \ll 1$

1. “単位静止質量あたりの無限遠でのエネルギー”, $\tilde{E} = E/\mu = (1 - v^2_{無限遠})^{-1/2}$ についてでなく，“単位静止質量あたりの非相対論的なエネルギー”

$$\varepsilon \equiv \frac{1}{2}(\tilde{E}^2 - 1) \approx \tilde{E} - 1 \approx \frac{1}{2}v_{無限遠}{}^2$$

について述べる．

2. $\tilde{V}^2(\tilde{L}, r)$ についてでなく，Newton 的な有効ポテンシャル

$$V_N(\tilde{L}, r) \equiv \frac{1}{2}(\tilde{V}^2 - 1) \approx -\frac{M}{r} + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2}$$

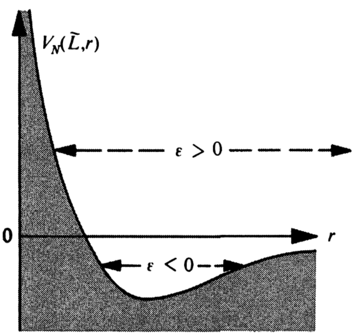
について述べる．

3. 有効ポテンシャルの方程式を形式

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_N(\tilde{L}, r) = \varepsilon$$

に書き直す．

4. 有効ポテンシャルの図および補助的な方程式 $d\phi/d\tau = \tilde{L}/r^2$ から，



a. $\varepsilon \geq 0$ ($\tilde{E} \geq 1$) をもつ粒子は，双曲線軌道に沿って，あるいは放物線軌道に沿って，$r = \infty$ から入り，$\varepsilon = V_N$ [$\tilde{E}^2 = \tilde{V}^2$，“転換点”，$(dr/d\tau)^2 = 0$] で有効ポテンシャルから反射され，そして $r = \infty$ へ戻る．

b. $\varepsilon < 0$ ($\tilde{E} < 1$) をもつ粒子はペリアストロン（periastron，楕円軌道の内側の転換点）とアパストロン（apastron，外側の転換点）の間で，有効ポテンシャル内で正しく往復運動をする．

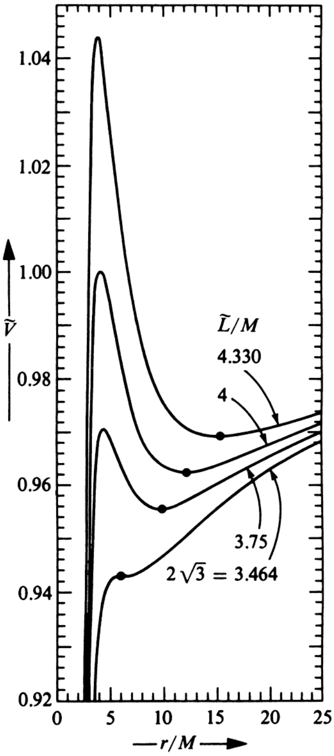
C. 相対論的な軌道

B の Newton 的な図を用いるのと同じように，A（種々の $\tilde{L}$ に対してここで再現される）の有効ポテンシャルの図を用いて，軌道の定性的な特徴を導く．おもな結論は次のことである．

1. $r \gg M$ でペリアストロンをもつ軌道は，水星に対してよく知られているようにペリアストロン偏移（練習問題 25.16，40.5 節）を除いて，形の上で Kepler 的である．

2. $r \lesssim 10M$ でペリアストロンをもつ軌道は Kepler 的な軌道と著しく異なる．

3. $\tilde{L}/M \leq 2\sqrt{3}$ に対してはペリアストロンが存在しない．入ってくる粒子はすべて，必然的に $r = 2M$ に引っ張られる．



4. $2\sqrt{3} < \tilde{L}/M < 4$ に対しては束縛された軌道があって，粒子はその中でペリアストロンとアパストロン間を往復して動く．しかし $r = \infty$（束縛されない，$\tilde{E}^2 \geq 1$）から入ってくる粒子はすべて必然的に $r = 2M$ に引っ張られる．

5. $L^{\dagger} = \tilde{L}/M > 4$ に対しては，束縛された軌道がある．

$$\tilde{E}^2 < \tilde{V}_{最大}{}^2 = (1 - 2u_m)(1 + L^{\dagger 2} u_m{}^2),$$

$$u_m \equiv \frac{1 + \sqrt{1 - 12/L^{\dagger 2}}}{6}$$

をもって $r = \infty$ から入ってくる粒子はペリアストロンに達し，それから $r = \infty$ へ戻る．しかし $\tilde{E}^2 > \tilde{V}_{最大}{}^2$ をもって $r = \infty$ から入ってくる粒子は $r = 2M$ に引っ張られる．

6. 有効ポテンシャルの最小点で安定な円軌道が存在する．最小点は $\tilde{L} = \infty$ に対する $r = \infty$ から，$L^{\dagger} = \tilde{L}/M = 2\sqrt{3}$ に対する $r = 6M$ まで中へ動く．もっとも固く束縛された，安定な円軌道 ($\tilde{L}/M = 2\sqrt{3}$, $r = 6M$) は，

$$\frac{\mu - E}{\mu} = 1 - \tilde{E} = 1 - \sqrt{8/9} = 0.0572$$

のわずかな束縛エネルギーをもつ．

7. 有効ポテンシャルの最大点で不安定な円軌道が存在する．最大点は $\tilde{L} = \infty$ に対する $r = 3M$ から，$\tilde{L}/M = 2\sqrt{3}$ に対する $r = 6M$ まで外に動く．このような円軌道における粒子は，もし内側へ摂動されるならば，$r = 2M$ へらせん状に落ち込んでいく．もし外側へ摂動され，そしてもし粒子が $\tilde{E}^2 > 1$ をもつならば，粒子は $r = \infty$ へ逃れるだろう．もし外側へ摂動され，そしてもし粒子が $\tilde{E}^2 < 1$ をもつならば，粒子はアパストロンに達し，それかららせん状の軌道に入り，究極的に星に落ち込むだろう（たとえば，もし $\delta\tilde{E} > 0$ ならば，不変の角運動量で）．あるいは粒子は外側に動きそしてアパストロンとペリアストロンとの間で，定常的な束縛軌道にあるだろう（たとえば，もし $\delta\tilde{E} < 0$ ならば，再び不変の角運動量で）．

定性的な特徴から定量的な結果に向かうとき，粒子がその Schwarzschild 座標を量 Δr だけ増大させるのに要求される固有時間 $\Delta\tau$ を明白に書き下ろすことが適切であると思われる．こうして（2 乗根は負あるいは正であるかもしれないという慣習で，$\sqrt{a^2} \equiv \pm a$）

$$\tau = \int d\tau = \int \frac{dr}{[\tilde{E}^2 - (1 - 2M/r)(1 + \tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}} \tag{25.27}$$

*19 積分は直線的に落下する粒子に対して，あるいは直線的に上昇する粒子に対してとくに単純である．なぜならそのとき角運動量はゼロになり，積分は Newton の力学においてさえ成り立つ（変化 $\tau \to t$ をもつ）初歩的な形，

$$\tau = \int d\tau = \int \frac{dr}{[2M/r - 2M/R]^{1/2}} \tag{25.27$'$}$$

に書ける．ここで $R \equiv 2M/(1 - \tilde{E}^2)$ は粒子の速度がゼロとなる半径（“アパストロン”）である．運動は非相対論力学で非常に有用な同じ “サイクロイド（cycloid）原理” に従う（図 25.3）．こうして，パラメータ形式で，

*20

$$r = \frac{R}{2}(1 + \cos\eta),$$
$$\tau = \frac{R}{2}\left(\frac{R}{2M}\right)^{1/2}(\eta + \sin\eta) \tag{25.28}$$

をもつ．$r = R$ での静止から $r = 0$ へ落下するまでの全固有時間は次式

$$\tau = \frac{\pi}{2}R\left(\frac{R}{2M}\right)^{1/2} \tag{25.29}$$

で与えられる（半径 R の球上に分布している，同じ質量の引力のもとで落下するときの時間よりも因子 $1/\sqrt{2}$ だけ短い．図 25.3 における点でつくられた曲線をみよ）．

与えられた運動に対してとられる Schwarzschild 座標の時間についてはどうか？　一般的な運動（半径方向のあるいは非半径方向の）に対する式 (25.16a) をとれ．そして $dr/d\tau$ が現れるところで，それを

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{dr}{dt}\frac{\tilde{E}}{1 - 2M/r} = \tilde{E}\frac{dr^*}{dt} \tag{25.30}$$

によって置き換えよ．ここに r^* は新しい “カメ（tortoise）座標” に対する略語である．

$$r^* = \int dr^* = \int \frac{dr}{1 - 2M/r} = r + 2M\ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \tag{25.31}$$

となり，Wheeler（1955）によって導入され，Regge and Wheeler（1957）によって普及された．こうして式

*21

$$\left(\tilde{E}\frac{dr^*}{dt}\right)^2 + \tilde{V}^2 = \tilde{E}^2 \tag{25.32}$$

---

*19　半径方向の軌道

*20　(1) 半径方向に束縛された軌道に対する $r(\tau)$ の “サイクロイドの” 形式

*21　(2) 座標時間の関数，$r^*(t)$ としての “カメ” 半径方向の座標

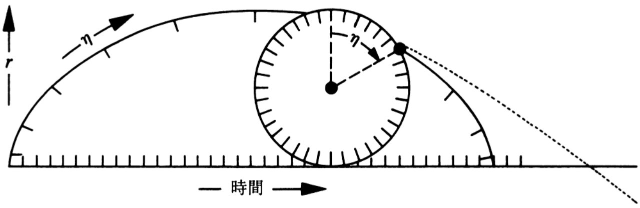


図 25.3 無視できる程度の重力の中心に向かって直線状に落下する試験粒子に対して，サイクロイドは，固有時間と Schwarzschild r 座標との間の関係を与える．車輪が基準線上を転がり，サイクロイドを生成するときの車輪の回転角度は η によって表される．このパラメータを用いて

$$r = \frac{R}{2}(1 + \cos\eta) \qquad \text{(Schwarzschild } r \text{ 座標)}$$
$$\tau = \frac{R}{2}\left(\frac{R}{2M}\right)^{1/2}(\eta + \sin\eta) \qquad \text{(固有時間)}$$

をもつ（r に対する表現と τ に対する表現とでスケール因子の差に注意せよ）．$r = R$ から $r = 0$ へ落下するときの固有時間の全経過は $\tau = (\pi/2)(R^3/2M)^{1/2}$ である．サイクロイド関係と落下する時間に対する同じ表現が，Newton の非相対論的な重力理論で，記号 τ が記号 t（通常の時間）によって置き換えられるだけで成り立つ．もし Newton の理論で，半径 R の球にわたって一様に分布する同じ引力を及ぼしている質量 M で，試験粒子の運動に対する溝をつくるために刺し通された管をもつ球を取り扱っているならば，その粒子は単振動をするだろう（上の点線の曲線）．これらの振動の角振動数 ω は惑星の表面をちょうどかすめて通る円内の試験粒子の回転の角振動数，Kepler の法則 $M = \omega^2 R^3$ によって与えられる振動数，と同一であるだろう．この場合には，中心に落下する時間は集中された引力中心に対するよりも因子 $2^{1/2}$ だけより長く，$(\pi/2)(R^3/M)^{1/2}$ であるだろう（集中された質量で，落下の後の段階においてより強い加速度とより高い速度をもつ）．集中された引力中心の影響のもとでの落下で任意点 r に達するのに要求される Schwarzschild 座標時間 t に対する表現は複雑でありここでは示されていない［式 (25.37) および図 25.5 をみよ］．

r を粒子の自由落下に対する時間と結びつける同じサイクロイドの関係は，そこではサイクロイド図は直接適用されるということを除いて，2 個の主要な変数間の任意のスケール差なしに，また "Friedmann のちりで満たされた宇宙" の半径を時間と結びつける（コラム 27.1 をみよ）．

$$(\text{3–球の半径}) = \frac{a}{2}(1 - \cos\eta) \simeq \frac{a}{4}\eta^2 \qquad (\text{小さい } \eta \text{ に対して}),$$

$$\begin{pmatrix}\text{ちりの粒子について測定されたとき}\\ \text{の固有時間と同一である座標時間}\end{pmatrix} = \frac{a}{2}(\eta - \sin\eta) \simeq \frac{a}{12}\eta^3 \qquad (\text{小さい } \eta \text{ に対して})$$

η の出発点は膨張の出発時間に再規格化されている．粒子の落下と宇宙の膨張との間の相関についてのさらなる内容に対しては Linduquist and Wheeler (1957) をみよ．

を見出す．ここに有効ポテンシャルは以前に取り扱われたのと同じ有効ポテンシャルである

$$\tilde{V} = [(1 - 2M/r)(1 + \tilde{L}^2/r^2)]^{1/2} \tag{25.33}$$

さらに，右辺の $\tilde{E}$ は $(dr/d\tau)^2$ に対する以前の式に現れたのと同じ $\tilde{E}$ である．したがって転換点および運動の定性的な記述はともに以前と同じである．"転換点は転換点であるというのが，転換点である"．正しいか？ 転換点については正しいが，結論については間違っている．

*22 話は，Achilles（アキレス）はけっしてカメを追い越すことはできないだろう，ということである．Achilles がカメのいたところに追いついたときにはつねに，カメは新しい位置に前進してしまっている．そしてアキレスがそこに達したときには，カメはさらに前方に進んでいる．そして**永遠に**そうである．アキレスとカメとの間の競争は左に向かって走っている．そして期待される通過点は $r = 2M$ に存在すると想像せよ．r 座標は値 $r = 2M$ を通過することについて何の禁止ももたない．"カメ座標" r^* はそうでない．それは負の

*22 (3) Schwarzschild の半径（$r = 2M$）への接近の詳細

無限大の方向に，任意に遠く離れたところへ行くことができる（Achilles がカメがいたところに追いつく無限回に対応して）．そして r は依然 $r = 2M$ の外にとどまる．

$r/2M$	1.000001	1.0001	1.01	1.278465	2	5	10	10,000
$r^*/2M$	−12.8155	−8.2102	−3.5952	0	2	6.386	12.303	10,009.210

落下する粒子上の時計の固有時間 τ による運動の記述［r は式 (25.29) の有限の固有時間内で，$r = R$ から $r = 0$ までずっと動く］と，遠く離れた観測者にとって適切な Schwarzschild 座標の時間 t による運動（r^* は $r^* = R^*$ から $r^* = -\infty$ までずっと動く．これには無限大の t が要求される．しかし無限大の時間においてさえ，r^* が $-\infty$ へ行くにつれて，r は漸近的に $r \sim 2M$ に近づくに過ぎない）の記述間の大きい差が存在する．こうして 2 番目の運動の記述は $r = 2M$ からゼロまでの r 値の全領域を除外するし，そして除外する以外に別の方法がない．完全によい物理学であり，それは落下する粒子がみて調べようとする物理学である．しかし遠く離れた観測者はけっしてみないであろうし，またけっしてみることができない物理学である．もしカメ座標が存在しなかったならば，カメ座標は考案されなければならないだろう．カメ座標は $r = 2M$ へより接近する各因子 10 を，最後の因子 10 および次にくる因子と同じ利息で投資する．カメ座標は遠く離れた観測者がこれらのより一層の微視的な運動の量をより一層詳細に調べるために利用できる Schwarzschild 座標の時間の量と一致して釣り合う．

図 25.4 は，式 (25.33) およびカメ座標の関数として再び描かれた図 25.2 の有効ポテンシャル $\tilde{V}$ を示す．$r = 2M$ で $\tilde{V}$ のゼロへの接近は，r^* が負の無限大に行くにつれて $\tilde{V}$ の指数関数的なゼロへの接近として現れる．こうして粒子は，“ブラックホール”（$r = 2M$,

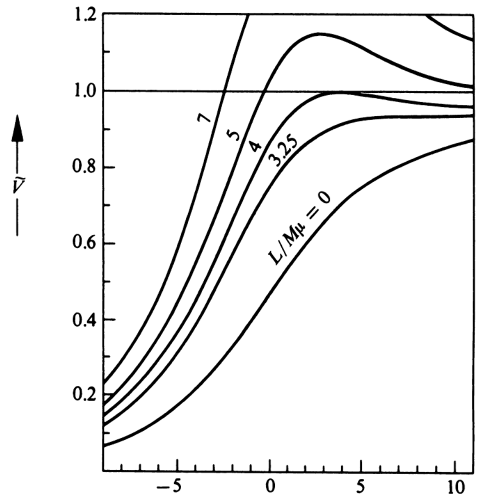


図 25.4　Schwarzschild 幾何学における運動に対する有効ポテンシャルが，試験粒子の角運動量の選ばれた値に対して，カメ座標の関数として表されている．角運動量 L が $M\mu$ の単位で表されている．ここに M はブラックホールの質量であり μ は試験粒子の質量である．有効ポテンシャル（静止質量を含む）が単位 μ で表されている．こうして，$\tilde{V} = V/\mu$．カメ座標 $r^* = r + 2M\ln(r/2M - 1)$ が単位 M で与えられている．

$r^* = -\infty$）に向かって動いて行くとき，座標時間 t で記述されるとき，いかなるポテンシャルの有効な影響も関係なく，そして式

$$\left(\tilde{E}\frac{dr^*}{dt}\right)^2 \simeq \tilde{E}^2 \tag{25.34}$$

と一致して，すなわち，“光の速さ”（$dr^*/dt \simeq -1$）で，減少する r^* に向かって本質的に自由に動く．r^* の t についてのこの依存性はただちに

$$r = 2M + (\text{定数} \times e^{-t/2M}) \tag{25.35}$$

という，r 自身の Schwarzschild 座標の時間 t についての漸近的な依存性を意味する．この結果は，ただ単位質量あたりのエネルギー $\tilde{E}$ が単位質量あたりの有効ポテンシャル $\tilde{V}$ の障壁（図 25.4）を越えるのに十分である限り，粒子の角運動量にもエネルギーにも依存しない（より多くのことが重力崩壊での $r = 2M$ への接近について，32 章で述べられるだろう）.

漸近的な公式 (25.35) を完全な公式によって置き換えることは式 (25.32) を積分することを要求する．こうして，

$$\begin{aligned} t = \int dt &= \int \frac{\tilde{E}\,dr^*}{[\tilde{E}^2 - \tilde{V}^2]^{1/2}} \\ &= \int \frac{\tilde{E}}{[\tilde{E}^2 - (1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}} \frac{dr}{(1-2M/r)} \end{aligned} \tag{25.36}$$

ここでの積分は，純粋な半径方向の運動（$\tilde{L} = 0$）に対しての次式［Khuri（1957）］の複雑さにみられるように，容易でない.

$$\begin{aligned} t = &\left[\left(\frac{R}{2} + 2M\right)\left(\frac{R}{2M} - 1\right)^{1/2}\right]\eta + \frac{R}{2}\left(\frac{R}{2M} - 1\right)^{1/2}\sin\eta \\ &+ 2M\ln\left|\frac{(R/2M-1)^{1/2} + \tan(\eta/2)}{(R/2M-1)^{1/2} - \tan(\eta/2)}\right| \end{aligned} \tag{25.37}$$

ここに η は，式 (25.28) および図 25.3 に現れるのと同じサイクロイドパラメータである ($r = 2M$ への漸近的な接近を例示する，r と t 間の相関の図 25.5 の詳細なプロットをみよ)．t に対する積分の困難は，τ［式 (25.28)］に対する積分の容易さに比較されるように，単純な原因をもつ．$\tilde{L}$ がゼロであるとき，ただ 2 つの r 値が特別な点として式 (25.27a) に現れる．速度がゼロになる出発点 $r = R$，および $dr/d\tau$ が無限大になる点 $r = 0$ である．対照的に，式 (25.36) は，

$$t = \int dt = \int \frac{[1-2M/R]^{1/2}}{[2M/r - 2M/R]^{1/2}} \frac{dr}{(1-2M/r)} \tag{25.36$'$}$$

と書き直すと，3 つの特別な点 $r = R$, $r = 0$，およびすべての新しい物理学を伴う追加点，$r = 2M$ を含む．角運動量を与えることは，特別な点の数をまださらに増大し，数値

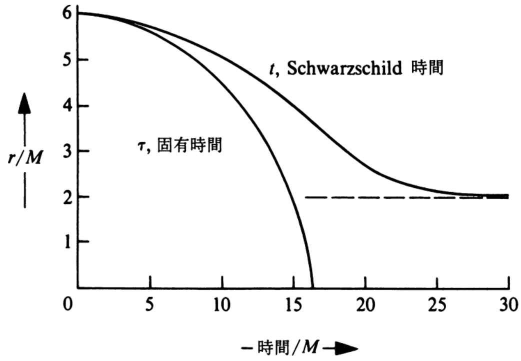


図 25.5　(a) 共運動している観測者 (固有時間 τ) によって，および (b) はるかに離れた観測者 (Schwarzschild 座標時間 t) によって記述されるときの Schwarzschild ブラックホールに向かう落下．1 つの記述では，点 $r = 0$ に素早く到達する．式 (25.28) をみよ．別な記述では，$r = 0$ がけっして到達されない．そして $r = 2M$ さえ漸近的にのみ到達される［式 (25.35) および (25.37)］．両方の場合における運動の定性的な特徴は，固有時間に関心があるときには，“単位質量あたりの有効ポテンシャル” $\tilde{V}$ の r 依存性の調査によってもっとも容易に導き出される (図 25.2)．あるいは Schwarzschild 座標時間 t に関心があるときには，同じ有効ポテンシャル $\tilde{V}$ の “カメ座標” r^* 依存性の調査によって，もっとも容易に導き出される［図 25.4 および式 (25.31)］．

的にあるいは定性的に（図 25.4 のポテンシャル図を通して），あるいは楕円関数によってしか［Hagihara (1931)］，積分を取り扱えなくする．

*23　崩壊の始まりでの正確な値 $r = R$ から理論的に考えることはしばしば好都合である．この場合には，極限 $R \to \infty$ を取り扱う．そうすると固有時間のゼロを最終的な大詰めの瞬間に移動させるのが好都合である．この極限で，

$$\tau/2M = -(2/3)(r/2M)^{3/2},$$
$$t/2M = -(2/3)(r/2M)^{3/2} - 2(r/2M)^{1/2} + \ln \frac{(r/2M)^{1/2}+1}{(r/2M)^{1/2}-1} \qquad (25.38)$$

をもつ．非常に大きい負の時間に，粒子は遠く離れており非常にゆるやかにのみ近づいている．そうすると，座標時間に関係しようとあるいは固有時間に関係しようと，

$$r = (9M\tau^2/2)^{1/3} \simeq (9Mt^2/2)^{1/3} \qquad (25.39a)$$

と書くことができる．しかし，落下の最終段階は固有時間を用いて表されるとき（$\tau \to 0$, $r \to 0$）と，Schwarzschild 座標の時間を用いて表されるときとは，再び非常に異なり，

$$r/2M = 1 + 4e^{-8/3}e^{-t/2M} \qquad (25.39b)$$

*24　となる．純粋な半径方向の運動から角運動量を与えられた運動へ注意を向けて，運動の主
*25　要な量（変位，速度，および加速度の成分）を Fourier 級数（Schwarzschild 座標の時間）で表したい事情がある．これらの Fourier 級数は Newton 的な極限で，放射および 1 つの軌道の他の軌道による摂動および引力の中心の潮汐を生み出す作用による，動いている粒

*23　(4) $r = \infty$ からの自由落下
*24　非半径方向の軌道
*25　(1) Fourier 解析

子そのものの潮汐の摂動を解析するときに非常に好都合である．これらの係数のどのような正確な評価も困難にみえるだろう．今のところは，Fourier 振幅の値は Newton 的な解析から始まる連続的な近似によって，もっともよく展開されるようにみえるだろう（コラム 25.4 およびそこに引用されている文献をみよ）．

このような Fourier 解析と関連して，運動が厳密な円軌道で生ずるとき（$\tilde{L}=0$ の純粋な半径方向の運動と極端に反対である），基本振動数のみが現れ，そしてすべてのより高い調和振動はゼロ振幅をもつことを思い出すことは大切である．したがってこの運動の円振動数 ω は，遠く離れた観測者によって測定されるとき，非相対論的な物理学の厳密な Kepler の公式

$$\omega^2 r^3 = M \qquad \text{(厳密である，一般相対論)} \tag{25.40}$$

による軌道の Schwarzschild の r 値と関係している．

*26 さて r と時間との間の相関から r と回転角（ここでの解析における ϕ，コラム 25.4 の Hamilton–Jacobi の解析における θ，名前についてのこの相違は以下のことがらに関係しない）との間の相関に向きを変えよ．式 (25.16)，

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \tilde{V}^2(r) = \tilde{E}^2$$

に戻り，そしてまた式 (25.17)

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\tilde{L}}{r^2}$$

を思い出せ．$d\tau$ に対する 2 番目の式を解いて，最初の式に代入し

$$\left(\frac{\tilde{L}}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \tilde{V}^2(r) = \tilde{E}^2 \tag{25.41}$$

あるいは同等のことであるが，$u = M/r$，および $L^\dagger = \tilde{L}/M = L/M\mu$ を用いて

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2 - (1-2u)(1+L^{\dagger 2}u^2)}{L^{\dagger 2}} \tag{25.42}$$

*27 を見出せ．練習問題 25.16 はこの公式から導かれる択一的な微分方程式を提供する．そしてそれを用いて，ほぼ円形の軌道をなして動いている，粒子あるいは惑星が最接近の相次ぐ 2 点間を，掃過する角度に対して，以下の表現を得る．

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{(1-6M/r_0)^{1/2}} \tag{25.43}$$

半径方向の運動は，入ってくるのから出ていくのへ，あるいは出ていくのから入ってくるのへ向きを変える．量 $\tilde{E}^2 - \tilde{V}^2(r)$，あるいは $\tilde{E} - \tilde{V}(r)$ が，r の関数として描かれるときはつねに，符号の変化を受ける．そしてこれは r と時間との間の以前の相関におけるの

*26 (2) 角運動の詳細

*27 (3) ほぼ円形の軌道：ペリアストロンの変位

*28 と同じく，ここでも r と ϕ との間の相関において明白である．再び選ばれた $\tilde{L}$ 値に対して r の関数としての $\tilde{V}(r)$ に対する図 25.2 の曲線を思い出せ．それらからどのような計算もまったくせずに，詳細な数値的計算によって得られる代表的な軌道の主要な特徴（コラム 25.6）を読み取ることができる．特徴的な性質は

(1) $\tilde{E}$ が有効ポテンシャル $\tilde{V}(r)$ の最小と一致するときは円軌道である，

(2) $\tilde{E}$ が $\tilde{V}_{最小}$ よりも少し大きいときは歳差運動である，

(3) $\tilde{E}$ が有効ポテンシャルの最大 $\tilde{V}_{最大}$ に近いときには一時的な“軌道周回”（引力の中心周りを何度もまわる）である，

(4) $\tilde{E}$ が $\tilde{V}_{最大}$ を越えるときは，“ブラックホールにとらえられる．”

より詳細な解析はコラム 25.6 に現れる［Schwarzschild 幾何学での軌道の明確な解析的計算に対しては，Hagihara (1931), Darwin (1959 および 1961), Mielnik and Plebanski (1962) をみよ］.

*29 正のエネルギーの軌道に対しては，Rutherford の散乱公式よりもよく知られた逆 2 乗力の特徴は存在しない．それは，粒子を遠く離れた受容器，偏向の指定された角度 Θ での単位立体角に散乱されるすべてのものを取り上げる，に投げたとき引力の中心によって提示される“目標領域の有効量”を与える．

*30
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{M^2}{[4(\tilde{E}-1)\sin^2\Theta/2]^2}\qquad \text{(Rutherford，非相対論的)}\tag{25.44}$$

（コラム 25.4 の式 (8) から (15) までにおける導出）．Newton 的な解析から一般相対論的な取り扱いに向きを変えるとき，軌道を描く現象と関連した散乱の，2 つの驚くべき新し
*31 い特徴を見出す．(1) 偏向の与えられた角度 Θ で散乱される粒子は，今や Θ だけ実際散乱された粒子（Rutherford 散乱における唯一の寄与）のみならず，$\Theta+2\pi$, $\Theta+4\pi, \cdots$ 他（寄与の無限級数）だけ散乱された粒子をも含む．(2) これらの補助的な寄与は，量について有限であり，また“Θ の単位領域あたり”量について有限でさえあるけれども，“立体角 $d\Omega=2\pi\sin\Theta\,d\Theta$ の単位あたり”について表されるとき，前方方向（$\Theta=0$）あるいは後方方向（$\Theta=\pi$）のいずれにおいても量について有限でない．この事情は前方散乱においては目を見はらせる変化を生まない．なぜならそれはすでに非相対論的な近似において無限大である（$\Theta=0$ に近づくと $d\sigma/d\Omega$ の Rutherford の値は無限大になる．それは大きい衝突径数で飛び去り小さい偏向を受ける粒子から生ずる．練習問題 25.21 をみよ）．対照的に，Rutherford の解析で完全に有限であった後方散乱は，無限大を得る．

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Theta\sim\pi}\sim\frac{\text{定数}}{\sin\Theta}\tag{25.45}$$

---

*28　(4) 角運動の定性的な特徴
*29　入射粒子の散乱
*30　(1) Rutherford の（非相対論的な）断面積
*31　(2) 相対論的な重力による新しい特徴

後方方向における散乱のこの集中は“グローリー（glory)”として知られる．効果は，はるか下方の雲の上に映る飛行機の影を取り巻く輝いた照明をみることによって，もっとも容易に確かめられる（水滴内での光線の 180 度の散乱）．それはまた $\Theta = 180$ 度近くの原子による原子の散乱を観測するとき明白にみられる．わい星，どのような中性子星さえも，このような 180 度の回転をしようと試みる高速粒子の道を外れさせるにコンパクトでない．ブラックホールのみがこの効果を生むのにコンパクトである．

Schwarzschild 幾何学における運動のさらに興味ある特徴は，以下の練習問題に現れる．

[練習問題]

25.13　粒子軌道の定性的な形

コラム 25.6 の C でなされた粒子軌道についての陳述を確かめよ．

25.14　衝突径数

散乱の軌道（すなわち，束縛されていない軌道）に対して $\tilde{L} = \tilde{E}v_\infty b$ を示せ．ここに b は衝突径数であり，そして v_∞ は漸近的な通常の速度である．また

$$b = \tilde{L}/(\tilde{E}^2 - 1)^{1/2} \tag{25.46}$$

を示せ．衝突径数の物理学的な意味を例示する図を描け．

25.15　$r = 2M$ まで落下する時間

式 (25.16) およびコラム 25.6 での最初の図から，$r = 2M$ に近づく軌道（一般的な $\tilde{L}$ 値！）は有限の固有時間 (25.32) で，しかし無限大の座標時間 t でそうする．それは半径 $R > 2M$ をもたなければならない平衡状態にある星，に対しては，表面に落下する座標時間はもちろん有限である．

25.16　ほぼ円形軌道に対するペリアストロン変位

式 (25.42) を形式

$$(du/d\phi)^2 + (1 - 6u_0)(u - u_0)^2 - 2(u - u_0)^3 = (\tilde{E}^2 - \tilde{E}_0^2)/L^{\dagger 2} \tag{25.47}$$

に書き直せ．定数 $u_0 \equiv M/r_0$ を $\tilde{L}/M$ を用いて表せ．そして $\tilde{E}_0$ を u_0 を用いて表せ．半径 r_0 のほぼ円形軌道に対して 2 個の相次ぐペリアストロン（星に最接近する点）間に描かれる角度は

$$\Delta\phi = 2\pi(1 - 6M/r_0)^{-1/2} \tag{25.48}$$

であることを示せ．$r_0 = 8M$ に対する軌道の形をスケッチせよ．

25.17　落下中の角運動

式 (25.42) から，$r = 0$ へ落下している軌道上で描かれる全角度 $\Delta\phi$ は有限であることを導き出せ．計算は単純である．しかし解釈は，同じ軌道上の $t(\lambda)$ の振る舞い［式 (25.32) および練習問題 25.15］の理由で簡単でない．解釈は 31 章で説明されるだろう．

25.18　有効ポテンシャルの最大と最小

有効ポテンシャルの最大と最小の位置に対する図 25.2 の説明文に与えられている表現を角運動量の関数として導け．また $\tilde{L}$ が M に比べて非常に大きい極限で，障壁の高さの角運動量についての依存性の極限の形を定めよ．

25.19　円形軌道に対して成り立つ Kepler の法則

式 (25.17) の $d\phi/d\tau$ および式 (25.18) の $dt/d\tau$ から，遠く離れた観測者によってみられるときの回転の円振動数に対する表現を導け．そして練習問題 25.18 の結果から（あるいは違った方法で）円振動数は，r に等しい Schwarzschild の r 値の任意の円軌道に対して，安定（ポテンシャルが最小である）であろうと不安定（ポテンシャルが最大である）であろうと，正確に Kepler の関係式

$$\omega^2 r^3 = M$$

を満たすことを示せ．

25.20　Hamilton–Jacobi の関数

$t=0$ に対してまた値 $\tilde{L}=4M$, $\tilde{E}=1$ に対して（あるいは $\tilde{L}=2\sqrt{3}M$, $\tilde{E}=(8/9)^{1/2}$ に対して，あるいはこれら 2 つのパラメータに対するある他の同様に単純な値の組に対して）一定の力学的な位相 $\tilde{S}(t,r,\theta)=0$ の点の，r, θ 図における軌跡を構成せよ．一定の $\tilde{S}$ の曲面の組全体は，前述の軌跡を 1 つの角度だけ何度もさまざまに回転することによって得られうることを示せ．生ずる曲線のパターンの主要な特徴を物理学的に解釈せよ．

25.21　重力による偏向と電気力による偏向との対照

任意の速度 β の試験粒子が衝突径数 b で質量 M を飛び過ぎる，b は非常に大きいので偏向は小さい．偏向は

$$\theta = \frac{2M}{b\beta^2}(1+\beta^2) \tag{25.49}$$

であることを示せ．光の速さで動いている粒子に対して Newton 力学によって偏向を導け．式 (25.49) は $\beta \rightarrow 1$ の極限で Newton 的な偏向の 2 倍であることを示せ．また静止質量 μ および電荷 e の速い粒子の電荷 Ze の原子核による偏向に対する対照的な公式（平坦な空間での解析），

$$\theta = \frac{2Ze^2}{\mu b\beta^2}(1-\beta^2)^{1/2} \tag{25.50}$$

を導け．電磁気学に合わせてつくられた，重力の “ベクトル” 理論［たとえば，Brillouin (1970) をみよ］を，光の太陽による曲がりについての観測によって，除外することはとてもふさわしい．［ヒント：数学的な解析を簡単にするために，式 (25.42) に戻れ．2 階の方程式に変換するために一度 ϕ について微分せよ．再整理して左辺に，重力が存在しないときに存在するであろうすべての項を置き，右辺に，因子 $(1-2u)$ の $-2u$ 項（重力）に由来するすべての項を置け．式の右辺を無視して厳密に解け（直線運動）．右辺の摂動項を ϕ の関数とし，それに $u(\phi)$ に対する摂動項をもたない表現を代入することによって求めよ．再び解いて偏向を得よ．］

25.22 ブラックホールによる捕獲

粒子のブラックホールによる任意の散乱に加えて，ブラックホールへの直接の捕獲がある．捕獲に対する断面積は $\pi b^2_{\text{臨界}}$ であることを示せ．ここに臨界の衝突径数 $b_{\text{臨界}}$ は $L_{\text{臨界}}/(E^2-\mu^2)^{1/2}$ によって与えられる．図 25.2 の説明における公式あるいはそれ以外から，高エネルギー粒子に対してはこの断面積はエネルギーについて

$$\sigma_{\text{捕獲}} = 27\pi M^2\left(1+\frac{2}{3\tilde{E}^2}+\cdots\right) \tag{25.51}$$

として変化する（$\tilde{E}\to\infty$ に対する光子の極限）．そして低エネルギーに対しては

$$\sigma_{\text{捕獲}} = 16\pi M^2/\beta^2 \tag{25.52}$$

として変化することを示せ．ここに β は光の速度に相対的な速度である［Bogorodsky (1962)］．

25.6 Schwarzschild 幾何学における光子，ニュートリノ，あるいは重力子の軌道

“単位の静止質量あたりのエネルギー” および “単位の静止質量あたりの角運動量” の概念はゼロ静止質量の物体（光子，ニュートリノ，練習問題 35.16 の重力子）に対して意味
*32 をもたない．しかし，このような実体の運動について，有限静止質量 μ の粒子の運動を考え極限 $\mu\to 0$ にいくことによって，見出されえないものは何もない．この極限で量

$$\tilde{E} = E/\mu$$

および

$$\tilde{L} = L/\mu$$

はそれぞれ無限大になる．しかし比

*33
$$(\text{衝突径数}) = b = \frac{(\text{角運動量})}{(\text{線形運動量})} = \frac{L}{(E^2-\mu^2)^{1/2}} = \frac{\tilde{L}}{(\tilde{E}^2-1)^{1/2}} \tag{25.53}$$

は有限値

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{\tilde{L}}{\tilde{E}} = b \tag{25.54}$$

*34 になる．この極限で，軌道の形に対する式 (25.41) はただちに単純な形

*32 ゼロ静止質量の粒子に対する軌道
*33 (1) 衝突径数が定義される
*34 (2) 軌道の形

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2+\frac{1-2M/r}{r^2}=\frac{1}{b^2} \tag{25.55}$$

あるいは

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2+B^{-2}(r)=b^{-2} \tag{25.56}$$

あるいは

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2+u^2(1-2u)=\left(\frac{M}{b}\right)^2\equiv\frac{1}{\tilde{b}^2} \tag{25.57}$$

に帰着する．軌道に対する微分方程式がどの方法で書かれようとも，その中の 1 項は軌道の選択に依存する（項 $1/b^2$）．他の項は Schwarzschild 幾何学の性質に依存するが，軌道の選択に依存しない．この 2 番目の項は一種の有効ポテンシャル，

*35

$$(\text{光子に対する有効ポテンシャル})\equiv B^{-2}(r)\equiv\frac{1-2M/r}{r^2} \tag{25.58}$$

を定義する．ここでは有限の静止質量をもつ粒子に対してなされたように，平方根をとる試みはなされない．そこでは非相対論的な極限で，Newton 的な有効ポテンシャル（+静止質量）に帰着した量をもつために根をとった．しかし光（$v=1$）に対しては非相対論的な極限は存在しない．したがって有効ポテンシャル (25.58) はコラム 25.7 に直接描かれている．そしてそこでは，Schwarzschild 幾何学での光子の軌道の主要な特徴のいくつかを解析している．

時折，式 (25.58) の“有効ポテンシャル”でなくて，その公式から計算された“ポテンシャル衝突径数 $B(r)$”を r の関数として描くことが有用であることがわかった［たとえば，Power and Wheeler（1957），Zeldovich and Novikov（1971）をみよ］．このポテンシャル衝突径数は次のような解釈をもつ．光線は，点 r に達するためには $B(r)$ に等しいか，あるいは $B(r)$ よりも小さい衝突径数 b をもたなければならない．

$$b\leq B(r)\qquad(\text{“近づきやすさの条件”}) \tag{25.59}$$

*36 ゼロ衝突径数（正面衝突），あるいは $b_{\text{臨界}}=\min[B(r)]=3\sqrt{3}M$ よりも小さい任意の衝突径数をもつ光線は，任意にすべての r 値に達することができる．

式 (25.58) によって定義された美しく単純な“有効ポテンシャル”は式 (25.56) で用いられ軌道の形，すなわち，光子が与えられた r 値に達するときにもつ方位角 ϕ を定める．他の関係において，いつ，あるいはどのような Schwarzschild 座標時間に，光子が与えられた r 値に達するかを知ることは等しく興味がある．さらに一般的に，光子の測地線，それに対して固有時間は意味をもたない，は，アフィンパラメータ λ によって第一原理からの解析を認める．これはまず粒子を考え，それから極限 $\mu\to 0$ にいく方策と対照的である．

*37 （上記段落の「れたr値に達するかを知ることは」の行の左余白）

*35 (3) 有効ポテンシャル

*36 (4) 臨界の衝突径数

*37 (5) アフィンパラメータ

コラム 25.7 Schwarzschild 幾何学における光子の軌道の定性的な解析

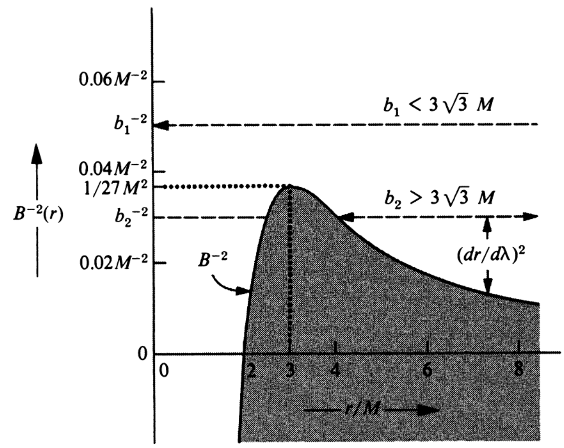
A. 軌道を支配する方程式

1. 運動の半径方向の部分に対する有効ポテンシャル方程式

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + B^{-2}(r) = b^{-2},$$
$$B^{-2}(r) = r^{-2}(1 - 2M/r),$$
$$b = (\text{衝突径数})$$

2. 角運動および時間運動を定める補足的な方程式

$$d\phi/d\lambda = 1/r^2,$$
$$dt/d\lambda = b^{-1}(1-2M/r)^{-1}$$



B. 軌道の定性的な特徴（有効ポテンシャル図から導き出される）

1. $b > 3\sqrt{3}M$ をもつゼロ質量の粒子が，$r = \infty$ から落下し，“ポテンシャル障壁で反射” される（ペリアストロン，$b = B$, $dr/d\lambda = 0$）．そして無限遠に戻る．

a. $b \gg 3\sqrt{3}M$ に対して，軌道は角度のわずかな偏向 $4M/b$ を除いて直線である（練習問題 25.21，40.3 節）．

b. $0 < b - 3\sqrt{3}M \ll M$ に対して，粒子は $r = \infty$ に飛び去る前に $r \approx 3M$ で何度も星の周囲をまわる（“不安定な円形軌道”）．

2. $b < 3\sqrt{3}M$ をもつゼロ質量の粒子は，$r = \infty$ から落下し，$r = 2M$ に落ちる（ペリアストロンがない）．

3. $r = 2M$ の近くから放出されたゼロ質量の粒子は $b < 3\sqrt{3}M$ をもつ場合に限り無限遠に逃れる．それ以外ではアストロンに達しそれから $r = 2M$ に引き戻される．

C. 伝播方向の関数としての脱出対捕獲

Schwarzschild の重力場内で静止している観測者は，自分の直交系に相対的なゼロ質量粒子の通常の速度を測定する［式 (23.15)］.

$$
\begin{aligned}
v_{\hat{r}} &= \frac{|g_{rr}|^{1/2} dr/d\lambda}{|g_{00}|^{1/2} dt/d\lambda} = \pm(1-b^2/B^2)^{1/2},\\
v_{\hat{\phi}} &= \frac{|g_{\phi\phi}|^{1/2} d\phi/d\lambda}{|g_{00}|^{1/2} dt/d\lambda} = b/B,\\
(v_{\hat{r}})^2 &+ (v_{\hat{\phi}})^2 = 1,\\
\delta &\equiv (\text{伝播方向と半径方向との間の角度})\\
&= \cos^{-1} v_{\hat{r}} = \sin^{-1} v_{\hat{\phi}}
\end{aligned}
$$

ポテンシャル障壁を越えうるためには，粒子は $b < 3\sqrt{3}M$，あるいは ${v_{\hat{\phi}}}^2 B^2 < 27M^2$，あるいは $\sin^2\delta < 27M^2/B^2$ をもたなければならない．この結果を述べ直すと，

1. $r < 3M$ でゼロ静止質量の粒子は，v_r が正で

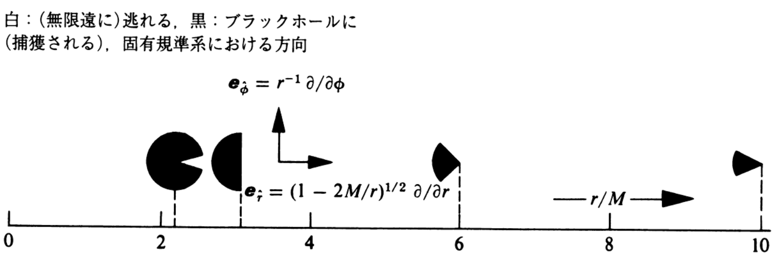
$$\sin\delta < 3\sqrt{3}MB^{-1}(r)$$

である場合に限り，$r = 2M$ でブラックホールに捕獲されるよりもむしろ，最終的に無限遠に逃れるだろう．

2. $r > 3M$ でゼロ静止質量の粒子は，(1) v_r が正であるか，あるいは (2) v_r が負で，そして

$$\sin\delta > 3\sqrt{3}MB^{-1}(r)$$

である場合に限り，最終的に無限遠に逃れるだろう．



アフィンパラメータ λ に関係するが静止質量 μ に関係しない形の保存則 (25.17) および (25.18) の陳述に戻れ．こうして

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2} \tag{25.60}$$

および

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{1-2M/r} \tag{25.61}$$

重力場内での光子の経過は，光子の方向によって支配されるがそのエネルギーによって支配されないことを思い出せ．したがって E も L も個々に重要でなくてそれらの比，式 (25.54) および練習問題 25.14 の衝突径数 $b = L/E$ のみが重要である．この事情はアフィンパラメータ λ を新しいアフィンパラメータ，

$$\lambda_{\text{新しい}} = L\lambda \tag{25.62}$$

で置き換えるように導く．それは光子の世界線に沿って等しく一定である．この記号で (今
*38 後，下つき文字 "新しい" を落とす)，保存則は形式

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{1}{r^2} \tag{25.63}$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{b(1-2M/r)} \tag{25.64}$$

をとる．光子の世界線は固有時間のゼロ経過の線であるという陳述，

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \tag{25.65}$$

は "半径方向の方程式"

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + B^{-2}(r) = b^{-2} \tag{25.66}$$

に通ずる．ここで再び式 (25.58) の "有効ポテンシャル" $B^{-2}(r)$ に出会う．光子の測地線に対するこの現在のより完全な方程式系は，それらが空間を越えて時空内での世界線の記述に達するという利点をもつ．

空間に戻ろう！ 図 25.6 は Schwarzschild 幾何学における光子に対する代表的な軌道を
*39 示している．図 25.7 は偏向の角度を，衝突径数の関数として示している．この曲線に含まれている情報から，微分散乱断面積，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{\text{枝}} \left| \frac{2\pi b\, db}{2\pi \sin\Theta\, d\Theta} \right| \tag{25.67}$$

における，図 25.7 の散乱曲線の種々の "枝 (branch)" からの寄与を求めることができる [引力の中心の周りの 1 回転，2 回転，等．これらの枝および散乱の解析における偏向関数 $\Theta = \Theta(b)$ の中心的な役割についてのさらに多くのことに対しては，たとえば，Ford and Wheeler (1959a,b) をみよ]．小さい角度に対しては，散乱の "Rutherford" 部分が支配的である．小さい角度の散乱の主要な部分，および極限 $\Theta \to 0$ で，散乱のすべては，大きい衝突係数からくる．それに対しては

$$\Theta = \frac{4M}{b} \tag{25.68}$$

*38 (6) 軌道に対する方程式
*39 (7) 散乱断面積

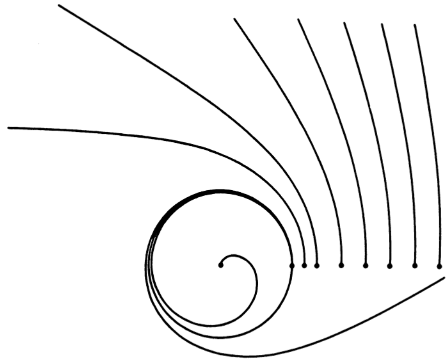


図 **25.6**　ブラックホールの“赤道面内”における光子の軌道が，軌道の転換点の選ばれた値，$r_{\mathrm{TP}}/M = 2.99, 3.00$（不安定な円軌道），3.01, 3.5, 4, 5, 6, 7, 8, 9 に対して Schwarzschild 座標 r および ϕ を用いて描かれている．衝突パラメータは公式 $b = r_{\mathrm{TP}}(1 - 2M/r_{\mathrm{TP}})^{-1/2}$ によって与えられる．示されている場合のいずれにおいても，内部へ落ち込むらせんに対してさえも，衝突パラメータは $b_{\text{臨界}} = (27)^{1/2}M$ よりも小さくない．またこれらの軌道の何ものも円 $r = 3M$ を横切ることはできない．ブラックホールの内部へ落ち込むのは，$b_{\text{臨界}}$ よりも小さい b をもつ軌道に対してのみ起こる．このような軌道に対しては転換点は存在しない．光子は無限遠から入り込みそして $r = 0$ で終わる．$b = 0$（正面衝突）に対しては直線で入り込む，$b/M = (27)^{1/2} - \varepsilon$，ここに ε は非常に小さい量である，のときは $r = 3M$ の近くを何度も輪を描いた後に初めて．これらの曲線を出版することを許可してくれたことに対して R.H. Dicke 教授に感謝を述べる．彼はこれらの曲線をデジタルコンピュータで計算しそして公式，$d^2u/d\phi^2 = 3u^2 - u$，ここに $u = M/r$ である，から直接描いた．

をもつ（練習問題 25.21 および 25.24 をみよ）．したがって断面積の極限形式は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{4M}{\Theta^2}\right)^2 \qquad (\text{小さい}\,\Theta) \tag{25.69}$$

である．また，$\Theta = \pi$ で微分散乱断面積は，グローリーの特徴をもつ特異点をもつ［式 (25.44) に続く議論をみよ］．散乱関数の種々の枝の微分断面積への寄与を書き下ろし，そしてそれらを集めると，$\Theta = \pi$ の近くで

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{M^2}{\pi - \Theta}(1.75 + 0.0029 + 0.0000055 + \cdots) = 1.75\frac{M^2}{\pi - \Theta} \tag{25.70}$$

をもつ．こうして，原理的に，もし光の強力な源をブラックホールに照らすならば，ブラックホールから若干の光子の直接的な帰還を得る．式 (25.70) はこの帰還の強さを計算する手段を与える．練習問題 25.26 をみよ．

*40　照明の源が，ブラックホールの観測者の側にあるのではなく，反対側にあるときには，大きい衝突径数で飛び過ぎる光子によって経験され，そして式 (25.68) に含まれる“レンズ効果”［ここに要約するには膨大すぎる文献がある．たとえば，Refsdal (1964) をみよ］（強度 $\sim 1/\sin\Theta$，しかし，今の場合には Θ はゼロに近い）の他に，偏向 $\Theta = 2\pi, 4\pi, \cdots$ を経験した光子から受ける，照明のグローリー型が存在する．この照明は $b/M - 3^{3/2} = 0.0065, 0.000\,012, \cdots$ によって与えられる衝突径数に位置する“輝度の環”から生ずる．すべてのこれらの光学的な効果は原理の問題として興味があるけれども，それらはブラックホールを観測するすべての方法の中で最悪である．詳細な議論に対してはコラム 33.3 の VI，C 項をみよ．

*40　(8) 重力によるレンズ効果

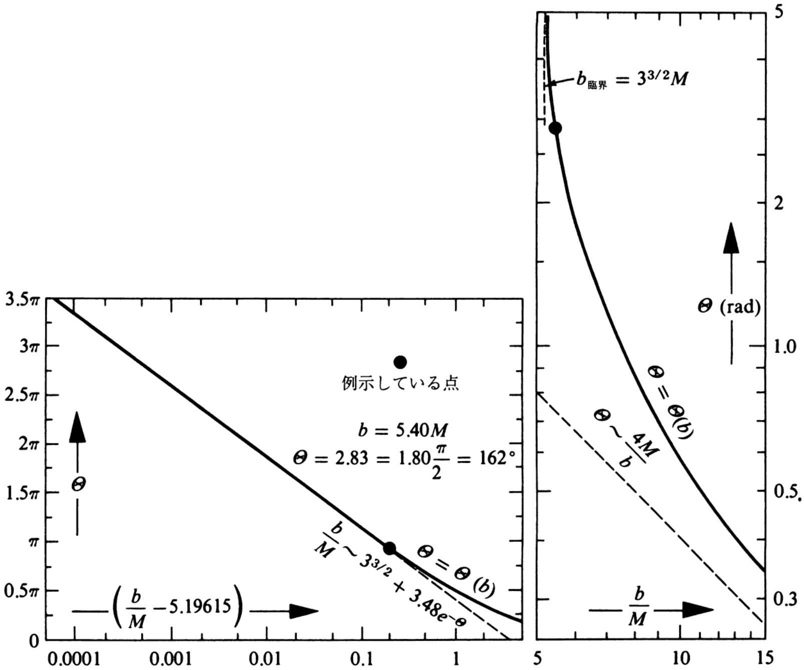


図 25.7 Schwarzschild ブラックホールによる，あるいは光子の軌道を妨げないほど十分小さい任意の球対称な引力中心による，光子の偏向．正確な計算（滑らかな曲線）が衝突径数 b の 2 つの極限，(1) $b_{臨界} = 3^{3/2}M$ に非常に近い（引力中心の周りを何度も回転する），(2) $b_{臨界}$ に比べて非常に大きい（小さい偏向），の場合において漸近的に成り立つ公式（破線の曲線）と比較される．偏向の正確な計算法は以下のように進行する（すべての距離は単純さのために，質量値，M の単位で与えられる）．(1) もっとも接近する点の Schwarzschild 座標に対して，値，$r = R$ を選べ．(2) 衝突径数，b を $b^2 = R^3/(R-2)$ から計算せよ．(3) $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{Q}^2 = (R-2)(R+6)$ から計算せよ．(4) "第一種の楕円積分" の係数，k を $\sin^2\theta = k^2 = (\mathcal{Q} - R + 6)/2\mathcal{Q}$ から定めよ．(5) 同じ楕円関数の，いわゆる振幅 $\phi = \phi_{最小}$ を $\sin^2 u_{最小} = \sin^2\phi_{最小} = (2 + \mathcal{Q} - R)/(6 + \mathcal{Q} - R)$ から定めよ．(6) そうすると全偏向は

$$\Theta = 4(R/\mathcal{Q})^{1/2}[F(\pi/2, \theta) - F(\phi_{最小}, \theta)] - \pi$$

である．ここに描かれている値は James A. Isenberg によって，C. G. Darwin (1959,1961) の仕事に基づいてていねいに計算された．

[練習問題]

25.23 光子軌道の定性的な特徴

コラム 25.7 でなされたゼロ静止質量の粒子に対する軌道についてのすべての陳述を確かめよ．

25.24 光の偏向

r そのものの代わりに次元をもたない変数 $u = M/r$，および衝突係数の代わりに $u_b = M/b$ を用いて，式 (25.55) を 1 階の方程式

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + (1-2u)u^2 = u_b^2 \tag{25.71}$$

に，それから微分によって，

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3u^2 \tag{25.72}$$

に転換せよ．

(a) 大きい衝突径数あるいは小さい u 近似で，その場合には右辺の項は無視される．式 (25.72) の解は基本的な直線運動（ゼロ偏向）を与えることを示せ．

(b) このゼロ次の解を式 (25.72) の右辺の摂動項 $3u^2$ に代入し，そして改めて u に対して解け（"直線運動+1 次の補正"）．このようにして，式 (25.49) において $\beta = 1$ とおくことによって与えられる太陽による光の曲がりに対する公式を確かめよ．

25.25　ブラックホールによる光の捕獲

Schwarzschild のブラックホールは，光の捕獲に対して断面積 $\sigma_{\text{捕獲}} = 27\pi M^2$ を与えることを示せ．

25.26　ブラックホールからの光の帰還

強力な光のパルスをブラックホールにぱっと発することは，原理的に $b/M - 3^{3/2} = 0.151, 0.00028, \cdots$ に位置する輝度の環からの帰還に通ずることを示せ．これらの異なる帰還の時間の遅れについての差をいかにして求めることができるか？ 元のパルスのエネルギー E_0 (erg/steradian)，ブラックホールの質量 M (cm)，ブラックホールまでの距離 R，そして "光を発した" 位置から帰還した放射の受信機までの横の距離 r の関数としての帰還の強度 I (erg/cm^2) は，回折が無視できる条件で

$$I = \frac{E_0}{R^3 r} \sum_{\Theta=(2N+1)\pi} \left| \frac{2b\,db}{d\Theta} \right| = \frac{E_0 M^2}{R^3 r}(1.75 + 0.0029 + 0.0000055 + \cdots)$$

であることを示せ．

25.7　球状の星団

本章で展開されたものとしての軌道理論を，22.6 節で展開されたものとしての曲がった時空での運動論と結びつけることによって，相対論的な星団の理論を定式化することができる．

*41 単純さのために，球対称な星団（たとえば球状星団，しかし非常に稠密なので相対論的な重力効果が重要であるだろう）を考えよ．星団は，位相空間内での数密度 $\mathcal{N}$ が時間によらないという意味で，静的であると要求せよ（新しい星は測地線の軌道に沿って飛び，"古い" 星は，位相空間内の固定された領域を去るのと同じ割合で，この領域に入る）．星と星の衝突およびそれらの密接な遭遇を無視せよ．すなわち，おのおのの星の軌道を，星団全体としての球対称な時空内での測地線として取り扱え．

*41　静的な，球状の星団

これらの理想化が受け入れられると，星団*の構造に対する，取り扱い可能な方程式の組
*42 を書き下ろすことができる．星団は静的でありそして球状であるから，その重力場も同様でなければならない．したがって，23 章で静的な球状の星に対して用いられたのと同じ種類の座標系（“Schwarzschild 座標”）を導入することができる．

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \qquad \Phi = \Phi(r), \qquad \Lambda = \Lambda(r) \tag{25.73}$$

時空内の各事象での接線空間には，群がる星の運動量ベクトルが内在する．この接線空間（“運動量空間”）における座標に対しては 4–運動量の物理学的な成分，$p^{\hat{\alpha}}$—すなわち直交系

$$\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} = e^{\Phi}\boldsymbol{d}t, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{r}} = e^{\Lambda}\boldsymbol{d}r, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} = r\boldsymbol{d}\theta, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} = r\sin\theta\boldsymbol{d}\phi \tag{25.74}$$

についての成分を用いるのが好都合である．そうすると位相空間内での星の数密度は球対称で，静的な関数

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}[r, p^{\hat{\theta}}, p^{\hat{r}}, (p^{\hat{\theta}2} + p^{\hat{\phi}2})^{1/2}] \tag{25.75}$$

である［$\mathcal{N}$ は t によらない，なぜなら星団は静的であるからである．そして球対称のゆえに，θ, ϕ, および角度 $\Theta = \tan^{-1}(p^{\hat{\phi}}/p^{\hat{\theta}})$ によらない］．

星団の構造を記述する関数，Φ, Λ, および $\mathcal{N}$ は，運動論的方程式（また，この文脈で Vlasoff 方程式とよばれる）（22.6 節）

$$d\mathcal{N}/d\lambda = 0 \quad \text{すなわち，}\mathcal{N}\text{ は位相空間内のおのおのの星の軌道に沿って保存される} \tag{25.76a}$$

および Einstein の場の方程式

$$G^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 8\pi T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 8\pi\int(\mathcal{N}p^{\hat{\alpha}}p^{\hat{\beta}})\mu^{-1}dp^{\hat{0}}dp^{\hat{r}}dp^{\hat{\theta}}dp^{\hat{\phi}} \tag{25.76b}$$

によって定まる．［Newton 的な星団に対する Vlasoff 方程式は Ogorodnikov（1965）によって取り扱われている．粒子（星）の群のストレス–エネルギーテンソルに対する上述の表現は練習問題 22.18 で導かれた．ここでは，練習問題 22.18 におけるように，粒子（星）はすべて同じ静止質量をもつとは仮定されていない．静止質量はここで μ と表されているが，22 章では m と表されたことに注意せよ．］

*43 Vlasoff 方程式を解くには，$\mathcal{N}$ は星の軌道に沿って保存され，軌道運動の定数の関数でなければならないことだけを注意せよ．星団の静的な球状の時空におけるおのおのの Killing ベクトルに対応する運動の定数が存在する（練習問題 25.8 をみよ）．

$$E = \text{“無限遠でのエネルギー”} = -\boldsymbol{p}\cdot(\partial/\partial t) = -p_0,$$

* これらの方程式は Zel'dovich and Podurets（1965）によって初めて導かれた．
*42 (1) 解析に対する基礎
*43 (2) Vlasoff 方程式の解

$$
\begin{aligned}
L_z &= \text{“角運動量の } z \text{ 成分”} = p\cdot\boldsymbol{\xi}_z = p\cdot(\partial/\partial\phi) = p_\phi, \\
L_y &= \text{“角運動量の } y \text{ 成分”} = p\cdot\boldsymbol{\xi}_y, \\
L_x &= \text{“角運動量の } x \text{ 成分”} = p\cdot\boldsymbol{\xi}_x
\end{aligned}
\tag{25.77a}
$$

さらに，おのおのの星の静止質量

$$\mu = (p^{\hat{0}2} - p^{\hat{r}2} - p^{\hat{\theta}2} - p^{\hat{\phi}2})^{1/2} \tag{25.77b}$$

は運動の定数である．Vlasoff 方程式の一般解は，そうすると，形式

$$\mathcal{N} = H(E, L_x, L_y, L_z, \mu)$$

をもつ．しかしこの一般解は球対称でない．たとえば，分布関数

$$\mathcal{N} = H(E, \mu, L_z)\delta(L_y)\delta(L_x)$$

は軌道をすべて赤道面 $\theta = \pi/2$（星団内のすべての星に対して $L_y = L_x = 0$）内にもつ星の群に対応する．球状であるためには星団の分布関数は角運動量の大きさ

$$L = ({L_x}^2 + {L_y}^2 + {L_z}^2)^{1/2}$$

のみに依存し，その方向（星の軌道平面の位置づけについてでない）に依存してはならない．こうして，静的で，球状の時空内での Vlasoff 方程式への一般的な球状の解は形式

$$\mathcal{N} = F(E, L, \mu) \tag{25.78}$$

をもたなければならない．

この一般解を用いるには，運動の定数 E, L, μ を合意された，位相空間の座標（t, r, θ, ϕ, $p^{\hat{0}}$, $p^{\hat{r}}$, $p^{\hat{\theta}}$, $p^{\hat{\phi}}$）を用いて再表現しなければならない．星の静止質量は式 (25.77b) によって与えられている．無限遠でのエネルギーは，局所的に測定されたエネルギーを赤方偏移することによって得られる

$$E = -p_0 = e^{\Phi} p^{\hat{0}} \tag{25.79a}$$

赤道面（$p_\theta = p^\theta = p^{\hat{\theta}} = 0$, $L_x = L_y = 0$）内での軌道に対しては，全角運動量は形式

$$L = |L_z| = |p_\phi| = |rp^{\bar{\phi}}| = r\times(\text{4–運動量の “接線” 成分})$$

をもつ．対称性によって，式 $L = r\times(\boldsymbol{p}$ の “接線” 成分）は他の平面における軌道に対しても成り立たなければならない．それは完全に一般的でなければならない

$$L = rp^{\hat{T}} \tag{25.79b}$$

$$p^{\hat{T}} \equiv (\text{4–運動量の接線成分}) = [(p^{\hat{\theta}})^2 + (p^{\hat{\phi}})^2]^{1/2} \tag{25.80}$$

(練習問題 25.9 をみよ).

*44　Einstein の場の方程式を解く前に，ストレス–エネルギーテンソルを式 (25.76b) よりもより明確な形式に帰着することが有用であることがわかる．非対角成分 $T^{\hat{0}\hat{j}}$ および $T^{\hat{j}\hat{k}}$ $(j{\neq}k)$ はすべてゼロになる．なぜならそれらの被積分関数は $p^{\hat{j}}$ の奇関数であるからである．対角成分 $T^{\hat{0}\hat{0}}$, $T^{\hat{r}\hat{r}}$，および $\frac{1}{2}(T^{\hat{\theta}\hat{\theta}}+T^{\hat{\phi}\hat{\phi}})$ に対する被積分関数は，接線運動量平面内で角度 $\Theta\equiv\tan^{-1}(p^{\hat{\phi}}p^{\hat{\theta}})$ によらない．したがって運動量体積要素は

$$dp^{\hat{0}}\,dp^{\hat{r}}\,dp^{\hat{\theta}}\,dp^{\hat{\phi}}\longrightarrow 2\pi p^{\hat{T}}\,dp^{\hat{T}}\,dp^{\hat{r}}\,dp^{\hat{0}}$$

と書き直されうる．変数を $(p^{\hat{T}},p^{\hat{r}},p^{\hat{0}})$ から $(p^{\hat{T}},\mu,p^{\hat{0}})$ へ変え，ここに

$$\mu=[(p^{\hat{0}})^2-(p^{\hat{r}})^2-(p^{\hat{T}})^2]^{1/2}$$

である，そして $p^{\hat{r}}$ の 2 つの値（$\pm p^{\hat{r}}$）は μ のおのおのの値に対応することを認めて，体積要素を形式

$$2\pi p^{\hat{T}}dp^{\hat{T}}dp^{\hat{r}}dp^{\hat{0}}\longrightarrow 4\pi(p^{\hat{T}}\mu/p^{\hat{r}})dp^{\hat{T}}dp^{\hat{0}}d\mu$$

にもってくる．そうすると，$\boldsymbol{T}$ の対角成分 (25.76b) は

$$\begin{aligned}\rho\equiv T^{\hat{0}\hat{0}}&=(\text{質量–エネルギーの全密度})\\&=4\pi\int F(e^{\Phi}p^{\hat{0}},rp^{\hat{T}},\mu)(p^{\hat{0}2}p^{\hat{T}}/p^{\hat{r}})dp^{\hat{T}}dp^{\hat{0}}d\mu\end{aligned}\tag{25.81a}$$

$$P_T\equiv\frac{1}{2}(T^{\hat{\theta}\hat{\theta}}+T^{\hat{\phi}\hat{\phi}})=T^{\hat{\theta}\hat{\theta}}=T^{\hat{\phi}\hat{\phi}}=(\text{接線方向の圧力})\quad[\text{球対称性によって}]\tag{25.81b}$$

$$=2\pi\int F(e^{\Phi}p^{\hat{0}},rp^{\hat{T}},\mu)[(p^{\hat{T}})^3/p^{\hat{r}}]dp^{\hat{T}}dp^{\hat{0}}d\mu$$

$$\begin{aligned}P_r\equiv\ T^{\hat{r}\hat{r}}&=(\text{半径方向の圧力})\\&=4\pi\int F(e^{\Phi}p^{\hat{0}},rp^{\hat{T}},\mu)(p^{\hat{r}}p^{\hat{T}})dp^{\hat{T}}dp^{\hat{0}}d\mu\end{aligned}\tag{25.81c}$$

これらの積分を遂行するときに，$p^{\hat{r}}$ を積分の変数によって表さなければならない．

$$p^{\hat{r}}=[(p^{\hat{0}})^2-(p^{\hat{T}})^2-\mu^2]^{1/2}\tag{25.81d}$$

*45　このストレス–エネルギーテンソルと計量 (25.73) に対する Einstein の場の方程式は，$G^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ に対する表現 (14.43) を用いた後に，そして球状の星（23.5 節）に対する操作に類似した操作の後に，

$$e^{2\Lambda}=(1-2m/r)^{-1},\qquad m=\int_0^r 4\pi r^2\rho\,dr\tag{25.82a}$$

$$\frac{d\Phi}{dr}=\frac{m+4\pi r^3P_r}{r(r-2m)}\tag{25.82b}$$

---

*44　(3) 星による“不鮮明にされた”，ストレス–エネルギーテンソル

*45　(4) 場の方程式の解

に帰着する．

これらの式は，分布関数の仮定された形 $F(E, L, \mu)$ および ρ, P_r および P_T に対する積分とともに，星団の構造を定める．コラム 25.8 はこれらの構造方程式の概観を与え，そして等方的な速度分布に対する構造方程式を詳述する．コラム 25.9 は等温の星団に対する式（切断された Maxwell の速度分布）への解を与え議論する．

[練習問題]

25.27　等方的な星団

角運動量によらない分布関数をもつ群に対して，コラム 25.8 の B.1 から B.6 までの性質を導け．

25.28　自己相似の（self–similar）群［Bisnovatyi–Kogan and Zel'dovich（1969），Bisnovatyi–Kogan and Thorne（1970）をみよ．］

(a) 状態方程式 $P = \gamma\rho$, γ は定数である $(0 < \gamma < 1/3)$，をもつ，無限大の中心密度の球状の星に対する構造方程式についての解を見出せ．

(b) (a) のガス球におけるのと同じ ρ, P, m，および Φ の分布をもつ星団に通ずる，等方的な分布関数 $F(E, \mu)$ を見出せ（コラム 25.8 をみよ）．［答え：

$$P = \gamma\rho = \frac{\gamma^2}{1 + 6\gamma + \gamma^2}\frac{1}{2\pi r^2},$$

$$e^{2\Lambda} = (1 - 2m/r)^{-1} = (1 + 6\gamma + \gamma^2)/(1 + \gamma)^2,$$

$$e^{2\Phi} = Br^{4\gamma/(1+\gamma)}, \qquad B = \text{定数},$$

$$F = A(E/B^{1/2})^{-(1+\gamma)/\gamma}\delta(\mu - \mu_0) = Ar^{-2}(E_{\text{局所}})^{-(1+\gamma)/\gamma}, \qquad A = \text{定数}]$$

25.29　円形軌道をもつ群

すべての星が円形軌道をなして動くことを保証する分布関数の形はどんなものでなければならないか？　この場合についての構造方程式を指定せよ．群内の個々の星の軌道の安定性を，有効ポテンシャル図を用いて解析せよ．もしすべての軌道が安定であるとするならば，分布関数はどんな条件を満たさなければならないか？　[Einstein（1939），Zapolsky（1968）をみよ．]

コラム 25.8 球状星団に対する構造方程式

A. 星団に対する模型をつくるには，以下のように進め

1. 分布関数 $\mathcal{N} = F(E, L, \mu)$ を指定せよ．ここに

$$E = \text{星の無限遠でのエネルギー},$$
$$L = \text{星の角運動量},$$
$$\mu = \text{星の静止質量}$$

2. 線要素

$$ds^2 = -e^{2\Phi}\,dt^2 + e^{2\Lambda}\,dr^2 + r^2\,d\Omega^2$$

の計量関数 $m = \frac{1}{2}r(1-e^{-2\Lambda})$ および Φ に対する以下の 2 つの微積分方程式を解け．

$$m = \int_0^r 4\pi r^2 \rho\,dr,$$
$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r-2m)}$$

ここに

$$\rho = 4\pi \int F(e^{\Phi} p^{\hat{0}}, r p^{\hat{T}}, \mu)[(p^{\hat{0}})^2 p^{\hat{T}}/p^{\hat{r}}]dp^{\hat{T}}\,dp^{\hat{0}}\,d\mu,$$

$$P_T = 2\pi \int F(e^{\Phi} p^{\hat{0}}, r p^{\hat{T}}, \mu)[(p^{\hat{T}})^3/p^{\hat{r}}]dp^{\hat{T}}\,dp^{\hat{0}}\,d\mu,$$

$$P_r = 4\pi \int F(e^{\Phi} p^{\hat{0}}, r p^{\hat{T}}, \mu)(p^{\hat{r}} p^{\hat{T}})dp^{\hat{T}}\,dp^{\hat{0}}\,d\mu,$$

$$p^{\hat{r}} = [(p^{\hat{0}})^2 - (p^{\hat{T}})^2 - \mu^2]^{1/2}$$

ρ, P_T，および P_r に対する積分は $(p^{\hat{0}})^2 - (p^{\hat{T}})^2 - \mu^2 \geq 0$ であるようなすべての正の $p^{\hat{T}}$, $p^{\hat{0}}$, μ にわたる．

B. もし分布関数が角運動量によらないならば，どうなるか

1. $F = F(E, \mu)$.
2. 星団内の各点での星の速度の分布は等方的である．
3. $\rho = 4\pi \int F(e^{\Phi} p^{\hat{0}}, \mu)[(p^{\hat{0}})^2 - \mu^2]^{1/2}(p^{\hat{0}})^2 dp^{\hat{0}} d\mu$.
4. 圧力は等方的である．

$$P_r = P_T \equiv P \equiv \frac{4\pi}{3}\int F(e^{\Phi} p^{\hat{0}}, \mu)(p^{\hat{0}2} - \mu^2)^{3/2} dp^{\hat{0}} d\mu$$

5. 質量–エネルギーの全密度 ρ, 圧力 P, および計量関数 Φ および $m = \frac{1}{2}r(1-e^{-2\Lambda})$

はガス球（"星"）に対する構造方程式を満たす．

$$m = \int 4\pi r^2 \rho \, dr,$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r-2m)},$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(\rho + P)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r-2m)}$$

6. こうして，等方的な速度分布をもつすべての静的な，球状星団に，ρ, P, m および Φ の同じ分布をもつ一義的なガス球が対応する．

7. 逆に［Fackerell（1968）をみよ］，ガス球（ρ, P, m，および Φ に対する星団の構造方程式についての解）が与えられると，つねに同じ ρ, P, m，および Φ をもつ星団を記述する分布関数 $F(E, \mu)$ を見出すことができる．しかしあるガス球に対しては F は位相空間の部分で必ず負であり，こうして非物理学的である．

コラム 25.9　等温星団

A. 分布関数

1. 任意の相対論的な星団で，星と星との時折の接近した遭遇は星団の分布関数を"熱平衡的なものにする"だろうと予期される．これは Boltzmann の分布関数（暗黙に $p^{\hat{0}} = Ee^{-\Phi} < \mu_0$ に対してゼロと仮定されている）をもつ等方的な，球状星団を調べることを暗示する．

$$\mathcal{N} = F(E, L, \mu) = Ke^{-E/T}\delta(\mu - \mu_0) \tag{1}$$

ここに K は規格化の定数であり，T は一定の"温度"である．そして簡単さのために星はすべて同じ静止質量 μ_0 をもつと仮定される．

2. このような星団では，半径 r での観測者は，無限遠でのエネルギー E の星は局所的に測定されたエネルギー

$$p^{\hat{0}} = (\text{静止質量–エネルギー}) + (\text{運動エネルギー}) = \frac{\mu_0}{(1 - \boldsymbol{v}^2)^{1/2}} = Ee^{-\Phi(r)} \tag{2}$$

をもつことがわかる．したがって，星は観測者の近傍で Boltzmann 分布

$$\frac{dN}{d^3\hat{p}\,d^3\hat{x}\,d\mu} = \mathcal{N} = K\exp(-p^{\hat{0}}/T_{\text{局所}})\delta(\mu - \mu_0) \tag{3}$$

をもつ．局所的に測定された温度は

$$T_{\text{局所}}(r) = Te^{-\Phi(r)} \tag{4}$$

である．こうして，星団の温度は光子，粒子，および星団内を動き回る星と恒等的に同じ赤方偏移–青方偏移の影響を受ける（熱平衡にあるガスに対するのとこの同じ温度–赤方偏移の法則の導出に対しては，練習問題 22.7 の（e）をみよ）．

3. 実際，Boltzmann 分布（1）はけっして達成されえない．$E > \mu_0$ をもつ星は重力的に星団から束縛されずに逃れるだろう．Boltzmann 分布は，このような星は $r = \infty$ に向かってすばやく動くとき，同じエネルギーをもつ等しい数の星が $r = \infty$ からすばやく入ってきて不変の分布関数を保持することを仮定する．このような事情は明らかに現実的でない．代わりに，星の脱出は μ_0 よりもわずかに小さいあるエネルギー $E_{\text{最大}}$ で分布を切ると予想される．結果は，理想化された形で，“先端を切られた Boltzmann 分布”

$$\mathcal{N} = F(E, L, \mu) = \begin{cases} Ke^{-E/T}\delta(\mu - \mu_0) & (E < E_{\text{最大}}), \\ 0 & (E > E_{\text{最大}}) \end{cases} \tag{5}$$

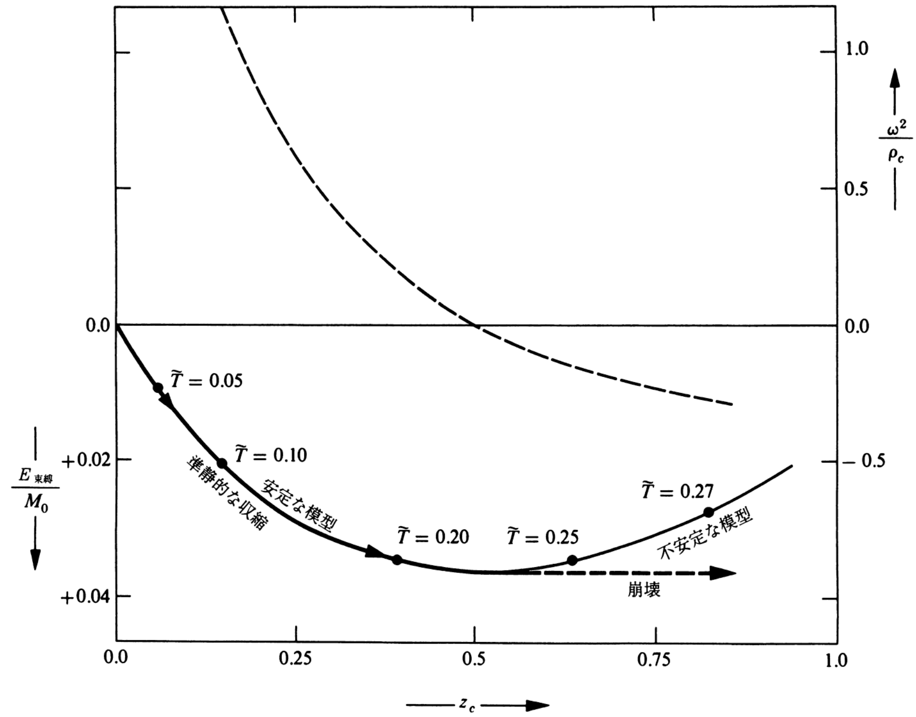
である．

B. 星団模型の構造と安定性

1. 先端を切られた Boltzmann 分布をもつ星団に対する模型は Zel'dovich and Podurets（1965）によって，Fackerell（1966）によって，および Ipser（1969）によって，コラム 25.8 の手続きを用いて構成された．Ipser はこのような星団の衝突をもたない半径方向の振動を解析した．

2. 一般に，これらの星団は 4 個のパラメータ集団（K, T, μ_0, $E_{\text{最大}}$）をつくる．パラメータ K を星団の全静止質量，$M_0 = \mu_0 N$，ここに N は星の総数である，によって置き換えよ．T を単位静止質量あたりの温度，$\tilde{T} = T/\mu_0$ によって置き換えよ．$E_{\text{最大}}$ を単位静止質量あたりの最大エネルギー，$\tilde{E}_{\text{最大}} = E_{\text{最大}}/\mu_0$ によって置き換えよ．そうすると星団は（M_0, $\tilde{T}$, μ_0, $\tilde{E}_{\text{最大}}$）によってパラメータ化される．さて M_0, $\tilde{T}$, μ_0, $\tilde{E}_{\text{最大}}$ を固定したまま，μ_0 を 2 倍にする（こうして星の総数を半分にする）とき，星団のすべての巨視的な特徴は不変にとどまる．この意味において μ_0 は“無意味なパラメータ”であり，今後無視されるかあるいは意のままに変えられうる．星団の全静止質量 M_0 は“スケール因子”とみなされうる．星団のすべての次元をもたない特徴はそれによらない．たとえば，もし ρ_c は質量–エネルギーの中心密度［式 (25.81a), $r = 0$ で求められる］であるならば，$\rho_c {M_0}^2$ は次元をもたず，M_0 によらない，それは $\rho_c \propto {M_0}^{-2}$ を意味する．ただ 2 個の意味のあるパラメータ $\tilde{T}$ および $\tilde{E}_{\text{最大}}$ が残る．

3. 教育的な特別な場合［Zel'dovich and Podurets (1965)］として $\tilde{E}_{\text{最大}} = 1 - \frac{1}{2}\tilde{T}$ をもつ 1 個のパラメータ系列を考えよ．Ipser（1969）によって計算された以下の図は，この系列に対して分数的な結合エネルギー，



$$E_{結合}/M_0 \equiv (M_0 - M)/M_0 \tag{6}$$

を描く (ここに M は全質量–エネルギーである). 衝突のない振動 (振動の振幅 $\propto e^{-i\omega t}$) に対する角振動数の 2 乗を質量–エネルギーの中心密度で割った ω^2/ρ_c, および星団の中心から放出され無限遠で受信された光子の赤方偏移, z_c. すべてのこれらの量は次元をもたない. こうして $\tilde{T} = T/\mu_0$ の選択のみに依存する.

4. 最大の結合エネルギーの点を越えたすべての模型 ($z_c \gtrsim 0.5$) は, 衝突をもたない半径方向の摂動に対して不安定である (ω は虚数である, 摂動の振幅 $\propto e^{|\omega|t}$). わずかに摂動を受けるとき, このような星団は崩壊してブラックホールをつくらなければならない (星における類似の不安定性の解析に対しては 26 章をみよ).

5. これらの結果は球状星団の展開の理想化された説明を提案する [Zel'dovich and Podurets (1965), Fackerell, Ipser, and Thorne (1969)]. 星団は図の構成のような球状の平衡な構成の連続に沿って準静的に展開するだろう. 展開は星の衝突によっておよび星の蒸発によって駆り立てられるだろう. 2 つの星が衝突し合体するときには, 星の静止質量を増大し, したがってその断片的な結合エネルギーを増大する. 星がこのような遭遇から十分なエネルギーを得て星団から逃れるとき, 星は過度の運動エネルギーをもち去り, 星団をより固く束縛された状態に残す. こうして, 衝突も蒸発もともに星団をより固い固い束縛の状態へ駆り立てるはずである. 星団が, このような連続に沿って, 最大の断片的な結合エネルギーの点に達するとき, 星団はもはや準静的に展開できなくなる. 相対論的な重力崩壊が始まる. 星は星団の中心に向かっ

て星団の重力半径を通り過ぎて内方へスパイラル状に進み，後にブラックホールを残し，おそらく，残りの星はブラックホールの周りに軌道を描く．

ある銀河の中核内およびクエーサー（quasar）内での激しい事象はこのような崩壊の始まり，あるいはすでに崩壊している星団（ブラックホール）と周りの星との遭遇と関係しているだろうと推測することは魅力的である．

26章 星の脈動

[本章は完全にトラック–2である．しかし他のどの章にも依存しないし，また他の章のための準備でもない．]

26.1 動　　機

*1 相対論的な天体物理学では，物理学の他の分野と同じように，深い物理学的な興味のある問題の多くは，厳密に解くにはあまりに難しくあまりに複雑である．それらは近似技術を用いてのみ解かれうる．そしてすべての近似技術の中で，もっとも広い適用範囲をもつものは摂動理論である．

摂動計算は典型的に長く，退屈な，そして複雑な数学的表現で満たされている．したがって，摂動計算はこのような教科書に適切でない．にもかかわらず，摂動計算は非常に重要であるので大望をもった天体物理学者は一般相対論における摂動計算を立てて遂行する方法を知っている．したがって，著者は一例を詳細に紹介することを選んだ．

選ばれた例は，非回転の相対論的な星の断熱的な半径方向の脈動である．この例の2つの特徴は注目に値する．(1) この例は教育的であるには十分複雑であるが，紹介するには十分簡単である，(2) 計算の結果で近代の天体物理学にとって非常に重要な相対論的な不安定性（24章をみよ）を認識し，そして定量化することができる．

ここで提供される計算は，相対論的な不安定性の存在を初めて明らかにした Chandrasekhar (1964a,b) の計算にならってつくられている．“極値的なエネルギー”の概念に基づいた，代わりの計算に対しては，Harrison, Thorne, Wakano, and Wheeler (1965) の付録Bをみよ．そして極値的なエントロピーに基づいた計算に対しては，Cocke (1965) をみよ．

26.2 問題の設定

*2 解析されるべき系は，非常に小さい振幅で半径方向に脈動している，完全流体の球である．脈動を解析するには，(a) 球が平衡な構成の周りを脈動している平衡な構成を支配す

---

* 本章の式および数々の他の章の式における多くの誤りを見出し訂正してくれた，Carlton M. Caves 氏に，深く感謝の意を表したい．

*1 本章の存在理由

*2 星の脈動の解析を設定すること

る厳密な方程式，(b) 振動している球に対する座標系（それはゼロの脈動振幅に対して，平衡な球の標準的な Schwarzschild 座標に帰着する)，(c) 脈動を記述する，線形化されるべき小さい関数の組（半径方向の変位および速度，圧力，密度の摂動，および計量係数についての 1 次の変化)，および (d) これらの “摂動関数” の展開を支配する方程式の組，を必要とする．

a. 平衡の構成

*3 平衡な球に対する構造方程式は 23.7 節に要約されたものである．記号を若干変えて，ここでそれらを書き直すことは有用であろう（“摂動されていない構成”を記すのに下つき文字 “0” を使用，すべての式で m の代わりに $\Lambda = -\frac{1}{2}\ln(1-2m/r)$ を使用，r についての微分を記すのにダッシュ（$'$）を使用).

$$ds^2 = -e^{2\Phi_0}dt^2 + e^{2\Lambda_0}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{26.1a}$$

$${\Lambda_0}' = \frac{1}{2r}(1 - e^{2\Lambda_0}) + 4\pi r p_0 e^{2\Lambda_0} \tag{26.1b}$$

$${p_0}' = -(\rho_0 + p_0){\Phi_0}' \tag{26.1c}$$

$${\Phi_0}' = -\frac{1}{2r}(1 - e^{2\Lambda_0}) + 4\pi r p_0 e^{2\Lambda_0} \tag{26.1d}$$

b. 摂動を受ける構成に対する座標

ガス球が半径方向に，すなわち，球対称に脈動する．したがって，その時空幾何学は球状でなければならない．コラム 23.3 で任意の球状の時空に対して， 動的であれあるいは静的であれ，線要素

*4
$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2), \\ \Phi &= \Phi(t,r), \qquad \Lambda = \Lambda(t,r) \end{aligned} \tag{26.2}$$

をもつ Schwarzschild 座標を導入できることが示された．脈動している球に対してこれらの座標を用いる，なぜならそれらは脈動がゼロ振幅をもつとき，摂動を受けない座標に帰着するからである．

c. 摂動関数

摂動が非常に小さい振幅をもつとき，計量係数，Φ と Λ，および熱力学的な変数 p, ρ，および n は流体の静止系で測定されるとき，ほとんど摂動を受けないときの値をもつ．$\delta\Phi, \delta\Lambda, \delta p, \delta\rho$，および δn によって固定された座標位置での摂動を記せ．

*5
$$\begin{aligned} &\Phi(t,r) = \Phi_0(r) + \delta\Phi(t,r), \qquad \Lambda(t,r) = \Lambda_0(r) + \delta\Lambda(t,r), \\ &p(t,r) = p_0(r) + \delta p(t,r), \qquad \rho(t,r) = \rho_0(r) + \delta\rho(t,r), \\ &n(t,r) = n_0(r) + \delta n(t,r) \end{aligned} \tag{26.3a}$$

*3 星の平衡の構成
*4 摂動を受ける構成に対する座標
*5 摂動関数

$\delta\Phi, \delta\Lambda, \delta p, \delta\rho$, および δn の他に，さらに1個の摂動関数が脈動を記述するのに必要とされる．流体の平衡位置からの半径方向の変位 ξ である．

摂動を受けていない構成で座標半径 r に位置した流体要素は，振動している
構成で座標時間 t に座標半径 $r+\xi(r,t)$ に変位する　(26.3b)

脈動の解析を取り扱いやすくするために，すべての方程式は摂動関数 $\xi, \delta\Phi, \delta\Lambda, \delta p, \delta\rho$, および δn について線形化されるだろう．

d. 展開の方程式

*6 摂動関数の時間についての展開は，すべて適切に線形化された，Einstein の場の方程式，エネルギー–運動量の局所的な保存則 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}=0$，および熱力学の法則によって支配されるだろう．ここから先の解析はこれらの方程式を“取り扱いやすい形”に帰着させることに他ならない．もちろん，帰着させることは，どのような形を求めるかを前もって知っているならばもっとも効率的に進むだろう．この計算における，そしてたいていの類似の計算における目標は簡単である．(1) 本当の力学的な自由度（この場合には流体の変位 ξ のみ，波が可能である非球状的な場合には，流体の変位および重力波の振幅）に対する**力学的な方程式**の組を得る，および (2) 残りの摂動関数（この場合には $\delta\Phi, \delta\Lambda, \delta p, \delta\rho$, および δn）を力学的な自由度（ξ）を用いて表す**初期値方程式**の組を得ることである．

26.3　Euler の摂動対 Lagrange の摂動

力学的な方程式および初期値方程式を導く前に，新しい概念，熱力学的な変数についての“Lagrange の摂動”を導入するのが有用である．式 (26.3) の摂動 $\delta p, \delta\rho$, および δn は
*7 p, ρ, および n についての **Euler の摂動**である．すなわち，それらは座標格子における固定点 (t, r, θ, ϕ) に永久に座っている観測者によって測定される変化である．対照的に，
*8 **Lagrange の摂動**—$\Delta p, \Delta\rho$, および Δn—は流体とともに動く観測者によって（すなわち摂動を受けない構成においては半径 r に座っているであろう観測者によって，しかし摂動を受ける構成においては $r+\xi(t,r)$ に座っている観測者によって）測定される変化である．

*9

$$\Delta p(t,r) = p[t, r+\xi(t,r)] - p_0(r) \approx \delta p + p_0{}'\xi \tag{26.4a}$$

$$\Delta\rho(t,r) = \rho[t, r+\xi(t,r)] - \rho_0(r) \approx \delta\rho + \rho_0{}'\xi \tag{26.4b}$$

$$\Delta n(t,r) = n[t, r+\xi(t,r)] - n_0(r) \approx \delta n + n_0{}'\xi \tag{26.4c}$$

---

*6　摂動関数を支配する方程式をいかに導くか
*7　Euler の摂動が定義される
*8　Lagrange の摂動が定義される
*9　Euler の摂動と Lagrange の摂動との間の関係

26.4 初期値方程式

a. バリオンの保存

*10 バリオンの保存則，$\boldsymbol{\nabla}\cdot(n\boldsymbol{u}) = 0$（22.2 節）は，バリオン数についての摂動 Δn および
*11 δn の展開を支配する．発散に鎖則を適用し，関係 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla} n = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} n = dn/d\tau$ を用いることによって，保存則を

$$dn/d\tau = -n(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})$$

↑［流体の世界線に沿う n の微分］

として書き直すことができる．流体とともに動く観測者によって測定される摂動 Δn を用いてこの式は

$$\frac{d\Delta n}{d\tau} = -n(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) \tag{26.5}$$

として書き直される．この式をさらに整理するには，流体の 4–速度に対する表現を必要とする．それは

$$\frac{u^r}{u^t} = \left(\frac{dr/d\tau}{dt/d\tau}\right) = \left(\frac{dr}{dt}\right)_{\text{世界線に沿って}} = \frac{\partial\xi}{\partial t} \equiv \dot{\xi}$$
$$(u^t)^2 e^{2\Phi} - (u^r)^2 e^{2\Lambda} = 1$$

から容易に導かれる．結果は $\xi, \delta\Lambda$，および $\delta\Phi$ について 1 次まで

$$u^t = e^{-\Phi} = e^{-\Phi_0}(1 - \delta\Phi), \qquad u^r = \dot{\xi} e^{-\Phi_0} \tag{26.6}$$

である．これらの成分を式 (26.5) で用い，そして関係

$$\frac{d}{d\tau} = \boldsymbol{u} = u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}u^\alpha)_{,\alpha}$$

を，振動する計量 (26.2) とともに用いて，式 (26.5) を時間積分して，

$$\Delta n = -n_0[r^{-2}e^{-\Lambda_0}(r^2 e^{\Lambda_0}\xi)' + \delta\Lambda] \tag{26.7}$$

とする．**これが力学変数 ξ を用いた Δn に対する初期値方程式である．**以後必要としないであろう δn に対する初期値方程式は，式 (26.4c) と結びつけることによって得られる．

---

*10 初期値方程式の導出
*11 (1) バリオンの摂動 Δn および δn に対して

b. 断熱性

*12　断熱的な振動（近傍の流体要素との間で熱の移動が無視できる）に対して，数密度および圧力の Lagrange 変化は

$$\left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln n}\right)_s \equiv \Gamma_1 = \frac{n}{p}\frac{\Delta p}{\Delta n} \tag{26.8}$$

↑[断熱指数Γ_1の定義]

と関係づけられる．この断熱的な関係を Δn に対する式 (26.7)，および Δp を用いた δp に対する式 (26.4a) と結びつけて，以下の δp **に対する初期値方程式**

$$\delta p = -\Gamma_1 p_0[r^{-2}e^{-\Lambda_0}(r^2 e^{\Lambda_0}\xi)' + \delta\Lambda] - \xi {p_0}' \tag{26.9}$$

を得る．

c. エネルギー保存

*13　エネルギー保存の局所的な法則［熱力学の第一法則，$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T})=0$，22.2節および22.3節をみよ］は

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{(\rho+p)}{n}\frac{dn}{d\tau}$$

を述べる．Lagrange の摂動を用いて書き直すと（$d/d\tau$ は流体とともに動く観測者によって測定されるときの時間微分であることを思い出せ），これは

$$\frac{d\,\Delta\rho}{d\tau} = \frac{\rho+p}{n}\frac{d\Delta n}{d\tau}$$

と解釈される．それは時間積分をして（1次の解析！）

$$\Delta\rho = \frac{\rho_0+p_0}{n_0}\Delta n \tag{26.10}$$

をもつ（積分定数はゼロである．なぜなら，$\Delta n=0$ のとき，$\Delta\rho$ もまたゼロでなければならない）．これを Δn に対する式 (26.7) および $\Delta\rho$ を用いた $\delta\rho$ に対する式 (26.4b) と結びつけると，以下の $\delta\rho$ **に対する初期値方程式**

$$\delta\rho = -(\rho_0+p_0)[r^{-2}e^{-\Lambda_0}(r^2 e^{\Lambda_0}\xi)' + \delta\Lambda] - \xi {\rho_0}' \tag{26.11}$$

を得る．

d. Einstein の場の方程式

*14　Einstein の場の方程式の2つは線形化されるとき，計量摂動 $\delta\Lambda$ および $\delta\Phi$ に対する初期値方程式に帰着する．必要とされる方程式は，直交系

---

*12　(2) 圧力の摂動 Δp および δp に対して
*13　(3) 密度の摂動 $\Delta\rho$ および $\delta\rho$ に対して
*14　(4) 計量摂動 $\delta\Lambda$，および $\delta\Phi$ に対して

$$\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} = e^{\Phi}\boldsymbol{d}t, \qquad \boldsymbol{\omega}^{\hat{r}} = e^{\Lambda}\boldsymbol{d}r, \qquad \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} = r\,\boldsymbol{d}\theta, \qquad \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} = r\sin\theta\,\boldsymbol{d}\phi \tag{26.12}$$

で表すと，$G_{\hat{r}\hat{t}} = 8\pi T_{\hat{r}\hat{t}}$ および $G_{\hat{r}\hat{r}} = 8\pi T_{\hat{r}\hat{r}}$ である．この直交系における Einstein テンソルの成分は練習問題 14.16 で求められ，

$$G_{\hat{r}\hat{t}} = 2(\dot{\Lambda}/r)e^{-(\Lambda+\Phi)} \overset{[\text{線形化される}]}{=} 2r^{-1}e^{-(\Lambda_0+\Phi_0)}\delta\dot{\Lambda} \tag{26.13a}$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = 2(\Phi'/r)e^{-2\Lambda} + r^{-2}(e^{-2\Lambda} - 1) \tag{26.13b}$$

$$\underset{[\text{線形化される}]}{=} (G_{\hat{r}\hat{r}})_0 + 2r^{-1}e^{-2\Lambda_0}\delta\Phi' - 2e^{-2\Lambda_0}(2r^{-1}{\Phi_0}' + r^{-2})\delta\Lambda$$

となる．ストレス–エネルギーテンソルの成分，$T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = (\rho+p)u_{\hat{\alpha}}u_{\hat{\beta}} + p\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ は，4–速度 (26.6)［形 $u_{\hat{0}} = -1, u_{\hat{r}} = \dot{\xi}e^{\Lambda_0-\Phi_0}$ に変換される］を用いて，そして ρ および p に対する表現 (26.3a) を用いて計算されるとき，

$$T_{\hat{r}\hat{t}} = -(\rho_0 + p_0)e^{\Lambda_0-\Phi_0}\dot{\xi}, \qquad T_{\hat{r}\hat{r}} = p_0 + \delta p \tag{26.14}$$

に帰着する．したがって，場の方程式 $G_{\hat{r}\hat{t}} = 8\pi T_{\hat{r}\hat{t}}$ は，—時間について積分して積分定数を，$\xi = 0$ となるときに $\delta\Lambda = 0$ と選んだ後には，

$$\delta\Lambda = -4\pi(\rho_0 + p_0)re^{2\Lambda_0}\xi = -({\Lambda_0}' + {\Phi_0}')\xi \tag{26.15}$$

に帰着する．**これが $\delta\Lambda$ に対する初期値方程式である．**場の方程式 $G_{\hat{r}\hat{r}} = 8\pi T_{\hat{r}\hat{r}}$ は，式 (26.15) を用いて $\delta\Lambda$ を取り除き，そして式 (26.9) を用いて δp を取り除き，そして式 (26.1c) を用いて ${\Phi_0}'$ を取り除いた後には，

$$\delta\Phi' = -4\pi\Gamma_1 p_0 r^{-1}e^{2\Lambda_0+\Phi_0}(r^2e^{-\Phi_0}\xi)' + [4\pi{p_0}'r - 4\pi(\rho_0+p_0)]e^{2\Lambda_0}\xi \tag{26.16}$$

に帰着する．**これが $\delta\Phi$ に対する初期値方程式である．**

26.5 力学的な方程式と境界条件

*15 流体の変位 $\xi(t,r)$ の力学的な展開は，Euler の方程式 (22.13) によって支配される．

$$(\rho+p)\times(4\text{–加速度}) = -(\boldsymbol{\nabla}p\text{ の }\boldsymbol{u}\text{に直交する射影}) \tag{26.17}$$

計量 (26.2) において 4–速度 (26.6) に対応する 4–加速度 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla_u u}$ は，唯一のゼロでない，線形化された共変成分

*15 流体の変位 ξ に対する運動方程式の導出

$$a_r = {\Phi_0}' + \delta\Phi' + e^{2(\Lambda_0 - \Phi_0)}\ddot{\xi}$$

をもつ［成分 a_t は，それが式 (26.1c) をくり返す Euler の方程式に通ずる，という意味において意味がない］．これと $\rho + p = \rho_0 + p_0 + \delta\rho + \delta p$ と，$\boldsymbol{\nabla} p$ の射影に対する半径方向の成分 ${p_0}' + \delta p'$ と，そして流体静力学の平衡のゼロ次の方程式 (26.1c) とを結びつけて，Euler の方程式に対して

$$(\rho_0 + p_0)e^{2(\Lambda_0 - \Phi_0)}\ddot{\xi} = -\delta p' - (\delta\rho + \delta p){\Phi_0}' - (\rho_0 + p_0)\delta\Phi' \tag{26.18}$$

を得る．

この運動方程式は，初期値方程式 (26.9)，(26.11)，および (26.16) を用いて $\delta p, \delta\rho$，および $\delta\Phi'$ を ξ によって表し，それから諸項をゼロ次の構造方程式 (26.1) の助けを借りて広範囲にわたって操作することによって，そのもっとも有用な形に表現される．結果は

$$W\ddot{\zeta} = (P\zeta')' + Q\zeta \tag{26.19}$$

ここに ζ は “規格化された変位関数” であり，そして W, P, Q は平衡の星の構造によって定まる，半径 r の関数である．

$$\zeta \equiv r^2 e^{-\Phi_0}\xi \tag{26.20}$$

$$W \equiv (\rho_0 + p_0)r^{-2}e^{3\Lambda_0 + \Phi_0} \tag{26.21a}$$

$$P \equiv \Gamma_1 p_0 r^{-2} e^{\Lambda_0 + 3\Phi_0} \tag{26.21b}$$

$$Q \equiv e^{\Lambda_0 + 3\Phi_0}\left[\frac{({p_0}')^2}{\rho_0 + p_0}r^{-2} - 4{p_0}'r^{-3} - 8\pi(\rho_0 + p_0)p_0 r^{-2}e^{2\Lambda_0}\right] \tag{26.21c}$$

式 (26.19) は星の脈動を支配する力学的な方程式である［この式は他の形に書き直されうるだろう．たとえば，それは W^{-1} あるいは任意の他のゼロでない因子を掛けることによって得られるだろう．そして諸項は再グループ化されうるだろう．しかし，式 (26.19) で与えられている形が優先される．なぜならそれはコラム 26.1 に示されているように，振動数に対する自己随伴な（self–adjoint）固有値問題に通ずるからである］．

*16 力学的な方程式のすべての解が受け入れられうるとは限らない．物理学的に受け入れられうるには，変位関数は球の中心で無限大でない密度摂動および圧力摂動（$\delta\rho$ および δp）を生み出さなければならない．それは

$$(\xi/r) \text{ は } r \longrightarrow 0 \text{ の極限で有限あるいは } 0 \text{ である} \tag{26.22a}$$

ことを意味する［式 (26.9) および式 (26.11) をみよ］．また，それは星の表面で圧力をゼロに等しくとどめなければならない．それは

$$\Delta p = -\Gamma_1 p_0 r^{-2} e^{\Phi_0}(r^2 e^{-\Phi_0}\xi)' \longrightarrow 0 \quad r \longrightarrow R \text{ のとき} \tag{26.22b}$$

［表面の半径］（R を指す）

を意味する［式 (26.8)，(26.7)，および (26.15) をみよ］．

*16　流体の変位についての境界条件

26.6 結果の要約

*17 もし流体の最初の変位，$\xi(t=0,r)$ が境界条件 (26.22) のもとで指定されるならば，続く展開 $\xi(t,r)$ は力学的な方程式 (26.19) を積分することによって計算されうる．そして圧力，密度，および計量摂動は $\xi(t,r)$ から初期値方程式 (26.9)，(26.11)，(26.15)，および (26.16) を用いて計算されうる．

これらの結果のいくつかの重要な帰結がコラム 26.1 および 26.2 に解説されている．

コラム 26.1 星の規準モードの脈動に対する固有値問題と変分原理

再規格化された変位関数 (26.20) が正弦関数的な時間依存性

$$\zeta = \zeta(r)e^{-i\omega t}$$

をもつと仮定する．

そうすると力学的な方程式 (26.19) および境界条件 (26.22) は角振動数 ω および振幅 $\zeta(r)$ に対する固有値問題に帰着する．

$$(P\zeta')' + Q\zeta + \omega^2 W\zeta = 0 \tag{1}$$

$r \longrightarrow 0$ のとき，ζ/r^3 は有限であるかあるいはゼロである (2a)

$r \longrightarrow R$ のとき，$\Gamma_1 p_0 r^{-2} e^{\Phi_0}\zeta' \longrightarrow 0$ である (2b)

この固有値問題を解くための方法は Bardeen, Thorne, and Meltzer（1966）によってまとめられ，論議されている．1 つの方法（しかし数値計算に対して最善でない）は変分原理である．

$$\omega^2 = \left\{ \frac{\displaystyle\int_0^R (P\zeta'^2 - Q\zeta^2)dr}{\displaystyle\int_0^R W\zeta^2 dr} \right\} \text{ の極値} \tag{3}$$

ここに ζ は境界条件 (2) を満たすすべての関数にわたって変化させられる［たとえば，この変分原理と元の固有値問題との間の同等性の議論に対しては Mathews and Walker（1965）の 12.3 節をみよ］．

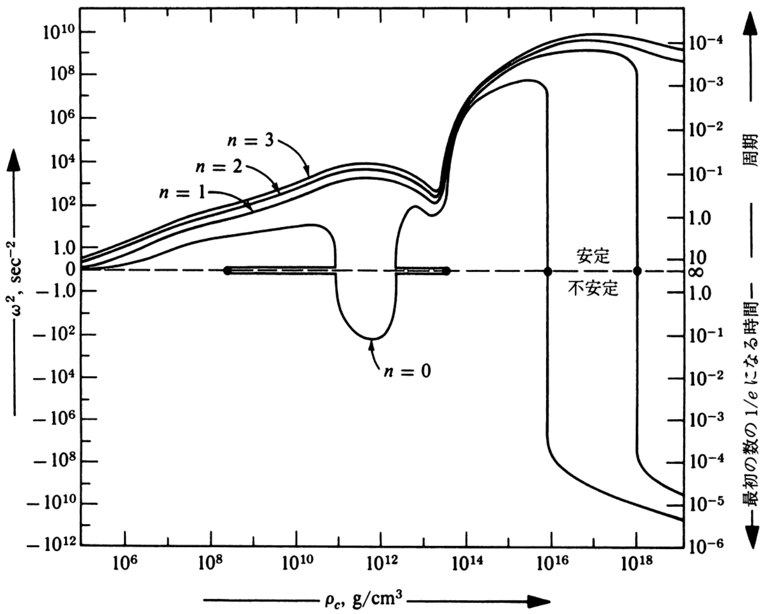
表現 (3) の絶対的な最小値は脈動の基本モードの振動数の 2 乗である．もしそれが負であるならば，星は不安定である（$e^{-i\omega t}$ は時間について指数関数的に増大する）．

---
*17 星の脈動の理論の要約

もしそれが正であるならば，星は断熱的な半径方向の摂動に反して安定である．したがって，表現 (3) の分母は明確に正であるから，

$$\begin{bmatrix}\text{断熱的な半径}\\\text{方向の摂動に}\\\text{反して安定}\end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix}\displaystyle\int_0^R (P\zeta'^2 - Q\zeta^2)dr > 0 & \begin{array}{l}\text{(2) を満たす}\\\text{すべての関数}\\\zeta\text{ に対して}\end{array}\end{bmatrix} \qquad (4)$$

固有値方程式 (1) の数値解によって，脈動振動数は中性子星および超重量星の広い種類の模型に対して計算されている．**例**：図は星の展開の終点での Harrison–Wakano–Wheeler 模型の最低の 4 個の規準モードに対して，脈動振動数の図面を中心密度の関数として与える（図 24.2 との詳細な比較をせよ）．これらの曲線は Meltzer and Thorne (1966) による計算に基づいており，Faulkner and Gribbin (1968) による重い白色わい星の基本モードに対する補正をしてある．



コラム 26.2　ほぼ Newton 的な星に対する臨界の断熱指数

A. 完全に Newton 的な星

1. $\xi = \xi(r)e^{-i\omega t}$ で正弦的に脈動する Newton 的な星に対して，力学的な方程式 (26.19) は

$$[\Gamma_1 p_0 r(\xi/r)']' + 3(\Gamma_1 p_0 \xi/r)' - 4{p_0}'\xi/r + \omega^2 \rho_0 \xi = 0 \tag{1}$$

に帰着する．

2. もし星を通して $\Gamma_1 = 4/3$ ならば，振動の基本モード（ω^2 の最低値をもつモード）に対して物理学的に受け入れられうる解［境界条件 (26.22) を満足する解］は

$$\omega^2 = 0, \qquad \xi = \epsilon r, \qquad \epsilon = 定数 \tag{2}$$

である．こうして，$\Gamma_1 = 4/3$ に対して基本モードは“中性的に安定である”．そして星の状態方程式あるいは構造によらない“相同（homologous）”変位関数をもつ．

3. もし Γ_1 が r に依存する方法で 4/3 からわずかに異なることが許されるならば，$\xi(r)$ は相同形からわずかに異なるだろう．

$$\xi = \epsilon r[1 + r \text{ に依存する大きさ } (\Gamma_1 - 4/3) \text{ の補正}]$$

したがって，もし相同表現 $\xi = \epsilon r$ をコラム 26.1 の変分原理で試行関数として用いるならば，$\mathrm{O}[(\Gamma_1 - 4/3)^2]$ までの精度をもつ ω^2 を得るだろう（試行関数における 1 次の誤差は変分表現の値に 2 次の誤差を生むことを思い出せ）．変分表現［コラム 26.1 の式 (3)］の Newton 的な極限は，試行関数の相同選択で，

$$\omega^2 = (3\bar{\Gamma}_1 - 4)\frac{\displaystyle\int_0^R 3p_0 r^2\,dr}{\displaystyle\int_0^R \rho_0 r^4\,dr} + \mathrm{O}[(3\bar{\Gamma}_1 - 4)^2] \tag{3}$$

となる．ここに $\bar{\Gamma}_1$ は圧力で平均された断熱指数

$$\bar{\Gamma}_1 = \frac{\displaystyle\int_0^R \Gamma_1 p_0 4\pi r^2\,dr}{\displaystyle\int_0^R p_0 4\pi r^2\,dr} \tag{4}$$

である．脈動していない星［式 (39.21b) あるいは練習問題 23.7］に対して Newton のビリアル（virial）定理を用いることによって，式 (3) を形

$$\omega^2 = (3\bar{\Gamma}_1 - 4)|\Omega|/I \tag{5}$$

に変換することができる．ここに，Ω は星自らの重力エネルギーであり，そして $I = \int(\rho_0 r^2)4\pi r^2\,dr$ は星の質量分布の 2 次のモーメントのトレースである（コラム 24.2 および練習問題 39.6 をみよ）．

B. ほぼ Newton 的な星

1. 1次の相対論的な補正（M/R 次の補正）を考慮するが，高次の補正を無視するとき，変分表現［コラム 26.1 の式 (3)］を形

$$\omega^2 = \frac{\displaystyle\int_0^R p_0[\Gamma_1 r^4 \eta'^2 + (3\Gamma_1 - 4)(r^3\eta^2)'](1 + \Lambda_0 + 3\Phi_0)dr - \int_0^R F_0\eta^2\, dr}{\displaystyle\int_0^R \rho_0 r^4(1 + 3\Lambda_0 + \Phi_0 + p_0/\rho_0)\eta^2\, dr} \tag{6}$$

に書き直すことができる．ここに

$$F_0 \equiv 8\pi r^4 p_0\rho_0 + 8rm_0p_0 + \rho_0 {m_0}^2, \qquad \eta = \zeta/r^3 = (\xi/r)(1 - \Phi_0) \tag{7}$$

で，そして $m_0(r)$ は半径 r 内部の平衡質量である．

2. M/R 次の $\Gamma_1 - 4/3$ をもち，そして $M/R \ll 1$ をもつ相対論的な星に対して，相同試行関数 $\xi = \epsilon r$ は依然高度に正確であるだろう．等しく正確で，取り扱いやすいのは，$\xi = \epsilon r e^{\Phi_0} \approx \epsilon r(1 + \Phi_0)$ であるだろう，それは $\eta = \epsilon =$ 定数 に対応する．その微小な誤差は M/R の程度であるだろう．そしてそれが ω^2 に生み出す誤差は $(M/R)^2$ の程度であるだろう．この試行関数を変分原理 (6) に代入しそして M/R 程度の相対論的な補正のみを保持することによって，

$$\omega^2 = 3(\bar{\Gamma}_1 - \Gamma_{1\,\text{臨界}})|\Omega|/I \tag{8}$$

を得る．ここに $\bar{\Gamma}_1$ は圧力で平均された断熱指数である．そして断熱指数の臨界値 $\Gamma_{1\,\text{臨界}}$ は

$$\Gamma_{1\,\text{臨界}} = \frac{4}{3} + \alpha M/R \tag{9}$$

である．α は1程度の正の定数であり，

$$\alpha = \frac{1}{3}\frac{R}{M|\Omega|}\int_0^R \left(3\rho_0\frac{{m_0}^2}{r^2} + 4_{p0}\frac{m_0}{r}\right)4\pi r^2 dr \tag{10}$$

によって与えられる．脈動振動数および断熱指数に対する表現式 (8) および (9) は，超重量星（24.4 節）の理論で重要な役割を演ずる．

3. 上述の結果の他の導出に対しては，Chandrasekhar（1964a,b,1965c），Fowler（1964,1965），Wright（1964）をみよ．

［練習問題］

26.1　ゆるやかに回転する星による慣性系の引きずり

流体球が非常にゆるやかに回転している．その回転を摂動理論を用いて解析せよ．回転の角速度について**線形の**影響および項のみを保持せよ．［ヒント：(1) 遠心力は角速度について 2 次である．したがって，1 次まで星は変形しないので，星の密度および圧力分布は球状で摂動を受けない．(2) 対称性および時間反転の議論によって，

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2] - 2(r^2\sin^2\theta)\omega\, d\phi\, dt \tag{26.23}$$

の座標を導入できることを示せ．ここに

$$\Phi = \Phi(r), \qquad \Lambda = \Lambda(r), \qquad \text{および} \qquad \omega = \omega(r, \theta) \tag{26.24}$$

である．$\Phi = \Phi_0$ および $\Lambda = \Lambda_0$（摂動がない!）を角速度について 1 次まで示せ．(3) 角速度 $\Omega(r, \theta)$ の次の正確な定義を採用せよ．

$$\Omega \equiv u^\phi/u^t = (d\phi/dt)_{\text{流体とともに動いている}} \tag{26.25}$$

$u^r = u^\theta = 0$（すなわち，ϕ 方向についての回転）を仮定して，流体の 4–速度を計算せよ．(4) Einstein の場の方程式を用いて計量摂動 ω に対する微分方程式を角速度 Ω を用いて導け．(5) 星の外部の微分方程式を基本的な関数を用いて解き，$\omega(r, \theta)$ に対する解を遠く離れたジャイロスコープを用いて測定された星の全角運動量 $\boldsymbol{S}$ を用いて表せ（19 章をみよ）.］この問題および関連した題目の本来の解析に対しては，Gurovich（1965），Doroshkevich, Zel'dovich, and Novikov（1965），Hartle and Sharp（1965），Brill and Cohen（1966），Hartle（1967），Krefetz（1967），Cohen and Brill（1968），Cohen（1968）をみよ．

パート VI

宇宙

星を征服して喜びにあふれる読者は，全宇宙を支配することを求める．そして測りがたい神秘，初期の特異性によって挫かれるだろう．

27章
理想化された宇宙論

私の観点からいえば，宇宙論の分野において，もし一般相対論の原理を用いなければ，少なくとももいくらか信頼できる結果に，理論によって，達することはできない．

ALBERT EINSTEIN (1949b, p.684)

27.1 宇宙の均質性と等方性

*1 天文学的な観測は，宇宙は $\sim 10^8$ 光年およびそれ以上のスケールで均質であり等方的であることを明かす．"微小なスケール" の観点をとると，大きさ $\sim$1 光年，$\sim 10^6$ 光年，$\sim 3\times 10^7$ 光年の領域で，それぞれ，星，銀河，銀河団への物質の集団をみる．しかし代わりに "大きいスケール" の観点をとると，地球に中心をもつ 10^8 光年の程度の宇宙の体積要素と，別なところに位置する同じ大きさの他の体積要素との間にほとんど差をみない．

宇宙論は，コラム 27.1 にもっとも簡単な形で要約されているが，第 1 近似として大きいスケールの観点をとる．そして第 2 近似として，滑らかで，大きいスケールの背景の上に摂動として微小なスケールの構造を取り扱う．本章は大きいスケールの，均質な近似を詳細に取り扱う．28 章は元素の原始的な形成，そして宇宙の膨張の間における原始時代のプラズマからの銀河の凝縮のような小さいスケールの現象を考察する．29 章は観測による宇宙論を議論する．

*2 宇宙の大きいスケールの均質性と等方性に対する証拠はいくつかある．(1) 天における銀河の分布，銀河の見かけの大きさおよび赤方偏移の分布に証拠が存在する［たとえば，Hubble (1934b, 1936), Sandage (1972a), Sandage, Tamman, and Hardy (1972) をみよ．しかし均質性からの "階層的な" ずれを要求する論文に注意せよ．Sandage はそれらの論文を引用し均質性を攻撃する］．(2) 天における電波の源の分布の等方性に証拠が存在する［たとえば，Holden (1966)，および Hughes and Longair (1967) をみよ］．(3) 宇宙線のマイクロ波放射の驚くべき等方性に証拠が存在する．［たとえば，Boughn, Fram, and Partridge (1971) をみよ］．証拠の多くのレビューに対しては，Peebles (1971) の 2 章をみよ．

---

*1 宇宙：微小なスケールでの凝縮が大きいスケールでの均質性と対照される
*2 大きいスケールの均質性と等方性に対する証拠

コラム 27.1　宇宙論の概略

一様な密度． 星や原子がいたるところ同じ質量–エネルギーの有効平均密度 ρ で天空を通してちりのように散乱されるものと理想化せよ．

幾何学は均質であり，等方である． 空間の曲率はいたるところ同じであると理想化せよ．

閉包（closure）． “Einstein の幾何学的な重力理論” という術語を，彼の場の方程式 $\boldsymbol{G} = 8\pi\boldsymbol{T}$ のみならず，この方程式の任意の解に課せられる閉包の境界条件 * をも含むものとして受け入れよ．

3–球は均質，等方性，および閉包の 3 つの要求を満たす．そして円および 2–球上の計量の自然な一般化である．

選ばれた次元の球	1 つ高い次元 [a] の Euclid空間にはめ込まれたものとして視覚化される	直交座標から極座標への変換	これらの極座標を用いて表された S^n 上の計量
S^1	$x^2+y^2=a^2$	$x=a\cos\phi$ $y=a\sin\phi$	$ds^2=a^2d\phi^2$
S^2	$x^2+y^2+z^2=a^2$	$x=a\sin\theta\cos\phi$ $y=a\sin\theta\sin\phi$ $z=a\cos\theta$	$ds^2=a^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2)$
S^3	$x^2+y^2+z^2+w^2=a^2$	$x=a\sin\chi\sin\theta\cos\phi$ $y=a\sin\chi\sin\theta\sin\phi$ $z=a\sin\chi\cos\theta$ $w=a\cos\theta$	$ds^2=a^2[d\chi^2+\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2)]$

[a] 球からそれることは物理学的に意味がなく禁止される．余分な次元は，推論を助けるために加えられるのであり，旅行するときの旅行者を助けるために加えられるのでない．一番余分な次元を推論しないものは時間に関係するすべてのものをもつ．

時空幾何学は計量

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)] \tag{1}$$

* “こうしてわれわれは以下の議論を，無限大の空間の概念に反して，制限された空間の，宇宙の概念を提供する”．

“1. 相対性理論の観点から，閉じた曲面に対する条件は，宇宙の無限遠でのほとんど Euclid 的な構造の境界条件よりもはるかに単純である．”

“2. 慣性は物体の相互作用に依存するという，Mach が表現したアイデアは，第 1 近似まで，相対性理論の方程式に含まれている．…しかし Mach のこのアイデアは空間において制限された有限の宇宙にのみ対応する．そしてほとんど Euclid 的な，無限大の宇宙に対応しない” [Einstein (1950), pp.107–108].

宇宙論についての多くの研究者は宇宙の閉包の Einstein の境界条件について懐疑的であり，天文学的な観測がそれを確認するまでこの状態にとどまるだろう．

によって記述される．幾何学の力学は，半径 a を時間 t の関数として知るときに完全に認識される．

Einstein の場の方程式（便宜さのために，2 倍される）$2\boldsymbol{G} = 16\pi\boldsymbol{T}$ は，その $\hat{0}\hat{0}$（あるいは $\hat{t}\hat{t}$）成分に集中された全効力をもつ，

$$\frac{6}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{6}{a^2} = 16\pi\rho \tag{2}$$

[コラム 14.5 の式 (5a)]．Einstein の方程式のこの成分は，Maxwell の方程式の成分 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi\rho$ のように中心的である．それは幾何力学の "初期値方程式" として 21 章トラック–2 に記述されている．そこでは左辺の 2 項は異なる名前を受ける．4–幾何学を通る "空間的な薄片" の "外在曲率" の "第 2 の不変量"（いかに速やかにすべての大きさが瞬間から瞬間へ広げられているかを述べる），そして与えられた瞬間そのものにおける "内在曲率" あるいは "空間的な薄片"（ここでは 3–球）の 3 次元のスカラー曲率不変量 ${}^{(3)}R$ である．

宇宙における質量–エネルギーの量は，瞬間から瞬間へ膨張の間に圧力によってなされた仕事に従って変化する．

$$d\left[(\text{質量–エネルギーの密度})\times(\text{体積})\right] = -(\text{圧力})d(\text{体積}) \tag{3}$$

今日，放射の圧力は質量–エネルギーの密度に比べて無視できる，そしてこの式の右辺（"なされた仕事"）は無視できる．同じことは過去において，大きさが今日よりも約 1,000 倍小さかったときまで戻ると，真実であったと評価される．宇宙膨張のこの "物質が優勢であった位相" の間，積

$$(\text{質量–エネルギーの密度})\times(\text{体積})$$

は一定にとどまった．

$$\rho\cdot 2\pi^2 a^3 = M \tag{4}$$

ここで記号 M は物質の形をした質量のようにみえる．そして質量とよばれうる．しかし閉じた宇宙の全質量–エネルギーという概念はよく定義された意味をもたない．それは，宇宙の外部には，その上に立って Kepler の軌道の周期によってあるいは他の方法で宇宙の引力を測定するような "プラットホーム" が存在しないからである．M よりもさらに好都合なのは，以下でより重要である量 $a_{\text{最大}}$（"最大膨張の位相での宇宙の半径"）であり，

$$a_{\text{最大}} = 4M/3\pi \tag{5}$$

によって定義される．

Einstein の場の方程式の決定的な成分は，この記号を用いて，

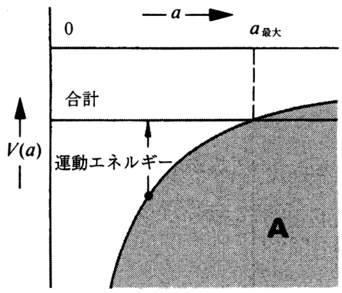
$$\frac{6}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\frac{6}{a^2}=\frac{6a_{最大}}{a^3}$$

あるいは

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2-\frac{a_{最大}}{a}=-1 \tag{6}$$

となる．式 (6) における第 1 項は Newton 力学での基本的な問題の“運動エネルギー”という定性的な特徴をもつ．第 2 項は“ポテンシャルエネルギー”という定性的な特徴をもつ

$$V(a)=-\frac{a_{最大}}{a}$$



それは逆 2 乗の Newton 力から生ずる（図 **A** をみよ）．類推して，右辺の“-1”を Newton の問題における全エネルギーと同一視する．力学の定性的な特徴は図 **A** の調査に現れる．$a_{最大}$ よりも大きい宇宙の半径の値 a は可能でない．もし a が $a_{最大}$ よりも大きくなるとすれば，“ポテンシャルエネルギー”は全“エネルギー”を越えるだろう．そして膨張の“運動エネルギー”は負にならなければならないだろう，それは不可能である．したがって幾何力学的な系はけっして $a=a_{最大}$ よりもさらに膨張した状態になりえない．小さい $a(a\ll a_{最大})$ の状態で出発し，そして膨張して，宇宙はおのおのの a の値に対して完全に明確な da/dt の値をもつ．この膨張速度は膨張が進むにつれて減少する．それは転換点 $a=a_{最大}$ でゼロに落ちる．その後系は再収縮する．

選択肢の不足はこの力学の著しい特徴である．特定量の物質［式 (5) での特定の M の値］が与えられたとすると，自由なパラメータを何でも随意にもつわけにはいかない．$a_{最大}$ の値は存在する物質の量によって一義的に指定され，それ以上の何ものにもよらない．Newton 力学の伝統的な問題に存在したであろう，“調整できるエネルギーの定数”のようなものは存在しない．このような調整できるパラメータが式 (6) に現れる代わりに，固定された数“-1”が現れる．この固定は閉包に束縛された系の決定的な特徴である．空間に存在する岩の集団を取り扱うものとすれば，それらの中心に置かれるダイナマイト，1 個の量についての選択をもつだろう．低い爆発物の装薬量では，岩は限られた距離の間だけ飛び，重力が岩の飛行を止めそして崩壊させて再び一緒になるのがみられるだろう．より多くの装薬では，岩は脱出速度で飛び出しけっして戻らないだろう．しかしこのような選択はここには存在しない，正確に Einstein の閉包の条件が課されているからである．そして一度閉じると，つねに閉じている．宇宙の崩壊は普遍的である．これが簡単な宇宙論の概略である．

この結果に際しての **Einstein の悲しみ**は甚大であった．彼が一般相対論を展開し

た時代には，宇宙の永続性はヨーロッパ哲学における固定された信念の 1 つであった“天は永遠から永遠へ存続する”．しかるに，固定された方程式に通じた推論は，あの方程式あるいはその途方もない予言を変えるべき自然な道を開かずにいた．したがって Einstein (1917) は，彼の意志に大いに反して，想像できるであろう最小の不自然な変化，いわゆる宇宙項 (27.11 節) を導入した．その全目的は宇宙の膨張を避けることであった．10 年後，Hubble (1929) は予言された膨張を確かめた．そこで Einstein は，それを“わが人生の最大の大失敗”[Einstein (1970)] とよんで，宇宙項を放棄した．こうして一般相対論，テスト，および劇的な擁護に対する見かけの矛盾の最初の偉大な一巡りは終わった．いつか創造の神秘を洞察するだろうか？ 宇宙の膨張のような素晴らしい現象を正しく，そして全ての期待に反して予想する人間の力以上に，その問いにいつかイエスと答えることを励ます証拠はない．

“**Newton の宇宙論**”は，Einstein の宇宙論の“エネルギーの方程式”に類似のものを与える．しかし閉包あるいは一義的な定数“-1”に対して，どのような純粋なあるいは決定的な議論を与えることができない．瞬間的な半径 r の空間の任意の基本的な球状の領域内の質量と，この球の境界上の試験粒子の球の中心に向かう重力加速度を考える．こうして，

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{(\text{質量})}{(\text{距離})^2} = -\frac{(4\pi/3)\rho r^3}{r^2} = -\frac{4\pi\rho}{3}r \tag{7}$$

同じ中心をもつ宇宙論的な媒質内に描かれた，さまざまの半径のこのような仮想的な球を考える．半径を 2 倍にすると加速度が 2 倍になることに注意せよ．加速度と距離との間のこの比例性は，宇宙の膨張の一様な減速度と矛盾しない．したがって膨張のパラメータ a^* を現在のこれらの球の任意の 1 つの半径とある規準の瞬間における同じ球の半径との比として定義せよ．こうして $a^* = r/r_0$ は考察されている特別な球によらないと考えられるべきである．$\rho = \rho_0 r_0^3/r^3$ と書け．ここに ρ_0 は規準の瞬間での密度である．ρ に対するこの表現を減速度方程式 (7) に代入し，式の両辺に dr/dt を掛け，積分し，結果を dr/dt に対する方程式から da^*/dt に対する方程式に翻訳せよ．式 (6) と一致して

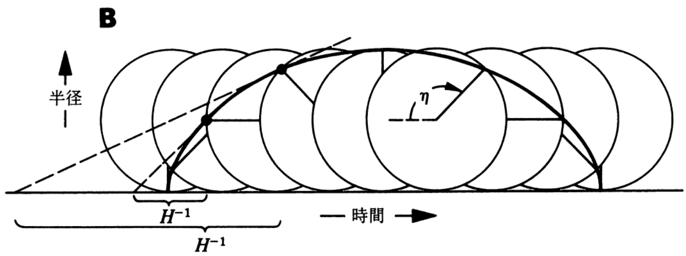
$$\left(\frac{da^*}{dt}\right)^2 - \frac{(8\pi\rho_0/3)}{a^*} = \text{定数} \tag{8}$$

を見出す．ただし，(1) a^* は次元をもたない膨張比であるが，一方 a は cm の次元をもつ絶対的な半径である，(2) ここでは定数は自由に使えるが，一方標準的な Einstein の幾何力学では定数は一義的な規準値“-1”をもつというまったく重要な相違がある．宇宙論への Newton の洞察についてのより多くに対しては，とくに Bondi (1961) をみよ．

Newton 力学によって，Newton 的な引力の中心に向かう粒子の**自由落下**は，“宇宙の半径”a が，引力の中心からの距離 r によって置き換えられるということを除い

て，式 (6) と同じ形のエネルギーの方程式を与える．自由落下のこの問題の解は，直径 $a_{最大}$ の円を直線上でつねに増大する角度 η を通して転がすことによって生成される．サイクロイド（cycloid, 図 **B**，また図 25.3 およびコラム 25.4 をみよ）によって記述される．こうして，

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2}a_{最大}(1-\cos\eta),\\
t &= \frac{1}{2}a_{最大}(\eta-\sin\eta)
\end{aligned}
\tag{9}
$$



現在の宇宙の膨張の割合は今日**ただちに観測可能であり**，すべての距離はその距離の大きさに直接比例する割合で増大している *．

$$
\begin{aligned}
\frac{(\text{銀河の後退速度})}{(\text{銀河までの距離})} &= (\text{Hubble“定数,”}H_0) \sim 55\,\text{km/sec Mpc}\\
&= \frac{1}{18\times10^9\text{yr}}\ \text{あるいは}\ \frac{1}{1.7\times10^{28}\text{cm}}\\
&= \frac{(\text{宇宙そのものの半径の増大率})}{(\text{宇宙の半径})} = \frac{da/dt}{a}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Hubble 時間，$H_0^{-1}\sim18\times10^9$ 年（図に例示されているように，今日観測されている膨張率に基づいて軸とぶつかりゼロになるまで直線的に外挿されている）は，星の進化の割合（$\sim10\times10^9$ 年）から演繹されるときの膨張の始まりまでさかのぼった実際の時間よりも因子 1.5 あるいはそれ以上（コラム 27.3）だけ大きく予言されている．この不等性についての予言と観測との間を満足させる説明は 1940 年代には存在しなかった．当時用いられていた銀河と銀河との間の距離のスケールは因子で 5 以上も短かった．誤差は，遠く離れた銀河の距離を判断するために，強度の標準として用いられる Cepheid 変光星および HII 領域の誤った同定から生じた．直線的に外挿された時間，

* H_0 は，局所的な運動が重要でなく，かつ今日の後退速度と光が放射されたときの後退速度との間の差が重要でない限り，銀河の選択によらないと予言されている．後の条件は距離の必要な測定が認められるに足るほど近接した銀河によってよく満たされている．なぜならそれらの銀河は $z\sim0.1$ あるいはそれ以下の程度の赤方偏移をもつに過ぎないからである（光の放射と地球上でのその受信間のごくわずかな時間の経過，したがって光の放射時と今日との間の後退速度におけるわずかな変化，より完全な解析に対しては 29.3 節およびコラム 29.4 をみよ）．

$$(\text{Hubble 時間}) = \frac{(\text{今日の距離})}{(\text{今日の後退速度})}$$

は，膨張の始まりまでさかのぼると，それに対応して因子で 5 以上も短かった．Hubble 時間は 3×10^9 年の程度に過ぎないことがわかった．この数は明らかに不等式

$$\begin{pmatrix}\sim 3\times10^9\text{年,} \\ \text{Hubble 時間}\end{pmatrix} \geq 1.5 \begin{pmatrix}\sim 10\times10^9\text{年，膨張の始まり} \\ \text{までさかのぼった実際の時間}\end{pmatrix}$$

を破る．それは，図 **B** におけるように，下に曲がらずに，上に曲がる時間の関数としての宇宙の半径に対する曲線を意味する．ある見方では実際の曲線を指数関数的に上がるとみなす提案がなされた．こうして Einstein の標準的な幾何力学の状況のまったく外部に，“物質の連続的な創造の理論” の時代が始まった．この時代は初めて，クラス I および II の星の集団間の区別が認められ，結果として Cepheid 変光星が Badde (1952, 1956) によって正しく同定されたとき，および Sandage (1958) が，Hubble は遠い銀河内の HII 領域を明るい星として誤って同定したのを発見したときに終わった．それから銀河の距離のスケールは正しく設定された．こうして一般相対論，テスト，それから劇的な立証への見かけの矛盾の第 2 の偉大なサイクルは終わった．

見つかっていない物質の神秘は，やがては来るべき最終の判断を伴った疑問およびテストの第 3 のサイクルを記す．それは，もし Einstein の閉包の境界条件が正しいならば，質量–エネルギーの密度は式

$$\rho \geq \rho_H = \frac{3}{8\pi} H_0^2 \tag{11}$$

(“宇宙の幾何学を閉包に曲げるために要求される質量–エネルギーの臨界量”) によって与えられる下限を越えなければならないということが式 (2) から得られる．$H_0 =$ 55km/sec Mpc の Hubble の膨張率は，銀河内に観測される “明るい物質” の $\rho \sim 2\times10^{-31}\,\text{g/cm}^3$ (29.6 節) および銀河間の空間に今日さらに探し求められているものに比べて，

$$\rho_H = \frac{3}{8\pi}\frac{1}{(1.7\times10^{28}\,\text{cm})^2} \qquad \text{あるいは} \qquad \rho_{H,\,\text{慣習}} = 5\times10^{-30}\text{g/cm}^3 \tag{12}$$

の密度の下限を意味する．

宇宙論のより完全な取り扱いは，10,000 あるいはそれ以上の赤方偏移および放射が無視できなかった，そして優勢でさえあった (27.10 節)，今日よりも 10,000 倍も小さい大きさに対応する過去にさかのぼった条件を取り扱う．それはまた，宇宙の幾何学の非等方な振動が全体として［シガー (cigar) からパンケーキ (pancake) へそして再び逆方向への変換に類似した］支配的であったと考えられるであろう (30 章)，さらに以前の条件を熟考する．より広く，それは，宇宙の現在の状態への展開 (28 章) および宇宙の現在の状態と未来への展開 (29 章) を取り上げる．現在の章はこれまで追跡された簡単な標準的宇宙論の根底にある基礎的な仮定を吟味し，そして 27.11 節

はもしこれらの仮定の 1 つあるいは他のものがゆるめられるべきであるとするならば，どのような種類の定性的な変化が生ずるであろうかを吟味する．

[本章の残りは，コラム 27.4 を除いて，トラック–2 である．既述のトラック–2 の材料は以降の準備として必要とされない．しかし 29 章（宇宙の現在の状態と未来への展開）に対する準備として本章の残りが必要とされる．]

27.2 宇宙—流体理想化のストレス–エネルギーの内容

*3 大きいスケールの観点をとることにより，銀河を宇宙を満たす“ガス”の“粒子”として取り扱うことができる．これらの粒子は内部構造（星，球状星団，等）をもっているが，しかしそれを無視する．小さいスケールでの“粒子”団（$\lesssim 3\times10^7$ 光年の大きさの銀河団），を無視する．計算を簡単にするために，“ガス”の微粒子性さえも無視する [希望するならば，運動論的な記述を採用することによって，それを考慮できる．運動論に対しては 22.6 節をみよ，そしてその宇宙論への応用に対しては Ehlers, Green, and Sachs (1968) をみよ]．ガスを完全流体近似で取り扱うことによってガスの粒子的構造を考察から取り除く．こうして，ガスを **4–速度** $\boldsymbol{u}$（近傍の銀河が平均運動をもたないようにみえる観測者の 4–速度）によって，**質量–エネルギーの密度** ρ（4–速度 $\boldsymbol{u}$ をもつ系でみられる質量–エネルギーのならされた密度，これは単位体積内の銀河の静止質量＋運動エネルギーを体積で割ったものを含む），そして**圧力** p（銀河の運動による圧力）によって特徴づける．この“銀河の流体”に対するストレス–エネルギーテンソルはよく知られたもの

$$\boldsymbol{T} = (\rho + p)\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}p \tag{27.1}$$

である．ここに $\boldsymbol{g}$ は計量テンソルである．

*4 天文学的な観測は，銀河の静止質量の密度はそれらの運動エネルギーの密度よりもはるかに大きいことを明らかにする．銀河の—そして銀河内の星の—互いに相対的で，代表的な通常速度は

$$\langle v\rangle \sim 200\,\mathrm{km/sec} \sim 10^{-3} \tag{27.2}$$

*5 である．したがって，運動エネルギーの密度および圧力の，静止質量の密度に対する比は

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{運動エネルギー}}/\rho_{\text{静止質量}} &= \frac{1}{2}\langle v^2\rangle \approx 10^{-6}, \\ p/\rho_{\text{静止質量}} &= \frac{1}{3}\langle v^2\rangle \approx 10^{-6} \end{aligned} \tag{27.3}$$

である．少なくとも，これらは今日の比である．宇宙の一生のごく初期には，条件はまったく異なっていたに違いない．

*3 宇宙における物質の完全流体としての理想化（“銀河の流体”）
*4 今日の宇宙についての大きいスケールでの条件
*5 (1) 星および銀河の運動エネルギーと圧力

*6　質量–エネルギーの全密度 ρ はこうしてきわめてほとんど銀河の静止質量の密度 $\rho_{静止質量}$ である．天文学的な観測は $\rho_{静止質量}$ に対して今日

$$\rho_{静止質量} \gtrsim 2\times10^{-31}\mathrm{g/cm^3} \tag{27.4}$$

を与える（29.6 節をみよ）．

*7　宇宙内のすべての物質は銀河内で結ばれているわけでない．宇宙線にも物質が存在し，質量–エネルギーの平均化された密度

$$\rho_{宇宙線} \lesssim 10^{-33}\mathrm{g/cm^3} \tag{27.5}$$

*8　をもつ．そして，おそらく，銀河系間の空間に

$$\rho_{銀河系間} \lesssim 10^{-28}\mathrm{g/cm^3} \tag{27.6}$$

をもつガスが存在する［より鋭く $\rho_{銀河系間}$ を説明することは今の宇宙論の研究のもっとも重要なゴールの 1 つである．1971 年段階でのこの問題のレビューに対しては，Peebles (1971) における "宇宙の平均質量密度", pp.56–120 をみよ］．質量密度のこれらの源，および関連した圧力を，銀河とともにストレス–エネルギーテンソル (27.1) をもつ，"宇宙論的な流体" にひとまとめにすることができる．

*9　宇宙におけるすべてのストレス–エネルギーは物質の形であるとは限らない．ほとんど確かに極限

$$\rho_{磁場} \lesssim 10^{-35}\mathrm{g/cm^3} \tag{27.7}$$

*10　を越えない平均エネルギー密度をもつ磁場も存在する（$B_{平均} \lesssim 10^{-6}G$ に対応する）．そして放射（電磁気的な放射，ニュートリノ放射，そしてたぶん重力放射）を総計して，

$$\rho_{放射} \approx 10^{-33}\mathrm{g/cm^3} \tag{27.8}$$

を評価する．磁場は本章で無視されるだろう．磁場は，おそらく宇宙の "ビッグバンの始まり" のごく近くを除いて—もしそれらが存在したとして，大きいスケールの宇宙論に対して重要でない．しかし，放射は無視できない，なぜなら放射は決定的な役割を演ずるからである．

*11　放射密度の多くは "宇宙線のマイクロ波放射" の形をしている．それは Penzias and Wilson (1965) によって発見された［また Dicke, Peebles, Roll, and Wilkinson (1965) をみよ］．そしてそれ以来詳細に研究されてきた［レビューについては Partridge (1969)

---

*6　(2) 銀河内の質量の密度
*7　(3) 宇宙線の密度
*8　(4) 銀河系間のガスの密度
*9　(5) 磁場
*10　(6) 放射密度
*11　宇宙線のマイクロ波放射

をみよ]．証拠は非常に強く，この宇宙線のマイクロ波放射は宇宙のビッグバンの始まりの遺物である．この解釈はここで受け入れられるだろう．

宇宙線のマイクロ波放射はまさに，もし地球が温度 2.7 K をもつ箱（“黒体空洞”）の内部に入れられているとすれば予期されるであろう形をもつ．スペクトルはこの温度をもつ Planck スペクトルであり，放射は等方的である [Boughn, Fram, and Partridge (1971)]．したがって，その圧力および質量–エネルギーの密度は公式，

$$\begin{aligned}\rho_{\text{マイクロ波}} &= 3p_{\text{マイクロ波}} = aT^4 \\ &= 4\times10^{-34}\text{g/cm}^3\end{aligned} \tag{27.9}$$

によって与えられる．

熱力学的な考察（27.10 節）は，宇宙はまた，近似的に同じ温度（$\sim$3 K）での Planck スペクトルをもつ，ニュートリノ放射およびおそらく重力放射で満たされているはずであることを提案する．しかし，それらは今日の技術で見つけられえない．

高い精度まで（$\lesssim$300 km/sec），地球近くの宇宙線のマイクロ波放射の平均的な静止系は，地球の近傍における銀河の平均的な静止系と同じである [Boughn, Fram and Partridge (1971)]．したがって，放射は物質とともに，理想化された宇宙論的な流体に含まれうる．

*12 **要約**：大きいスケールの観点から，宇宙のストレス–エネルギーは 4–速度 $\boldsymbol{u}$，質量–エネルギーの密度 ρ，圧力 p，およびストレス–エネルギーテンソル

$$\boldsymbol{T} = (\rho + p)\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} + p\boldsymbol{g} \tag{27.10}$$

をもつ完全流体として理想化されうる．時空内の与えられた事象 $\mathcal{P}$ での 4–速度 $\boldsymbol{u}$ は $\mathcal{P}$ 近くの銀河の平均 4–速度である．それはまた宇宙線のマイクロ波放射に対する等方的な強度を測定するために動かなければならない観測者の 4–速度である．密度 ρ は物質密度（銀河の静止質量＋無視できる運動エネルギー，宇宙線の静止質量＋運動エネルギー，銀河系間のガスの静止質量＋熱エネルギー—すべて単位体積にわたって “不鮮明にされている”），そしてまた放射（電磁気的な放射，ニュートリノ放射，重力放射）のエネルギー密度からつくられている．圧力 p は，密度 ρ のように，物質と放射の両方による．今日物質の圧力はその質量–エネルギーの密度よりもはるかに小さい，

$$p_{\text{物質}} \ll \rho_{\text{物質}} \qquad (\text{今日}) \tag{27.11a}$$

しかしこの強い不等式は遠い過去には成り立ちえなかった．つねに放射の圧力はその質量–エネルギー密度の 1/3 である．

$$p_{\text{放射}} = \frac{1}{3}\rho_{\text{放射}} \qquad (\text{つねに}) \tag{27.11b}$$

*12 宇宙における物質の流体理想化の要約

27.3　均質性と等方性の幾何学的な暗示

本章は，宇宙は完全に均質で等方であると理想化するだろう．この理想化は時空の幾何学に，そして時空を通る宇宙論的な流体運動に厳しい制限を課す．これらの制限を見出すために，均質性と等方性の概念に正確な数学的意味をまず与えなければならない．

均質性は，大ざっぱに言えば，宇宙は与えられた時間の瞬間にいたるところで同じであることを意味する．与えられたどの時間の瞬間？　誰の時間？　これが研究者の求める決定的な質問である．

*13 Newton の理論では “与えられた時間の瞬間” という概念についてあいまいさは存在しない．特殊相対論では同時性が普遍的でないゆえに若干のあいまいさが存在する．しかしひとたび慣性基準系が指定されてしまうと，概念は正確になる．一般相対論では大域的な慣性系は存在しない（時空が平坦でなければ）．したがって “与えられた時間の瞬間” という概念は完全に曖昧である．しかし，他のより一般的な概念がそれにとってかわる．3 次元の空間的な超曲面の概念である．この超曲面は時空における自然な対称性のために，超曲面に注意を課せるだろう．あるいは超曲面は研究者の思いつきあるいは好都合さで選ばれるだろう．研究者は他のところよりもここおよびそこで時空を調べ，そしてそれに応じて超曲面を前方に押し進めるのをより好都合と見出すだろう（“多くの指をもつ時間”，一般相対論の部分である時間の劇的に新しい概念）．空間的な超曲面上の各事象で，局所 Lorentz 系が存在し，その同時性の面が，局所的に超曲面と一致する．もちろん，この Lorentz 系はその 4–速度が超曲面に直交する Lorentz 系である．超曲面上の種々の事象でのこれらの Lorentz 系は，大域的な慣性系をつくるようには噛み合わない．しかしそれらの同時性の面は空間的な超曲面そのものをつくるべく噛み合うのである．

直感的な文句，“与えられた時間の瞬間に” は，一般相対論では，正確な文句 “与えられた空間的な超曲面上で” に翻訳される．研究者はさらに進むことができる．研究者は全時空幾何学をこのような空間的な曲面の “1 パラメータ群” によって “薄く切り取る” ことができる．研究者は 1 つのこのような薄片を次の薄片から区別するパラメータに “時間” という名前を与えることができる．このような時空を通る薄片の 1 パラメータ群は 42 章の Regge 計算法で要求されない．しかし，このような “薄切り” は宇宙の幾何学の力学を解析することに対して，多くの他の実用的な方法において不可欠のものである（21, 30, および 43 章）．薄切りの選択は力学的な解析の困難を解消し去るかもしれないし，あるいはそれらの困難をたんに認識するだけかもしれない．“時間の瞬間” の連続する薄片は単純さで輝くだろうし，あるいは力学に対して合法的な簿記に苦しめられるだけであるだろう．どれが真相であるかは代表的な空間的な超曲面が自然な対称性によって区別されるか，あるいは代わりに，任意に描かれるかどうかに依存する．

*14 **宇宙の均質性は，そうすると，宇宙内の各事象を通して空間的な “均質性の超曲面”**（こ

---

*13　“時間の瞬間” の一般化としての空間的な超曲面
*14　“宇宙の均質性” が空間的な超曲面によって定義される

の超曲面上のすべての事象で同一の物理学の条件）**がそこを通過することを意味する．**この超曲面上の各事象で，密度 ρ，および圧力 p，は同じでなければならない．そして時空の曲率は同じでなければならない．

等方性の概念もまた正確にされなければならない．明らかに，宇宙はすべての観測者にとって等方的にみられえない．たとえば，10^{20}eV の宇宙線に乗っている観測者は，宇宙の物質が一方向から自分に向かって突進してきて反対方向に後退していくのをみるだろう．宇宙論的な流体とともに動いている観測者のみが，多分物事を等方的とみることができる．等方性を定義するにはこのような観測者を考える．

*15 **宇宙の等方性は，任意の事象において，“宇宙論的な流体とともに動いている”観測者が彼の空間方向の 1 つを他の空間方向から任意の局所的な測定によって区別できない，ことを意味する．**

宇宙の等方性は実際均質性を意味する．このことについては，基本的な推論によって確信できる（練習問題 27.1）．

*16 **等方性は宇宙論的な流体の世界線が均質性の各超曲面に直交することを保証する．**これは次のようにしてわかる．“流体とともに動いている”観測者は物理学的な測定によって，与えられた事象を通して，どの超曲面上で条件が均質であるかを見出すことができる．さらに，彼はその超曲面に相対的な彼自身の通常の速度を測定できる．もしその通常の速度がゼロでないならば，それは観測者に彼の静止系で 1 つの空間方向をすべての他の空間方向から区別する方法を与える—等方性の破れにおいて．こうして“流体とともに動いている観測者”の概念が意味をもつ等方的な宇宙においては，おのおののこのような観測者は彼が均質性の超曲面に相対的に静止していることを見出さなければならない．彼の世界線はその超曲面に直交している．

[練習問題]

27.1 等方性は均質性を意味する

基本的な思考実験を用いて宇宙の等方性は均質性を意味することを示せ．

27.4 宇宙に対する共運動（comving），同時の座標系

*17 前節の結果は等方的な模型宇宙の時空多様体に特別な座標系を設置することを可能にする（図 27.1）．均質性の超曲面 $\mathcal{S}_I$ を選べ．その上のすべての事象に座標時間 t_I を指定せよ．任意の望む方法で，空間座標の格子 (x^1, x^2, x^3) を $\mathcal{S}_I$ 上に敷設する．これらの座標を

*15 “宇宙の等方性”が定義される

*16 等方性は均質的な超曲面に直交する流体の世界線を意味する

*17 宇宙に対する“共運動，同時の”座標系の構成

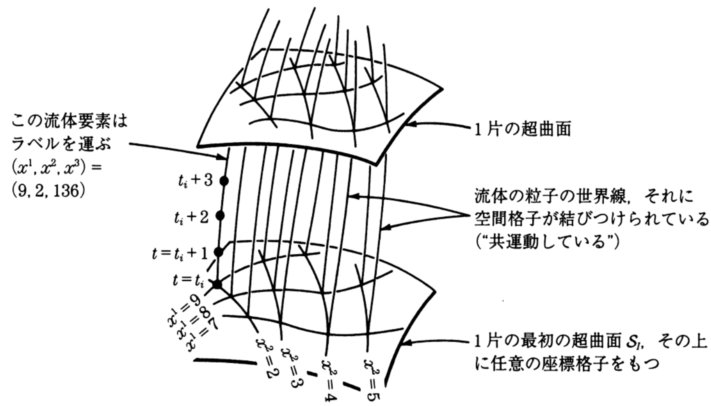


図 27.1　本文の 27.4 節で構成されているように，宇宙に対する共運動の同時の座標系．このような座標系の主要な特徴は以下のようである（27.4 および 27.5 節をみよ）．(1) 空間座標は流体とともに動く，そして時間座標は流体の世界線に沿う固有時間である．すなわち，特別な流体の世界線の座標記述は

$$(x^1, x^2, x^3) = \text{一定}, \quad x^0 \equiv t = \tau + \text{定数}$$

［世界線に沿って測定される固有時間］（τ を指す）

(2) 一定の座標時間の任意の曲面は，宇宙の均質の超曲面である．すべてのこのような超曲面は流体のすべての粒子の世界線に直交する．(3) ある最初の超曲面 $\mathcal{S}_I$ 上の空間格子は完全に任意である．(4) もし $\gamma_{ij}\, dx^i dx^j$ が任意の座標によって最初の超曲面上の計量であるならば（γ_{ij} は x^1, x^2, x^3 の関数である），時空の計量は共運動の同時の座標系によって

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}\, dx^i dx^j$$

である．こうして，宇宙の幾何学の全力学は時間の 1 個の関数，$a(t) =$ “膨張因子” に組み込まれている．他方では均質の超曲面の形（しかし大きさでない）は空間の 3–計量 $\gamma_{ij}\, dx^i dx^j$ に組み込まれている．

$\mathcal{S}_I$ を離れ，全時空を通して宇宙論的な流体の世界線によって “伝播させよ”．とくに，与えられた世界線上のすべての事象にその世界線が $\mathcal{S}_I$ を横切る 空間座標 (x^1, x^2, x^3) を割り当てよ．この割り当ては簡単な結果をもつ．流体はつねに空間座標に相対的に静止している．言い換えれば，**空間座標は “共運動” している**．それらはたんに流体の世界線に対するラベルである．与えられた事象 $\mathcal{P}$ の時間座標 t に対して，$\mathcal{P}$ を通過する流体の世界線に沿って測定されたときに，$\mathcal{P}$ の $\mathcal{S}_I$ からの固有時間の経過 $\int d\tau + t_I$（最初の超曲面 $\mathcal{S}_I$ 上の “時間の基準”）を用いよ．こうして，

$$t(\mathcal{P}) = t_I + \left(\int_{\mathcal{S}_I}^{\mathcal{P}} d\tau\right)_{\text{流体の世界線に沿って}} \tag{27.12}$$

このような座標系の面 $t =$ 一定 は，宇宙の均質性の超曲面と一致するだろう．このことは異なる世界線に沿って流体とともに動く 2 人の異なる観測者，A および B によってなされる観測に注意を集中することによってわかる．座標時間 t_I（S_I 上の）に，宇宙は B に対しても A に対するのと同じくみえる．A および B の時計が同じ時間間隔 $\Delta\tau$ を刻んだ後に，彼らに再び観測をさせよ．最初の超曲面 S_I の均質性，および Einstein の場の方程式の決定論的な性質は，A および B は再び同一の物理学をみるだろうことを保証する（$\mathcal{S}_I$ 上の同一の初期条件および同一の固有時間の経過，その間に Einstein の方程式が A および B の近くで宇宙の進化を支配することは同一の最終条件を保証する）．したがって，時間経過 $\Delta\tau$ の後に，A および B は再び均質性の同じ超曲面上にある—始まったときの $\mathcal{S}_I$

とは異なる超曲面とはいえ．座標時間の定義 (27.12) によって，B の世界線とこの新しい超曲面との交わりでの時間座標は $t = t_I + \Delta\tau$ である．そして A に対しても同様である．さらに，観測者 A および B は任意であった．したがって均質性の新しい超曲面は，$\mathcal{S}_I$ のように，一定の座標時間の超曲面である．Q.E.D.

均質性の超曲面は $t =$ 一定 によって与えられるゆえに，任意の与えられた事象 $\mathcal{P}$ での基底ベクトル $\partial/\partial x^i$ はその事象を通過する均質性の超曲面に接する．他方，時間基底ベクトル $\partial/\partial t$ は $\mathcal{P}$ を通る流体の世界線に接する．なぜならその世界線は自らに沿って $x^i =$ 一定をもつからである．したがって，世界線の超曲面への直交性は $\partial/\partial t$ の$\partial/\partial x^i$ への直交性を保証する．

$$(\partial/\partial t)\cdot(\partial/\partial x^i) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3 \text{ に対して}) \tag{27.13a}$$

時間座標は他の特別な性質をもつ．それは流体の世界線に沿って固有時間の経過を測定する．そして，$\partial/\partial t$ は世界線に接するがゆえに，

$$\begin{aligned}\partial/\partial t &= (d/d\tau)_{\text{流体の世界線に沿って}} \\ &= \boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{27.13b}$$

ここに $\boldsymbol{u}$ は “宇宙論的な流体” の 4–速度である．4–速度はつねに単位長をもつ．

$$(\partial/\partial t)\cdot(\partial/\partial t) = -1 \tag{27.13c}$$

条件 (27.13a), (27.13c) は共運動の座標系 ［ここに $g_{\alpha\beta} \equiv (\partial/\partial x^\alpha)\cdot(\partial/\partial x^\beta)$］ で，時空に対する線要素は

*18

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{27.14}$$

となる．

線要素がこの形をとる任意の座標系は **“同時 (synchronous)”** であると言われる．(1) 座標時間 t は一定の x^i の線に沿う固有時間を測定する（すなわち，$g_{tt} = -1$）ゆえに，そして (2) 曲面 $t =$ 一定 は $x^i =$ 一定 ［すなわち，$g_{ti} = (\partial/\partial t)\cdot(\partial/\partial x^i) = 0$］ で動く観測者に対して（局所的に）同時性の曲面であるゆえに，それはまた “Gauss の規準座標系” とよばれる（図 21.6 をみよ）．

均質性の超曲面 $t =$ 一定 は，$dt = 0$ をもつ式 (27.14) によって記述される空間の 3 次元幾何学をもつ．

$$\begin{aligned}(ds^2)_{\text{均質性の超曲面上で}} &= d\sigma^2 \\ &= [g_{ij}]_{t=\text{一定}} dx^i dx^j\end{aligned} \tag{27.15}$$

これらのおのおのの超曲面の上の 3–幾何学についてのすべてを知ることは，時空の幾何学についてのすべてを知ることである．

*18 この座標系における線要素の形

[練習問題]

27.2　同時座標一般

任意の時空多様体で（必ずしも均質あるいは等方でない），最初の空間的な超曲面 $\mathcal{S}_I$ をとり，その上に任意の座標格子を置き，それに直交する測地線の世界線を追い出し，そしてこれらの世界線に座標

$$(x^1, x^2, x^3) = 一定, \qquad x^0 \equiv t = t_I + \tau$$

を与える．ここに τ は世界線に沿う固有時間であり，$\mathcal{S}_I$ 上で $\tau = 0$ で始まる．この座標系で計量は，同時性の（Gauss 的な規準）形式 (27.14) をとることを示せ．

27.5　膨 張 因 子

均質性の超曲面のおのおのの 3–幾何学 $d\sigma^2 = g_{ij}(t, x^k)dx^i dx^j$ を定めるために，問題を 2 つの部分に分けよ．(1) 任意の最初の超曲面上の 3–幾何学の性質（次の節で取り扱われる），および (2) 時間が経過するにつれて，すなわち，注意が最初の超曲面から次の超曲面へ，そして次の, そして次の, …（本節で取り扱われる）と動くにつれての，3–幾何学の展開である．

*19 最初の 3–幾何学，すなわち，最初の超曲面 $\mathcal{S}_I$ 上で，計量の空間部分についての係数，

$$\gamma_{ij}(x^k) \equiv g_{ij}(t_I, x^k) \tag{27.16}$$

をその超曲面の任意のしかし明白に選ばれた座標系について知っていると仮定せよ．計量係数 $g_{ij}(t, x^k)$ は, 他の均質性の超曲面上でどのような形をもつだろうか？　この質問は以下の議論によって容易に答えられる．座標 (x^1, x^2, x^3) および $(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3)$ をもつ，宇宙論的な流体の 2 つの隣接した世界線，$\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ を考えよ．時間 t_I に（曲面 $\mathcal{S}_I$ 上で）それらは固有距離

$$\Delta\sigma(t_I) = (\gamma_{ij}\Delta x^i \Delta x^j)^{1/2} \tag{27.17}$$

だけ分離される．ある後の時間 t（曲面 $\mathcal{S}$ 上で），それらはある他の固有距離 $\Delta\sigma(t)$ だけ分離されるだろう．時空の等方性は分離の比 $\Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_I)$ は $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への方向によらないだろう（流体のずれ運動は存在しない）ことを保証する．任意の与えられた方向に対して，小さい分離の追加は $\Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_I)$ は $\Delta\sigma(t_I)$ によらないだろうということを保証する．こうして $\Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_I)$ は与えられた世界線の近くで世界線のすべての対に対して

*19　大域的な“膨張因子”を除けば，宇宙におけるすべての均質な超曲面は同じ 3–幾何学をもつという証明

同じでなければならない．最後に，均質性はこのスカラー比は最初の曲面 $\mathcal{S}_I$ 上で位置によらないだろう—すなわち，x^1, x^2, x^3 によらない．$a(t)$ はこの空間的に一定な比，

$$a(t) \equiv \Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_I) \tag{27.18}$$

であると定義する．こうして，$a(t)$ は，どれだけ世界線の分離が時間 t_I と時間 t との間に膨張するかの因子である．言い換えれば，関数 $a(t)$ は宇宙の "**膨張因子**"，あるいは "**スケール因子**" である．

式 (27.17) および (27.18) を結びつけることによって，隣接する世界線の時間 t における分離に対して

$$\Delta\sigma(t) = a(t)[\gamma_{ij}(x^k)\,\Delta(x^i)\,\Delta(x^j)]^{1/2}$$

を得る．これは時間 t における空間の計量，

$$d\sigma^2 = a^2(t)\gamma_{ij}(x^k)dx^i dx^j \tag{27.19}$$

および時空計量，

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}(x^k)dx^i dx^j \tag{27.20}$$

に対応する．

係数 $\gamma_{ij}(x^k)$ は最初の超曲面の形のみならず，すべての他の均質性の超曲面の形を記述することに注意せよ．1 つの超曲面から次の超曲面へ，幾何学において変化するすべてのものは距離のスケールである．空間の格子点（流体の世界線）の間のすべての距離は，超曲面の形を不変にとどめて，同じ因子 $a(t)$ によって膨張する．

"宇宙の膨張" のすべての悩ましい暗示の中で，初めて出会う数々の学生にとって，このアイデアの無意味さ以上に混乱させるものはない．宇宙は膨張し，1 つの銀河団と他の銀河団との間の距離は膨張し，太陽と地球との間の距離は膨張し，メートル棒の長さは膨張し，原子は膨張する？ そうすると，そもそも膨張について語ることは，いかなる意味をつくりえるか？ 何に対する膨張？ 無意味に対する膨張か！ 後になって初めて，学生は原子は膨張しない，メートル棒は膨張しない，太陽と地球の間の距離は膨張しないことを理解する．銀河団の間の距離およびさらに大きい距離のみが膨張を受ける．この巨大な平均のスケールにおいてのみ，均質性の概念は意味をなす．より小さい距離ではそうでない．ペニー（penny, 1 セント硬貨）をそれぞれ 1 滴のにかわで貼りつけられたゴム風船以上に素早く実状を例示する模型はない．風船がふくらまされるにつれて（図 27.2），ペニーは互いの分離を増大させるが，1 個のペニーは膨張しない！［数学的な詳細に対しては，たとえば，Noerdlinger and Petrosian（1971）をみよ．］[20]

[20] 宇宙において膨張するもの，および膨張しないもの

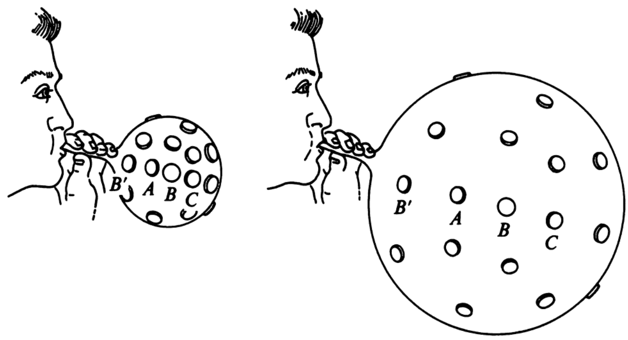


図 27.2　宇宙の膨張に対する模型としての 1 セント硬貨で覆われている風船の膨張．おのおのの 1 セント硬貨 A は，それ自身が膨張の中心であると考えて十分よいだろう．なぜなら A から任意の近傍 B あるいは C への距離は，その近傍が離れ始めるとますます増大する（“Hubble の関係”）からである．1 セント硬貨そのものは膨張しない（太陽–地球間の距離の一定，メートル棒の膨張はない，原子の大きさの増大はない）．銀河と銀河間の今日の間隔（$\sim 10^6$ 光年）は，銀河の代表的な次元（$\sim 10^5$ 光年）の大ざっぱに 10 倍である．

[練習問題]

27.3　膨張因子における任意性

膨張因子 $a(t)$ の定義に，どれだけの任意性が存在するか？　文明 A は大昔の時間 t_A に始まった．それに対して，膨張因子は

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{時間 } t \text{ において“宇宙論的な流}\\ \text{体” の 2 個の粒子間の固有距離}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{時間 } t_A \text{において同じ 2}\\ \text{個の粒子間の固有距離}\end{pmatrix}} = a_A(t)$$

である．続いて近傍の銀河内の惑星上に文明 B を時間 t_B に建設した [この時間に，膨張因子 a_A は値 $a_A(t_B)$ をもった]．文明 B は自らの始まりの時間に相対的に膨張因子

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{時間 } t \text{ において“宇宙論的な流}\\ \text{体” の 2 個の粒子間の固有距離}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{時間 } t_B \text{において同じ 2 個}\\ \text{の粒子間の固有距離}\end{pmatrix}} = a_B(t)$$

を定義する．両方の文明が気づいている 2 つの続いて起こる事象 C および D において，両方の文明はそれらの簿記における宇宙にけっして同一の膨張因子を割り当てない．

$$a_A(t_C) \neq a_B(t_C),$$
$$a_A(t_D) \neq a_B(t_D)$$

模型宇宙の段階 C から段階 D へ通過する際の相対的な膨張は，それにもかかわらず 2 つの簿記の系において同じであることを示せ．

$$\frac{a_A(t_D)}{a_A(t_C)} = (C \text{ から } D \text{ への相対的な膨張}) = \frac{a_B(t_D)}{a_B(t_C)}$$

27.6 均質性の超曲面に対する可能な 3–幾何学

さて，任意の最初の超曲面 $\mathcal{S}_I$ に対する 3–幾何学 $\gamma_{ij}\,dx^i\,dx^j$ に向かう．この 3–幾何学は均質等方でなければならない．その 3 次元 Riemann 曲率の厳密な吟味は $\mathcal{S}_I$ 上の 1 点を任意の他の点から区別したり，あるいは与えられた点で 1 方向を任意の他の方向から区別
*21 すべき "取り手(handle)" を与えてはならない．"取り手がない" ということは ${}^{(3)}\boldsymbol{Riemann}$ は代数的に純粋な数からおよび存在する唯一の "取り手がない" テンソル 3–計量 γ_{ij} および 3 次元の Levi–Civitta テンソル ε_{ijk}，から構成されなければならないことを意味する（すべての他のテンソルは優先的な方向あるいは位置を選び出す）．${}^{(3)}\boldsymbol{Riemann}$ に対する 1 つの可能な表現は

$$ {}^{(3)}R_{ijkl} = K(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk})\,; \qquad K = \text{“曲率パラメータ”=定数} \tag{27.21} $$

である．思考錯誤によって，これが曲率テンソルに対する正しい対称性をもち，そして定数，γ_{ij} および ε_{ijk} からのみ構成されうる，**唯一の**表現であることをすぐに確信する．したがって，これは $\mathcal{S}_I$ の 3–曲率でなければならない（この形式の曲率テンソルをもつ任意の多様体は "**一定曲率**" の多様体であるという）．

*22 予期されるように，$\mathcal{S}_I$ に対する計量は曲率テンソルの形 (27.21) によって，座標変換のところまで，完全に定まる（下記の練習問題 27.4 をみよ）．座標を適当に選ぶと，計量は

$$ \begin{aligned} d\sigma^2 &= \gamma_{ij}\,dx^i\,dx^j = K^{-1}[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)], && \text{もし } K>0 \text{ ならば,} \\ d\sigma^2 &= \gamma_{ij}\,dx^i\,dx^j = d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2), && \text{もし } K=0 \text{ ならば,} \\ d\sigma^2 &= \gamma_{ij}\,dx^i\,dx^j = (-K)^{-1}[d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)], && \text{もし } K<0 \text{ ならば} \end{aligned} \tag{27.22} $$

となる（下記の練習問題 27.5 をみよ）．因子 $K^{-1/2}$ あるいは $(-K)^{-1/2}$ を膨張因子 $a(t)$ に吸収せよ（練習問題 27.3 をみよ）．そして関数

$$ \begin{aligned} \Sigma &\equiv \sin\chi, && \text{もし } k \equiv K/|K| = +1 \text{ (“正の空間曲率”) ならば,} \\ \Sigma &\equiv \chi, && \text{もし } k \equiv K = 0 \text{ (“ゼロ空間曲率”) ならば,} \\ \Sigma &\equiv \sinh\chi, && \text{もし } k \equiv K/|K| = -1 \text{ (“負の空間曲率”) ならば} \end{aligned} \tag{27.23} $$

を定義せよ．こうして完全な時空幾何学を形式

$$ \begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}\,dx^i\,dx^j, \\ \gamma_{ij}\,dx^i\,dx^j &= d\chi^2 + \Sigma^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2) \end{aligned} \tag{27.24} $$

に，そして均質な超曲面の 3–曲率を形式

$$ {}^{(3)}R_{ijkl} = [k/a^2(t)][\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}] \tag{27.25a} $$

*21 均質な，等方的な超曲面に対する Riemann テンソル

*22 均質な，等方的超曲面に対する計量：3 つの可能性—正，ゼロ，あるいは負の空間曲率

に書け．曲率パラメータ K は，この再規格化の後には，明らかに

$$K = k/a^2(t) \tag{27.25b}$$

である．

*23　“再規格化” という言葉はなぜ適切であるか？　前に $a(t)$ は，ある任意に選ばれた時代に立ったときの大きさに相対的な大きさの膨張を記述するスケール因子であった．しかしその基準の時代の選択はどうでもよいことであった．今や $a(t)$ はその任意性を失った．それは，ここおよび今のその値はここおよび今の均質性の空間的な超曲面の曲率を与えるように規格化されている．前に因子 $a(t)$ は次元をもたないと理解された．今やそれは長さの次元をもっている．この長さは曲率が正であるときに “模型宇宙の半径” とよばれる．曲率が負であるときでも時々 $a(t)$ を “半径” と言う．ゼロ曲率に対してのみ $a(t)$ の規格化は先の任意性を依然保持する．こうして，ゼロ曲率に対しては，$a(t)$ に対する 2 つの選択，1 つは $a(t)$，他は $\bar{a}(t) = 2a(t)$ を考えよ．そうすると，$\bar{\chi} = \frac{1}{2}\chi$ で，3 つの関心をもつ方向についての固有距離を，2 つの方法のいずれについても何一つ気にすることなく，書くことができる．

$$\begin{pmatrix}\text{増大する } \chi \text{ の方向に}\\ \text{ついての固有距離}\end{pmatrix} = a(t)\,d\chi = \bar{a}(t)\,d\bar{\chi},$$

$$\begin{pmatrix}\text{増大する } \theta \text{ の方向に}\\ \text{ついての固有距離}\end{pmatrix} = a(t)\chi\,d\theta = \bar{a}(t)\bar{\chi}\,d\theta,$$

$$\begin{pmatrix}\text{増大する } \phi \text{ の方向に}\\ \text{ついての固有距離}\end{pmatrix} = a(t)\chi\sin\theta\,d\phi = \bar{a}(t)\bar{\chi}\sin\theta\,d\phi$$

このような選択の自由度は，模型宇宙が曲がっているときには可能でない．なぜならそのときには最後の 2 行の χ はその独立変数について線形でない関数，$\sin\chi$ あるいは $\sinh\chi$ によって置き換えられるからである．

曲がった宇宙の “半径”$a(t)$ の絶対値を定める原理の実行可能性にもかかわらず，実際今日の精度はそうすべく要求されるものに届かない．それゆえ $a(t)$ を相対的な膨張の因子とみなし続けることは多くの状況において適切である．正確に，その絶対値を定めることは難しいから，どのような式にもその絶対値を代入することを保留する．この動機は，絶対的な a 値よりもむしろ a 値の比を取り扱うように計算が準備されて，膨張の解析の多くが以下において遂行される道を説明するだろう．

コラム 27.2 は均質性の超曲面の幾何学を研究し説明する．

---

*23　膨張因子の規格化の意味

[練習問題]

27.4 一定の曲率の 3–曲面に対する計量の一意性

γ_{ij} および $\gamma_{i'j'}$ を，一定の曲率型 (27.21) の Riemann 曲率テンソル［式 (8.22) および (8.42) によって導かれる］をもつ，座標系 $\{x^i\}$ および $\{x^{i'}\}$ における 2 組の計量係数とする．さらに曲率パラメータ K および K' は等しく与えられているとする．γ_{ij} および $\gamma_{i'j'}$ は座標変換によって関係づけられることを示せ［解については，Robertson and Noonan（1968）の 8.10 節，あるいは Eisenhart（1926）の 10 および 27 節をみよ］．

27.5 一定の曲率の 3–曲面に対する計量

(a) 以下の計量は表現 (27.21) をその曲率テンソルとしてもつことを示せ．

$$\gamma_{ij} = \left(1 + \frac{1}{4}K\delta_{kl}x^k x^l\right)^{-2} \delta_{ij} \qquad (27.26)^*$$

(b) 極座標 (r, θ, ϕ) に変換し，それから Schwarzschild の半径方向の座標（$2\pi r =$ “固有円周”）に変えることによって，この計量を形式

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \qquad (27.27)$$

に変換せよ．

(c) 計量を形式 (27.22) にする半径方向の座標のさらなる変化を見出せ．

27.6 3–曲面の性質

コラム 27.2 でなされているすべての陳述を確かめよ．

27.7 等方性は均質性を意味する

縮約された Bianchi 恒等式 ${}^{(3)}G^{ik}{}_{|k} = 0$（ここに縦棒は 3–幾何学のみに基づいた共変微分を示す）を用いて（1）式 (27.21) における ${}^{(3)}\nabla K = 0$ を示せ．そしてそれゆえに (2) 曲率の方向–非依存性［等方性，形式 (27.21) の曲率］は均質性を意味し，そして均質性を要求する（K は空間で一定）ことを示せ．

---

* 空間座標のこの選択で，時空計量は

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{[1 + \frac{1}{4}K(x^2 + y^2 + z^2)]^2}$$

となる．これはしばしば **“Robertson–Walker 線要素”** とよばれる．なぜなら Robertson（1935, 1936）および Walker（1936）はそれがもっとも一般的な均質で等方な時空を記述する，ことの最初の証明を与えたからである．

コラム 27.2　均質性の超曲面の 3–幾何学

A. 正の空間曲率をもつ宇宙（“空間的に閉じた宇宙”）

各超曲面の計量は

$$d\sigma^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \tag{1}$$

である．

この 3–幾何学を視覚化するために，それを 4 次元 Euclid 空間にはめ込むことを想像せよ（このようなはめ込みはここでは可能である．一般的な 3 次元多様体に対しては可能でない．3 個の変数 $[\alpha, \beta, \gamma]$ のただ 4 個の自由に使える関数 $[w, x, y, z]$ が，それらの同じ 3 個の変数の 6 個の定められた関数 $[g_{mn}(\alpha, \beta, \gamma)]$ を再現すべく自由に試みられる）．

はめ込みは

$$\begin{aligned} w &= a\cos\chi, \qquad z = a\sin\chi\cos\theta, \\ x &= a\sin\chi\sin\theta\cos\phi, \\ y &= a\sin\chi\sin\theta\sin\phi \end{aligned} \tag{2}$$

によって達成される，なぜなら

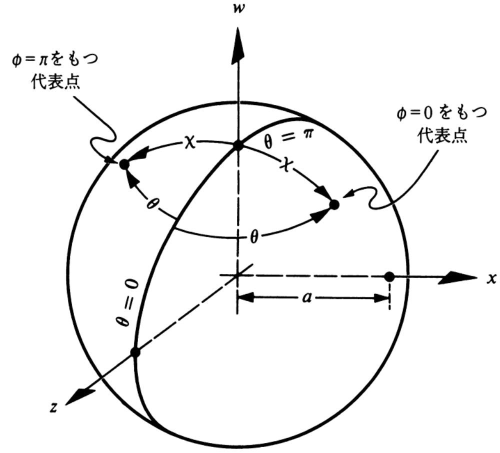
$$\begin{aligned} d\sigma^2 &\equiv dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \end{aligned} \tag{3}$$

が出るからである．

はめ込まれた曲面に対する式 (2) は

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \tag{4}$$

すなわち，曲面は 4 次元 Euclid 空間内の 3 次元の球である．



4 次元の Euclid 空間にはめ込まれた正の曲率の 3–曲面．1 個の回転の自由度は $\phi = 0$ および π と置くことによって削除されている（“極を通る薄片”，4–空間内の 3–球は 3–空間内の 2–球のようにみえる）．

均質性と等方性を確かめるためには，4 次元のはめ込み空間内での回転は，任意の与えられた点 [3–球上の任意の与えられた (w, x, y, z)] およびその点での任意の与えられた方向を任意の他の点および方向へ，線

要素

$$d\sigma^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

を不変にとどめて，動かすことができることを注意しさえすればよい．上述の式および図は以下のことを示す．

(1) 固定された χ（それは図で円のようにみえる．なぜなら 1 つの回転自由度が削除されているから）の 2–球は，実際には表面積 $4\pi a^2 \sin^2 \chi$ の 2–球である．そして (θ, ϕ) はこれらの 2–球上の標準的な球面座標である．

(2) χ が 0 から π まで変動するにつれて，連続する面積 $4\pi a^2 \sin^2 \chi$ の 2–球（"殻"）(2–球は図で円のようにみえる）を通って超曲面の "北極" から外側へ動く．これらの殻の面積は最初急速に増大しそれから超曲面，$\chi = \pi/2$ の "赤道" に近づくにつれてよりゆるやかに増大する．赤道を越えると面積は最初ゆるやかに減少し，それから "南極"（$\chi = \pi$，面積 $= 0$）に近づくにつれてより急速に減少する．

(3) 全超曲面は

$$0 \le \chi \le \pi,$$
$$0 \le \theta \le \pi,$$
$$0 \le \phi \le 2\pi$$

によって一掃される（ϕ は循環であり，$\phi = 0$ は$\phi = 2\pi$ と同じである）．その 3–体積は

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int (a\,d\chi)(a \sin\chi\, d\theta)(a \sin\chi \sin\theta\, d\phi) \\ &= \int_0^\pi 4\pi a^2 \sin^2 \chi (a\,d\chi) = 2\pi^2 a^3 \end{aligned} \tag{5}$$

である．

B. ゼロ空間曲率をもつ宇宙（"空間内で平坦な宇宙"）

各超曲面の計量は

$$d\sigma^2 = a^2[d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \tag{6}$$

である．これは完全に平坦な 3 次元 Euclid 空間であり，球面座標で記述される．直交座標では

$$\begin{aligned} x &= a\chi \sin\theta \cos\phi, \\ y &= a\chi \sin\theta \sin\phi, \\ z &= a\chi \cos\theta \end{aligned} \tag{7}$$

計量は

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{8}$$

である．

全超曲面は

$$\begin{aligned} &0 \le \chi < \infty, \\ &0 \le \theta \le \pi, \\ &0 \le \phi \le 2\pi \end{aligned} \tag{9}$$

によって掃過され，その体積は無限大である．

C. 負の空間曲率をもつ宇宙（“空間について開いた宇宙”）

各超曲面の計量は

$$d\sigma^2 = a^2[d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \tag{10}$$

である．

この 3–幾何学は 4 次元 Euclid 空間にはめ込むことはできない．しかしそれは平坦な Minkowski 空間

$$d\sigma^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{11}$$

にはめ込むことができる．はめ込みを達成するために，

$$\begin{aligned} w = a\cosh\chi, \qquad\quad & z = a\sinh\chi\cos\theta, \\ & x = a\sinh\chi\sin\theta\cos\phi, \\ & y = a\sinh\chi\sin\theta\cos\phi \end{aligned} \tag{12}$$

と置き，これを式 (11) に代入せよ．それによって式 (10) を得よ．

はめ込まれた曲面に対する式 (12) は

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a^2 \tag{13}$$

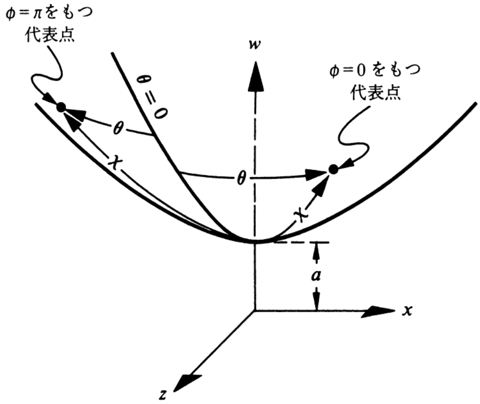
を意味する．すなわち，曲面は 4 次元 Minkowski 空間内での 3 次元双曲面である（それは運動量空間における質量双曲面と同じ形をもつ，コラム 22.5 をみよ）．

均質性および等方性を確かめるためには，はめ込み空間における “Lorentz 変換” は 3–双曲面上の任意の与えられた点およびその点を通る任意の方向を，線要素を不変にとどめて任意の他の点および他の方向に動かすことができる

$$d\sigma^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ことに注意しさえすればよい．上式および図は以下のことを示している．

(1) 固定された χ の 2–曲面（それは，1 つの回転自由度が削除されているから図では円のようにみえる）は実際，表面積 $4\pi a^2 \sinh^2 \chi$ の 2–球である．そして (θ, ϕ) はこれらの 2–球上の標準的な球面座標である．



4 次元の Minkowski 空間にはめ込まれた負の曲率の 3 – 曲面．1 個の回転自由度は$\phi=0$ および π と置くことによって削除されている（"極を通る薄片"．4 –空間内での 3–双曲面は 3–空間内の 2–双曲のようにみえる）．

(2) χ が 0 から ∞ まで変動するにつれて，視線は超曲面の（任意に選ばれた）"極" から，つねに増大する表面積 $4\pi a^2 \sinh^2 \chi$ の連続する 2–球（"殼"）を通って外側に動く．大きい χ に対しては，表面積は，超曲面が平坦であったときよりもはるかに急速に増大する．

$$\begin{aligned}\frac{(\text{固有表面積})}{4\pi(\text{固有距離})^2} &= \frac{A}{4\pi\, l^2} \\ &= \frac{4\pi a^2 \sinh^2 \chi}{4\pi a^2 \chi^2} \\ &\approx \left(\frac{e^{l/a}}{2l/a}\right)^2 \longrightarrow \infty\end{aligned} \tag{14}$$

全超曲面は

$$\begin{aligned}&0 \le \chi < \infty, \\ &0 \le \theta \le \pi, \\ &0 \le \phi \le 2\pi\end{aligned} \tag{15}$$

によって覆われる（ϕ は循環であり，$\phi = 0$ は$\phi = 2\pi$ と同じである）．超曲面の体積は無限大である．

D. トポロジーの非一意性

警告：均質性と等方性に対する要求は，均質性の超曲面の局所的な幾何学的性質をただ 1 つの自由に使える因子 K のところまで完全に定めるけれども，それは超曲面の大域的なトポロジーを定めずにとどめる．以上のトポロジーの選択はもっとも単純である．しかし他の選択も可能である．

この任意性は，超曲面はいつ平坦である $(k = 0)$ かをもっとも簡単に示す．直交座標での完全な時空計量を

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2] \tag{16}$$

と書け．それから座標の稜 L の立方体

$$0 < x < L, \qquad 0 < y < L, \qquad 0 < z < L$$

をとり，そして向かい合った面を同一視せよ（1 枚の紙を管に巻きつけ，その縁を互いに接着することに似た操作．詳細な議論に対しては 11.5 節の最後の 3 段落をみよ）．生ずる幾何学は依然，線要素 (16) によって記述される．しかし今やすべての 3 つの空間座標は，球面座標系の ϕ 座標のように，“循環” である．

$$(t, x, y, z) \text{ は } (t, x+L, y+L, z+L) \text{ と同じ事象である}$$

均質な超曲面は今や，電子波および固体内の音響波および空間内の電磁波を解析するときに “周期的な境界条件” という名前のもとで出会う 3–トーラスに類似した，有限の体積

$$V = a^3L^3$$

の “3–トーラス” である．

別な例：上述のパート A（“正の曲率” の場合）に記述されている 3–球は同じ幾何学をもつ．しかし回転群 $SO(3)$ の多様体と同じトポロジーをもたない（練習問題 9.12, 9.13, 10.16, および 11.12 をみよ）．詳細な議論に対しては，たとえば Weyl（1946），Coxeter（1963），および Auslander and Markus（1959）をみよ．

27.7　流体に対する運動方程式

任意の 1 つの均質性の超曲面の上述の解析の後に，宇宙の力学に戻れ．まず，流体の展開を，法則 $\nabla\cdot\boldsymbol{T} = 0$ によって支配されるものとして吟味せよ．

完全流体に対して運動方程式は 2 つの部分に分かれることを思い出せ（22.3 および 23.5 節）．4–速度に沿う成分，$\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T}) = 0$，は熱力学の第 1 法則

$$(d/d\tau)(\rho V) = -p(dV/d\tau) \tag{27.28a}$$

を再現する．ここに V は任意の流体要素の体積である．4–速度に直交する部分，$(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{T}) = 0$, は力の方程式（“Euler の方程式”）

$$(\rho + p)\times(4\text{–加速度}) = -(\boldsymbol{u} \text{ に直交する } \nabla p \text{ の成分}) \tag{27.28b}$$

を与える．静的な星に対して（23.5 節），熱力学の第 1 法則は空虚なものであった，しかし力の方程式は決定的であった．均質な宇宙に対しては，逆は真実である．力の方程式は空虚なものである（加速度は存在しない）．しかし熱力学の第 1 法則は決定的である．
*24

*24　均質な宇宙に対して Euler の方程式は空虚なものである

力の方程式が空虚なものであることをみるために，等方性は式 (27.28b) の両辺がゼロになることを保証することに注意せよ．もしいずれかの側が任意の事象 $\mathcal{P}$ でゼロでなかったら，それは $\mathcal{P}$ での均質な超曲面で方向を区別するだろう．

熱力学の第 1 法則 (27.28a) を宇宙論に適用する際，密度と圧力を物質による寄与と放射による寄与に分けよ．

$$\rho = \rho_m + \rho_r, \qquad p = p_m + p_r \tag{27.29}$$

*25 まず質量–エネルギーの密度を議論せよ．今日 $\rho_m(\gtrsim 10^{-31}\,\mathrm{g/cm^3})$ は $\rho_r(\sim 10^{-33}\,\mathrm{g/cm^3})$ に優勢である．物質は常には優位を占めなかった．したがって，$\rho_r = 0$ と置くことができない．さて圧力を議論しよう．圧力が宇宙論的に重要であった宇宙の時代の間，p_r は p_m に優位を占めた．したがって，つねに p_m を無視できて，放射に対する "状態方程式"，$p_r = \frac{1}{3}\rho_r$ を用いて

$$\rho = \rho_m + \rho_r, \qquad p = \frac{1}{3}\rho_r \tag{27.30}$$

と書くことができる．式 (27.30) が熱力学の第 1 法則 (27.28a) に代入されるとき，それは結果

$$(d/d\tau)(\rho_m V) + (d/d\tau)(\rho_r V) = -\frac{1}{3}\rho_r\, dV/d\tau \tag{27.31}$$

*26 を与える．質量–エネルギーが物質と放射の間でいかに互いに与えられるかを知るまでは——すなわち，$\rho_m V$ と $\rho_r V$ との間の別な関係を知るまでは，この式を積分することができない．すべての評価は，宇宙の生涯の最初の数秒を除いて，放射と物質間で交換されたエネ
*27 ルギーは，$\rho_m V$ および $\rho_r V$ それぞれに比べて無視できたことを示している (28.1 節をみよ)．これらの条件のもとで，式 (27.31) は 2 つの部分に分けられうる．

$$(d/d\tau)(\rho_m V) = 0 \tag{27.32a}$$

および

$$(d/d\tau)(\rho_r V) + \frac{1}{3}\rho_r\, dV/d\tau = 0 \tag{27.32b}$$

解は簡単である．

$$\rho_m V = \text{一定 (物質の保存)} \tag{27.33a}$$

および

---

*25 物質と放射に対する "状態方程式"

*26 物質と放射間のエネルギー交換が無視できる

*27 放射と物質の密度を膨張因子によって表すために用いられる熱力学の第 1 法則

$$\rho_r V^{4/3} = \text{一定} = \frac{\rho_r}{V^{-1/3}} V \quad (\text{光子の数の一定}) \tag{27.33b}$$

［比例因子を除いて，1 個の光子のエネルギー hc/λ］

さて V は何であるか？　それは任意の流体要素の体積である．それは稜 $\Delta\chi, \Delta\theta, \Delta\phi$ をもつ流体要素に対して，値

$$V = a^3 \Sigma^2 \sin\theta \Delta\chi\, \Delta\theta\, \Delta\phi$$

をもつ．ここに χ, θ, ϕ は流体の各世界線（共運動の座標）に沿って一定である．したがって超球面的な立体角の要素 $\Sigma^2 \sin\theta \Delta\chi\, \Delta\theta\, \Delta\phi$（あるいは開いた宇宙の模型に対しては擬超球面的な立体角）は任意の流体要素に対してつねに一定である．したがって流体要素の体積は膨張パラメータ a の 3 乗に直接比例して増大する．こうして，

$$V/a^3 = \text{一定}$$

この結果を $\rho_m V$ および$\rho_r V^{4/3}$ の一定と結びつけて，

$$\rho_m a^3 = \text{一定}, \qquad \rho_r a^4 = \text{一定} \tag{27.34}$$

がわかる．ρ_{m0} を今日の物質の密度，ρ_{r0} を今日の放射の密度とせよ，そして a_0 を今日の宇宙に対する膨張因子とせよ．そうすると，過去の任意の時間に

$$\rho(t) = \rho_{m0} \frac{a_0^3}{a^3(t)} + \rho_{r0} \frac{a_0^4}{a^4(t)} \tag{27.35a}$$

および

$$p(t) = \frac{1}{3} \rho_{r0} \frac{a_0^4}{a^4(t)} \tag{27.35b}$$

これらの結果は，後（28 章）に詳細に正当化されるだろう，2 つの重要な要求に基づいていた．圧力が重要であった時代には p_m が p_r よりもはるかに小さかったという要求，そして放射と物質間の質量–エネルギーの交換がつねに無視できた（“創造” 後の最初の数秒以内を除いて）という要求の 2 つである．

27.8　Einstein の場の方程式

ひとたび膨張因子，$a(t)$ の時間発展がわかると，密度および圧力の時間発展を式 (27.35) から直接読むことができる．密度と圧力は今度は，膨張が時間につれていかに進むかを Einstein の場の方程式によって定める．こうして，場の方程式は “論理の輪を閉じる”，そしてすべての 3 つの量，$a(t)$，$p(t)$，および $\rho(t)$ を定めるべき閉じた数学的な系を与える．

模型宇宙に対する Einstein テンソルの成分を直交基底 1–形式を用いて容易に計算することができる．

$$\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} \equiv \boldsymbol{d}t, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}} \equiv a(t)\, \boldsymbol{d}\chi, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} \equiv a(t)\Sigma\, \boldsymbol{d}\theta, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} \equiv a(t)\Sigma \sin\theta\, \boldsymbol{d}\phi \tag{27.36}$$

*28 結果は［コラム 14.5 の式 (5) をみよ］

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = 3\left(\frac{a_{,t}}{a}\right)^2 + \frac{3k}{a^2} \tag{27.37a}$$

$$G_{\hat{\chi}\hat{\chi}} = G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -2\frac{a_{,tt}}{a} - \left(\frac{a_{,t}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} \tag{27.37b}$$

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0 \qquad (\text{もし } \mu\neq\nu \text{ ならば}) \tag{27.37c}$$

（洞察により，等方性は等式 $G_{\hat{\chi}\hat{\chi}} = G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}}$，および Riemann テンソルに対する同様の等式を保証することをあらかじめ気づくだろう．そしてもっとも容易に計算される成分 $G_{\hat{\chi}\hat{\chi}}$ のみを計算しよう）．

基底 1–形式，$\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\chi}}, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}$ は，“宇宙論的な流体” とともに動く観測者によって運ばれる直交基底である．したがって，$T_{\hat{t}\hat{t}}$ は観測者が測定する質量–エネルギーの密度 ρ である．そして $T_{\hat{j}\hat{j}}$ は圧力 p，T_{tj} はゼロである．なぜなら観測者はエネルギーの流れをみないからである（運動量密度は存在しない）．そして $T_{\hat{i}\hat{j}}$ は $i\neq j$ に対してはゼロである．なぜなら観測者はせん断応力をみないからである．

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho \tag{27.38a}$$

$$T_{\hat{\chi}\hat{\chi}} = T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = p \tag{27.38b}$$

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0 \qquad (\mu\neq\nu \text{ のとき}) \tag{27.38c}$$

式 (27.37) の Einstein テンソル（“回転のモーメント”）を式 (27.38) のストレス–エネルギーテンソルに等しくおけ．そしてもし主張するならば，場の方程式にいわゆる “Λ 項” あるいは “宇宙項” を含めよ [Einstein(1970)，わが生涯の最大の失敗]．こうして 2 つの空虚でない場の方程式を得よ．第 1 は “初期値方程式” であり，$a_{,t}$ を任意の時間の最初の瞬間における a および ρ に関係づける．

*29
$$\left(\frac{a_{,t}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \underbrace{\frac{\Lambda}{3}}_{\text{省略せよ}} + \frac{8\pi}{3}\rho \tag{27.39a}$$

第 2 は “力学方程式” であり，膨張因子の 2 階時間微分を与える．それによって時間の最初の瞬間からの力学的な発展を支配する．

*30
$$2\frac{a_{,tt}}{a} = -\left(\frac{a_{,t}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} + \underbrace{\Lambda}_{\text{省略せよ}} - 8\pi p \tag{27.39b}$$

*31 もし式 (27.39b) が Newton 力学における何かと比較されるべきであるとするならば，それは加速度に対する方程式（運動方程式）と比較されるべきである．そして同じ精神で式 (27.39a) は運動方程式の第 1 積分，すなわちエネルギーの方程式と比較されるべきであ

*28 均質な宇宙に対する Einstein の場の方程式を求める
*29 (1) 初期値方程式
*30 (2) 力学方程式
*31 力学方程式はなぜ余分であるか

る．この比較と一致して，式 (27.39a) を微分して，それを圧力によって満たされる関係，

$$(\rho a^3)_{,t} = -p(a^3)_{,t}$$

（“エネルギーの保存則”）と結びつけて，加速度の方程式 (27.39b) を得さえすればよいことに注意せよ．いかなる情報の損失もなしに，したがって “加速度の方程式” あるいは “力学方程式” (27.39b) を今後無視して，エネルギー方程式の類似物あるいはより適切に “初期値方程式” として知られている（トラック–2 の読者に対する初期値問題の詳細は 21 章にある）もので仕事ができる．

*32 Friedmann 宇宙論の制限された状況においてここでみえるものは一般的な幾何力学のより広い状況において適切にみられる．エネルギーの保存および 1 つの場の方程式が，まさに他の場の方程式を再現するのがみられた．逆に，両方の場の方程式を受け入れることによって，エネルギーの保存則をちょうど述べられた形で導くことができる．こうして，場の方程式 $\boldsymbol{G} = 8\pi \boldsymbol{T}$ （あるいは，もし “宇宙項を主張するならば”,

$$\boldsymbol{G} + \underbrace{\Lambda \boldsymbol{g}}_{\text{省略せよ}} = 8\pi \boldsymbol{T})$$

を書く行為そのものは，発散 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{G}$ が自動的にゼロになる（あるいは $\boldsymbol{G}$ と $\boldsymbol{g}$ の発散がゼロになる）ことによって励まされ，そのことに基礎を置かれた，なぜならエネルギーと運動量が保存されること，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 0$ から始めることを知っていたからである．そうすると，保存則，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = 0$ と，場の方程式との間に重複があるはずであるということは驚くべきでない．ここで保存則の 1 つの，そしてただ 1 つの興味ある成分であるものと，場の方程式の 1 つの，そしてただ 1 つの興味ある初期値の成分（$G_{\hat{t}\hat{t}}$ 成分）を用いて，場の方程式の 1 つの，そしてただ 1 つの興味深い力学的な成分（$G_{\hat{\chi}\hat{\chi}}$ 成分）を得ることもまた，Friedmann 宇宙の力学において驚くべきでない．

同様に，対称性を欠くより一般的な問題において，力学的な場の方程式のいくつかをつねに消去することができる．しかし重力放射が存在するときには，場の方程式すべてを消去することができない．消去できない力学的な場の方程式は，原理的にとしても，重力波の伝播を支配する．重力波は完全に均質で等方的な宇宙模型において存在しない．その高度な対称性—とりわけ，その球面的な（2–球!）$\chi = 0$ 周りの対称性—は重力波と両立しない．

さて一般力学から Friedmann 宇宙論に戻る．膨張因子 a の時間発展を定めるために，初期値方程式 (27.39a) に，式 (27.35a) に与えられている質量–エネルギー密度に対する表現を代入し，積分のできる式に到達する．

*33

$$\left(\frac{a_{,t}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \underbrace{\frac{\Lambda}{3}}_{\text{省略せよ}} + \underbrace{\frac{(8\pi\rho_{m0}a_0^3/3)}{a^3} + \frac{(8\pi\rho_{m0}a_0^4/3)}{a^4}}_{(8\pi/3)\rho(a)} \tag{27.40}$$

---

*32 初期値方程式，力学方程式，およびより一般的な状況での Bianchi 恒等式，についての補足的な注意

*33 膨張因子に対する微分方程式

$a = a(t)$ に対するこの式の積分を完成したときに，式 (27.35a), (27.35b) に戻って $\rho(t)$ および $p(t)$ を得る，そして表現 (27.24) に戻って幾何学，

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + \Sigma^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2)] \tag{27.41}$$

を得る．こうして問題の解を完成する．

27.9　時間パラメータおよび Hubble 定数

この力学問題の解析に，1922 年の Friedmann 自身に始まり，多くの研究者は何年間に
*34 もわたって貢献をした．彼らは他の結果と一緒に，時間変数の 3 つの自然な選択が存在することを発見した．どれが 1 番有用性が大きいかは，手元にある応用に依存する．

*35 第 1 は元の時間変数 t である．この量は膨張の初めから経過した固有時間を直接与える．これは銀河の形成に対して利用できる時間である．それはまた放射性の崩壊および他の物理学的な過程が生じてきた時間である．

*36 第 2 は膨張因子 $a(t)$ である．それは時間とともに増大し，それゆえ，膨張の 1 つの位相を他の位相から区別するのに役立つ．したがってそれ自身で時間のパラメータ的な測度とみなされうる．2 つの時間における $a(t)$ の比は，それら 2 つの時間における宇宙の大きさ（体積の 3 乗根）の比を与える．それはまたこれら 2 つの時間における波長の比 $(1+z)$ を与える（29.2 節をみよ）．過去の時代に放射によって体験され今日受信される赤方偏移 z の知識は，$a(t)/a_0$ の知識に同等である，ここに a_0 は今日の膨張因子である．とくに，$z = 999$ をもって入射する放射は，宇宙が現在の 10^{-3} の大きさをもっていた，そして現在の体積の 10^{-9} をもっていたときの，宇宙の時代から入射してくる放射である．膨張パラメータが a から $a + da$ まで増大する時間間隔の間に，固有時間の経過は，式 (27.40) によって，

$$dt = \frac{da}{[-k + (8\pi/3)a^2\rho(a) + \underbrace{(\Lambda/3)a^2}_{\text{省略せよ}}]^{1/2}} \tag{27.42}$$

である．a を新しい時間パラメータとして用いると，この公式から計量は形［Hughston (1969)］

$$ds^2 = \frac{-(da)^2}{-k + (8\pi/3)a^2\rho(a) + \underbrace{(\Lambda/3)a^2}_{\text{省略せよ}}} + a^2[d\chi^2 + \Sigma^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \tag{27.43}$$

をとることができる．

*37 第 3 は“時間の弧パラメータ測度”，$\eta(t)$ である．時間 dt の間に，半径 $a(t)$ の超球上を進む光子は

---

*34　宇宙に対する時間パラメータの 3 つの選択
*35　(1) 固有時間 t
*36　(2) 膨張因子 a
*37　(3) 弧パラメータ η

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \tag{27.44}$$

に等しく，ラジアンで測定される弧を覆う．模型宇宙が閉じずに開いているときに，同じパラメータを定義しよう．言葉 “超球” および “弧” のみが均質性の平坦な超曲面 $(k = 0)$ あるいは双曲面的な超曲面 $(k = -1)$ に対応する言葉によって置き換えられなければならない．すべての 3 つの場合に，“弧パラメータ” は膨張の始まりから，この表現の積分によって定義される．

$$\eta = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} \tag{27.45}$$

こうして “弧パラメータ時間”, η の小さい値は初期の時間を意味する．そして大きい値はもっと後の時間を意味する．この “時間の弧パラメータ測度” によって，計量は形

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + d\chi^2 + \varSigma^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \tag{27.46}$$

をとる．光子が 3–球の “北極” ($\chi = 0$, 任意の θ および ϕ) を，“弧パラメータ時間” $\eta = \eta_1$ に出発するとする．それから，“弧パラメータ時間” $\eta = \eta_2$ までに，超球上の新しい点へ進み “宇宙論的な流体” の粒子の新しい組に遭遇した．それらは超極角

$$\chi = \eta_2 - \eta_1$$

に存在する．作用が宇宙内の 1 つの点から他の点へ伝播するときに，1 枚の紙の上に時空図をつくり何が生じているかを示すときには，(1) 空間座標を χ にとり（“宇宙論的な流体” の異なる粒子の生涯履歴はこうして異なる鉛直線によって表される），そして (2) 時間座標を η にとる（したがって光子は ±45 度で傾いている直線によって記述される）のがもっとも好都合であることがわかる．ヌル測地線の経過を追跡するとき η 以上に自然に使える時間パラメータは存在しない．たとえば，29.2 節における宇宙論的な赤方偏移の取り扱いをみよ．a を直接時間の関数として与えるよりも $a = a(\eta)$ および $t = t(\eta)$ を与えるほうがはるかに解析的に簡単である（$\varLambda$ がゼロにとられるとき）こともわかる．こうして大きさ a と “弧パラメータ” η との間の結合を，公式

$$\eta = \int d\eta = \int \frac{dt}{a(t)} = \int \frac{da}{[-ka^2 + (8\pi/3)a^4\rho(a) + \underbrace{(\varLambda/3)a^4}_{\text{省略せよ}}]^{1/2}} \tag{27.47}$$

から得る．この時間パラメータの関数としての大きさ a の知識から，ただちに固有時間そのものをこの時間パラメータによって，公式

$$dt = a(\eta)\, d\eta \tag{27.48}$$

から得る．

膨張因子に対する式 (27.40) と時間を印づけるためのパラメータの選択は，今や理想化された宇宙論の詳細な解析に対する場を設定した．そして重要な問題のいくつかまでも問

われてきた．幾何学の特徴的な大きさ a（閉包の場合における，3–球の半径）はいかに時間とともに変化するか？ 時空幾何学は何であるか？ 測地線，とくにヌル測地線は，この幾何学でいかに進むか？ しかし付加的な問題は等しく重要である．宇宙の膨張は減速しているか，そして，もしそうなら，どれほど速く？ 物質および放射の密度と圧力はいかに時間とともに変化するか？ そして最後に，理論と観測との間のもっとも簡単でもっとも直接的な絆に対して，膨張率は何であるか？

*38 膨張率について語るとき，"Hubble 定数"，微小な距離の増大率，

$$H \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \tag{27.49}$$

に言及する．それはふつう今日求められる $H(\text{今日}) \equiv H_0$ であるが，しかし原理的に宇宙の歴史のすべての位相に対して時間の関数として定義される．H の逆数は "Hubble 時間"，H^{-1} である．この量は，銀河が無限の収縮の条件から出発してつねに現在の速度を保持したとすれば，現在の分離を達成するのに要したであろう時間を表している（"直線で出発点まで外挿したときの次元つきの膨張時間"）．天体物理学的な単位から幾何学的な単位へ，そして年への変換に対しては，現在受け入れられている値，$H_0 = 55\,\text{km/sec Mpc}$（コラム 29.4）を例としてとれ．

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{55\,\text{km/sec}}{(299,793\,\text{km/sec})(3.0856\times10^{24}\,\text{cm あるいは } 3.2615\times10^{6}\,\text{年})} \\ &= 0.59\times10^{-28}\ \text{光速時間の cm あたり} \\ &\qquad\qquad \text{あるいは年あたり } 5.6\times10^{-11} \text{の微小な膨張}, \\ H_0^{-1} &= 1.7\times10^{28}\text{光速時間の cm あるいは } 18\times10^{9}\ \text{年} \end{aligned} \tag{27.50}$$

27.10 閉じた宇宙の基本的な Friedmann 宇宙論

*39 もっとも簡単な宇宙模型，$\Lambda = 0$ をもつ等方的で均質な閉じた宇宙をとり，物質優勢と放射優勢の 2 つの極端な場合においてのすべての詳細について，宇宙の特徴を考察せよ．物質優勢の模型はときどき Friedmann 宇宙として参照され，そして放射優勢の模型は Tolman 宇宙として参照されるけれども，ここでは両方の場合に対して "Friedmann 宇宙" という語句を用いる．この解析で変数 $a(t)$ が cm で測定されるとき，宇宙の半径を表すものとするのが適切であるだろう．なぜならこの半径に参照することによってのみ，原理的に観測されるすべての興味ある幾何学的な事象を議論する道具を手にもつからである．この議論の後に，他の模型を取り扱うときに，それらの主要な部分を要約し完全な研究を繰り返さずにこの簡単な模型との相違について論評すれば十分であるだろう．開いた宇宙あるいは任意のいわゆる "宇宙定数" あるいはその効果についてのどのような参照も，したがって簡単な最後の節，27.11 節に延期されるだろう．そこでは変数 $a(t)$ は時々相対的な

---

*38 Hubble 定数と Hubble 時間

*39 $\Lambda = 0$ をもつ閉じた Friedmann 宇宙の特徴

膨張のパラメータのみを表すべくとられるだろう．なぜなら，たとえば，そこでは大域的な幾何学的問題が取り上げられないような，$z = 0.1$ にまでしか届かない，議論に対して適切であるからである．

*40　Einstein の場の方程式の支配的な成分 (27.40) を形式

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi\rho_{m0}a_0^3/3}{a} - \frac{8\pi\rho_{r0}a_0^4/3}{a^2} = -1 \tag{27.51}$$

に書き直せ．この式で放射項あるいは物質項を無視する．したがって，式は

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{a_{\text{最大}}}{a} = -1 \qquad (\text{物質優勢}) \tag{27.52a}$$

あるいは

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{a^{*2}}{a^2} = -1 \qquad (\text{放射優勢}) \tag{27.52b}$$

に理想化される．両方の場合に，問題は“全エネルギー”-1 およびコラム 27.1 の図 **A** に示されている定性的な形の“有効ポテンシャルエネルギー”—ポテンシャルが $-1/a$ のように従うかあるいは $-1/a^2$ に従うかに応じてわずかな形の差を除いて—をもつ Newton 力学における粒子の運動の問題に比較される．解の主要な特徴はコラム 27.3 に集められている．

*41　放射密度が簡単な普遍則，

$$\rho_r = 3/32\pi t^2 \tag{27.53}$$

によって時間に依存することは，初期の Friedmann 宇宙の放射優勢の時代の著しい特徴である（コラム 27.3 の最後の行と最後の列）．この事情はいつか初期の宇宙で何種類の放射が ρ_r に寄与したかを告げるだろう．あるいは，言い換えれば，観測論的な宇宙論から場の物理学について学ぶ道具を与えるだろう．放射の密度を形式

$$\rho_r(\text{cm}^{-2}) = \frac{G}{c^4}\rho_{r,\,\text{慣習}}(\text{erg/cm}^3) = \frac{Gf\pi^2}{c^4 120}\frac{(kT)^4}{\hbar^3 c^3} \tag{27.54}$$

で表せ．もし電磁気が放射密度への唯一の寄与をしたならば，それは驚くべきであるだろう．なぜなら以下の付加的な機構が，激しく放射する源から熱エネルギーを吸い取るべく利用できるからである．

*40　(1) 時間の関数としての半径
*41　(2) 放射優勢の初期の時代：放射の型

コラム 27.3 2つの極端な場合における，閉じた宇宙の基本的な Friedmann 宇宙論に対する解

(1) 物質優勢で放射が無視できる場合
(2) 放射優勢で物質が無視できる場合

3–球の力学に対する理想化	物質優勢	放射優勢
模型が重要になるのはいつか?	赤方偏移 $z\sim 10{,}000$ まで過去にさかのぼる．今日を通過し，最大膨張の位相を通過し，そして今日より $\sim 10{,}000$ 倍小さい大きさにまで再収縮	赤方偏移 $z\sim 1{,}000$ およびそれ以上に対して，膨張の非常に初期の位相．そして再収縮の遅い段階において対応する位相．今日は直接重要でない
$\left(\dfrac{da}{dt}\right)^2 + V(a) = -1$ における有効 "ポテンシャル"	$V(a) = -\dfrac{a_{最大}}{a}$	$V(a) = -\dfrac{a^{*2}}{a^2}$
ある標準的な時代での条件を用いたこの "ポテンシャル" における定数の値	$a_{最大} = \dfrac{8\pi}{3} a_0^3 \rho_{m0}$	$a^{*2} = \dfrac{8\pi}{3} a_0^4 \rho_{r0}$
"弧パラメータ" η (膨張の始まり以来進む光子によって覆われる 3–球上の弧距離のラジアン) によってパラメータ的に表される力学方程式の解	$a = \dfrac{a_{最大}}{2}(1-\cos\eta)$ $t = \dfrac{a_{最大}}{2}(\eta - \sin\eta)$	$a = a^* \sin\eta$ $t = a^*(1-\cos\eta)$
膨張の始まりから再収縮の終わりまでの η の範囲	2π (宇宙周りの 1 周)	π (宇宙の正反対の点までのみ到達する)
半径 a を時間 t に関係づける曲線の性質	サイクロイド	半円
Hubble 時間 $H^{-1} = \frac{a}{(da/dt)} = \frac{a^2}{(da/d\eta)}$	$\dfrac{a_{最大}}{2}\dfrac{(1-\cos\eta)^2}{\sin\eta}$	$a^* \dfrac{\sin^2\eta}{\cos\eta}$

Hubble時間，あるいは"外挿された"時間と膨張の始まりまでさかのぼった実際の時間との間の不等式	$H^{-1} \geq 1.5t$	$H^{-1} \geq 2t$
質量–エネルギーの密度	$\rho_m = \dfrac{3}{\pi a^2_{最大}(1-\cos\eta)^3}$	$\rho_r = \dfrac{3}{8\pi a^{*2}\sin^4\eta}$
Hubbleの膨張率によって表されたこの密度	$\rho_m = \dfrac{3H^2}{8\pi}\dfrac{2}{1+\cos\eta}$	$\rho_r = \dfrac{3H^2}{8\pi}\dfrac{1}{\cos^2\eta}$
密度によって満たされる不等式	$\rho_m \geq \dfrac{3H^2}{8\pi}$	$\rho_r \geq \dfrac{3H^2}{8\pi}$
介在する空間の曲率による遠く離れた銀河の拡大の解析	29.5節および図29.2	29.5節
初期の時間に対する膨張の法則の極限形式	$\begin{cases} t = \dfrac{a_{最大}}{12}\eta^3 \\ a = \dfrac{a_{最大}}{4}\eta^2 \\ a = \left(\dfrac{9a_{最大}t^2}{4}\right)^{1/3} \end{cases}$	$\begin{cases} t = \dfrac{a^*}{2}\eta^2 \\ a = a^*\eta \\ a = (2a^*t)^{1/2} \end{cases}$
初期の時間における膨張の他の特徴	$\begin{cases} H^{-1} = \dfrac{a_{最大}}{8}\eta^3 = 1.5t \\ \rho_m = \dfrac{a_{最大}}{(8\pi a^3/3)} \\ \quad = \dfrac{1}{6\pi t^2} = \dfrac{3H^2}{8\pi} \end{cases}$	$\begin{cases} H^{-1} = a^*\eta^2 = 2t \\ \rho_r = 3p_r = \dfrac{a^{*2}}{(8\pi a^4/3)} \\ \quad = \dfrac{3}{32\pi t^2} = \dfrac{3H^2}{8\pi} \end{cases}$

電磁気的な放射（すでに考慮されている）.　　$f_{em} = 8$

重力的な黒体放射.　　$f_g = 8$

電子–ニュートリノ型のニュートリノおよび反ニュートリノ放射［その寄与はニュートリノの化学ポテンシャルに依存する．それについてはBrill and Wheeler（1957）をみよ．ゼロ値がそのポテンシャルに対してここで仮定されている］.　　$f_{e\nu} = 7$

μ–ニュートリノ型のニュートリノおよび反ニュートリノ放射（ν_e に対するのと同じ仮定をもつ）.　　$f_{\mu\nu} = 7$

温度が $T = mc^2/k = 0.59\times10^{10}$K の程度およびそれ以上のときに，真空から生み出される正の電子と負の電子の対．近似的に求めると今日みられる単独の電子よりも圧倒的に数が多いものとして取り扱われる.　　$f_{e^+e^-} = 14$

温度が2次の大きさだけ高い（$\sim 10^{12}$ K）ときに，真空から生み出される中間子のような他の粒子．また温度が$\sim 10^{13}$K の程度およびそれ以上であるときに真空から生み出されるバリオン–反バリオンの対．	$f_{\mu^+\mu^-}, f_\pi, \ldots$
これら f 値の和．	f (27.55)

膨張が進み，温度が 10^{13}K 以下に，それから 10^{12}K 以下に，それから 10^{10}K 以下に落ちるにつれて，種々の粒子対がおそらく消滅し，なくなる［しかし，Alfvén and Klein (1962)，Alfvén (1971)，Klein (1971)，および Omnes (1969) をみよ］．そして，ゼロ静止質量の放射が残り，これらの放射のみが真空の比熱に寄与する．バリオン–反バリオン対消滅および電子–陽電子対消滅の位相において，存在する熱的な重力放射は，すべての一般に承認されている評価によれば，すでに実際物質から離れてしまっている．したがって物質と反物質との対消滅によって自由になるエネルギーは，他の2つのエネルギーの保持者：ニュートリノおよび電磁気的な放射にまず流れ出ることが予想される．しかし，ニュートリノもまた早く離れる（バリオン–反バリオン対消滅後に，完全な電子–陽電子対消滅以前に）．なぜならニュートリノに対する平均自由行路は，膨張とともに急速に大きくなるから．続いて起こる対消滅のエネルギーはほとんどもっぱら電磁気的な放射にいく．こうして現在の時間における3つの放射の温度は順序

$$T_{\rm em} > T_\nu > T_g \tag{27.56}$$

になることが予想される．ここに上式のそれぞれの記号の下つき文字，em，ν および g は電磁気的な放射，ニュートリノ放射および重力放射を意味する．$T_{\rm em}$ は 2.7 K であることが測定されている．T_ν は $(4/11)^{1/3}T_{\rm em} = 1.9$ K，そして T_g は，重力子が初期のクオーク優勢の時代に離れるという模型で 1.5 K であることが計算されている［Matzner (1968)］．

結合していない放射は，ひとたび Planck スペクトルにあると，Planck スペクトルにとどまる（コラム 29.2 をみよ）．膨張は積 $\rho_{r,\,離れた}a^4$ あるいは積 $T^4_{r,\,離れた}a^4$ を一定にとどめる．現在のこの特別な放射の温度を，離れた放射の時代後の任意の選ばれた基準時間 $t_{基準}$ における同じ放射の温度に比較せよ．

$$T_{r,\,基準} = \frac{a_{今日}}{a_{基準}} T_{r,\,今日} = (1+z)T_{r,\,今日} \tag{27.57}$$

を見出せ．ここに z は，実験室で観測されたときと同じ遷移の標準的な波長に相対的な，基準時間に与えられる，今日観測されるときの任意の“追跡子（tracer)”のスペクトル線の赤方偏移を表す．

もし3つの放射が触媒作用を及ぼされて熱力学的な平衡にありうるならば，すべての放射は宇宙論の放射優勢の時期の間，同じ基礎で取り扱われうるだろう．それらのおのおのの f 値は直接加えられえて $f = 8 + 8 + 7 + 7 = 30$ を与えるだろう．温度と時間はそうすると公式

$$(T/10^{10}\,{\rm K})^2(t/1\,{\rm sec}) = 1.19 \tag{27.58a}$$

によって結ばれるだろう．この公式は式 (27.57) とともに関係

$$\left[\left(\frac{T_{r,\,今日}}{10^{10}\mathrm{K}}\right)(1+z)\right]^2\left(\frac{t_{基準}}{1\,\mathrm{sec}}\right)=1.19 \tag{27.58b}$$

を意味する．この関係は 2 つの放射（1）Planck スペクトル（連続体）をもつ実際の電磁気的な放射，(2) “追跡子放射”（線スペクトル）の赤方偏移と放出時間，にかかわっている．この関係からの測定されるずれは，標準理論と一致して，ニュートリノ放射および重力放射は今日電磁気的な放射よりも冷たいという 1 つの潜在的な（非直接的な）証拠として役立ちうるだろう．

*42　さて宇宙論の放射優勢の時期から物質優勢の時期に向かう．数値は時々，想像から公式以上の答えを引き出す．したがって物質優勢の宇宙論に理想化し，そしてしばらく 20×10⁹ 年および 10×10⁹ 年 を，それぞれ，膨張の始まりまでさかのぼったときの，Hubble 時間および実際の時間として採用する．将来の仕事は，両方の数の改訂を要求することを示すことは確かであるが，観測論的な宇宙論者の意見ではおそらく因子 2 以上でないだろう．最善の数についてのどのような判断も不確定さを受けるから，合理的であるだけでなく簡単であるようにとることができる．コラム 27.3 から，弧パラメータ時間 η の現在の値を導き出すと，

$$\frac{20\times10^9\mathrm{lyr}}{10\times10^9\mathrm{lyr}}=\frac{H^{-1}}{t}=\frac{\frac{a_{最大}}{2}\frac{(1-\cos\eta)^2}{\sin\eta}}{\frac{a_{最大}}{2}(\eta-\sin\eta)} \tag{27.59}$$

あるいは

$$\eta=1.975\quad(あるいは\ 113.2^\circ) \tag{27.60}$$

となる（膨張の始まりから今日までに 3–球上を光子が進む弧）．これが固定されると，すべての他の数はコラム 27.4 に示されているように現れる．

コラム 27.4　天文学的な観測と Einstein の宇宙論の概念（$\Lambda=0$, 宇宙は閉じている）と矛盾しない代表的な宇宙模型

最大膨張の位相での半径	18.94×10^9 lyr,
始まりから最大までの時間	29.76×10^9 yr,
始まりから最終の再収縮までの時間	59.52×10^9 yr,
始まりから今日までの時間（採用された値）	10×10^9 yr,
今日の半径	13.19×10^9 lyr,
今日の Hubble 時間（採用された値）	20×10^9 yr,
今日の Hubble 膨張率	49.0 km/sec Megaparsec,
今日の減速度パラメータ，q_0 ［式 (29.1b)］	1.7

*42　(3) 物質優勢の，後の時期

今日の密度 $(3/8\pi a_0{}^2)+(3H_0^2/8\pi)$	$(7.67+3.33)\times10^{-58}\,\mathrm{cm}^{-2}$
	$=11.00\times10^{-58}\,\mathrm{cm}^{-2}$
	あるいは $14.8\times10^{-30}\,\mathrm{g/cm}^3$,
今日の体積，$2\pi^2 a_0{}^3$	$38.3\times10^{84}\,\mathrm{cm}^3$,
最大での密度 $(3/8\pi a^2)+(3H^2/8\pi)$	$(3.70+0.00)\times10^{-58}\,\mathrm{cm}^{-2}$
	$=5.0\times10^{-30}\,\mathrm{g/cm}^3$,
最大での体積	$114\times10^{84}\,\mathrm{cm}^3$,
今日の半径の増大率	$13.19\times10^9\mathrm{lyr}/20\times10^9\,\mathrm{yr}$
	$=0.66\,\mathrm{lyr/yr}$,
今日の体積の増大率	$1.82\times10^{68}\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{sec}$,
物質の量	$5.68\times10^{56}\,\mathrm{g}$,
同等な太陽質量の数	2.86×10^{23},
同等なバリオンの数	3.39×10^{80},
今日見られる比	0.74

これらの数は“正準的な”という表題に値しないことは強調されなければならない．しかしそれらを記述するのに付屬物が存在するだろうということは好都合である．それらはせいぜい例証とよばれうる．

*43 もし5秒ごとに空間のある体積が宇宙に追加されるならば，$10^5\,\mathrm{lyr}(=0.95\times10^{23}\,\mathrm{cm})$ の稜をもつ立方体に同等な体積，銀河によって占められる体積にほぼ等しい体積が宇宙に追加されるならば，その体積はどこから入るか？ 答えを求めるよりもむしろ，質問を再吟味するほうがよい．空間は水のようでない．イエズスの泉（Jesuit Spring）にある大洋の底の新鮮な水を砂漠の島の山（Mount Desert Island）に流せば，流量計で位置を取り囲むことによって認められ測定されうる．“空間がいかに速く流れ去るか”を述べる流量計のようなものは存在しない．“空間が流れる”というアイデアそのものが間違っている．空間の流れを定義する方法は存在しない．なぜなら空間の流れを測定する方法が存在しないからである．水は流れるが，空間は流れない．生活が水について定常的であるかあるいは動いているかに応じて，生活は流量計にとって非常に異なる．しかし，空の空間内の粒子に対して，粒子がある選ばれた慣性系について静止しているかあるいは高速度で動いているかどうかにかかわらず，物理学は区別されえない．それらの立方キロメートルの空間がどこに生まれるかを正確にとらえようと試みることは間違ったアイデアである．なぜならそれは意味のないアイデアであるからである．

均質等方な閉じた宇宙から Schwarzschild の格子状の閉じた宇宙へ向きを変えることによって，膨張および再収縮において生じていることについての新鮮な見通しを得ることができる［Lindquist and Wheeler (1957)］．最初の場合には，質量は一様に分布してい

*43 (4) “膨張の間創造される新しい空間はどこに存在するか？”—無意味な質問である

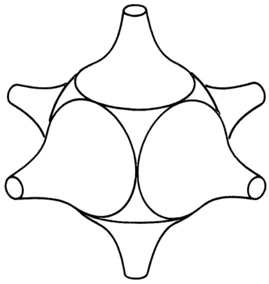


図 **27.3**　多くの Schwarzschild 地帯が互いに合致されて閉じた宇宙をつくる．この宇宙は力学的である．なぜなら 2 個の地帯間の境界領域にある試験粒子はおのおのの地帯の重力の引力に反して上がり，そしておのおのの地帯の重力の引力のもとで落下して戻るからである．したがって 2 個の中心は離れたりそして逆戻りしたりして動かなければならない．同じことはすべての他の中心の対に対して真実であるから，たとえおのおのの Schwarzschild 幾何学は静的とみられるとしても，格子宇宙そのものは膨張したり再収縮したりする．この図は Lindquist and Wheeler（1957）から引用されている．

るとして理想化される．後の場合には，質量は 120 個の同等な Schwarzschild ブラックホールに集中している．おのおのはそれ自身の 12 面によって縛られ，各面は近似的に 5 角形である 12 面体の形のセルの中心に位置している，そして空間は空である．各格子セルは球形として理想化される，固体物理学において "Wigner–Seitz 近似"（Lindquist and Wheeler における文献）として長くよく知られた取り扱いの 1 つの型の近似で，力学は容易に解析される．この近似で，各格子セル内の幾何学は正確に Schwarzschild の性質（図 27.3）をもつとして取り扱われる．ブラックホール A およびブラックホール B の間の中点に置かれた試験粒子はおのおのの引力に反して上昇し，そして究極的には 25 章で展開された法則［式 (25.28)，η を定義するための出発点で π のずれをもつ］

$$r = \frac{R}{2}(1-\cos\eta),$$
$$\tau = \frac{R}{2}\left(\frac{R}{2M}\right)^{1/2}(\eta - \sin\eta) \tag{27.61}$$

に従っておのおのの側に落ちる．したがって問題の 2 つの質量は互いに他の側に落ちなければならない．そして，それはすべての質量について同じである．このようにして，格子宇宙は 4%以上の精度まで［Lindquist and Wheeler, Wheeler（1964a), pp.370–381］Friedmann 宇宙と同じ膨張および再収縮の法則に従うという結論にいたる．さて再び，宇宙が膨張しているときに立方キロメートルの空間がどこで宇宙に流れ入るか，そして宇宙が再収縮しているときにどこで流れ出るかについて同じ無意味な質問を尋ねる．なぜ質問は無意味であるかのより完全な描像を受け入れよ．各質量中心を取り囲んで，幾何学は Schwarzschild の幾何学であり，そしてあり続ける（究極的にブラックホールは互いに非常に接近し合体するまで）．各セル内の情勢はしたがって静的である．さらに，セルとセルとの間の境界領域は想像上，非常に軽い試験粒子の散布によって定義されているのでそれらは幾何学あるいはセルの力学に影響をもたない．1 つのセルでの幾何学と隣のセルの幾何学との間の一致は滑らかである（"2 つの幾何学の間の接触"）．境界領域上およびその近くでの時空に異常なものは何も存在しない．われわれは小さい権利としてこれらの立方キ

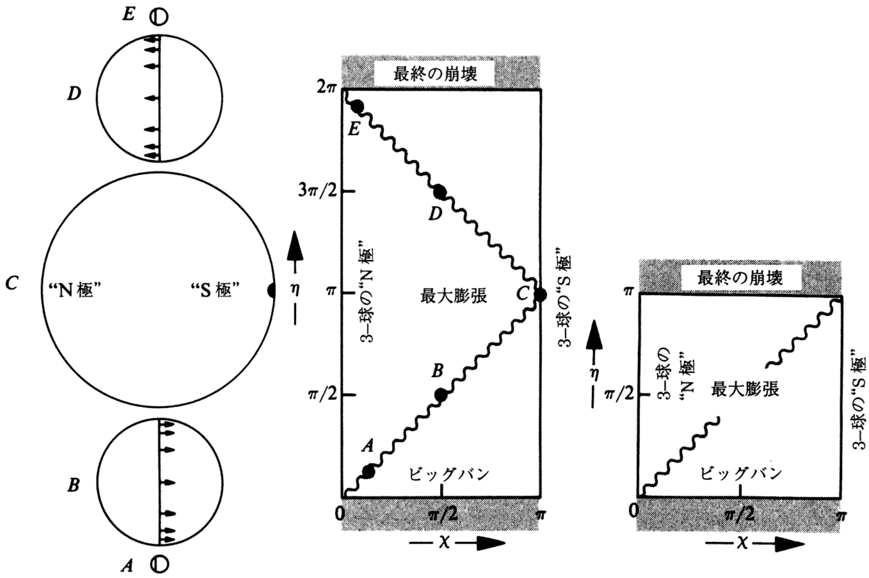


図 27.4 時間座標として"弧パラメータ" η を，そして超極角 χ を空間座標として用い，物質優勢（中央）あるいは放射優勢（右）である Friedmann 宇宙内での光子の進行（±45 度線）を記述する．光子の爆発はビッグバン後きわめてわずかな時間に 3–球の "N 極" から放出される，そして膨張と再収縮の相次ぐ段階での光子の群の軌跡は左の図における 3–球の部分によって示されている．物質優勢の Friedmann 宇宙は，その次元が最大膨張時の 1 万分の 1 あるいはそれ以下（"放射支配"）の程度に落ちてしまうときを除いて，物理学的な宇宙に対する適正な模型であるようにみえる．

ロメートルが他の任意の場所と同じくここに "創造される" と言わなければならない．空間の "創造" について言うことは悪い言い方であり，そして元の質問は悪い質問である．正しい言い方は力学的な幾何学について語ることである．1 つの質問に対してはここまで！

Friedmann 宇宙の幾何学の力学を図表で示すには，空間座標として，規準系としてのある選ばれた世界線（"宇宙論的な流体" とともに動く）から測定された超極角 (hyperpolar angle) χ をとり，そして時間座標として，時間の弧パラメータ測度 η を，図 27.4 に例示されているようにとるのが物事を簡単化することがしばしばわかる．

*44 (χ,η) 図を視察すると，1 点での物質から放出された光子は 3–球の制限された部分内に位置する物質を除くどのような物質にも，制限された時間内に到達できないことは明らかである．短い時間 t では，コラム 27.3 によると，光子はただ $\eta=(2t/a^*)^{1/2}$ に等しい 3–球上の弧距離を覆うことができる．さらに，光子について真実であることは他の場，力，圧力，エネルギー，影響について真実である．それらはこの限界を越えて到達できない．明らかに時間 t での 3–球はいくつかの "ゾーン" に分割される．

$$
\begin{aligned}
N = (\text{“ゾーン” の数}) &= \frac{(\text{全 3–球の超球面立体角})}{(\text{1 ゾーンの超球面立体角})} = \frac{2\pi^2}{4\pi\chi^3/3} \\
&= \frac{3\pi}{2^{5/2}}\left(\frac{a^*}{t}\right)^{3/2}
\end{aligned}
\tag{27.62}
$$

*44 (5) 宇宙の種々の領域を互いに他から因果的に分離する

効果的に互いに他から分離している．時間が経つにつれて，分離したゾーンの数が少なくなる．そして究極的に模型宇宙ですべての粒子がすべての他の粒子から影響を受けることになってしまう．

［練習問題］

27.8　Friedmann 宇宙論の物質優勢の形態および放射優勢の形態

曲がった空間の中心的な性質を除いて，コラム 27.3 の最後の 2 列にリストされている結果を導け．

27.9　放射–優勢の形態から物質–優勢の形態への推移

式 (27.51) における放射項と物質項の両方を含んで，弧パラメータ $\eta(d\eta = dt/a$ である) を独立変数として用いることによって式を書き直し，そして積分して

$$a = (a_{最大}/2) - [(a_{最大}/2)^2 + a^{*2}]^{1/2}\cos(\eta + \delta) \tag{27.63}$$

$$t = (a_{最大}/2)\eta - [(a_{最大}/2)^2 + a^{*2}]^{1/2}[\sin(\eta + \delta) - \sin\delta] \tag{27.64}$$

を見出せ．ここに

$$\delta = \arctan[a^*/(a_{最大}/2)] \tag{27.65}$$

(a) 適切な条件のもとで，これらの表現は初期には半径と時間との間で“円”の関係に，後期には“サイクロイド”の関係に帰着することを確かめよ．

(b) a^{*2} に値 $a_0 a_{最大}/10{,}000$ を割り当て（なぜか？），そして密度の次元をもたない測度に対する曲線，

$$\log_{10}\left[(8\pi a_{最大}{}^2/3)\begin{Bmatrix}\rho_m \\ \rho_r \\ \rho_m + \rho_r\end{Bmatrix}\right]$$

を時間の次元をもたない測度の関数，

$$\log_{10}(t/a_{最大})$$

として構成せよ．これらの曲線の対数的な傾きを調べることからどのような結論が現れるか？

27.10　膨張しているおよび再収縮している球面波の波面

物質優勢の Friedmann 模型宇宙の“N 極”で，宇宙の半径がその最大値の半分に達した，“弧パラメータ時間”$\eta = \pi/3$ の値で，爆発が起こる．光子は爆発から球面波の波面上で競争する．波面がその最大の固有表面積をもつ瞬間に，この波面は“宇宙論的な流体”の何割を貫通したか？

27.11　Einstein の宇宙論の概念を破る均質等方な模型宇宙

*45 半径 a の閉じた 3–球を同じスケール長 a をもつ式 (27.22) の開いた双曲面的な幾何学によって置き換えることは，Einstein の理論の式を破らないけれども彼の宇宙論の概念を破る（コラム 27.1）．そうであっても，コラム 27.3 の結果は，物質優勢および放射優勢の力学
*46 の 2 つの極限的な形態において以下の変化がなされるときは適用し続ける．（1）“Newton のエネルギー方程式” の類似物の右辺の定数 -1 を $+1$ に代える．こうして束縛系（最大膨張）から開いた系（永久に膨張する）へ移行する．（2）$(1-\cos\eta)$ を $(\cosh\eta-1)$ によって，$\sin\eta$ を $\sinh\eta$ によって，$\cos\eta$ を $\cosh\eta$ によって，そして $(\eta-\sin\eta)$ を $(\sinh\eta-\eta)$ によって置き換える．（3）“弧のパラメータ”η の領域は今や 0 から ∞ まで延びる．そして “半径”a を時間 t に関係づける曲線はサイクロイドあるいは円から，つねに上昇する曲線に変化する．（4）Hubble 時間（膨張の実際の時間に関係するものとして）および密度
*47 $(3H_0^2/8\pi$ に関係するものとして）についてリストされている不等式はもはや成り立たない．（5）初期での条件に対するコラム 27.3 に与えられている公式は簡単な理由のために成り立ち続ける．初期には “増大する時間の向きでの” 時空の曲率 [コラム 27.1, 式 (2) に現れるように外在曲率 $(6/a^2)(da/dt)^2$] は，均質性の任意の超面内での曲率，$\pm 6/a^2$（内在曲率）よりも圧倒的に重要である．したがって符号が $+$ であるかあるいは $-$ であるか，空間が閉じているかあるいは開いているか，空間の幾何学は球面的であるかあるいは双曲面的であるかは，初期には認められうる相違をつくらない．

なぜ相違をつくらないか？　数学的にではなく，なぜ物理学的に，空間が開いているかあるいは閉じているかは初期に相違をつくらないか？　なぜならば，光子，信号，圧力，力，およびエネルギーは閉包と開放の間の相違を “嗅ぎ分ける” に十分なところまで達しえないからである．式 (27.62) の “影響のゾーン” は何に対しても小さすぎて負の空間曲率 $-6/a^2$ と正の空間曲率 $+6/a^2$ との間のいかなる相違をも十分感知したりあるいは相違に反応したりすることができない．したがって閉じた宇宙に対するコラム 27.3 に与えられている放射の質量–エネルギーの密度の簡単なべき法則の時間依存性は，放射優勢の，開いた等方的な模型宇宙の初期において，同じくよく成り立つ．こうして

$$\rho_r = 3/32\pi t^2 \tag{27.66}$$

“外在曲率” 項 $(6/a^2)(da/dt)$ [コラム 27.1, 式 (2)]（コラム 27.3 によれば，最初 $1.5t^{-2}$ のように変化する）が “内在曲率” 項 $\pm 6/a^2$（最初 $\pm 3a^{*-1}t^{-1}$ のように変化する）と同じ程度の大きさの値に落ちた膨張の後期においてのみ，内在曲率の符号が重要になり始める．そのときに初めて膨張率での相違が，開いた模型宇宙の閉じた模型宇宙からの区別を示し始める．

---

*45　$\Lambda=0$ をもつ開いた Friedmann 宇宙

*46　(1) 時間の関数としての膨張因子

*47　(2) 初期の段階—閉じた宇宙に対するのと同じである

*48　開いた模型宇宙は永久に膨張を続ける．したがって質量–エネルギーの密度は，物質優勢で $a_{最大}/a^3$ に比例しようとも，あるいは放射優勢で a^{*2}/a^4 に比例しようとも，あるいは 2 つのある結合であろうとも，(1) 究極的には内在曲率，$-6/a^2$ に比べて無視できるレベルに落ちる，そして (2) それ以後無視できる．このような状況のもとで，内在曲率と平衡すべく残される唯一の項は外在曲率である．場の方程式の重要な成分は（共通の因子 3 をすべての項から除いた後に）今や

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{1}{a^2} = 0 \tag{27.67}$$

となる．閉じた宇宙に対しては，2 項は（1 項は外在曲率の 1/6 倍であり，もう 1 つの項は内在曲率の 1/6 倍である）は同じ符号をもち，そして式 (27.67) のようなどのような式も不可能になる．ここでは，しかし，不可能よりもむしろ，驚くほど簡単な解

$$a = t \tag{27.68}$$

と，そして対応する計量

$$ds^2 = -dt^2 + t^2[d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \tag{27.69}$$

をもつ．

$$r = t\sinh\chi,$$
$$t_{新しい} = t\cosh\chi \tag{27.70}$$

と書くと，式 (27.69) は，Einstein の空の空間の場の方程式の解であるが，平坦な時空の Lorentz–Minkowski 計量

$$ds^2 = -dt^2_{新しい} + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{27.71}$$

と同等であることがわかる（コラム 27.2C をみよ）．この幾何学は膨張する宇宙の香りを獲得した．なぜなら宇宙論的な流体はあまりに薄く広がって幾何学の力学に影響を及ぼすことができなくなり，標示点を与えるためにだけ役立ち，すべての方向に飛び散ったからである [この "膨張する Minkowski 宇宙" のより完全な議論に対しては，たとえば，Robertson and Noonan (1968) の 16 章をみよ]．均質性の代表的な空間的な超曲面は，曲がった 3–空間幾何学をもつようにみえる．そして曲がった幾何学をもつ（内在曲率）．なぜなら薄片 (27.70) は平坦な時空を通して自ら曲がっているからである（外在曲率）．

*49　さて Einstein の宇宙論の概念の 2 番目の破れに向かう．場の方程式 (27.39) における宇宙項，

*50
$$\left(\frac{da/dt}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi}{3}\rho(a) = \frac{8\pi\rho_{m0}a_0^3/3}{a^3} + \frac{8\pi\rho_{r0}a_0^4/3}{a^4} \tag{27.72}$$

---

*48　(3) 後の段階—永久の膨張

*49　$\Lambda\neq 0$ をもつ均質な宇宙論

*50　(1) 膨張因子の発展に対する方程式

である．この拡張された式の意味を解析するとき，注意を Friedmann 宇宙について前節で興味の焦点であった，“半径”$a(t)$ 自身から変えよ．現在の測定は，宇宙の絶対的な大きさ $a(t)$ についてよい，直接的な取り手をいまだ与えていないことを認めよ．しかし，現在の測定は赤方偏移 z に対して，すなわち放出の時間における a と現在の $a = a_0$ との間の比に対してよい数値を与える．

$$a_0/a = 1 + z \tag{27.73}$$

k（Einstein の値 $k = +1$）について，および Λ（ゼロであると期待される）についての極限を固定するために設計された観測との任意の比較のために，前述の方程式をそれらができるだけ比のみに関係するよう書き直すことが適切である．こうして“一般化された Friedmann 方程式”として式 (27.72) を述べ直す．

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{a(t)}{a_0}\right)\right]^2 + V(a/a_0) = -\frac{k}{{a_0}^2} \equiv -K_0 \tag{27.74}$$

ここに量

$$V(a/a_0) \equiv -\frac{8\pi}{3}\left[\rho_{m0}\left(\frac{a_0}{a}\right) + \rho_{r0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right] - \frac{1}{3}\Lambda\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \tag{27.75}$$

は膨張の力学に対する“有効ポテンシャル”として作用する．定数項 K_0 は今日の模型宇宙の内在曲率の 1/6 倍を表している．その負，$-K_0$ は，一般化された Friedmann 方程
*51 式（コラム 27.5）における“有効エネルギー”の役割を演じる．宇宙論のすべての定性的な特徴は (a/a_0) の関数としての有効ポテンシャルに対する曲線から，そして K_0 の値から読み取りうる．

定量的な解析に対しては，図 27.5 の log–log 図はコラム 27.5 の (a/a_0) に対する V の直線図よりもしばしば有用である．

宇宙論の種々の型に示されるすべての極限的な特徴は，基本的な Friedmann 宇宙論の解析においてすでに遭遇している（無限大の収縮の構成からのビッグバン，転換点で最大膨張に達するか，あるいは Minkowski 宇宙への連続した膨張，無限大密度への再崩壊）．あるいは Λ が正で大きさ a がある臨界値を越えたときに起こるさらに急速な膨張を除いて，簡単に視覚化ができる（静的であるが不安定な Einstein 宇宙，“躊躇”模型，“方向転換”模型）．この膨張で，宇宙の開放あるいは閉包 $(k = 0, \pm 1)$ にかかわらず，a は最終的に $\exp[(\Lambda/3)^{1/2}t]$
*52 のように増大する．この膨張は宇宙論のすべての他の特徴を支配する．したがって，この膨張を議論するときには，宇宙論のすべての他の特徴を削除し，物質の密度は無視できるものと考え，そして $k = 0$（平坦な 3–空間の幾何学を与えられた均質な超曲面）をとるのが適切である．この極限では宇宙定数をもつ Einstein の場の方程式の以下の空の空間の解をもつ．

$$ds^2 = -dt^2 + a_0^2 e^{2(\Lambda/3)^{1/2}t}[d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \tag{27.76}$$

---

*51 (2) 発展の定性的な特徴

*52 (3) ドジッター（de Sitter）宇宙

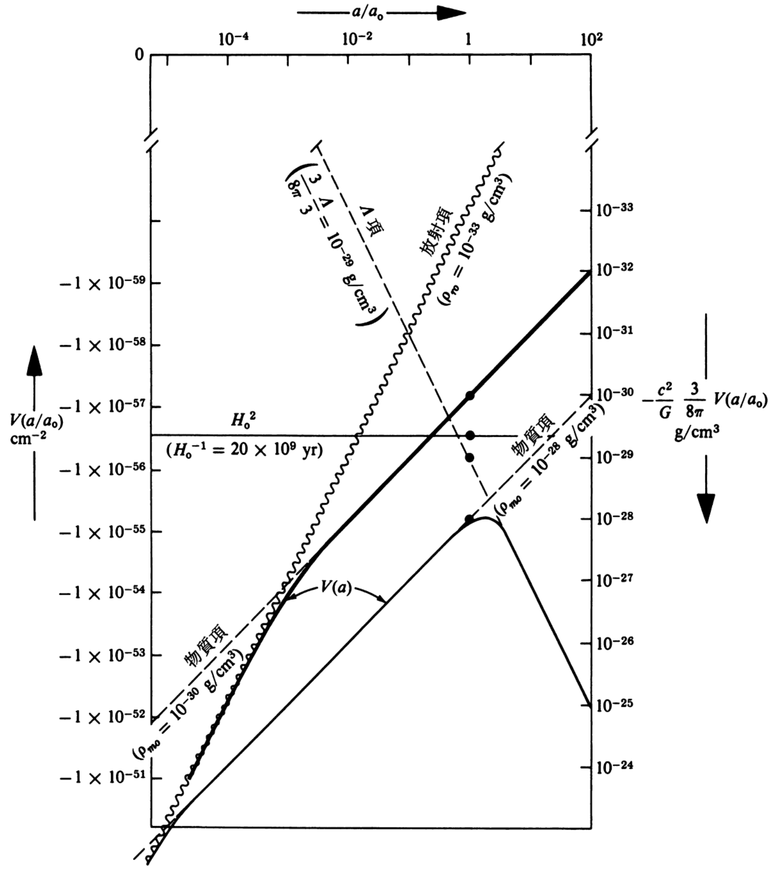


図 27.5　式 (27.75) およびコラム 27.5 の有効ポテンシャル $V(a)$ が一般化された Friedmann 方程式

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{a(t)}{a_0}\right)\right]^2 + V\left(\frac{a}{a_0}\right) = -\frac{k}{a_0^2} = -K_0$$

に入るとき，有効ポテンシャル $V(a)$ の log–log 図．水平方向の基準として $(a/a_0)_{今日} = 1$ に参照された膨張比が与えられている．垂直方向に cm^{-2} の幾何学的な単位での $V(a/a_0)$ の値が与えられている．右側の補助的なスケールは $\mathrm{g/cm^3}$ で表された，同等な密度としての $-(c^2/G)(3/8\pi)V(a/a_0)$ に翻訳をする．有効ポテンシャルへの放射密度の寄与は，図の波状の線によって示されている．それは $\rho_{r0} = 10^{-33}\,\mathrm{g/cm^3}$ の今日の放射密度の値に規格化され，そして 2 の対数的な傾斜をもつ．“有効ポテンシャル” への物質密度の寄与は 1 の対数的な傾斜をもつ．それに対する 2 個の選択が，今日の物質密度（図の破線）$\rho_{m0} = 10^{-30}\,\mathrm{g/cm^3}$ および $\rho_{m0} = 10^{-28}\,\mathrm{g/cm^3}$ に対応してなされる．2 個の場合における全有効ポテンシャルもまた図に示されている．$\rho_{m0} = 10^{-30}\,\mathrm{g/cm^3}$ に対しては太い線（宇宙項は含まれていない），および $\rho_{m0} = 10^{-28}\,\mathrm{g/cm^3}$ に対しては細い線である．この 2 番目の場合には，$(3/8\pi)(\Lambda/3) = 10^{-29}\,\mathrm{g/cm^3}$ によって与えられる宇宙定数をもつ，宇宙項が含まれている．この項の寄与を記述する線は大きさ 2 の負の傾斜をもつ（破線）．水平線あるいは “水準線” は $1/(20\times10^9$年$)$ に等しい，今日の Hubble の膨張率，H_0 の値に対して描かれている．ポテンシャル曲線と水準線との間の対数図上の垂直な分離は比 $-V/H_0^2$ を与える．任意の時間 t で評価されるときのこの比は値 $\dot{a}^2(t)/\dot{a}_0^2 + K_0H_0^{-2}$ をもつ．ここに $\dot{a} \equiv da/dt$．“今日” 評価されるとき $(a/a_0 = 1)$．この比は値 $1 + K_0H_0^{-2}$ をもつ．今日の Hubble の膨張率 H_0^2 を知り，そしてポテンシャル曲線を知って（あるいはポテンシャル曲線に対するあるパラメータの組を試みて），2 個の間の広がりから $1 + K_0H_0^{-2}$ の値を，したがって $K_0H_0^{-2}$ の値を，したがって曲率因子の現在の値，K_0 を導き出すことができる．例として低密度の宇宙の場合（太い線）を考え，そして “今日の” 値，$1 + K_0H_0^{-2} = 0.223$ を読む．これから $K_0 = -0.777H_0^2$ が出る（開いたあるいは双曲線の宇宙），したがって $k = -1$ および $a_0 = (k/K_0)^{1/2} = (1.0777)^{1/2}20\times10^9$年 $= 22.7\times10^9$ 年．$\rho_{m0} = 10^{-28}\,\mathrm{g/cm^3}$ をもつ高密度の模型宇宙に対しては，同様に $1 + K_0H_0^{-2} = 24.5$，したがって $K_0 = +23.5H_0^2$．したがって $k = +1$（閉じた宇宙）および $a_0 = (k/K_0)^{1/2} = (1/23.5)^{1/2}20\times10^9$ 年 $= 4.12\times10^9$ 年を見出す．ポテンシャルおよび水準線間の比 $-V/H_0^2$，あるいは $\dot{a}^2(t)/\dot{a}_0^2 + K_0H_0^{-2}$ が，$1 + K_0H_0^{-2}$ の “現在の値” から $0 + K_0H_0^{-2}$ へ．すなわち，1 つの場合には 0.223 から −0.777 へ，別な場合には 24.5 から 23.5 へ落ちる段階で，膨張が止まる場合に限り，膨張は止まる．この log–log は $\Lambda < 0$ のときコラム 27.5 の線形図面によって置き換えられるべきである．

この“ドジッター宇宙”［de Sitter（1917a,b)］は計量

$$ds^2 = -(dz^0)^2 + (dz^1)^2 + (dz^2)^2 + (dz^3)^2 + (dz^4)^2 \tag{27.77}$$

を与えられた，5 次元空間内の 4 次元曲面

$$-(z^0)^2 + (z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2 + (z^4)^2 = 3/\Lambda \tag{27.78}$$

とみなしてよいだろう．この記述の正しさは置換

$$\begin{aligned}
z^0 &= (3/\Lambda)^{1/2}\sinh[(\Lambda/3)^{1/2}t] + \frac{1}{2}(\Lambda/3)^{1/2}e^{(\Lambda/3)^{1/2}t}a_0^2\chi^2, \\
z^4 &= (3/\Lambda)^{1/2}\cosh[(\Lambda/3)^{1/2}t] - \frac{1}{2}(\Lambda/3)^{1/2}e^{(\Lambda/3)^{1/2}t}a_0^2\chi^2, \\
z^1 &= a_0 e^{(\Lambda/3)^{1/2}t}\chi\sin\theta\cos\phi, \\
z^2 &= a_0 e^{(\Lambda/3)^{1/3}t}\chi\sin\theta\sin\phi, \\
z^3 &= a_0 e^{(\Lambda/3)^{1/2}t}\chi\cos\theta
\end{aligned} \tag{27.79}$$

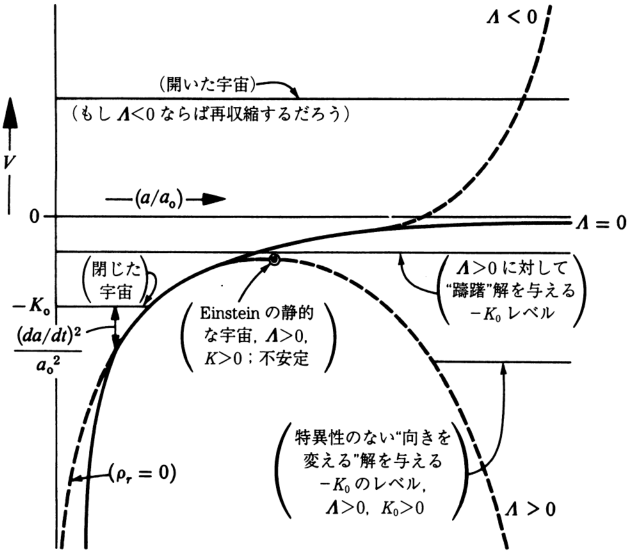
をすることによって直接確かめられるだろう．その美しい群論的な性質および $5\times4/2 = 10$ 個の独立な回転についての不変性のゆえに，ドジッター幾何学は数学的な研究の理由の原因であった．ドジッター模型に従う宇宙論の物理学的な意味は，たとえば Robertson and Noonan (1968, とくに彼らの 16.2 節) によって記述されている．ドジッター模型は Einstein の方程式（$\Lambda \neq 0$ をもつ）に従う．(1) つねに膨張し，そして (2) 宇宙論的な流体とともに動く任意の観測者に，彼の位置あるいは彼の時間に関係なく，同じにみえる唯一の模型である．条件 (2) を満たす宇宙の任意の模型は，いわゆる“完全な宇宙原理”に従うと
*53 言われる．この語句は一般相対論の構造外に存在する模型を研究する際に過去に生じた．
*54 この模型では物質は連続的に創造されると想像される．そしてこの模型に“定常宇宙”という名前が与えられている．任意のこのような模型は，今日のたいていの研究者によって放棄されている．大きい理由は，このような模型は 2.7 K 背景放射の満足な説明を与えないからである．

コラム 27.5　宇宙の予期された過程についての，宇宙定数および“今日”の模型宇宙の内在曲率の値の効果

一般化された Friedmann 方程式 (27.74) における“有効ポテンシャル”V は，ここで図式で膨張比 a/a_0 の関数として表されている．図は (1) 宇宙定数 Λ（a/a_0 の大きな値での有効ポテンシャルの振る舞いを定める．ダッシュのついた曲線をみよ）および (2) $K_0 =$（現在の時期での 3–空間の内在曲率の 1/6 倍）に対して採用された値の，宇宙論についての影響を例示している．量 $-K_0$ の値は“有効エネルギーレベル”を定め，そして図で水平線として示されている．水平線と有効ポテンシャルとの間の差は

*53　他の非 Einstein 的な宇宙論
*54　(1) 定常模型

$(a_0^{-1}da/dt)^2$ を定める．この差が負である領域は受け入れることができない．図から 3–空間の履歴を読み取ることができる．図は概要であって，定量的でない．代表的な値は $\Lambda_{\text{慣習}} = 0$ あるいは $\pm 3\times 10^{-28}\,\mathrm{g/cm^3}$，$\rho_{m0,\,\text{慣習}} = 10^{-30}\,\mathrm{g/cm^3}$ あるいは $\rho_{m0,\,\text{慣習}} = 10^{-28}\,\mathrm{g/cm^3}$，および $(a_0^{-1}da/dt)^2 = H_0^2 = (1/20\times 10^9\,\mathrm{yr})^2$ あるいは $\rho_{m0,\,\text{慣習}} = 3.8\times 10^{-29}\,\mathrm{g/cm^3}$ であるだろう．a/a_0 の小さい値で宇宙項 $-(\Lambda/3)(a/a_0)^2$ は無視できる．物質の密度によってのみ曲がった模型宇宙（図のダッシュのついた曲線）と，放射の密度によって曲がった模型宇宙（完全な曲線）との間の差は (a/a_0) の小さい値で無視できない．“半径” と密度の，物質優勢の宇宙論と放射優勢の宇宙論のこれらの 2 つの場合における初期での時間についての異なる依存性は，コラム 27.3 の最後の部分に詳しく説明されている，1 つの場合には $\rho = 1/6\pi t^2$ を，他の場合には $\rho = 3/32\pi t^2$ を与える．



今日の空間の内在曲率	Λ	宇宙論
双曲線的，K_0 は負である	負	宇宙は無限大の密度の状態で始まる．宇宙は Λ の値によって支配される最大の大きさ（あるいは最小の密度）まで膨張する．それから無限大の密度の状態までつねに増大する割合で再収縮する．
双曲線的，K_0 は負である	ゼロ	宇宙は無限大の密度の状態で始まる．宇宙は膨張する．究極的に膨張率は定常率 da/dt=1 に達する．4–幾何学は Minkowski の平坦な時空である．この平坦な 4–幾何学

		を通してとられる空間的な薄片の曲率のみが，3–幾何学に双曲線的な特徴を与える［式 (27.70) をみよ］.
閉じている，K_0 は正である.	ゼロ	標準的な Friedmann 宇宙論: 無限大の収縮から有限の半径へ膨張し，そして再収縮し，そして崩壊する.
閉じている，K_0 は正である	負	定性的に上述の場合と同じである．定量的に最大膨張の位相でわずかにより小さい半径であり，そして始まりから終わりまでわずかにより短い時間である.
閉じている，K_0 は正である	Λ はある臨界値よりも大きく正である. $\Lambda > \Lambda_{臨界}$	“有効ポテンシャル” の “頂上” は $-K_0$ よりもわずかに小さい値に減少する．閉じた宇宙は再び無限大の収縮の状態から膨張を始める．この膨張は，膨張が進むにつれて再び遅くなり，それからほとんど止まっていくようにみえる（“逡巡の瞬間”）．しかし，代表点はゆるやかにポテンシャルの頂上を越える．それから膨張はますます速度を増す．膨張は最終的に指数関数的な法則に従う. $$a = 定数\times\exp[(\Lambda/3)^{1/2}t]$$
閉じている，K_0 は正である	Λ は正で，“ポテンシャルの頂上” を $-K_0$ に一致させる，臨界値，$\Lambda = \Lambda_{臨界}$ に厳密に等しい	テーブルに突き刺された先端をもつ鉛筆の状況に似て，無限大の時間で漸近的に鉛直の位置にちょうど上がるだけのエネルギーを与えられた状況．宇宙は固く締まった構成から出発し膨張して，ある半径（“Einstein 半径”，a_E）に式 $$a = a_E - 定数\times\exp(-\alpha t)$$ の法則に従って近づく．あるいは (Einstein は宇宙は静的であると考え，場の方程式が静的な宇宙を認めるように，彼の意志に反して “宇宙項” を追加したときの，Einstein の元の提案) 代表点は “有効ポテンシャルの頂上” に永久にとどまる (Einstein 宇宙)．膨張についての矛盾する現在の証拠の他に，この構成は先端の上に立とうとする鉛筆がもつのと同じ不安定さをもつ．最小の摂動は宇宙が崩壊へあるいは加速された膨張へのいずれかの

		側へ “落ちる” 原因となるだろう，膨張の場合には最終的に法則 $a = 定数\times\exp[(\Lambda/3)^{1/2}t]$ に近づく．
閉じている， K_0 は正である	Λ は臨界値より小さく正である．$0 < \Lambda < \Lambda_{臨界}(K_0)$	“ポテンシャル障壁” の大きい a 側での運動．はるか過去においては模型宇宙は巨大な大きさをもつが，しかしまた巨大な速さで収縮している，近似的に公式 $a = 定数\times\exp[-(\Lambda/3)^{1/2}t]$ と一致して，半径 a は最小値に達しその後宇宙は再膨張し，(“方向転換の解”)，最終的には漸近法則 $a = 定数\times\exp[(\Lambda/3)^{1/2}t]$ に近づく．

宇宙定数あるいは開いた宇宙に何らかの注意を払うことは，Einstein の宇宙論の概念から
*55 大きな逸脱であったが，宇宙の “階層型の模型” を意図することはさらに大きい逸脱である．その模型では，銀河の群，および銀河の群の群が，宇宙のこの部分で距離とともに，大きい距離で空間とともに密度について等級が落ち，漸近的に平坦になると想像される［Alfvén and Klein (1962), Alfvén (1971), Klein (1971), Moritz (1969), de Vaucouleurs (1971), Steigman (1971)］．ここで採用されている観点は Oskar Klein によって以下の言葉で表されている．“Einstein の宇宙論は，観測される部分は膨張している．いわゆる宇宙論的な必要条件は一種の公理的な背景として用いられた，それは，解析されると，この膨張は非常に大きいが，しかし依然制限された系によって共有されるように現れる．これはわれわれの膨張するメタ銀河 (metagalaxy) はおそらく，あるものは膨張しておりそしてあるものは収縮しているという，発展の異なる位相における天体の 1 つの型であることを意味する．”

階層型の宇宙論と Einstein の宇宙論［Einstein (1931) は閉じた Friedmann 宇宙論を擁護する］との間の対照は，1 つは漸近的に平坦な時空を必要条件とみなし，他は不合理とみなす，という点に最も強く現れる．“唯一でありそして理解されていない Riemann の天才のみが，すでに前世紀の半ばまでに空間の新しい概念への道を切り開いた．そこでは空間は堅さを奪われ，そして物理学的な事象に参加する空間の力が可能であると認められた” と Einstein (1934) は述べる．その陳述は今日の宇宙論を要約する．

しかし，Einstein の境界条件，閉包 $(k = +1)$ および $\Lambda = 0$ についての彼の信念によって支配されるような，宇宙論の今日の観点は，Einstein の予言は明白でありそして確かであると永久に忠実に受け入れられるには及ばない．それらは破滅にさらされる．観測論的

*55 (2) 階層型の模型

な宇宙論は究極的にそれらを確認するかあるいは破壊するだろう．それは静的な宇宙についての 1920 年の信念および 1948 年の定常状態の模型をすでに破壊したように，決定的なやり方であるだろう（宇宙論の歴史についてはコラム 27.7 をみよ）．

［練習問題］

27.11　頭の後ろをみることについて

“宇宙の流体” に相対的に静止している人間は，Friedmann 宇宙論に従いそしてゼロでない宇宙定数をもつ閉じた模型宇宙の周りを初めから終わりまで旅する光子によって彼の頭の後ろをみることができるか（ゼロの宇宙定数の場合に対してはコラム 27.3 における記載をみよ）？

27.12　保存則は潮汐重力による空の空間からの粒子–反粒子の対生成を禁止するか？

以下の議論について，間違っていることを見出せ．“古典的な方程式

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

は対の生成と共存できない．なぜなら上式は恒等式 $T_\alpha{}^\beta{}_{;\beta} \equiv 0$ に通ずるからである．初期状態は真空であるとし，そして $T_{\alpha\beta}$ およびその微分が超曲面 $t =$ 一定あるいは $t = -\infty$ 上でゼロに等しいとする．そうすると $T_\alpha{}^\beta{}_{;\beta} = 0$ から，真空はつねに保存されることが出る．”［答え：Zel'dovich（1970, 1971, 1972）をみよ．また 30.8 節をみよ．］

27.13　物質密度を無視した折り返し宇宙模型

もし折り返し（最小半径）が式 (27.75) におけるポテンシャル $V(a)$ の最大のはるか右（大きい a）で起こるならば，物質項は無視できるだろう．$\rho_{m0} = \rho_{r0} = 0$ とする．そうすると（折り返しをもつためには k, Λ のどのような符号が必要とされるか?），折り返し $(t = 0)$ の近くで $\Lambda = 3(a_{最小})^{-2}, H = (a_{最小})^{-1}\tanh(t/a_{最小})$ でありそして減速度パラメータ $q \equiv -(1/H^2 a)(d^2a/dt^2)$ は値

$$q = -a^2(a^2 - a_{最小}^2)^{-1} < -1$$

をもつことを示せ．

27.14　“躊躇” 宇宙

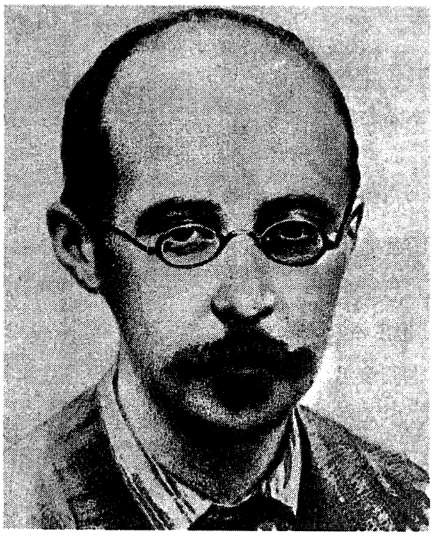
式 (27.75) における放射を無視せよ．しかし宇宙は非常に長い時間を a_h（a_h は障壁の最高点の位置，あるいは宇宙がもっとも動きのにぶいときでの宇宙の大きさを測定する）に近い $a(t)$ で過ごすように K_0 および Λ が選ばれると仮定せよ．$a_h = a_0/3$ を選んで $z = 2$ の近くに異常に大きい数のクエーサー赤方偏移を生み出せ［Burbidge and Burbidge (1969a,b) が真実であると信じているように．ただし，彼らの意見はすべての観測者によって共有されていない］．(a) 物質の密度は今日，式 (27.75) における $H_0^2 = (\dot{a}/a)^2_{今日}$ の値の 10%のみを説明するだろう（“見つかっていない物質”，すなわち，K_0 および Λ 項は，90%を説明する），(b) $a_h \simeq 20^{1/2} H_0^{-1}$，および (c) 前述の練習問題で定義されている減速度パラメータは，“今日” 求められているように，値 $q_0 = -13/10$ をもつことを示せ．

27.15　特異点をもたない過去の折り返しで，黒体放射に対して不透明な宇宙は不可能なパラメータを要求する

コラム 27.5 におけるプロットから，現在 2.7 K の黒体放射を含み，しかし $k = +1$ および $\Lambda > 0$ で，黒体温度が水素がイオン化される 3,000 K に達した過去の折り返し（最小半径）をもった宇宙の模型を構成せよ．現在受けられている値よりも小さいできるだけ小さい H_0^{-1} および ρ_{m0} の値を用いるように試みよ．

コラム 27.6　Alexander Alexandrovitch Friedmann

1888 年 6 月 17 日 St. Petersburg 生まれ，1925 年 9 月 15 日 Leningrad に没．



1909 年 St. Petersburg 大学卒業，1922 年 Ph.D. 取得，1910 年 the Institute of Bridges and Roads において数学講師，1912 年 the Institute of Mines において微分計算法についての講師，1913 年 Aerological Institute of Pavlov において物理学者，1914 年 8 月の太陽の食を観測するための準備中に操縦士に昇進，1914 年 Osovets 近くの前線の航空軍団への志願兵，1916–1917 年陸軍航空術軍隊の隊長，1918 年 Perm 大学で数学の教授，1920 年 St. Petersburg 大学，1922 年**圧縮性流体の流体力学についての実験**および**空間および時間としての世界**の著者であり，そして，革新的な論文，**空間の曲率について**を発表する．the Main Geophysical Laboratory, Leningrad の理論気象学教室における研究の指導者，そして，1925 年 2 月から 7 ヶ月後の腸チフスによる死まで，その研究室の責任者であった，L.V. Keller とともに "結合モーメント，

すなわち，異なる点および異なる瞬間における流体力学的要素の脈動の積に対する数学的な期待値の概念を導入して，乱流の物理学的な構造を解明した”［Polubarinova–Kochina（1963）より要約．それはまた Friedmann および自身についての事項の参考文献一覧を含んでいる］．

コラム 27.7 より広い展望とより確かな基礎へ向かう宇宙論の歩み

［宇宙論の歴史に関する一般的な文献に対しては，数ある中でも，Munitz（1957），Nasr（1964），North（1965），Peebles（1971），Rindler（1969），および Scima（1971）をみよ．そして簡略化された形で以下にまとめられた現在の進展への参考文献一覧に対しては，とくに Peebles and Scima をみよ．］

A. 20 世紀以前

非常に昔のインド人の宇宙論の概念［Zimmer（1946）によって要約されている］：“1000 のマハーユガ（mahāyugas）—人類の計算の 4,320,000,000 年—がブラフマー（Brahmā）の 1 日，1 カルパ（kalpa）を構成する…．私は恐ろしい宇宙の崩壊を知った．すべてがサイクルのたびに，再びそして再び，滅びるのをみた．その恐ろしいときに，すべての個々の原子は，それからすべてが生じた最初の純粋な永久の水に分解される．”

Plato，紀元前約 428 年–約 348 年［**Timaeus** より．彼の人生後期に書かれ，Cornford（1937）によって翻訳された］：“世界［宇宙］は，合理的な論述と認識によって理解できるような模型の上につくられている．そしてつねに同じ状態にある…この世界は実在するようになった…．魂と理性をもつ生物…その制作者は 2 つの世界をつくらなかった，そしていまだ不定の数をつくっていない．しかしこの天国は実在するようになったしそして実在するし，そして今後も 1 つでありただ 1 つであるだろう…．制作者はこの天国を完全な，そして老いや病気のないようにつくった…．制作者はこの天国の形を丸く球形につくった…．目は必要なかった，なぜならみえるものは何も外部に残されてなかったから．聞き取りの必要もなかった，なぜなら聞かれるべきものは何も外部にはなかったから…．時間が存在するようになるために，太陽と月と 5 個の他の星— ‘放浪者’ とよばれている—が時間を定義し時間の数を保存するためにつくられた…．この宇宙の生成は必然と理性の混じり合った結果であった…．われわれはまた遍歴する原因を導入しなければならない…．本質的にすべての種類［すべての形］はすべての特徴［すべての形］から自由でなければならないことを受け入れなければならない原因…．そうすると，この理由のために，母親および目にみえたり，別な風に感知されるようになったものの入れ物は，土あるいは空気あるいは火あるいは水と

よばれてはならない….見分けにくい，そして特徴のない，すべてを受け入れる，理解できるもののある非常に当惑させる方法を分かち合う，そして非常に理解しがたい自然.”

Aristotle, 紀元前 384–322 年 [**天空について** (On the Heavens) から，Guthrie (1939) によって翻訳されている]："すべての過去の時間にわたって，世代から世代へ伝えられた記録によれば，われわれは一番外側の天空の全体においても，あるいはその固有の部分のどの 1 つにおいても，変化の軌跡を見出さない….天空の形は球形でなければならない….これらの考察から [運動は不変に，中心に向かう直線である，星が昇りそして沈むことの規則性; 宇宙の中心に向かう地球の自然な運動] 地球は動かないし，また宇宙の中心以外のどこにも存在しない….地球は…球の形になったに違いない，ことは明白である．これは [月食のときに月から切り離される部分の形，そしてより北の陸地でみえない星をエジプトでみることができる]，地球は球形でありその外周は大きくないことを証明する….外周を計算しようと試みる数学者は外周を 400,000 スタディオンと評価する [1 スタディオン = 600 ギリシャフィート = 606 英フィート，こうして 24.24×10^7 ft/(6,080.2 ft/nautical mile) = 39,900 海里 (1,852m)—そして伝えられるところによれば Columbus にも知られていた地球の外周のもっとも古い記録上の計算，真実の外周 $60\times360 = 21,600$ 海里よりも 85%大きい]．”

Aristotle [**Metaphysics** より，Warrington (1956) によって翻訳されている]："Euxodus [Cnidos, 紀元前 408–355 年から] は太陽および月の運動はそれぞれの場合において，3 個の天球を含むと推測した…彼はさらに惑星の運動はそれぞれの場合において，4 個の天球を含むと推測した….Calippus [Cyzicus, 紀元前 330 年に活躍した] は…観測によって，さらに 2 個の天球が太陽に追加されるべきであり，月には 2 個，そして他の惑星のおのおのにさらに 1 個の天球が追加されるべきであると考えた.”

Eratosthenes, 紀元前 276–194 年 [(Claudis Ptolemy の **Almagest**, I, 12 章)，西暦 127 年から 141 年あるいは 151 年まで Alexandria で観測した，Claudius Ptolemy によると彼に帰着される計算，Taliaferro (1952) による翻訳をみよ]：

$$(\text{地球から月までの最大距離}) = (64\frac{1}{6})(\text{地球の半径}),$$

$$(\text{地球から太陽までの最小距離}) = (1{,}160)(\text{地球の半径})$$

Abū'Alī al-Husain ibn 'Abdallāh ibn Sīnā, もしくは **Avicenna** として知られる，980–1037 年，医師，哲学者，Aristotle 哲学を体系化，そして古代ギリシャの学問を保持し，それによって中央ヨーロッパへのギリシャ語の伝達を可能にした者の中でもっとも影響力のある 1 人 [Nasr (1964)，p.225 に引用されている]："時間は運動の測度である.”

the Rasā'il, 51 論文の百科事典，時々，the **Koran after Koran**, **Ikhwān al–Safā'** あるいは Brothers of Sincerity として知られる，そのおもな内容はだいた

い西暦 950–1000 年に Iraq の Basra でつくられた [Nasr (1964), p.64 によって引用されている. **Rasā'il** からとられている, 惑星への距離（地球半径による), および惑星の大きさそして種々のプトレマイオス (Ptolemaic) 的な運搬球 (carrier–spheres) の回転運動のリストについては p.78 をみよ]：空間は “物質から抽象され, そして意識においてのみ存在する形である.”

Abū Raihān al-Bīrūnī, 973–1030 年. 学者であり, 実験, 観測, そして測定にも関係した, 彼は, インドでなした測定から地球の外周を 80,780,039 キュービット (cubits) と計算した (今日受け入れられている値よりも約 4%大きい). そして惑星への距離の表を与えた [Nasr (1964), p.120 および 130 に引用されている]：“2 つの食は, 宇宙の全崩壊のときを除いて一緒に起こらない.”

Étiene Tempier, パリの司教, 1277 年, フランス神学会を当時いくつにも分けていた論争を鎮めるために, 神の望むだけ多くの宇宙を創る神の力を誰も否定することはできないと裁定した.

Roger Bacon, 1214–1294 年, **Opus Majus** (1268) で, Alfargani の権威に基づいて, 星を運ぶ球の直径を 130,715,000 ローママイル [正しいフィートの 1,000 倍と定められるものに等しいマイル], 太陽の体積を地球の体積の 170 倍, 1 番目の大きさの星を地球の 107 倍, 6 番目の大きさの星を地球の 18 倍として与えた.

Nicolas Cusanus, 1401–1464 年 [**Of Learned Ignorance** (1440) より. Heron(1954) によって翻訳されている]：“必然的に天のすべての部分は運動している…地球は動いている…世界 [宇宙], その運動と形…は車輪の中の車輪, どこにも中心あるいは外周をもたない球の中の球として現れることは, 前述より明らかである…この地球はわれわれには定常的にみえるけれども, 現実に動くことは今や明らかである. 実際, われわれが何かの動きに気づくのは, ある固定された物への関係によってのみである. もし…岸が人間にみえず, そして水が流れている事実を知らなかったならば, いかにして船が動いていることを知るだろうか？”

Nicolaus Copernicus, 1473 年 2 月 19 日–1543 年 5 月 24 日 [**De Revolutionibus Orbium Coelestrum** (1543), Dobson and Broddtsky (1947) によって翻訳されている]：“私は, 数学者たちがこれらの研究において矛盾している知識そのものによって球の運動を計算する方法を考えるように導かれた…. 数学者たちは周期的な年の一定の長さを説明できないあるいは観測できない…. ある数学者は同心円のみを用いる. しかるに他の数学者は同心でない円および周転円 (epicycles) を用いる…. そしてまた数学者たちはそれによって主要なこと—すなわち宇宙の形および宇宙の部分の変えることのできない対称性を認めることあるいは演繹することができなかった….

“私はまず Cicero において, Nicetas は地球が動いていることを理解していたことを発見した. その後私は Plutarch [西暦 46–120] において… ‘残りの部分は地球を定常的であるように保つ. しかしピタゴラス学派の Phiolaus [紀元前 480 年に生ま

れた］は，地球は太陽および月のようにひずみ形の円上を（中心の）火の周りを動いていると述べていることを発見した．ヘラクレイトス派 Pontus［紀元前 4 世紀に栄えた］のヘラクレイトス派およびピタゴラス学派の Ecphantus もまた地球が動くと考えた．実際空間を通してでなく，空間自身の中心の周りを，西から東へ心棒上の水車のように回転することによって動くようにする.' これを利用して私もまた地球が動くかどうかについて考え始めた．

もし広大な宇宙が 24 時間内に回転するとすれば，小さい地球は回転するはずであるということは，われわれに大して驚きを与えないだろう？　それゆえ地球およびすべての地球に関するものは自然の回転によって崩壊するだろうという Ptolemy の恐怖は根拠がない….　地球がすべての回転の中心でないことは，明らかに不規則な惑星の運動および惑星の地球からの距離の変動によって証明されている….　したがって地球の中心は，月の経路を支え，太陽の周りを 1 年単位で回転しながら他の惑星とともに大きな軌道を描いて通過する，太陽の近くに宇宙の中心があること，そして太陽は静止しているのに反して，太陽のどのような見かけの運動も地球の運動によってよりよく説明できることを明言する….　とくに火星（Mars）は，夜中輝いているとき，木星（Jupiter）に匹敵するくらいの大きさにみえて，その赤らんだ色だけで区別できる．他の点では 2 番目の大きさの星にほとんど等しくなく，そしてその運動は注意深く追跡されるときにのみ認められうる．すべてのこれらの現象は同じ理由，すなわち地球の運動から生ずる….　固定された星に対してこのような現象は存在しないことは，それらが測定できないほど遠いことを証明する．それに比べて地球の軌道の大きささえも無視できる，そして視差効果は気づかれえない."

Thomas Digges, 1546–1595 年［*a Perfit Description of the Caelestiall Orbes according to the most aunciente doctrine of the Pythagoreans, latelye reuiued by Copernicus and by Geometricall Demonstrations approud* (1576) より．Copernicus の思想が英国に到達した主要な伝達手段である．Johnson (1937) に引用されている］：明るい天体の中で，それより小さな明るさをもつ同じ球形のものだけを眺めていると考えなければならない．天体が優れた明るさをもつにつれてその数が小さくなり，それらが驚くほどわれわれから遠く離れているために，もっとも多くの天体を見たり調べることができなくなる．

Giordano Bruno，約 1548 年に生まれる．1600 年 2 月 17 日ローマの Campo dei Fiori にて火刑で処刑される［1583–1585 年に英国への訪問で書かれた，**無限の宇宙と世界について**（*On the Infinite Universe and worlds*）より，Singer (1950) によって翻訳されている］："こうしてこの面をそれがあるだろうものであらしめよ，私はつねに彼方は何であるか？　という質問を述べなければならない．もし答えが何もない（nothing）ならば，私はそれを虚空（void）あるいは空（emptiness）とよぶ．そしてこのような虚空あるいは空は内部をもつけれども，測度および外部の限界をもたない，そしてこれは無限のあるいは広大な宇宙以外に想像しがたい….　そうすると

数え切れない太陽が存在し，そして無限個の地球がこれらの太陽の周りを運行する．それはまさに，われわれが観測できる 7 個の地球がわれわれに近いこの太陽の周りを運行するようにである．”

Johann Kepler は楕円軌道と等面積の法則を確立した（1609），そして惑星の周期と長半径軸との関係を確立した（1619）．

Galileo Galilei は木星（Jupiter）の衛星を観測した，そして衛星はコペルニクス理論に対する支持を与えた，そして銀河を星の集団と解釈した（1610）．1638 年に彼は書いている．

“*Salvati.* 今やわれわれは固定された星について，Simplicio, 何をすべきだろうか？われわれは宇宙の広大な混沌を通して，任意のあらかじめ定められた点から種々の距離にそれらをまくことを望むか，あるいはそれら自身の中心の周りに広がる球面上にそれらを置きおのおのがその中心から同じ距離にあるようにするだろうか？

“*Simplico.* 私はむしろ中間の過程を選んだ，そしてそれらに一定の中心の周りに記述される軌道を割り当て，そして 2 つの球面の間に含めた．”

Isaac Newton（1687）：“太陽に向かう重力は，太陽の物体を構成しているいろいろな粒子への重力からつくられている，そして土星（Saturn）の軌道のようにはるかに太陽から遠ざかるにつれて，正確に距離の逆 2 乗のように減少する．それは惑星の遠日点が静止していることに明らかに現れている．”

Isaac Newton [1962 年 12 月 10 日, Richard Bently への手紙．Munitz (1957) に引用されている]：“もしわれわれの太陽，惑星および宇宙のすべての物質が，天のすべてを通して一様に散乱されて，すべての粒子がすべての残りに向かって固有の重力をもち，そして全空間，それを通してこの物質が散乱されているが有限である，この空間の外部の物質はその重力によって，内部の全物質に向かい，その結果全空間の中心に落ちそこで 1 つの大きな球状の質量をつくる．しかしもし物質が無限の空間を通して一様に配置されていたならば，それはけっして 1 つの質量に会合できないだろう．しかしその若干が 1 つの質量に会合し若干が他の質量に会合して，無限個の大きな質量が互いに大きな距離を離れてその無限大の空間のすべてを通して散らばるだろう．こうして太陽と恒星が形成されるだろう．”

Christian Huygens, 1629–1695 年 [彼の死後出版された *Cosmotheoros* (1698) において]：“そうすると星は…非常に多くの太陽であることをみて，もしわれわれがそれらの 1 つ［シリウス（Sirius），the Dog–Star］がわれわれの太陽に等しいと仮定しないならば，シリウスのわれわれへの距離の，太陽のわれわれからの距離への比は 27,664 対 1 であることが得られるだろう［詳細は，太陽に向けられた望遠鏡，薄いプレート，その中の穴，シリウスとの比較を含む］…．実際，宇宙は無限に広がっていることは確かであると私に思える．”

Edmund Halley (1720)：“もし恒星の数が有限以上であったならば，それらの見かけの球の全表面 [すなわち，空] は明るいだろう” [今日の推論によれば平均の星の表面と同

じ温度である．これは今日 Olber のパラドックス，あるいは P.L.de Chéseaux (1744) および Heinrich Wilhelm Matthias Olbers (1826) のパラドックス，として知られる].

Durham の **Thomas Wright** (1750)："銀河は無限大の数の小さい星からつくられているということを…認めて，Via Lactea の現象を解く…ために，広大な無限大の湾，あるいは媒体，平面のようにすべての方向に延びている，そして両側でほとんど等しい 2 つの面の間に囲い込まれている，を想像せよ．さてこの空間にすべての星が乱雑に，しかし互いが適当な距離で，一種の標準的な物体の不規則性で全媒体を満たすように散らばっていると想像しよう．[その外観を考慮して] "中央の平面近くのどこかに…位置した目に"…われわれが地球で，中央の平面の中で観測するすべての不規則性は，私は完全に，太陽の位置…および，ここかしこに…雲で覆われた星の小さな群を引き起こす星自身の中の…運動の多様性による，と判断する．"

Immanuuel Kant，1724–1804 年 (1755)："幸運な段階をとることは，英国人，Durham の Wright 氏に対して保留された…われわれは，恒星の位置が共通の平面に関係するようにならしめた原因を発見しようと努めるだろう… [恒星] の全主人が相互の引力を通して互いに近づこうと努力していることを…認めて…崩壊は遠心力の作用によって妨げられる．同じ原因 [遠心力] …はまた，恒星がすべて 1 つの平面に関係するようにそれらの軌道を向けた… [必要とされる運動は 4000 年に 1 度 (あるいはそれ以下) であることが計算される]，注意深い観測者は…それに対して要求されるだろう…Bradley 氏は星のほとんど知覚できない変位を観測した" [現実の視差 (観測者の位置の効果) よりもむしろ，後の研究から光行差 (観測者の速度の差) によって引き起こされることがわかった].

非常に離れた銀河はいかに現れるかをまず尋ねる．"もしその平面が目に直接提示されるならば円，そしてもしその平面が横からあるいは斜めにみられるならば楕円．その光，その形，およびその直径の見かけの大きさの弱さは，明らかにこのような現象が提供されるとき，銀河をただ 1 つとみられるすべての星から明白に区別するだろう…この現象は…異なる観測者によって異なって認められただろう．[彼らは] …その奇妙さに驚いた…．類似はこうしてこれらの系 [惑星，星，銀河] は空の空間を満たしている基本的な物質の最小の粒子から…つくられているし，そしてつくられたことを疑わせない．"

"[惑星，星，銀河の] 創造の，それに対する物質をもつ空間の無限の領域を通して相次ぐ創造の膨張を真摯に考え続けよう…．引力はまさに自然のすべての部分を 1 つの空間に統一する普遍的な関係である．したがって，引力は，自然の無限のすべての距離…に達する．"

Johann Heinrich Lambert，1728–1777 年 (1761)："中心力に従う恒星は軌道に沿って動く．銀河は恒星の若干の系を含む．各系はその中心をもち，そして一緒にとられた若干の系は共通の中心をもつ．それらの集合の集合は同じようにそれらの中心をもつ．要するに，全世界に対する普遍的な中心が存在し，すべての事態はその周り

をまわる.” ［宇宙に対する “階層模型” についての最初の説明，後に C.V.I. Charlier および H. Alfvéen and O. Klein（1962）によって取り上げられた，また O. Klein（1966 および 1971）をみよ］.

Auguste Comte（1835）は遠い星の化学組成について語ることは意味がない．なぜなら人間はそれらをけっして調べることができないからである，と結論した．“肯定的な哲学の分野はわれわれの太陽系の極限内に全部存在し，宇宙の研究はどのような肯定的な意味において受け入れられない.”

任意の星の視差［視差の 1 秒：$1\,\mathrm{pc} = 3.08\times10^{18}\,\mathrm{cm} = 3.26$ 光年］の最初の成功した決定は 1838 年になされた（Henderson による α Centauri，Sturve による α 琴座（Lyrae），そして Bessel による 61 白鳥座（Cygni）に対してである）.

B. 20 世紀

1902 年における James Jeans による熱い原始ガスの短波長音響モード，およびこのガスの重力凝縮の始まりの長波長モードを分離する臨界波長の導出．1968 年に P.J. Peebles and R.H. Dicke はこれらの考察を応用して，球形の星団がなぜ $10^5\,M_\odot$ 程度の質量をもつかの説明をした.

1911–1913 年における V.F. Hess and W. Kolhörster による最初の観測から現在までの宇宙線の研究：星間空間（この銀河内）におけるエネルギー密度は，約 $1\,\mathrm{eV/cm^3}$ あるいは $10^{-12}\,\mathrm{erg/cm^3}$ であり，星の光のエネルギーの密度，銀河を覆って平均化されたイオン化した星間ガスの群の運動エネルギー，そして星間磁場（$\sim10^{-5}$ gauss）のエネルギー密度と同程度である．この同等性に関連して，とくに E. Fermi（1949）をみよ．Cepheid 変（光）星（ケフェウス型変光星）の周期とその絶対光度との間によく定義された関係が存在するということが 1912 年に Henrietta Leavitt によって発見された.

1912 年の V.M. Slipher による銀河の半径方向の速度の最初の決定によると，Andromeda は 200 km/sec で近づいている．1915 年までに彼によって調べられた 13 個の銀河については，2 個以外のすべての銀河はほぼ 300 km/sec で後退している.

Albert Einstein（1915d）：重力を幾何学の表れと解釈した．空間の幾何学の時間の経過に伴う力学的な発展を支配する法則の最終的な定式化を与えた.

Albert Einstein（1917）：宇宙を実質的に一様な密度の物質で満たされた 3–球と理想化した．この 3–球の半径は，彼の標準的な 1915 年の幾何力学的な法則を変えることなく静的と考えられえないだろう．この理由のために Einstein はいわゆる “宇宙項” を導入した，この宇宙項を Einstein は後に，彼の人生における “最大の失敗” として落とした［Gamow（1970）］.

宇宙模型の 1917 年における W.de Sitter による定式化では，(1) 宇宙はいたるところ等方である（そしてそれゆえに一様である），そして (2) 宇宙は時間とともに変化しないから，質量–エネルギーの平均密度および空間の平均曲率は一定である，しか

し（3）Einstein 型の宇宙項（“斥力”）が物質の引力と釣り合うためにやむをえず追加されなければならない，とした．de Sitter はすべての物質を取り除くことによって静的な模型を得ることができた．しかし Λ 項は試験粒子を互いに他から加速して離れさせるだろうというのが，de Sitter による見解である．

1917 年から 1920 年まで，渦巻き星雲はたんなる星雲状の物体である（Harlow Shapley）か，あるいは “島宇宙” であるか，あるいはわが銀河に似ているがしかし外の銀河である（H.D. Curtis）かどうかについて論議された．

この銀河の約 100 個の球形の群（おのおの，10^4 から 10^6 個の星）を空間内での分布の地図をつくることによって，中心は Sagittarius（射手座）（太陽からの距離の現在の値は $\sim$10 kpc である）の方向にあることが 1918 年に Harlow Shapley によって発見された．

1922 年に A. Friedmann による，および 1927 年に G. Lemarître による，発展する均質で等方な宇宙模型［また関係 $v = H\times$（距離）に通ずる］の独立な導出がなされた．Lemarître は彼の理論的な解析を当時進行中の Mt. Wilson の研究と結びつけることによって，“ビッグバン宇宙論の父” となった（しかし，Lemarître の原論文では宇宙は，Einstein の静的な $\Lambda > 0$ 解から滑らかに膨張するようにとられている）．

試験粒子は，de Sitter 模型では形式 $v = H\times$（距離）の公式によって与えられる割合で分離するだろうという意見が，1923 年に H. Weyl によって述べられた．

1924 年，Mount Wilson 100 インチ望遠鏡を用いた Edwin P. Hubble によって，渦巻き星雲の性質についての論議の解決，Andromeda および他の渦巻き星雲における Cepheid 変光星の発見，そしてこれに伴うこれらの星雲までの距離の決定が行われた．

太陽に近い星の半径方向の速度の特徴的なパターンは 1927 年に Jan Oort によって決定された，

$$\delta v_r = Ar\cos 2(\theta - \delta)$$

は以下のことを示している．(1)銀河における星の回転軸は円盤に垂直である，(2)太陽は $\sim 10^8$ 年で完全な回転を行う，そして（3）この周期をもつ回転を生み出すために要求される，太陽を引っ張る有効質量は $\sim 10^{44}$ g あるいは $\sim 10^{11}\,M_\odot$ の程度である．

鉛–ウラン比から確立された**ウラン鉱石**の年齢は，1927 年までに発見された最大値，1.3×10^9 年（A. Holmes and R.W. Lawson）である．地球の “平均” の**表面岩**における鉛の年齢，この鉛を同じ表面岩内のウランから生み出すために要求される時間から計算された鉛の年齢は，2×10^9 年から 6×10^6 年である．U^{235} および U^{238} が初期における仮定されたほぼ等しい比から今日の知られている非常に等しくない比までに崩壊するに要求される時間から Rutherford によって評価された**ウラン元素**の年齢は，$\sim 3\times10^9$ 年である．

1929 年に，6×10^6 光年まで銀河の後退速度は，その距離に比例することが，Hubble によって確立された．

1930 年に，Einstein の $\Lambda > 0$ の静的な宇宙は，曲率半径のどのような小さい増大あるいは減少に対しても不安定であるという，A.S. Eddington による注意がなされた.

1931 年に，今後いわゆる宇宙項を落とすということが Einstein によって推薦された.

1932 年に，もっとも単純な仮定 $\Lambda = 0$ を試験的に採用し，圧力を無視し，そして宇宙の曲率半径の逆 2 乗は正あるいは負（球状のあるいは双曲線的な宇宙）でなくゼロである（"宇宙論的に平坦である"），として関係 $\rho = 3H^2/8\pi$（幾何学的な単位で）に通ずる，ということが Einstein および de Sitter によって提案された.

白鳥座 (Cygnus) における不連続な電波源の存在に対する，1934 年における Grote Reber によってあらわされた証拠，すなわちこの源 Cygnus A に対する証拠は，J.S. Hey, S.J. Parsons, and J.W. Phillips によって 1946 年に確立された. Taurus A および Centaurus A を含む 6 個の他の不連続な電波源は J.G. Bolton によって 1948 年に発見された.

1934 年に E.A. Milne and W.H. McCrea によって，大きいガス雲の Newton 力学と力学的な宇宙の Einstein 理論との間の密接な対応が発見された. 圧力が無視できる限り，両方の理論において膨張のスケール因子は同じ方程式を満たす.

1935 年に H.P. Robertson および A.G.Walker によって，線要素の Lemaître 型は均質性および等方性と両立できるもっとも一般的な Riemann 幾何学を与えるということが，独立に証明された.

1936 年に Hubble によって，渦巻き，棒 (barred) 渦巻き，楕円，不規則，としての星雲が分類された.

1939 年，H.A. Bethe によって，太陽内での熱核エネルギー生成の最初の詳細な理論が提出された.

1946 年に，George Gamow によって，初期宇宙における物質は急速な熱核反応を受けるにたるほど十分稠密で熱かった，そしてエネルギー密度は放射優勢であったという推論がなされた.

1948 年に，H. Bondi, T. Gold, and F. Hoyle によるいわゆる "定常宇宙論" が提案された. Einstein の標準的な一般相対論の枠外に存在し，"物質の連続的な創造" が宇宙を通して生じ，そして現在の物質の平均年齢は Hubble 時間の 1/3 に等しいことが述べられた.

1948 年に，R.A. Alpher, H.A. Bethe, and G. Gamow によって，初めに宇宙を満たした黒体放射は，今日 25 K の温度に対応する Planck スペクトルをもつはずであるという，予言がなされた. 1964 年に，R.H. Dicke によって同じアイデアの独立な想像がなされ，この原始的な宇宙–火の玉放射に対する実験的探求が 1965 年に始まった. 約 3.5 K の温度をもつ望まれないそして予期されない 7 cm の背景放射が，A.A. Penjzias and R.W. Wilson により 1965 年に発見された. この放射は，Dicke, P.J.E. Peebles, P.G. Roll, and D.T. Wilkinson によって，期待された残留の放射として

即座に同定された.

1949 年に J.G. Bolton, G.J. Stanely, and O.B. Slee によって，電波源 Tarus A, VirgoA, および Centarus A は試験的に，そして後に証明されたように，かに星雲および銀河 NGC 4486 および NGC 5128 と正しく同定された.

1950 年に Lemaître によって，ビッグバン膨張の解析が行われた．非常に密接に Einstein の定常宇宙（$\Lambda > 0$）に近づき，それから最初ゆるやかに，その後ますます急速に指数関数的に膨張する.

1952 年に Walter Baade による 2 つの型の Cepheid 変光星が存在し，異なる周期–光度関係をもち，それに伴う Hubble の距離のスケールが約 2.6 の因子だけ増大し，そして対応する Hubble 時間，H_0^{-1} の元の値（ほぼ 2×10^9 年）についても増大するという，発見がなされた.

1954 年に，W. Baade and R. Minkowski は，電波源の大多数はわが銀河内に存在するという当時広くみなされていた観点に反して，電波源 Cygnus A を銀河のわずかな群のもっとも明るい一員と同定した．Minkowski による $\delta\lambda/\lambda = z = 0.057$ の光学スペクトルの赤方偏移の決定は，Cygnus A は 170 Mpc の距離にあり，10^{45} erg/sec の電波光度 10^7 倍の電波能力をもち，通常の銀河の 10 倍の光学能力であることを意味する.

1956 年の電波源 Cygnus A の，光学的な銀河の両側に対称的に位置している 2 成分への分解は，たいていの電波源は二重であるという最初のしるしを与える．これおよび他の二重源を引き起こした爆発，あるいは他の構成の謎は依然解けていない.

1956 年に G.R. Burbidge によって，電波銀河でのシンクロトン放射を与える電子の運動エネルギーおよびこれらの電子を軌道上に保つ磁場のエネルギーの計算がなされた．これら 2 つのエネルギーの和の最小化によって，たとえば Hercules A に対して，この最小値は，10^{60} erg（50 万個の太陽を消滅させせたときのエネルギー）の程度であるという決定がなされた.

1956 年に C. Patterson によって，そして 1965 年および 1969 年に他の人たちによって，隕石および大洋の堆積物内の，$Pb^{204,206,207}$ および $U^{235,238}$ の相対的な存在量から，隕石内での過程 $Rb^{87}\to Sr^{87}$ および $K^{40}\to A^{40}$ についての証拠から，太陽系は 4.55×10^9 年あるいはそれ以上の年齢もつと定められた.

1958 年に Allen Sabdage によって，Hubble が遠い銀河内で明るい星と同定したものは H II 領域，星によってイオン化されたプラズマによって取り囲まれた熱い星の群，であるとことが発見された．それによって Hubble の距離のスケールは約 2.2 倍大きくなった.

1958 年に Jan Oort によって，他の銀河の光度から，銀河内の物質は宇宙内の質量–エネルギーの密度に寄与する．この密度は，ほぼ 3×10^{-31} g/cm^3 で [最新の解析に対しては Peebles (1971) をみよ]，これは宇宙は曲がって閉じているという Einstein の概念によって要求される大きさよりもオーダーが 1 次あるいは 2 次小さいと評価さ

れた．それによって多くの今日の研究の焦点である，“見つかっていない物質の神秘”をよび起こす．

1962 年に太陽系でない天体で，Giacconi, Gursky, Paolini, and Rossi によって X 線が発見された．わが銀河の平面内の源の大多数は，カニ星雲のように，おそらくこの銀河に局在している．銀河系外の源は電波銀河 Virgo（乙女座）A およびクエーサー 3C273 を含んでいる．

1962 年に A.S. Bennett によって，電波源の改訂された “3C 目録” が，発表された．328 個の源を含み，178 MHz で 9 束単位（9×10^{-26} Watt/m^2 Hz）よりも明るい源に対して赤緯 -5 度と $+90$ 度との間の範囲でほとんど完全である．

1963 年, Mt. Palomar での Maarten Schmidt によって, 最初のクエーサー (QSO) が同定された．1962 年に C. Hazard, M.B. Macky, and A.J. Shimmins は，弧の 1 秒以上の精度で 3C273 の電波位置を決定していたが，続いて Schmid が星–状の源の光学的なスペクトルを撮り，そしてそれはこの銀河内の星であるというすべての推定にもかかわらず，その光学的なスペクトルを適応させようと試み，$\delta\lambda/\lambda = z = 0.158$ の大きさ（“星” に対しては先例がない）の赤方偏移を得た．Hubble 関係によって意味される距離は 1.5×10^9 lyr である．光学的な輝度はもっとも明るい既知の銀河の 100 倍である．1972 年に知られている任意の QSO の最大の赤方偏移は $z = 2.88$ である (4C05.34, C.R. Lynds)．このような源はたとえ 3 の赤方偏移をもつとしても検波できるが，しかしこのような赤方偏移をもつ QSO は 1972 年に知られていない．コラム 28.1 をみよ．

1964 年に Dennis Sciama によって，もし 3×10^5 K および 10^6 K の間の温度にあるならば，銀河系間の水素はもっともよく観測を免れることができると推論された［また Sciama（1971）をみよ］．1cm^3 あたり 10^{-5} 個の陽子と 10^{-5} 個の電子をもち，3×10^5 K よりも低い温度で，中性原子の数密度は十分大きいだろう，そして生ずる Lyman α 線の遠い銀河 ($z = 2$) からの吸収は観測に反して，目立つほど強いだろう．

1964 年に J.E. Gunn and B.A. Peterson, E.J. Wampler, および他の人たちは 10^6 K よりも大きい温度で，銀河系間の空間からの 0.25 keV あるいは 50 Å の X 線の強度は観測するには強すぎるだろうと決定した．

Wheeler（1964a）によって，Einstein の一般相対論における力学的な対象は 3–幾何学であって，4–幾何学でない．そしてこの力学は，古典的でも量子論的でも，超空間の競技場内で広がると，強調された．

1965 年に Sandage によって，クエーサー的な銀河（電波を放射しない QSO）が発見された．

1965 年に E.M. Burbidge, G.R. Burbidge, C.R. Lynds, and A.N. Stockton によって，多数の吸収線をもち，1 つのスペクトルに若干の赤方偏移の共存を意味する，QSO, 3C191 が発見された．

1966 年に P.J.E. Peebles によって，そして 1967 年に R.V. Wagoner, W.A.

Fowler, and F. Hoyle によって，光子およびバリオンの相対的な数の比の値について，この数の 10^6 の領域にわたって，10^{10} K の宇宙は依然放射優勢である限り，宇宙の初期の数分間にヘリウムに変換された物質の（質量による）割合はこの数にほとんどよらないと計算された．この停滞期のヘリウムの存在量の値（他の人たちの以前の仕事に従う）は，27%であると初めて正確に計算された．

1968 年に C.W. Misner によって，先に E. Kasner や I.M. Khalatnikov and E. Lifshitz によって注目された，空間の幾何学の非等方な振動を，初期宇宙論の重要な部分と考えるという提案がなされた [非常に悩ましい宇宙の一様性は後に加味されたことを，このようにして自然に説明しようという Misner の希望].

1968 年および 1969 年に S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, および R. Penrose によって，現在膨張しており物理学的に受け入れられる状態方程式に従う物質と放射で満たされている模型宇宙は，今日対称性についていかに不適格であろうとも，過去に特異点をもったに違いないことが，標準的な一般相対論に基づいて証明された [また 44 章に引用されている以前の研究者の関連する仕事をみよ].

1968 年に Hewish, Bell, Pilkington, Scott, and Collins によってパルサーの発見および自転している中性子星としての彼らの解釈が与えられた（24 章をみよ）.

“詩人も，どのような芸術の芸術家も独りでは彼の完全な意味をもたない．彼の意味，彼の評価は，死亡している詩人および芸術家に関連した評価である．彼のみを評価できない．彼を対照と比較のために，死人の中に置かなければならない．新しい芸術の仕事が創造されるとき何かが…先立つ芸術のすべての仕事と同時に起こる．存在する不朽の業績はそれらの中で理想的な順序を形成し，それはそれらの中で新しい（真に新しい）芸術の仕事の導入によって変えられる．”

T.S. ELIOT（1920）.

28章
宇宙の現在の状態への進化

宇宙論は…たんなる洗練されていない想像の逸脱を抑制する.

ALFRED NORTH WHITEHEAD (1929, p.21)

28.1 宇宙の“標準模型”

*1 1965 年の宇宙マイクロ波放射の発見以来, 幅広い理論的研究は, 宇宙はいかにしておそらく現在の状態に進化したかということのかなり詳細な描像を生み出した. この描像は, 宇宙の“標準的な熱いビッグバン模型”とよばれ, 本章で概略を述べる. そしてそのおもな特徴が図 28.1 に現れる. 重力が大域的な膨張を支配する. しかし進化の他の点でのほとんどの詳細は, 熱力学の法則, 流体力学, 原子物理学, 核物理学, および高エネルギー物理学により, 重力によって支配されることがはるかに小さい. この事実, および題目についての 3 つのすぐれた最近の本 [Sciama (1971), Peebles (1972), Zel'dovich and Novikov (1974)] は, ここでの簡潔さを勇気づける.

宇宙の過去の進化は定性的に一様な超曲面 ($k=-1,0$, あるいは $+1$) の性質によらず, そして定性的に宇宙定数によらない. なぜなら k および Λ の進化への寄与は, 履歴の初期の状態 (小さい a/a_0) において重要でないからである [式 (27.40) および図 27.5 をみよ]. 1 つの決定的な仮定が, 標準的な熱いビッグバン模型の基盤にある. それは宇宙は無限大の (あるいは無限大に近い) 密度および温度のきわめてほぼ均質で等方な状態から急速な膨張によって“始まった”, ということである.

*2

*3 この解析によれば, 始まり後の最初の 1 秒間に, 宇宙の温度は非常に高かったので光子, ニュートリノ, 電子, 陽電子, 中性子, 陽子, 種々なハイペロンおよび中間子, そしておそらく重力子 (重力波) [たとえば, Kundt (1971) およびそこに引用されている文献をみよ] さえも, その間に完全な熱力学的な平衡が存在した. しかし宇宙は数秒たつと, その温度は約 10^{10} K に落ちてしまい, その密度は $\sim 10^5\ \mathrm{g/cm^3}$ に下がってしまう. したがってすべての核子–反核子対は再結合し, すべてのハイペロンおよび中間子は崩壊し, そしてすべてのニュートリノ, および重力子は物質から遊離してしまう. 宇宙はそれから温度 $T\sim 10^{10}$ K で黒体スペクトルをもち自由に伝播するニュートリノ, そしておそらく重力

*4

---

*1 “標準的な熱いビッグバン模型”による宇宙の展開

*2 (1) 初期状態

*3 (2) 熱平衡, 粒子の崩壊, 対の再結合 ($0 < t \lesssim 10$ sec)

*4 (3) 重力子およびニュートリノの遊離と自由な伝播 ($t \lesssim 1$ sec)

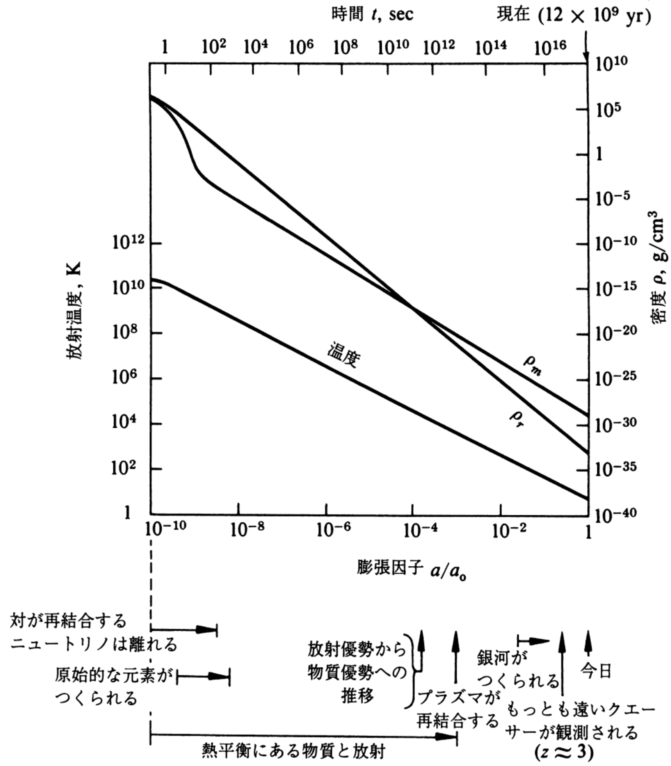


図 28.1　宇宙の現在の状態への展開，標準的な熱いビッグバン模型によれば，曲線は

$$\rho_{m0} = 5\times10^{-30}\,\mathrm{g/cm^3}, \qquad \rho_{r0} = 10^{-33}\,\mathrm{g/cm^3}, \qquad k = 0$$

を仮定して，描かれている．しかし観測の極限内で ρ_{m0}，ρ_{r0}，および k の別な値に対して，曲線はほとんど同じである（練習問題 28.1 をみよ）．図の底に記述されている過程の詳細な議論に対しては本文およびコラム 28.1 をみよ［この図は Dicke, Peebles, Roll, and Wilkinson（1965）から採用されている］．

子，再結合の過程にある電子–陽電子対，および $T\sim10^{10}\,\mathrm{K}$ ですべて熱平衡にある電子，中性子，陽子，および光子から構成された．

その初期の状態から，重力子（もし存在するならば）およびニュートリノは黒体スペクトルを保持して自由に伝播し続けた．しかしそれらの温度は宇宙の膨張によって法則

$$T \propto 1/a \tag{28.1}$$

に従って赤方偏移した（コラム 29.2）．したがって，今日それらの温度はほぼ 3 K であるはずである．そしてそれらは依然宇宙を満たしているはずである．不幸にして，今日の技術はニュートリノあるいは重力子のこのような“海”を探知しうることから遠くかけ離れている．しかしもしそれらが探知されうるならばそのとき，それらは宇宙の一生の最初の 1 秒についての**直接的な**観測的情報を提供するだろう！

*5　宇宙は最初の数秒後膨張し続けるにつれて，宇宙は $t\sim2$ 秒から $t\sim1{,}000$ 秒へ（$T\sim10^{10}\,\mathrm{K}$ から $\sim10^{9}\,\mathrm{K}$ へ，$\rho\sim10^{+5}\,\mathrm{g/cm^3}$ から $10^{-1}\,\mathrm{g/cm^3}$ へ）持続する時期に入った，その間に原始的な元素形成が起こった．この時期以前には，非常に多くの高エネルギー陽子が存在

*5　(4) 原始的な元素の形成（$2\,\mathrm{sec} \lesssim t \lesssim 1{,}000\,\mathrm{sec}$）

し，この時期の頃にはこれらの陽子はどのような原子核（たとえば，重水素（deuterium）あるいは三重水素（tritium）あるいは He^3 あるいは He^4）をも，形成された瞬間に爆破できた．この時期の後には，陽子は冷たすぎて（あまりに低い運動エネルギーをもっていて）互いの Coulomb 障壁を貫通できない．そして先のより熱い段階からのすべての自由に貫通する中性子は，電子と陽子に崩壊してしまう．$t \sim 2$ 秒から $t \sim 1{,}000$ 秒までの短い，決定的な時期の間のみが元素をつくるために好都合な状態であった．Gamow（1948），および Alpher and Hermann（1948a, b, 1950），Fermi and Turkevitch（1950），Peebles（1966），および Wagoner, Fowler, and Hoyle（1967）による計算は宇宙におけるバリオンの約 25%はこの時期に He^4（α 粒子）に転換したはずであり，そして約 75%は H^1（陽子）として残ったことを明かす．重水素の名残 He^3，および Li もまたつくられたはずである．しかし本質的に重元素はつくられていない．今日観測されるすべての重元素は後に，星の中でつくられたに違いない［たとえば，Fowler（1967）あるいは Clayton（1968）をみよ］．元素の存在量の現在進行中の天文学的な研究は，これらの予言をいくらか支持する．しかし，観測データはいまだあまり決定的でない［たとえば，Danziger（1968）および Peebles（1971）の pp.268–275 をみよ］．

*6 原始的な元素形成後に，物質と放射は同じ温度を保って，原子の頻繁なイオン化および再結合を通して熱的に相互作用し続けた．もし放射と物質の温度が互いに結びついていないならば，放射は物質よりもゆるやかに冷たくなるだろう（断熱膨張に対しては，$T_r \propto 1/a$，しかし $T_m \propto 1/a^2$）．こうして熱平衡は放射から物質へのエネルギーの一定の移動によってのみ保持された．しかし放射の熱容量は物質の熱容量よりもはるかに大きかった．それゆえエネルギー移動は ρ_r，p_r，および T_r にとっては無視できた．それは物質の温度を，放射の温度を無視できないほど下げることなしに保持した（$T_m = T_r$）．他方，物質の全質量–エネルギーは保持されそして静止質量によって支配される．それゆえエネルギー移動は ρ_m について無視できる影響をもった［この事情は式 (27.31) から (27.32) へ移行するときにエネルギー移動を無視する近似を正当化する］．

*7 降下している温度が数千度に達したとき（$a/a_0 \sim 10^{-3}$, $\rho \sim 10^{-20}\,\mathrm{g/cm^3}$, $t \sim 10^5\,\mathrm{yr}$），2 つの興味あることが起こった．宇宙は放射優勢であることを止め，物質優勢になった［$\rho_m = \rho_{m0}(a_0/a)^3$ が $\rho_r = \rho_{r0}(a_0/a)^4$ を越えるようになった］．そして光子は水素原子をイオン化されたまま保つに十分なエネルギーをもてなくなり，したがって電子と陽子は急速に再結合した．これら 2 つの事象が大まかに一致したことは，バリオンあたりのエントロピーはわれわれの宇宙で

$$s \equiv \text{バリオンあたりのエントロピー} \sim \frac{(\text{宇宙における光子の数})}{(\text{宇宙におけるバリオンの数})} \sim 10^8$$

という特有の値でほぼ保存されることの結果である．なぜ宇宙はある他の値（たとえば，1）ではなくて，s のこの値で始まったかは誰も説明することができていない．

$t \sim 10^5$ 年でプラズマの再結合は決定的であった．なぜならそれは放射と物質との間の

*6 (5) 物質と放射の熱的相互作用（$1{,}000\,\mathrm{sec} \lesssim t \lesssim 10^5\,\mathrm{yr}$）
*7 (6) プラズマ再結合と物質優勢への転移（$t \sim 10^5\,\mathrm{yr}$）

*8 相互作用および熱平衡に終わりをもたらした（“遊離”）．その後，散乱されるべき自由電子はきわめてわずかであり，そして原子および分子による Rayleigh 散乱は重要でなくなり，光子は空間を通してほとんど自由に伝播した．エネルギーを解放させる過程が銀河間の媒体を，$a/a_0 \sim 10^{-3}$ および $a/a_0 \sim 0.1$ の間のある時期に再イオン化したのでなければ，光子はプラズマが再結合して以来絶えず自由に伝播していたであろう．たとえ再イオン化が起こったとしても光子は少なくとも $a/a_0 \sim 0.1$ 以来自由に伝播したであろう．

宇宙の膨張は自由に伝播する光子の温度を，式 $T \propto 1/a$ と一致して（コラム 29.2 をみよ）赤方偏移させた．結果として，今日自由に伝播する光子は 2.7 K の温度をもつ黒体スペクトルをもつ．それらは 1965 年に発見された宇宙のマイクロ波放射と同定される．そしてそれらは最後に物質と相互作用したときにおける（もし再イオン化が起こらなかったならば $a/a_0 \sim 10^{-3}$, $t \sim 10^5$yr．もし再イオン化が起こったならば $a/a_0 \sim 0.1$, $t \sim 5 \times 10^8$yr)，宇宙の性質についての 1 つの直接的な情報を与える．

*9 物質の歴史に戻る．プラズマの再結合の以前に光子の圧力（“宇宙流体の弾性”）は一様な物質（25%の He^4，75%の H）が星，銀河，あるいは銀河の群に凝縮することを妨げた．しかし，再結合後，光子の圧力はなくなり，そして凝縮が始まることができた．物質密度についての小さい摂動は，おそらく膨張の始まりまで戻り，それから大きく大きくなり始めた．$a/a_0 \sim 1/30$ および $a/a_0 \sim 1/10$ （10^8yr $\lesssim t \lesssim 10^9$yr）の間のどこかでこれらの摂動は，星，銀河，および銀河の群に発展し始めた．わずか後に，$a/a_0 \sim 1/4$ で，クエーサーがおそらく天文学者が今や地球で受け取る光を “突然” 放出しだした（コラム 28.1 をみよ）．

コラム 28.1　クエーサー群の展開

宇宙の大きいスケールの平均的な性質は，時間とともに著しく変化していることが，クエーサーのデータから推測できる．要するに，宇宙内で赤方偏移 $z \approx 2$ において，$z \approx 0.5$ におけるよりも約 50 倍以上のクエーサーが存在したようにみえる．そして赤方偏移 $z > 3$ においては，はるかに少ないか，あるいはまったく存在しなかったようにみえる（ビッグバン以来の時間を特徴づけるために赤方偏移を用いることについては，コラム 29.3 をみよ）．より詳細については，Schmidt（1972）がデータに対する以下の解析を与える *．

1. Schmidt は最初から，クエーサーの赤方偏移は原因が宇宙論的であると仮定する［赤方偏移 = (Hubble 定数)×(距離)，29.2 節］．これに対する証拠は以下に述べられる．

a. 観測的：あるクエーサーは銀河団内に位置している［空の上の位置，および

* Schmidt（1972）の議論についてのわれわれのバージョンは単純化されすぎている．より大きな精度に関心をもつ読者は，彼の原論文を調べるべきである．

*8 (7) 続いて起こる光子の伝播 ($t \gtrsim 10^5$ yr)

*9 (8) 星，銀河，および群の凝縮 (10^8 yr $\lesssim t \lesssim 10^9$ yr)

クエーサーは銀河団内の銀河と同じ赤方偏移をもつこととの，両方によって立証される．Gunn（1971）をみよ]．銀河に対する宇宙論的な距離–赤方偏移の関係に対する証拠は圧倒的である（コラム 29.4 および 29.5）から，これらの特別なクエーサーの赤方偏移は宇宙論的でなければならない．

b. 理論的：$z\sim 1$ から ~ 3 までの観測されているクエーサーの赤方偏移は，原因が重力的でありえない．$z\approx 0.5$ よりも大きい重力による赤方偏移をもつ対象は，崩壊に対して不安定である（24 章と 26 章およびコラム 25.9 をみよ）．クエーサーの赤方偏移は Doppler でもないようである．それほど重い物体はいかにして完全な分裂なしに $v\approx 1$ まで加速されうるか？ 唯一の残る可能性は宇宙論的な赤方偏移である．この理由のために，宇宙論的な仮説の反対者は，通常クエーサーにおいては，理解している今日の物理学の法則の破れに訴えることが多い［たとえば，Arp（1971）およびそこに引用されてある文献をみよ．これらの文献はまた宇宙論的な仮定に反する証拠，若干のすぐれた研究者が強要しているように見えるが，しかしたいていの研究者は 1972 年にはそう見えない証拠を記述する］．

2. Schmidt はそれからどれだけ多くのクエーサー N が，赤方偏移 z に対応する時期に，クエーサーの局所 Lorentz 系で測定したときに波長 2,500 Å での単位振動数あたりの絶対光度 L_ν（2,500 Å）をもって宇宙に存在したかを尋ねる．

3. 1972 年に利用できるクエーサーについてのデータは $N[z, L_\nu\ (2{,}500\ \text{Å})]$ を一義的に定めるのにまったく十分でない．しかしそれらは以下のことを明確に示すのに十分である．

a. 進化があったに違いない．$N(z, L_\nu)$ は z に無関係でありえない．

b. 進化はおもに光度が原因であったことはありえない．クエーサーの全数，

$$N_{\text{全数}}(z) \equiv \sum_{L,(2{,}500\ \text{Å})} N(z, L_\nu)$$

は時間とともに（z とともに）著しく変化したに違いない．

c. もし進化が主に全数 $N_{\text{全数}}(z)$ についてであったならば，すなわち，もし 2,500 Å での相対的な光度の分布についての変化

$$f(z, L_\nu) \equiv [1/N_{\text{全数}}(z)]N(z, L_\nu)$$

が無視できたならば，そして今日の宇宙が $\sigma_0 = q_0 = 1$（記号に対しては 29 章をみよ）によって特徴づけられるならば，データは

$$N_{\text{全数}}(z=2) \approx 50 N_{\text{全数}}(z=0.5)$$

を示している．時間について過去にさかのぼるにつれて，数についてのこの急激な増加—そして $z \lesssim 2$ に対する観測されているクエーサーの赤方偏移および大きさの分布のすべての他の基礎的な特徴は $\sigma_0 = q_0 = 1$ をもつ宇宙において，展開法則

$$N_{全数}(z) \propto (1+z)^6,$$
$$N_{全数}[z(t)] \propto 10^{5(t_0-t)/t_0}$$

のいずれかによって合致されうる．ここに t_0 は宇宙の現在進行している年齢であり，そして t は赤方偏移 z における年齢であった．

d. これらの進化の法則は，赤方偏移 $z \approx 2$ を越えて外挿されるとき，および見かけの輝度が 18 に近いクエーサーに対する観測される相対的な光度関数 $f(z, L_\nu)$ と結合されるとき，地球上の観測者は輝度 19 と輝度 20 のクエーサーが 2.5 よりも大きい赤方偏移をもつ以下の割合を**みる**はずである．

進化の法則	$z > 2.5$ をもつ割合	
	$m = 19$	$m = 20$
$(1+z)^6$	29%	49%
$10^{5(t_0-t)/t_0}$	12%	14%

1972 年には $m = 18.5$ よりも小さい約 30 個のクエーサーが知られている．そしてこれらの中で 1 個（3%）のみが $z > 2.5$ をもつ．これは，Schmidt の言葉では，“密度法則 $(1+z)^6$ は 2.5 周辺の赤方偏移を越えて残存できない” ことを示している．Schmidt は $10^{5(t_0-t)/t_0}$ 法則（それは $z > 2.5$ でほとんど一定になる）もまた観測と明らかに矛盾しているとみなす．しかし彼は “かすかなクエーサーについてのさらなる分光学的な仕事がこの疑惑を確かめるために必要である” と言う．

警告に対する 1 つの理由は，データから “観測的な選択効果” を取り除くという難しい問題のためである．Schmidt，Sandage，および他の人たちは独立に $z > 2.5$ でのクエーサーの数について，人為的な明白な減少を生み出すであろう選択効果を探求した．何ものも見出されていない．Sandage（1972d）の言葉に，$z = 2.8$ 近くのクエーサー赤方偏移における明白な切断が，それを人為的に生み出しうるであろう選択効果に対して吟味されている．もし切断が真実であるならば，提案されている赤方偏移は予想外に小さいけれども，それは最初のクエーサーの誕生のときであるかもしれない．$q_0 = 1$ 宇宙における $z = 3$ で，過去にさかのぼる時間は Friedmann 年齢の 89% である．観測的な選択効果の評価は，切断を人為的に生み出しうる何ものも，積極的に確立されていないことを示す．

[**練習問題**]

28.1　進化における不確定性

現在進行中の観測と膨張の始まりでの完全な均質性および等方性の仮定，およびレプトンの反レプトンに対する過多は，バリオンの反バリオンに対する過多よりも小さいかある

いは同じ程度であるという仮定は，今日の宇宙論のパラメータに以下の制限をおく．

$$\text{今日の物質密度} = \rho_{m0}, 10^{-28} \quad \text{および} \quad 2\times10^{-31}\,\text{g/cm}^3\text{の間},$$

$$k = 0 \quad \text{あるいは} \quad +1 \quad \text{あるいは} \quad -1,$$

$$\text{今日の電磁放射の温度} = 2.7\pm0.1\,\text{K}$$

全放射密度［観測される光子，およびおそらく光子と熱平衡にあるビッグバンに基づいているニュートリノおよび重力子］

$$= \rho_{r0},\ 0.7\times10^{-33}\ \text{と}\ 1.2\times10^{-33}\,\text{g/cm}^3\ \text{の間}$$

（ρ_{r0} について考慮される不確定性は，初期の時期における四重極モーメントは熱平衡に対応する完全なレベルで重力子をつくるに十分であったかどうかについての不確定性，および重力子が遊離した時期に平衡していた粒子の種類の数および統計的な重みについての不確定性である）．27.10 節における式を用いて，宇宙の現在の状態におけるこれらの不確定性によって引き起こされる進化の歴史（図 28.1）についての不確定性を計算せよ．

28.2 原始的な混沌に対して，修正された標準的な模型

標準的な熱いビッグバン模型は驚くほど強力であり，そして観測（原始的なヘリウム存在量，宇宙論的なマイクロ波放射の存在，温度，および等方性，大きなスケールでの宇宙の均質性と等方性，膨張によって測定された宇宙の年齢ともっとも古い星の年齢との間の密接な一致，…）とよく一致する．しかし，1972 年にこの模型は 1 つの事項と明白な困難に遭遇する．銀河の起源である．最初均質であり等方である宇宙において，でたらめな揺らぎが物質密度に十分な振幅をもつ摂動を生じ（プラズマ再結合後に）物質を銀河に凝縮することは明らかでない．最終的に銀河を形成する摂動は宇宙の最初の，爆発している状態に存在しなければならないだろう［詳細なレビューと議論に対しては Zel'dovich and Novikov（1974）をみよ．また 30.1 節に引用されている文献をみよ］．

わずかな量の最初の不均質性を仮定することは合理的であるか？ 完全な均質性（1 つの極端）あるいは完全な混沌（他の極端）を仮定することがはるかにより合理的でないか？

*10 こうして，もし完全な最初の均質性が銀河の起源と両立しないことになると，“完全な最初の混沌” すなわち，密度，エントロピー，および局所的な膨張率について完全な揺らぎのスペクトルをもつ，完全にでたらめな初期条件を試みることは魅力的である［Misner (1968, 1969b)］．その後の進化の間にこのような模型宇宙が，“ミックスマスター振動” のような自然な過程 (30 章)，ニュートリノに起因する粘性［たとえば，Matzner and Misner (1971)］，重力的な曲率に起因する粒子対の生成［Zel'dovich（1972)］，によって急速に滑らかになるだろうということは考えられるが，しかし証明されるにははるかに遠い．数秒後あるいはより短い時間後に，最終的に銀河に凝縮するにたるだけの残っている摂動を

*10 もし宇宙が混沌的に始まったならばどうなるか？

含む，ほとんど均質そして等方な Friedmann 宇宙が残されるだろうか？　理論的な計算は明白な答えを与えるにはいまだ十分でない．もちろん，最初の混沌がおさまった後に，もしそれがおさまるならば，このような模型宇宙は前節の標準的なビッグバン模型と一致して展開するだろう．

28.3　何が最初の特異点に“先行したか”？

無限大の（あるいはほとんど無限大の）密度，圧力，および温度の“初期状態”に“先行した”ものについての質問以上に深く物理学の基礎に掘り進む宇宙論の問題はない．そして，不幸にも，1973 年には解からこれ以上遠く離れている問題はない．

*11 一般相対論は，容赦なく，たとえ“初期状態”が滑らかよりもむしろ混沌であっても，初期状態はある種の時空“特異点”を含んだに違いないことを予言する［Hawking and Ellis (1986)，また本書の 34.6 節をみよ］．そして一般相対論は特異点を越えて過去遠くまで届いて何が特異点に“先行”したかを言うことができない．多分，量子重力効果（量子論の古典幾何力学との結婚）と取り組むことによってのみ，初期状態および，もし何かが，初期状態に“先行”したものについての明白な理解に達するだろう［Misner (1969c)，Wheeler (1971c) をみよ］．これらの深い問題のさらなる議論に対しては，34.6，43.4 節，コラム 30.1 の最後の節，および 44 章をみよ．

28.4　他の宇宙論

*12 本書は一般相対論の宇宙論に注意を限る．もし一般相対論を捨てるならば，非常に広範囲の可能性の組があるだろう．それは以下のものを含む．(1) 定常状態の理論［Hoyle (1948), Bondi and Gold (1948)］，それは宇宙論的なマイクロ波放射を説明したり，あるいは電波源およびクエーサーについて観測される展開的な効果を説明することに成功していない（コラム 28.1）．(2) 漸近的に平坦な時空における物質の Klein–Alfvén の“階層分類的な宇宙論”［Alfvén and Klein (1962)，Alfvén (1971)，Klein (1971)，Moritz (1969)，de Vaucouleurs (1971)］，それは宇宙線およびガンマ線の観測と一致しない［Steigman (1971)］，そして Brans–Dicke 宇宙論［Dicke (1968)，Greenstein (1968a, b)，Morganstern (1973)］，それは標準的な熱いビッグバン模型と定性的に同じであり定量的にほとんど同じである．しかし，一般相対論を放棄するための動機あるいは正当化は明らかでない．一般相対論の実験的な基礎は過去の 10 年間にかなり強められている（38–40 章）．そして一般相対論によって予言される宇宙の標準的なビッグバン模型は観測と驚くほどよく一致する．それはこれまでに提案されたいかなる他の模型よりもはるかによく！

---

*11　最初の特異点および量子重力効果
*12　一般相対論を破る宇宙論

29章
宇宙の現在の状態と未来の展開

[本章は完全にトラック–2である．27章（理想化された宇宙模型）は本章に対する準備として必要とされる．しかし本章は任意の後の章に対する準備として必要とされない．]

29.1 宇宙の運命を定めるパラメータ

宇宙は永久に膨張し続けるか，あるいは宇宙は遅くなって停止し，収縮に転換し，そして無限大の（あるいはほぼ無限大の）密度，圧力，温度，および曲率の状態に崩壊するか？答えはたしかにいまだわからない．答えを発見することは今日の宇宙論の中心的な問題の1つである．

答えを発見する唯一のわかっている方法は，宇宙の現在の状態を観測的に測定し，それからEinsteinの場の方程式を用いて未来の展開を計算することである．場の方程式はすでに
*1 に27.10および27.11節で解かれている．それらの解から宇宙の現在の状態と宇宙の未来との間に以下の相関を読む．

もし $\Lambda = 0$ [Einsteinの確立された単純性の原理と一致して] ならば，

永久の膨張 $\Longleftrightarrow$ 均質性の超曲面に対する負あるいはゼロ空間曲率．すなわち，$k/{a_0}^2 \leq 0$（“開いている” あるいは “平坦”），

再収縮 $\Longleftrightarrow$ 均質な超曲面に対する正の空間曲率，すなわち，$k/{a_0}^2 > 0$（“閉じている”）

もし $\Lambda \neq 0$ ならば，

$$\text{永久の膨張} \Longleftrightarrow \Lambda \geq \Lambda_{\text{臨界}} \equiv \begin{cases} 0 & (\text{もし } k \leq 0 \text{ ならば}) \\ (4\pi\rho_{m0}{a_0}^3)^{-2} & (\text{もし } k > 0 \text{ ならば}) \end{cases}$$

$$\text{再収縮} \Longleftrightarrow \Lambda < \Lambda_{\text{臨界}}$$

*2 明らかに3個のパラメータが，未来を予言するために要求される．宇宙定数 Λ，均質
*3 性の超曲面に対する今日の曲率パラメータ $k/{a_0}^2$，および今日の物質の密度 ρ_{m0} である．前章でなされたように，過去に外挿するには，これらの量の他に，今日の放射密度 ρ_{r0} を必要とする．しかし ρ_{r0} は現在非常に小さく，そして非常に早くますます小さくなる

*1 永久の膨張対宇宙の再収縮
*2 宇宙の未来を予言するために要求されるパラメータ
*3 (1) “相対論パラメータ” $\Lambda, k/{a_0}^2$, ρ_{m0}

($\rho_r \propto a^{-4}, \rho_m \propto a^{-3}$) のでまさにリストされた可能性の間での決定に影響をもちえない．未来を予言するという仕事は，そうすると，“相対論的なパラメータ”$\Lambda, k/{a_0}^2$，および ρ_{m0} を測定するという仕事に帰着する．

この仕事と取り組むのに，観測的な宇宙論者は，相対性理論にとって直接的な意味をもつ 3 個の “相対論のパラメータ” を，より直接的に観測可能なパラメータによって置き換えることを選ぶ．観測に密接な 1 つのパラメータは今日の Hubble 膨張率，すなわち，“**Hubble 定数**”

*4

$$H_0 \equiv (a_{,t}/a)_0 \tag{29.1a}$$

である．他のパラメータは

$$q_0 \equiv -\frac{a_{,tt}}{a}\frac{1}{{H_0}^2} = -\left(\frac{aa_{,tt}}{{a_{,t}}^2}\right)_0 \tag{29.1b}$$

によって定義される，今日の次元をもたない “**減速パラメータ**” q_0 である．そして 3 番目のパラメータは今日の次元をもたない “**密度パラメータ**”

$$\sigma_0 \equiv \frac{4\pi\rho_{m0}}{3{H_0}^2} \tag{29.1c}$$

*5

である．これら 3 個の “観測のパラメータ” と 3 個の “相対論のパラメータ”$\Lambda, k/{a_0}^2$，および ρ_{m0}（合わせると 6 個の “宇宙論のパラメータ”）との間の関係は定義 (29.1) を Einstein の場の方程式 (27.39) と結びつけることによって計算できる．それを今日求めると，

$$\begin{aligned} {H_0}^2 &= -\frac{k}{{a_0}^2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi}{3}\rho_{m0}, \\ -2q_0{H_0}^2 &= -{H_0}^2 - \frac{k}{{a_0}^2} + \Lambda \end{aligned} \tag{29.2}$$

となる．これらの式を結びつけることによって，コラム 29.1 に示されている関係を見出す．そこで σ_0 および q_0 のいくつかの値の意味がまた示されている．

［練習問題］

29.1　パラメータの値の意味

コラム 29.1 に引用されている結果を導け．

---

*4　(2) “観測的なパラメータ”H_0, q_0, σ_0

*5　(3) 相対論のパラメータと観測のパラメータとの間の関係

29.2　宇宙論の赤方偏移

*6 H_0, q_0，および σ_0 の測定に用いられる観測データの主要なものの 1 つは，宇宙論の赤方偏移である．地球から遠く離れた銀河によって放出され地球で受信されるスペクトル線は波長が赤の方へ偏移していることが見出される．たとえば，[O II] λ 3727 線は，地球に固定された実験室で放出されて観測されるときには，3727Å の波長をもつ．しかしそれが銀河 3C 295 内の星によって放出され（おそらく同じ波長，$\lambda_{放出} = 3727$Å で）そして地球で受信されるときには，それはここで波長 $\lambda_{受信} = 5447$Å をもつことが測定される．波長についての微小な変化は

$$z \equiv (\lambda_{受信} - \lambda_{放出})/\lambda_{放出} = 0.4614 \qquad \text{(3C 295 に対して)} \tag{29.3}$$

である．

コラム 29.1　観測のパラメータと相対論のパラメータとの比較

A. 相対論のパラメータ

1. 今日の物質密度

$$\rho_{m0}$$

2. 今日の均質性の超曲面の曲率

$$k/{a_0}^2$$

3. 宇宙定数

$$\Lambda$$

4. 今日の放射密度，ρ_{r0}（宇宙の現在の力学に対して重要でない．それゆえ本章では無視される）

B. 観測のパラメータ

1. Hubble 定数（今日の Hubble 膨張率）

$$H_0 \equiv (a_{,t}/a_0)_0$$

2. 減速パラメータ

$$q_0 \equiv -\frac{a_{,tt}}{a}\frac{1}{{H_0}^2}$$

3. 密度パラメータ

$$\sigma_0 \equiv \frac{4\pi\rho_{m0}}{3{H_0}^2}$$

C. 相対論のパラメータによる観測のパラメータ

$${H_0}^2 = (8\pi/3)\rho_{m0} - k/{a_0}^2 + \Lambda/3 \tag{1}$$

$$q_0 = \frac{(4\pi/3)\rho_{m0} - \Lambda/3}{(8\pi/3)\rho_{m0} - k/{a_0}^2 + \Lambda/3} \tag{2}$$

$$\sigma_0 = \frac{(4\pi/3)\rho_{m0}}{(8\pi/3)\rho_{m0} - k/{a_0}^2 + \Lambda/3} \tag{3}$$

*6　宇宙論の赤方偏移の観測的な特徴

D. 観測のパラメータによる相対論のパラメータ

$$\rho_{m0} = (3/4\pi){H_0}^2\sigma_0 \tag{4}$$

$$k/{a_0}^2 = {H_0}^2(3\sigma_0 - q_0 - 1) \tag{5}$$

$$\Lambda = 3{H_0}^2(\sigma_0 - q_0) \tag{6}$$

E. 特別なパラメータの値の意味

1. $\sigma_0 = q_0$ である場合に限り，$\Lambda = 0$（Einstein の観点と一致して）．
2. Λ の符号は $\sigma_0 - q_0$ の符号と同じである．
3. もし $\Lambda = 0$ ならば

(a) $q_0 > \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \rho_{m0} > \rho_{臨界} \equiv \dfrac{3}{8\pi}{H_0}^2 \Longleftrightarrow k > 0$ （正の曲率，“閉じた”宇宙）

$\Longrightarrow$ 宇宙は最終的に再収縮するだろう

(b) $q_0 = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \rho_{m0} = \rho_{臨界} \equiv \dfrac{3}{8\pi}{H_0}^2 \Longleftrightarrow k = 0$ （ゼロ曲率，“平坦な”宇宙）

$\Longrightarrow$ 宇宙は永久に膨張するだろう

(c) $q_0 < \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \rho_{m0} < \rho_{臨界} \equiv \dfrac{3}{8\pi}{H_0}^2 \Longleftrightarrow k < 0$ （負の曲率，“開いた”宇宙）

$\Longrightarrow$ 宇宙は永久に膨張するだろう

4. もし $\Lambda \neq 0$ ならば

(a) $\sigma_0 > \dfrac{1}{3}(q_0 + 1) \Longleftrightarrow k > 0$ （正の曲率，“閉じた”宇宙）

そしてこの場合には，

$$\sigma_0 - q_0 \geq \frac{1}{{\sigma_0}^2}\left(\sigma_0 - \frac{q_0+1}{3}\right)^3 \Longleftrightarrow \text{宇宙は永久に膨張するだろう}$$

$$\sigma_0 - q_0 < \frac{1}{{\sigma_0}^2}\left(\sigma_0 - \frac{q_0+1}{3}\right)^3 \Longleftrightarrow \text{宇宙は最終的に再収縮するだろう}$$

(b) $\sigma_0 = \dfrac{1}{3}(q_0 + 1) \Longleftrightarrow k = 0$ （ゼロ曲率，“平坦な”宇宙）

そしてこの場合には，

$$\sigma_0 \geq q_0 \Longleftrightarrow \text{宇宙は永久に膨張するだろう}$$

$$\sigma_0 < q_0 \Longleftrightarrow \text{宇宙は最終的に再収縮するだろう}$$

(c) $\sigma_0 < \frac{1}{3}(q_0+1) \Longleftrightarrow k < 0$ (負の曲率, "開いた"宇宙)

そしてこの場合には,

$$\sigma_0 \geq q_0 \Longleftrightarrow \text{宇宙は永久に膨張するだろう}$$

$$\sigma_0 < q_0 \Longleftrightarrow \text{宇宙は最終的に再収縮するだろう}$$

宇宙論の赤方偏移は, すべてのスペクトル線に同様に影響することが観測されている. そして可視スペクトル内の線だけでない. こうして, 可視光線の中心領域の波長の400,000倍をもつ水素の21 cm線は, Dieter, Epstein, Lilley, and Roberts (1962) による30個の物体の観測およびRoberts (1965) によるさらなる観測によれば, $v \sim 0.005$ の程度の後退速度に対して可視光線内の線の赤方偏移と一致し, (測定誤差の範囲内で) 赤方偏移を受ける.

宇宙論の赤方偏移に対して宇宙の膨張以外の満足な説明を進めた者はいない (以下をみよ). [*7] ある新しい過程が作用しており, 光子が源から受信者までの途中で原子あるいは電子と相互作用し, それによってエネルギーのいくらかを失うというアイデア ("疲れた光") が, いろいろな著者によっていろいろな時期に提案されている. Ya. B. Zel'dovich (1963) はこのようないかなるアイデアに伴う困難さについても鋭い解析を与える.

(1) "もしエネルギー損失が銀河間の物質との相互作用によって引き起こされるならば, それは運動量の移動を伴う, すなわち, 光子の運動の方向の変化が存在する. そうすると像は不鮮明となるだろう. 遠い星は点でなく, 円盤としてみられるだろう. そしてそれは観測されているものでない." (2) "光子はそのエネルギーのわずかな部分をある粒子, k に与えて崩壊する, $\gamma \to \gamma' + k$ と仮定しよう. 保存則から k は光子の方向に動かなければならない (ところで, これは, 不鮮明化を避ける). そしてゼロ静止質量をもたなければならないということが出る. しかし, 過程の統計的な性質のゆえに, ある光子は他の光子よりも多くのエネルギーを失うだろう. そして線のスペクトルの広がりがあるだろう. それもまた観測されない."

(3) もしいかなるこのような崩壊過程でも存在するならば, Zel'dovich はM. P. Bronshtein によるものとし, そして詳細に詳しく説明する特殊相対論の単純な議論として, 関係

$$(\text{"光子崩壊"の 1 秒あたりの確率}) = \frac{(\text{次元 sec}^{-2}\text{ をもつ宇宙定数})}{(\text{sec}^{-1}\text{での光子の振動数})}$$

を要求する. "こうして," Zel'dovich は結論する. "もし光子の崩壊がそもそも可能であるならば, 電波の光子はとくに急速に崩壊しなければならない! これは静電場に対するMaxwell 方程式は変えられなければならないことを意味するだろう. …このような効果の実験的な兆候は存在しない. 遠い源からの電波の振動数をもつ放射は可視光よりもきわめてかすかにわれわれに伝播されるということはなく, スペクトルの異なる部分で測定され

[*7] なぜ赤方偏移は "疲れた光" によることができないか

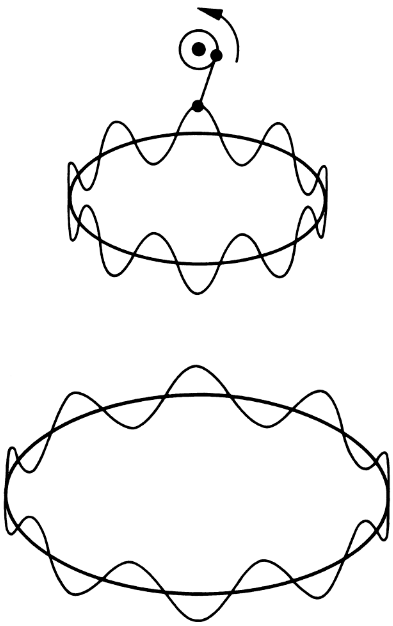


図 29.1　定常波の影響としての赤方偏移．波長の比 $\lambda_{受信}/\lambda_{放射}$ は，任意の閉じた球対称の（Friedmann）模型宇宙における大きさの比 $a_{受信}/a_{放射}$ と同等である．原子は宇宙内で n 個の節をもつ定常波を励起する．数 n は膨張の間一定にとどまる．したがって波長は宇宙の大きさに同じく比例して増大する．赤方偏移は，(1) いかに膨張は生じたか（球対称であるが，しかし任意の状態方程式），(2) 膨張が生じた比，一様な形あるいは非一様な形，そして (3) 放出での，受信での，あるいは両者の間の任意の時間での，源と受信器間の距離のようなすべての詳細に無関係であるということを，この方法でただちにみる．図において推論することは宇宙が閉じていることに依存するようにみえる（定常波，$k=0$ あるいは -1 でなく $+1$ である）．閉じていることがこの単純な結果に対して要求されないということは本文に与えられているさらなる解析からみられる．

る赤方偏移は正確に同じである．…こうして，Friedmann の説明以外に赤方偏移の説明が存在するという提案は完全に失敗する．”

この銀河の一般的な後退は，赤方偏移が観測された [Hubble (1929)] 以前に予言 [Friedmann (1922)] されていながら，いくつもの考察の中で，赤方偏移に対する説明として，一般的な後退を受け入れるように指導するものは，1 つもない状況であった．

*8 宇宙論の赤方偏移は宇宙に対する標準的なビッグバン模型によって容易に理解される
*9 (図 29.1)．詳細な解析のために，3 つの過程（光の放射，放射体から受信機までの曲がった時空を通って光の伝播，そして光の受信）に注目しよう．放射と受信は放射体と受信機の固有基準系 [直交テトラッド（tetrad，四つ組)] で起こる，それらは特殊相対論の現象である．伝播は，対照的に一般相対論の過程である，それは曲がった時空における測地線の運動の法則によって支配される．

すべての 3 つの過程（放射，伝播，および吸収）を計算するときには座標系を必要とする．27 章で導入された座標 (t,χ,θ,ϕ) あるいは (η,χ,θ,ϕ) を用いよ．そして座標系を通しての光線の経路は単純であるように空間座標を位置づけよ．これは座標系の原点 $(\chi=0)$ を地球に置くことによってもっともよくなされる．そうすると放射している銀河は，ある

*8　赤方偏移の公式の導出
*9　$\lambda\propto$(膨張因子)

"半径"χ_e およびある角度の位置 (θ_e, ϕ_e) に存在するだろう．宇宙論の線要素

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + \Sigma^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)]$$
$$= a^2(\eta)[-d\eta^2 + d\chi^2 + \Sigma^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \tag{29.4a}$$

$$\Sigma = \begin{cases} \sin\chi & (\text{もし } k = +1 \text{ ならば}) \\ \chi & (\text{もし } k = 0 \text{ ならば}) \\ \sinh\chi & (\text{もし } k = -1 \text{ ならば}) \end{cases} \tag{29.4b}$$

は $k = -1, 0$，あるいは $+1$ であろうと，$\chi = 0$ の周りに（すなわち，地球の周りに）球対称である．したがって，地球と放射している銀河の両方を通過する測地線（光子の世界線）はすべて半径方向でなければならない．

$$\theta = \theta_e, \qquad \phi = \phi_e, \qquad \chi = \chi(t) \tag{29.5}$$

（対称性へ訴えないことを望む者は，(t, χ, θ, ϕ) 座標系で測地線の方程式を吟味して，もし $d\theta/d\lambda = d\phi/d\lambda = 0$ ならば，$d^2\theta/d\lambda^2 = d^2\phi/d\lambda^2 = 0$ を見出すことができる．したがって，最初半径方向である測地線はつねに半径方向にとどまるだろう.）

さて，放射を考える．$(\chi_e, \theta_e, \phi_e)$ に静止している（"宇宙流体" とともに動いている）銀河が，波連の 2 つの相次ぐ波頭 A および B を，座標時間 t_{eA} および t_{eB} に地球に向かって放射する．銀河上で測定されたときの固有時間が座標時間と同じである（$t = \tau +$ 定数は 27.4 節における座標系に対する構成過程の部分であった）ように調整されている．したがって放射体によってみられたときの放射の周期は $P_{\text{放射}} = t_{eB} - t_{eA}$ である．そして波長は，幾何学化された単位が用いられるとき周期と同じである．

$$\lambda_{\text{放射}} = t_{eB} - t_{eA} \tag{29.6}$$

次に伝播を吟味する．波頭 A および B がヌル測地線に沿って伝播する．この事実は波頭の世界線，$\chi_A(t)$ および $\chi_B(t)$ を，直接線要素 (29.4) から読み取ることを可能にする．$ds^2 = 0$ は $a(t)d\chi = -dt$ を保証する（$-$ である．$+$ でない．なぜなら光は地球に向かって $\chi = 0$ で伝播するから）．したがって，世界線は

$$\chi_e - \chi_A(t \text{ あるいは } \eta) = \eta - \eta_{eA} = \int_{t_{eA}}^{t} a^{-1}\, dt, \tag{29.7}$$
$$\chi_e - \chi_B(t \text{ あるいは } \eta) = \eta - \eta_{eB} = \int_{t_{eB}}^{t} a^{-1}\, dt$$

最後に，受信を吟味する．地球上の受信機は，まさに遠方の放射体が "宇宙流体" とともに動くように動く（地球の流体に相対的な "特殊な運動"，すなわち，太陽の周りの運動，われわれの銀河の中心の周りの運動，等を無視せよ．それは通常の Doppler 補正によって考慮されうる）．こうして，受信機に対しては放射体に対するように，固有時間は座標時間と同じである．そして

$$\lambda_{\text{受信}} = t_{rB} - t_{rA} \tag{29.8}$$

ここに t_{rB} および t_{rA} は相次ぐ波頭の受信の時間である．

さて赤方偏移を得るために式 (29.6)，(29.7)，および (29.8) を結びつける．受信機は $\chi = 0$ にある．したがって式 (29.7) は

$$\begin{aligned} 0 &= \chi_e - \int_{t_{eA}}^{t_{rA}} a^{-1}\, dt, \\ 0 &= \chi_e - \int_{t_{eB}}^{t_{rB}} a^{-1}\, dt \end{aligned} \tag{29.9}$$

を述べる．これらの式を互いに他から引いて

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_{eB}}^{t_{rB}} a^{-1}\, dt - \int_{t_{eA}}^{t_{rA}} a^{-1}\, dt \\ &= \int_{t_{rA}}^{t_{rB}} a^{-1}\, dt - \int_{t_{eA}}^{t_{eB}} a^{-1}\, dt \approx \frac{t_{rB} - t_{rA}}{a(t_r)} - \frac{t_{eB} - t_{eA}}{a(t_e)} \end{aligned}$$

を得る．そして式 (29.6) および (29.8) と結びつけて

$$\frac{\lambda_{\text{受信}}}{a(t_r)} = \frac{\lambda_{\text{放射}}}{a(t_e)} \tag{29.10}$$

を見出す．すなわち，

$$z \equiv \Delta\lambda/\lambda = a(t_r)/a(t_e) - 1 \tag{29.11}$$

これらの赤方偏移の方程式は図 29.1 の単純な結果を確認する．光線が伝播するにつれて，その波長は（“流体” とともに動いている観測者によって測定されるとき）宇宙の線膨張に直接比例して増大する．**波長の膨張因子に対する比，λ/a は一定にとどまる．** この結果の重要な応用に対しては，コラム 29.2 および 29.3 をみよ．

［**練習問題**］

29.2　赤方偏移の別な導出

光線に対して重要な線要素の唯一の部分は

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\chi^2$$

であることに注意せよ．なぜなら光線の世界線（球対称！）に沿って $d\theta = d\phi = 0$ であるから．光線を 4–運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつ光子でつくられているとみなせ．測地線の方程式から（あるいは，25 章を学んだ読者については，Killing ベクトルについての議論から），

$$p_\chi \equiv \boldsymbol{p}\cdot(\partial/\partial\chi)$$

は光子の世界線に沿って保存されることを示せ．この事実，光子の 4–運動量はヌルであるという事実，$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} = 0$, および 4–速度 $\boldsymbol{u}$ をもつ観測者によって測定されるエネルギーに対する式 $E = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}$ を用いて，赤方偏移の式 (29.11) を導け．

コラム 29.2 原始放射の宇宙論的な赤方偏移

赤方偏移の公式

$$\lambda/a = \text{定数} \tag{1}$$

[式 (29.10)] の重要な応用として，熱いビッグバンから生ずる放射を考える．この原始放射は最初，物質と熱平衡にあるから，最初 Planck 黒体スペクトルをもつ．それに続く物質との相互作用はスペクトルを変えることができない．なぜなら相互作用が起こっている限り物質は放射と熱平衡にとどまるからである．しかし，宇宙の赤方偏移はスペクトルを変えることができるし，そして変える．練習問題 22.17 で，運動論を用いて，1 人の観測者によってみられたときに Planck スペクトルをもつ放射は，すべての観測者によってみられたときの Planck スペクトルをもつことが示された．しかし観測される温度は個々の光子の振動数が赤方偏移されるのと正確に同じ仕方で赤方偏移される．したがって，“流体” 内で静止している観測者によってみられるとき，原始放射の温度は赤方偏移される．

$$T \propto 1/a \tag{2}$$

これは，プラズマ再結合後，放射と物質が乖離されるとき，再結合以前に放射と物質が相互作用しているときと同様に，真実である．そしてそれは原始光子に対してのみならず，熱いビッグバンから生ずる温かいニュートリノおよび重力子に対しても真実である．

赤方偏移の式 (2) を導く別な方法がある．黒体放射のエネルギー密度に対して温度に関する式

$$\rho_r \propto T^4 \tag{3}$$

を，断熱膨張によるエネルギー密度の減少に対する式

$$\rho_r \propto (\text{体積})^{-4/3} \propto (a^3)^{-4/3} \propto a^{-4} \tag{4}$$

と結びつけよ．

コラム 29.3 赤方偏移を用いて距離と時間を特徴づける

距離：地球の銀河団内の物体を議論するときには，天文学者は典型的に距離を光年 (ly) あるいはパーセック (pc) で記述する．しかしさらに遠い物体（銀河，クエーサー

等）を取り扱うときには，天文学者は距離を実際に観測されるもの，赤方偏移で記述することがより好都合であることを見出す．たとえば，“銀河 3C 295 は 0.4614 の赤方偏移にある” という陳述は，“3C 295 は $z = 0.4614$ の赤方偏移に対応する，地球からの距離にある［式 (29.16) によって与えられる］ことを意味する”．

時間：最後の数 10^9 年の間に起こった事象を議論するときには，天文学者は通常時間を年の単位で測定する．**例**：“4.6×10^9 年前に星間ガスから凝縮した太陽系”［Wasserburg and Burnett（1968）をみよ］．しかし宇宙の始まりにより近い事象，すなわちすべて約 12×10^9 年の本質的に同じ年齢をもつ現象を取り扱うときには，天文学者は時間を赤方偏移で記述することをより好都合であると見出す．**例**：“赤方偏移が 1,000 で再結合した原始プラズマ” は，“もし光子がプラズマ再結合のときに放出され，そしてそのとき以来自由に伝播したならば，光子は当時と現在との間で $z = 1{,}000$ の全赤方偏移を経験したであろう” という意味である．同じことであるが，$1 + z = (a_0/a)$［式 (29.11) をみよ］であるから，“宇宙が今日よりも小さかったときの $1 + z \approx 1{,}000$ の因子であったときに再結合されたプラズマ” ともいえる［**応用**：宇宙の過去の進化が要約されている図 28.1 で，水平のスケール a/a_0を $1/(1+z)$ によって自由に置き換え，それによって原始的な元素の形成は $z \approx 10^9$ の赤方偏移で起こったことをみることができる］．赤方偏移の単位から時間の単位への変換はパラメータ ρ_{m0}, ρ_{r0}，および $k/{a_0}^2$ に強く依存している［27.10 および 27.11 節をみよ．また式 (29.15) をみよ］．

29.3　粒子の de Broglie 波長の赤方偏移

有限の静止質量 μ の粒子が，膨張している宇宙流体を通って測地線の世界線に沿って動く．

$$p \equiv (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p})^{1/2} \equiv \frac{\mu v}{(1-v^2)^{1/2}}$$

は流体内に静止している観測者によって測定される粒子の空間の 4–運動量とする（観測者が観測者の固有基準系で測定する通常の速度は v である）．粒子の関連する “de Broglie 波長” は $\lambda \equiv h/p$ である．

(a) この de Broglie 波長は正確に，光子の波長

$$\lambda/a = \text{定数}$$

と同じ仕方で赤方偏移されることを示せ．

(b) この結果を用いて，宇宙を満たす理想気体の分子に対して，それらの平均運動エネルギーは気体が非相対論的であるときには a^2 に逆比例して減少すること，そして（光子のエネルギーのように）気体が高度に相対論的であるときには a に逆比例して減少することを示せ．

29.3 距離–赤方偏移の関係，Hubble 定数の測定

式 (29.11) は赤方偏移を，放射の事象と受信の事象との間の膨張因子についての変化によって表している．“近くの” 放射体（“Hubble の長さ” $1/H_0$ よりもはるかに小さい距離での放射体）に対しては，赤方偏移を放射体と地球との間の距離によって表すのがより好都合である．その距離（“現在の距離”）は今日地球を通過する均質な超曲面上で定義されている．なぜならその超曲面は今日受信機の同時性の曲面と局所的に一致するからであり，それはまた局所的に，今日 “宇宙流体” とともに動いている任意の観測者に対する同時性の曲面である．

*10 放射体と今日の観測者との間の距離［$(t_e, 0, \theta_e, \phi_e)$ と $(t_r, \chi_r, \theta_r, \phi_r)$ を結びつける一定の (t, θ, ϕ) の空間の測地線に沿う距離］は線要素 (29.4) から直接読み取れて，

$$l = a(t_r)(\chi_e - \chi_r) = a(t_r)\chi_e \tag{29.12}$$

となる．χ_e に対する表現 (29.9) を用いて，

$$l = a(t_r)\int_{t_e}^{t_r} a^{-1}\,dt \tag{29.12$'$}$$

を見出す．近い過去では，$a(t)$ は

$$\begin{aligned} a(t) &= a(t_r) + (a_{,t})_{t_r}(t - t_r) + \frac{1}{2}(a_{,tt})_{t_r}(t - t_r)^2 + \cdots \\ &= a(t_r)[1 + H_0(t - t_r) - \frac{1}{2}q_0{H_0}^2(t - t_r)^2 + \cdots] \end{aligned} \tag{29.13}$$

によって与えられた．ここに Hubble 定数 H_0 に対する定義 (29.1) および減速パラメータ q_0 が用いられている．この表現を式 (29.12′) に代入し，そして積分して，距離に対する表現

$$l = (t_r - t_e) + \frac{1}{2}H_0(t_r - t_e)^2 + \cdots$$

あるいは同等であるが，

$$t_r - t_e = l - \frac{1}{2}H_0 l^2 + \cdots \tag{29.14}$$

を見出す．赤方偏移 (29.11) は式 (29.13) を用いて $t_r - t_e$ についてのべき級数として表されうる．

$$\begin{aligned} z &= \frac{a(t_r) - a(t_e)}{a(t_e)} = \frac{a(t_r)[H_0(t_r - t_e) + \frac{1}{2}q_0{H_0}^2(t_r - t_e)^2 + \cdots]}{a(t_r)[1 - H_0(t_r - t_e) + \cdots]} \\ &= H_0(t_r - t_e) + {H_0}^2\left(1 + \frac{1}{2}q_0\right)(t_r - t_e)^2 + \cdots . \end{aligned} \tag{29.15}$$

これを $t_r - t_e$ に対する l を用いた式 (29.14) と結びつけて，最終的に

*10 距離–赤方偏移の関係の導出

*11

$$z = H_0 l + \frac{1}{2}(1+q_0)(H_0 l)^2 + O([H_0 l]^3) \tag{29.16}$$

を得る．これは宇宙の標準的なビッグバン模型に対する“**距離–赤方偏移の関係**”である．

*12　この距離–赤方偏移の関係を天文学的な観測（コラム 29.4 をみよ．それは次章後に読むのが最善である）と結びつけることによって，Allan Sandage（1972a）は

$$H_0 = 55{\pm}7\ \mathrm{km\,sec^{-1}\,Mpc^{-1}} \tag{29.17}$$

すなわち

$$H_0{}^{-1} = (18{\pm}2)\times 10^9 \text{年} \tag{29.18}$$

を得た（**注意**：$1\ \mathrm{Mpc} \equiv 1$ Megaparsec は 3.26×10^6 光年，あるいは 3.08×10^{24} cm）．ここで引用されている $\pm 7\ \mathrm{km\ sec^{-1}\,Mpc^{-1}}$ の不確定性は，距離–赤方偏移のデータと関係している統計的な不確定性“1–シグマ（one–sigma)”である．統計的な誤差は，現在理解されていないが，これよりいくらか大きいかもしれない．しかし H_0 の真の値はほとんどたしかに Sandage の値 $55\ \mathrm{km\ sec^{-1}\,Mpc^{-1}}$ と因子 2 の範囲内である．

もし $\Lambda = 0$ ならば，“閉じた”宇宙と“開いた”宇宙との間，すなわち最終的な再収縮と永久の膨張との間を分割する“臨界密度”は

*13

$$\rho_{\text{臨界}} = \frac{3}{8\pi} H_0{}^2 = 5\times10^{-30}\mathrm{g/cm^3} \tag{29.19}$$

であることに注意せよ（コラム 29.1 で記述されているように，$\rho > \rho_{\text{臨界}} \Longleftrightarrow$“閉じた”$\Longleftrightarrow$ 再収縮，$\rho < \rho_{\text{臨界}} \Longleftrightarrow$“開いた”$\Longleftrightarrow$ 永久の膨張）．実際の密度との比較は 29.6 節まで延期されるだろう．

距離の測定は，減速パラメータ q_0 についての有用な情報を与えるに十分正確でない．

29.4　等級–赤方偏移の関係，後退パラメータの測定

q_0 についての情報は銀河の見かけの等級を銀河の赤方偏移と比べることによってもっともよく得られる．

*14　天文学では物体のボロメーター（放射エネルギー測定装置）による見かけの等級 m を，公式

$$\begin{aligned} m &= -2.5 \log_{10}(S/2.52\times10^{-5}\mathrm{erg\ cm^{-2}\ sec^{-1}}) \\ &= -2.5\log_{10} S + \text{定数} \end{aligned} \tag{29.20}$$

によって定義する．ここに S は物体から地球に達するエネルギーの束（単位時間あたり単位面積あたりのエネルギー）である［もちろん，全波長領域 $0 < \lambda < \infty$ にわたって束を測

*11　距離–赤方偏移の関係に対する結果
*12　Hubble 定数 H_0 の測定
*13　臨界密度の値
*14　見かけの等級が定義される

定できない．したがって種々の波長領域（“U” ≡ “紫外線”，“B” ≡ “青色”，“V” ≡ “可視光”）における束に対応する種々の見かけの等級（$m_U, m_B, m_V, \cdots$）を区別する．しかし，これらの微妙さはここで取り扱われる重力物理学からあまりにも離れている]．

*15 固有光度 L および赤方偏移 z の銀河について見かけの等級を計算する．計算を単純化するために，放射体を空間座標の原点（$\chi_e = 0$）に置き，そして地球を $(\chi_r, \theta_r, \phi_r)$ に置く（29.2 節の赤方偏移の計算に比べて位置の逆転に注意せよ）．地球上に，入射光に垂直な面積 A の写真感光板を置く．そうすると，時間 t_r に感光板は放射している銀河周りの球状の 2 次元面（$t = t_r, \chi = \chi_r$，θ および ϕ は変化する）のちっぽけな部分である．銀河を取り巻く 2–球の全面積は

$$\mathcal{A} = 4\pi[a(t_r)\Sigma(\chi_r)]^2 \tag{29.21}$$

である．したがって，感光板の面積の 2–球の面積に対する比は

$$\frac{A}{\mathcal{A}} = \frac{A}{4\pi[a(t_r)\Sigma(\chi_r)]^2} \tag{29.22}$$

によって与えられる．感光板は 2–球を通して流れ出るエネルギーの分数 $A/\mathcal{A}$ をとらえる．

もし赤方偏移がなかったならば，時間 t_r に全 2–球を貫通する勢力は正確に時間 t_e での放射体の光度であるだろう．しかし，赤方偏移はこの結果を 2 つの方法で変える．(1) 2–球を貫通する各光子のエネルギーはそこでの流体の局所 Lorentz 系で測定されるとき，放射体によって測定されたときよりも小さい．

$$E_{\text{受信}}/E_{\text{放射}} = \lambda_{\text{放射}}/\lambda_{\text{受信}} = 1/(1+z) \tag{29.23}$$

(2) 2–球で “宇宙流体” に対して静止している観測者によって測定されるとき，時間 Δt_r によって分離されている，同じ θ, ϕ をもつ 2 個の光子は，放射体によって測定されるときより短い時間 Δt_e によって分離されていた．

$$\Delta t_r/\Delta t_e = \lambda_r/\lambda_e = 1+z \tag{29.24}$$

光度 L は，源で測定されるときは，時間間隔 Δt_e 内に放射される，個々の光子（添字 J でラベルされる）のエネルギー $E_{\text{放射}J}$ の和を，Δt_e によって割ったもの

$$L = (1/\Delta t_e)\sum_J E_{\text{放射}J} \tag{29.25}$$

である．時間 $t_r - t_e$ の後に 2–球を貫通する勢力は，2–球での流体によって測定されるときは，

$$P = (1/\Delta t_r)\sum_J E_{\text{受信}J} \tag{29.26}$$

である．ここに和は光子の同じ組にわたる．

*15 等級–赤方偏移の関係の導出

式 (29.23) から (29.26) までの式を結びつけると，2–球を貫通する勢力は

$$P = L/(1+z)^2$$

であることがわかる．これから，分数，

$$P_A = \frac{A}{\mathcal{A}}P = \frac{AL}{4\pi[(1+z)a(t_r)\Sigma(\chi_r)]^2}$$

は写真感光板を貫通する．したがって地球で測定される束は

$$S = \frac{P_A}{A} = \frac{L}{4\pi R^2(1+z)^2} \tag{29.27}$$

である．ここに R は放射体を取り囲み，そして受信時間に受信機を貫通する 2–球の “曲率半径” である．

$$R \equiv a_0\Sigma(\chi_r - \chi_e) = \begin{cases} a_0 \sinh(\chi_r - \chi_e) & (\text{もし } k=-1 \text{ ならば}) \\ a_0[\chi_r - \chi_e] & (\text{もし } k=0 \text{ ならば}) \\ a_0 \sin(\chi_r - \chi_e) & (\text{もし } k=+1 \text{ ならば}) \end{cases} \tag{29.28}$$

[χ_e は現在の約束によれば 0 であり，そして $a_0 = a(t_r)$ を思い出せ.] 対応する見かけの等級 (29.20) は

$$m = +5\ \log_{10}[(1+z)R] - 2.5\ \log_{10} L + \text{定数} \tag{29.29}$$

見かけの等級を放射体の赤方偏移に関係づけるために，量 R を z で表さなければならない．光子の伝播に対する式 (29.7)（受信体と放射体の位置が逆転されているので符号が逆転されている）から，

$$\chi_r - \chi_e = \int_{t_e}^{t_r} a^{-1}\,dt = \int_1^{a(t_r)/a(t_e)} \left[\frac{a}{a(t_r)}\right]\left[\frac{dt}{da}\right] d\left[\frac{a(t_r)}{a}\right] \tag{29.30}$$

を知る．そして式 (29.11) から

$$z = a(t_r)/a(t_e) - 1$$

を知る．したがって

$$\chi_r - \chi_e = \int_1^{1+z} \left[\frac{a}{a(t_r)}\right]\left[\frac{dt}{da}\right] d\left[\frac{a(t_r)}{a}\right] \tag{29.31}$$

コラム 29.1 の式 (4) から (6) まで，および式 (27.40) は，関数 dt/da を $a/a(t_r)$ および定数 H_0, q_0, σ_0 で定める．その結果を式 (29.31) に代入しそして積分することによって，$\chi_r - \chi_e$ を赤方偏移 z および宇宙論のパラメータ H_0, q_0, σ_0 を用いて得る．

$$\chi_r - \chi_e = |1+q_0-3\sigma_0|^{1/2}\int_1^{1+z} \frac{du}{[2\sigma_0 u^3 + (1+q_0-3\sigma_0)u^2 + \sigma_0 - q_0]^{1/2}} \tag{29.32a}$$

2–球の曲率半径 R はこの表現を式

$$R = \frac{{H_0}^{-1}}{|1+q_0-3\sigma_0|^{1/2}}\Sigma(\chi_r-\chi_e) \tag{29.32b}$$

に代入することによって得られる［式 (29.28), a_0 はコラム 29.1 の式 (5) によって評価されている］.

式 (29.29) および (29.32) は見かけの等級 m を赤方偏移 z で定める.

ゼロの宇宙定数（$\sigma_0 = q_0$，$\Lambda = 0$）の場合に対して，積分 (29.32a) は初歩的な関数で表され，

$$\begin{aligned} R &= \frac{{H_0}^{-1}}{{q_0}^2(1+z)}[-q_0+1+q_0z+(q_0-1)(2q_0z+1)^{1/2}], \\ &\approx {H_0}^{-1}z\left[1-\frac{1}{2}(1+q_0)z+\mathrm{O}(z^2)\right] \end{aligned} \tag{29.33}$$

を与える．したがって

*16

$$\begin{aligned} m &= 5\log_{10}[1-q_0+q_0z+(q_0-1)(2q_0z+1)^{1/2}] - 2.5\log_{10}L + \text{定数} \\ &\approx 5\log_{10}z + 1.086(1-q_0)z + \mathrm{O}(z^2) - 2.5\log_{10}L + \text{定数} \qquad (z \ll 1 \text{ に対して}) \end{aligned} \tag{29.34}$$

（**注意**：因子 1.086 は実際 2.5/ln 10 である）．ゼロでない Λ（$\sigma_0 \neq q_0$ に対して）に対するべき級数解は $\mathrm{O}(z^2)$ および高次でのみ σ_0 への依存性を示す．

$$R \approx {H_0}^{-1}z\left[1-\frac{1}{2}(1+q_0)z+(\sigma_0\text{および }q_0\text{に依存する }\mathrm{O}(z^2)\text{ の補正})\right] \tag{29.35a}$$

$$m \approx 5\log_{10}z + 1.086(1-q_0)z + O(z^2) - 2.5\log_{10}L + \text{定数} \tag{29.35b}$$

Sheldon（1971）は $\Lambda \neq 0$ に対する厳密解を Weierstrass の楕円関数で与える．Refsdal *et al.*(1967) は厳密解を表にしそして図形を描く．

*17 理論的な等級–赤方偏移の関係 (29.35b) を 82 個の星団内でもっとも明るい銀河の観測と比較することによって，Allan Sandage（1972a,c,d）は後退パラメータに対して以下の値

$$q_0 = 1.0 \pm 0.5, \qquad \text{もし}\sigma_0 = q_0 (\text{すなわち}\Lambda = 0)\text{ ならば} \tag{29.36}$$

を得る（**注意**：0.5 は "1–シグマ" 不確定性である．Sandage は 68%の信頼で $0.5 < q_0 < 1.5$ を，そして 95%の信頼で $0 < q_0 < 2$ を評価する—未知の展開効果を与えることは無視される）．この結果に通ずる観測および展開効果による不確定性はコラム 29.4 に記述さ

*16　等級–赤方偏移の関係に対する結果
*17　後退パラメータ q_0 の測定

れている．コラム 29.5 はこのような宇宙の測定に対する基礎を作った Edwin Hubble について簡単に紹介する．

コラム 29.4　Hubble 定数および後退パラメータの測定

I. Hubble 定数 H_0

A. 目的： 観測データを距離–赤方偏移の関係

$$z = H_0 l + \frac{1}{2}(1+q_0)(H_0 l)^2 + O([H_0 l]^3)$$

と比べることによって定数 H_0 を測定することである．ここに l は地球から今日の源までの距離である．そして z は地球で測定されたときの源の赤方偏移である．

B. 主要な困難： この距離–赤方偏移の関係はわれわれの銀河内の星に適用しない．銀河は重力的に束縛されており，したがって宇宙の膨張を受けつけない．距離–赤方偏移の関係もまたわれわれの銀河と近傍の銀河（"局所群"）との間の分離に当てはまらない．われわれの銀河と近傍の銀河との間の重力的な引力は非常に大きく，それが銀河の運動を宇宙の膨張から相当離れた摂動とする．多くの銀河を含むに十分大きいスケール（おのおのの銀河あるいは銀河団は大ざっぱに一様に分布している粒をもつ，"1 粒のちり" として考えられうるスケール）についてのみ—このような大きいスケールについてのみ距離–赤方偏移の関係は良い精度で成り立つ．しかし非常に遠く離れた銀河までの距離 l の信頼できる測定を得ることは非常に難しい！

C. H_0 が測定されてきている手続き［Sandage and Tamman, Sandage (1972a) に要約されている］

1. ケフェウス型変光星はそれらの光度 L，あるいは，同等のことであるが，それらの絶対等級（ボロメーター放射計による）M

$$\begin{aligned} M &\equiv \begin{pmatrix}\text{星が } 10\,\text{pc} = 32.6 \text{ 光年の距離にあっ} \\ \text{たらもつであろう見かけの等級}\end{pmatrix} \\ &= -2.5\log_{10}(L/3.0\times10^{35}\text{erg sec}^{-1}) \end{aligned} \tag{1}$$

と非常に密接に関係している脈動周期（光の出力について振動によって測定される）をもつ脈動星である［式 (29.20) をみよ］．われわれの銀河内の測定によって，天文学者はケフェウス型変光星に対する "周期–光度の関係" を得た．

2. ケフェウス型変光星は $\sim$4 Mpc（4 Mpc $\equiv 4\times10^6$ pc）ほど遠く離れている銀河内で明らかに可視である．おのおののこのような銀河についてケフェウスの周期を測定し，そしてケフェウスの絶対等級 M を周期–光度の関係から推論する．それらの見

かけの等級 m を測定する．それから関係

$$m - M = 5\log_{10}(l/10\,\mathrm{pc}) \tag{2}$$

を用いて地球からの距離 l を計算する．これによってわれわれ自身の ∼4 Mpc 内のすべての銀河までの距離 l を得る．不幸にも，このような銀河はあまり近くて宇宙の膨張に明白に参加できない（このような銀河は "局所群"，"M81 群"，および "ちょうこくしつ座銀河群" のみを含む）．こうして，H_0 を測定しようと試みる前に距離のスケールをさらに遠くまで押しやらなければならない．

3. ∼4 Mpc 以内の Sc, Sd, Sm, および Ir 型の銀河はイオン化された水素の巨大な群を含み，"Hα 光" で明るく輝いている．これらの群は，"H II 領域" とよばれ，H II 領域の直径 D と銀河の光度 L（あるいは，同等のことであるが，D と銀河の絶対等級 M）との間の非常に緊密な相関を示す．実際，与えられた銀河の光度 L に対して，H II 直径についての微小な広がりは $\sigma(\Delta D/D) \approx 0.12$ である．(a) ケフェウス型変光星を通して定められるときのこれらの銀河までの距離（$\lesssim 4$ Mpc），(b) 銀河の見かけの等級，および (c) 銀河内での H II 領域の角直径を用いて，実際の H II 直径 D および銀河の光度 L を計算し，それによって "直径–光度の関係" $D(L)$ を得る．

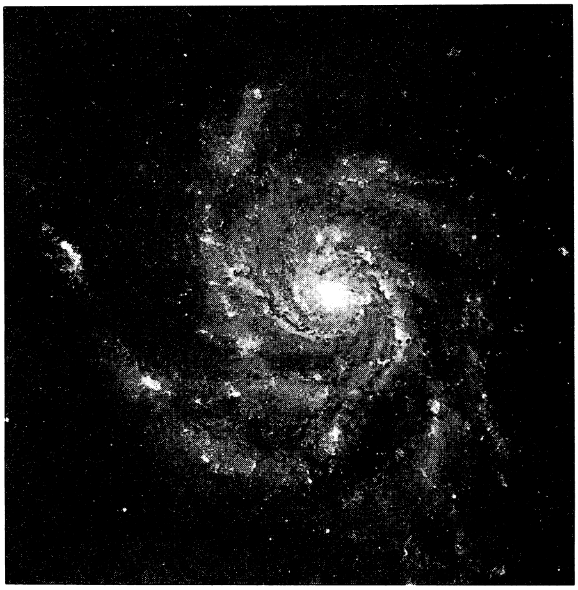
4. H II 領域は ∼ 60 Mpc ほど遠く離れた銀河内で鮮明にみることができるくらい十分大きい．H II の角直径 $\alpha = D/l$，および銀河の見かけの等級（ボロメーター放射計による）

$$m = -2.5\log_{10}\left(\frac{L/4\pi l^2}{2.52\times 10^{-5}\mathrm{erg\,cm^{-2}\ sec^{-1}}}\right) \tag{3}$$

を測定することによって，そして直径–光度の関係と結びつけることによって，H II 領域をもち，地球の ∼60 Mpc 内に存在する Sc, Sd, Sm, および Ir 型のすべての銀河までの距離 l を得る．不幸に，これは局所的な運動が宇宙の膨張に比べてまだ無視できるまでに十分遠く離れていない．

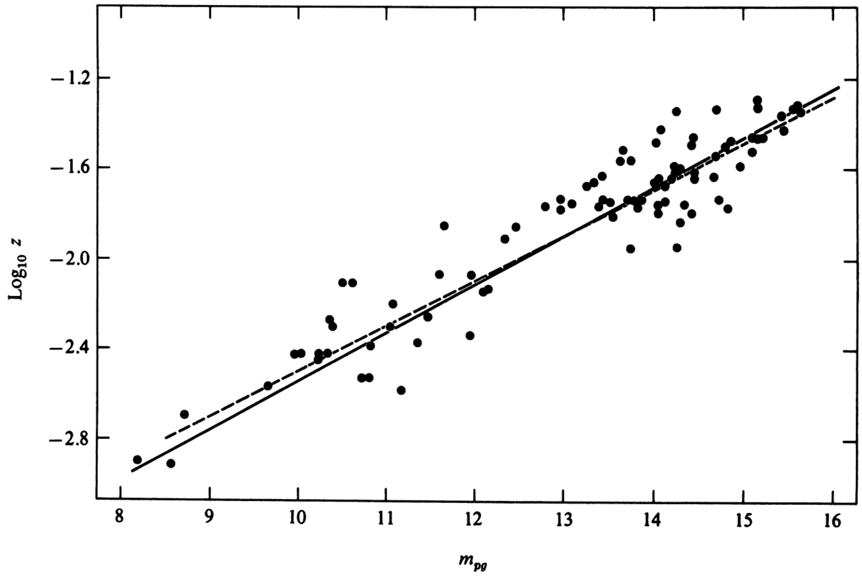
5. ∼ 60 Mpc 内には光度（絶対等級）はむしろ一定である（L について 1 つの Sc I 銀河から別な Sc I 銀河への差が $\lesssim 50\%$ である）のを見出すに足る十分な型 Sc I の銀河が存在する．このような Sc I 銀河までの距離（H II 領域を通して測定されたとき）を用いて，さらにそれらの見かけの等級の測定を用いて，それらの普遍的な絶対等級（写真で測定される）は $M_{pg} = -21.2$ であると計算する．

6. それから ∼70 Mpc よりも大きい距離をもつすべての知られている Sc I 銀河を吟味する．おのおのの銀河に対して，見かけの等級を測定しそれを普遍的な絶対等級と比較して地球からの距離 l を得る．そしておのおのの銀河に対して，スペクトル線の赤方偏移 $z = \Delta\lambda/\lambda$ を測定する．生ずる赤方偏移–距離の関係から—そしてそこにいたるすべての段階での統計的な不確定性を考慮して—Sandage and Tamman (1965–1972 年に遂行された仕事）は $H_0 = dz/dl = 55\pm 7(\mathrm{km/sec})\mathrm{Mpc}^{-1} = 1/[(18\pm 2)\times 10^9$ 年] を得る［レビューに対しては Sandage（1972a）をみよ］．見積もられている誤差



地球からの距離 l~3 Mpc での Sc I 銀河 M101．200 インチの望遠鏡で撮影されている[Hale 天文台の好意]．

は純粋に統計的である．系統的な誤差は確かにさらに大きい．しかしそれらはほとんど確かに因子 2 を越えない［すなわち，$30 < H_0 < 110(\text{km/sec})\text{Mpc}^{-1}$］．



距離≧70 Mpc での ScI 銀河に対する等級–赤方偏移関係．実線はデータへの最小 2 乗法による適合である．点線は 5 の理論的な傾斜をもつ[Sandage and Tamman から]．

II. 後退パラメータ q_0

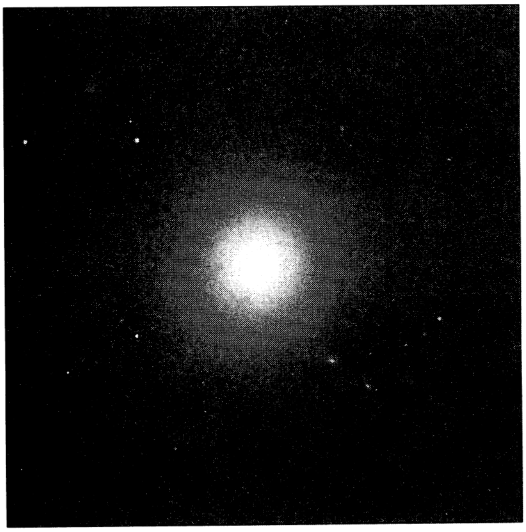
A. 目的：観測データを等級–赤方偏移の関係

$$m = 5\log_{10} z + 1.086(1-q_0)z + O(z^2) - 2.5\log_{10} L + \text{定数} \qquad (4)$$

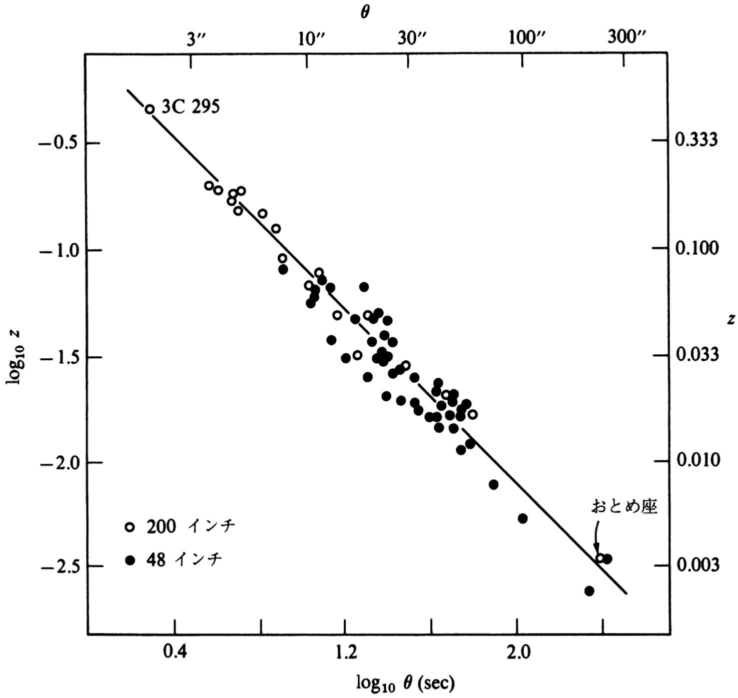
と比較することによって定数 q_0 を測定することである［**注意**：この関係は宇宙定数がゼロでなくても，すなわち，$\sigma_0 \neq q_0$ であっても成り立つ．σ_0 への依存性は $O(z^2)$ およびそれ以上でのみ起こる］．

B. 主要な困難：同じ絶対的な光度 L［“標準光源”］をもつ物体に対するデータを用いなければならない．しかし q_0 の効果が示されるに足る十分大きい距離で L を測定できない．

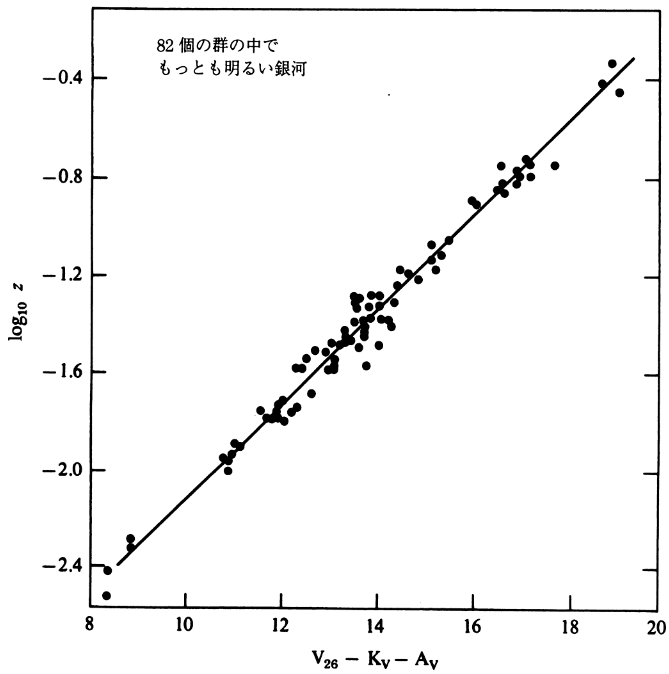
C. 標準光源の探求：標準光源に対する 1 つの明白な選択は Sc I 銀河であるだろう．なぜならそれらはすべて，ほとんど同じ L（上述をみよ）をもつことが発見されたからである．しかしそれらは q_0 の効果が示されるに足るほど，十分大きい距離でみえるに足るほど明るくない．別な選択，クエーサーは，非常に大きい赤方偏移（∼3 ほど大きい z）でみられるに足るに十分明るい．しかしそれらの絶対光度は大きなばらつきをもつ．あるいはクエーサーは，等級–赤方偏移の図で，小さい z においてさえ，直線上に落ちないことからそのように推測する．最善の選択は L についてばらつきが小さいもっとも明るい型の物体である．Sandage（1972a,b,c）は “認められている標準的な銀河群” の中でもっとも明るい銀河を選ぶ．このような群は支配的に E–型銀河から構成されている．そしてもっとも明るい構成要素は驚くほど 1 つの群と他の群で同じである（L についてのばらつきは ∼25%である）．類似性はそれらのスペクトルに示されるし，そして角直径–赤方偏移（このページ），あるいは見かけの等級–赤方偏移（次ページ），あるいは角直径–見かけの等級を描くときに与えられる非常に正確な直線に示される．



地球からの距離 l∼11 Mpc での E–型銀河 M87．200 インチの望遠鏡で撮影されている［Hale 天文台の好意］．



認められている標準的な群の中でもっとも明るい銀河に対する角直径–赤方偏移．Sandage (1972a, b)から[これらのデータは，q_0 および σ_0 についての有用な情報を与えるには十分正確でない．しかし 1973 年における改善は必要とされる精度をもたらすだろう．29.51 節をみよ]．



認められている標準的な群の中でもっとも明るい銀河に対する等級–赤方偏移．$V_{26}-K_v-A_v$ は，ある補正が考慮されている見かけの等級である．描かれている線は $\sigma_0 = q_0 = 1$ に対応する(傾斜 5 の直線)[Sandage(1972a)から]．

D. q_0 **が測定されてきた手続き［Sanadage（1972a,c)］**

1. 等級–赤方偏移についてのデータは 82 個の認められている標準的な群（上述をみよ）の中でもっとも明るい銀河に対して集められている．

2. データは，直線と合致されるとき，傾き 5 の理論線との比較によって

$$dm/d \log_{10} z = 5.150 \pm 0.268 \text{ (rms)} \tag{5}$$

の傾斜を示す．

3. データは，理論的な関係

$$m = 5 \log_{10} z + 1.086(1 - q_0)z + \mathrm{O}(z^2) + \text{定数} \tag{6}$$

に合致されるとき［正しい $\mathrm{O}(z^2)$ および高次の項が含まれるものについては，式 (29.29), (29.32)，および (29.34) をみよ］

$$\left.\begin{aligned} q_0 &= 1 \pm 0.5 \quad (1\sigma) \\ &= 1 \pm 1 \quad\ \ (2\sigma) \end{aligned}\right\} \quad \text{もし } \sigma_0 = q_0(\Lambda = 0) \text{ ならば} \tag{7}$$

を与える．データは σ_0 および q_0 を同時に定めるには不適当である［σ_0 に依存する $\mathrm{O}(z^2)$ 項はデータへの適合において重要な役割を演ずる．それらの理論的な効果の図による表現に対しては Refsdal *et al.*（1967）の図 2 をみよ］．

E. 進化する不確定性

1. Sandage によるデータの理論への適合は，彼の“標準光源”の光度は時間について一定であることを仮定している．もし，古い星の進化および新しい星の形成のゆえに，その銀河が 10^9 年あたり 0.09 等級だけうす暗くなるとすれば，10^9 光年離れた銀河は，10^9 年前に存在したのであるが，同一の近傍の銀河よりも本質的に 0.09 等級だけ明るいだろう．この効果による補正は q_0 のもっとも可能性のある値を 1 から 0 へ下げるだろう［Sandage（1972c)］．

2. 1972 年における銀河の進化の知識はこのような効果を確認したりあるいは除外したりするするにはあまりに初歩的である［Sandage（1972c）によって引用されている文献をみよ］．

コラム 29.5　Edwin Powell Hubble

1889 年 11 月 20 日 Marshfield Missouri に生まれ，1953 年 9 月 28 日，Pasadena, California に没.



Edwin Hubble は，24 歳で Oxford 大学から法律の学位を得て，Louisville, Kentucky で法律の開業を始めた．1 年間の開業後彼は飽き飽きした，彼自身の言葉によれば，“天文学に対する法則を軽くたたいた，そして私はたとえ 2 級あるいは 3 級であろうと，重要であるのは天文学であると知った”．彼は天文学教育の場所として Chicago 大学および Yerkes 天文台を選んだ．そして 3 年後（1917）に “ぼんやりした星雲の写真による調査” についての Ph. D. 学位論文を完成した．

Hubble が天文学に入ったときには，ある星雲は銀河の外に存在するが，しかし証拠は非常に弱いと思われた．相次ぐ 20 年間に，Hubble は他の誰よりも，銀河系外の宇宙に人間の視界を開くことに対して責任を負った．Wilson 山での 60 インチおよび 100 インチの望遠鏡で仕事をして，Hubble は渦巻き星雲，楕円星雲，および不規則な星雲（現在は銀河とよばれる）が銀河系外に存在することの反論する余地のない証拠を展開した．彼は今日いまだ使われている，銀河に対する分類の枠組を考案した．彼は銀河系外の研究の全題目を体系化した．距離のスケール，光度，星の密度，およびわれわれの銀河の特殊な運動を定め，そして銀河の外での物理学の法則は地球の近傍と同じである（Hubble の言葉で “自然の一様性の原理を確かめて”）という広範囲の証拠を得て，彼は宇宙の大きいスケールでの均質性を発見し定量化した．そして，すべての中の彼の最大の勝利！ —彼は宇宙の膨張を発見した．

Hubble の開拓者的な仕事の詳細は，彼自身の言葉にもっともよく描写されている．

“星雲の性質についてはきわめてわずかなことしか知られていない．そして分類はいまだ提案されていない⋯．［渦巻き星雲からの脱出速度とわれわれの銀河からの脱出速度との間の］一致は，渦巻き星雲は 100 万光年の単位でしばしば測定されるべき距離にある星の系であるという仮定に若干色づけするようなものである．”

（1920, Ph.D. 学位論文，出版は第 1 次世界大戦によって 3 年遅れる）

“現在の研究は［ケフェウス型変光星を Magellan 雲を越えた距離の指針として初めて用いて］，NGC 6822 は孤立した星の系であり，Magellan 雲よりも若干小さくそしてはるかに遠いけれども，Magellan 雲と同じ型の星雲であると同定する．一致した構造はこうしてケフェウス基準の基礎の上に立てられる．この基準において，系［NGC 6822］の全体としてのおよび分離した構成員としての両方についての大きさ，光度，および密度は，完全によく知られている程度である．距離は唯一の新しい系列の量である．性質の一様性の原理は，こうして空間のこの遠い領域で乱されずに支配するようにみえる．”

（1925）

“100 インチの反射体によって，利用できる最高度の分解能でなされた決定的なテストでは，Messier 33 におけるいわゆる凝集の写真像と通常の星雲の星の像との間に相違はない⋯．周期–光度の関係は 35 個のケフェウス型変光星の中で顕著であり，小 Magellan 雲の距離の約 8.1 倍の距離を示す．後者に対する Shapley の値を用いて，渦巻き銀河の距離は約 263,000 pc である．”

（1926a）

“［現在の論文（1926b）］は星雲の一般的な分類で始まる⋯種々な型［銀河系外の星雲の］は空全体にわたって一様に分布している⋯．データは今や空間の密度の程度に対する値を導くために利用できる．これは与えられた極限の等級までの星雲の数に対する，および等級を用いた距離に対する公式によって達成される．［結果は］

$$\rho = 1.5\times 10^{-31}\,\mathrm{g/cm^3}$$

である．これは下限と考えられなければならない．なぜなら系と系との間で散乱される自由な物質は完全に無視されるからである．空間の平均密度は一般相対論の有限であるがしかし境界のない宇宙の大きさを定めるのに用いられうる．

$$R = \frac{c}{\sqrt{4\pi k}}\frac{1}{\sqrt{\rho}} = \cdots = 2.7\times 10^{10}\,\mathrm{pc}\text{”}$$

（1926b）

“データは⋯距離と速度の間の直線的な相関を示す［銀河系外の星雲に対して］．2

つの解が立てられた．1つは24個の星雲を個々に用いる．もう1つはそれらを方向と距離における近接さによって9個の群に結合する．結果は…24個の対象に対して，K=465±50 km/sec 10^6 pc，9個の群に対して，K=513±60 km/sec 10^6 pc…．しかし，著しい特徴は速度–距離関係は de Sitter 効果を表すだろうという可能性であり，したがって数値的なデータは，空間の一般的な曲率の議論に導入されるだろうという可能性である．"

(1929)*

"速度–距離の関係は40個の新しい速度の助けで再吟味される…．新しいデータは速度–距離の関係の最初の定式化に利用されうる距離の約18倍に広がる．しかし関係の形は［Shapely の10%］距離の単位の改訂を除いて不変にとどまる"．

(1931)，M. L. HUMASON とともに

"このような効果［銀河系外の星雲における赤方偏移］を生み出す多くの方法が知られている．しかしそれらすべての中でただ1つの方法が，注意を引くはずであるが実際に見出されていない他の効果を導入せずに大きい赤方偏移を生み出すだろう．この1つの知られている許される説明は，赤方偏移を観測者から離れる実際の運動によると解釈する．"

(1934a)

"われわれは今や1つの単位として観測可能な領域の一般的な特徴の大まかな描像をもつ．次の段階は測量を伴う予備調査に従うこと，すなわち正確さおよび完全性に目を向けて注意深く調査を繰り返すこと，であるだろう．プログラムは，方法を重要視して，相続く近似の退屈な連続であるだろう．"

(1934b)

Hubble の経歴の残りの多くはこの"相続く近似の退屈な連続"に捧げられた．Hubble の死の少し前に200インチの望遠鏡が Palomor 山で動き始めた．そして Hubble の学生，Alan Sandage はそれを用いて宇宙の真の性質への Hubble の探求を続けた（コラム29.4をみよ）．

このコラムはおもに Mayall による Hubble の伝記（1970）に基づいている．

*K の Hubble の値（"Hubble 定数"）は後に Baade and Sandage の仕事によって下方に修正された．コラム27.1における **Hubble 時間**という表題の節をみよ．

[練習問題]

29.4　統計物理学を用いて導かれる $m(z)$

等級–赤方偏移の関係を光子分布の統計的な記述を用いて導け［式 (22.49) および関係する議論を参照せよ］.

29.5　Doppler 偏移対宇宙論的な赤方偏移

(a) 平坦な時空で，速度 v で地球から離れて動き，地球で受信される光を放射している銀河を考える．地球と銀河との間の距離は，地球の Lorentz 系である特別な放射の瞬間に測定されるとき r であり，そして放射の Doppler 偏移が最終的に受信されるとき，$z = \Delta\lambda/\lambda$ であるとする．地球で受信されるエネルギーの束 S は銀河の固有の光度 L に

$$S = \frac{L}{4\pi r^2(1+z)^4} \tag{29.37}$$

によって関係していることを示せ．［トラック–2 の読者は式 (22.49) の統計的な形式を用いることをもっとも好都合と見出すだろう］.

(b) 束に対するこの公式を，赤方偏移が宇宙論的な原因である公式 (29.27) と比較せよ．$1 + z$ の因子の数は 2 つの公式に対してなぜ異なるか？［数学的な答えは，Ellis (1971) の式 (6.28a) にある.］

29.5　宇宙の“レンズ効果”の探求

曲がった空間は大きい焦点距離のレンズとして作用するはずである．光線の曲がりは近傍の物体の見かけの等級にほとんど影響をもたない．しかし，遠い銀河（宇宙の大きさの 1/4 からの銀河）は大きく増大された角直径をもつことが予想される［Klauder, Wakano, Wheeler, and Willey (1959)]．このような距離にある標準的な銀河を光学望遠鏡によってみることは問題外のようにみえる．しかし，電波望遠鏡は $z = 2$ あるいはそれ以上の赤方偏移でのクエーサー源および他の電波銀河における特徴を分解する．さらに，大陸をまたぐ距離にある 1 対の電波望遠鏡（たとえば，California の Goldstone および Australia の Woomera）は，遠い源を $0''.001$ あるいは 4.8×10^{-9} ラジアンあるいは 3×10^{9} 光年 (Euclid 幾何学は一時的に仮定される）の距離にある物体に対して 15 光年以上によく分解する．地球上の電波望遠鏡と対の，空間における電波望遠鏡は，角分解についてさらに
*18 よくなしうるだろう．非常に大きな距離（$z = 2$ から $z = 3$ まで）に対して，手近な近くの銀河に対するように，距離の自然な標準として役立つであろう物体の任意の 1 つのクラスを特徴づける任意の標準的な長さを見出すことができるだろうか？　おそらくできない．

*18　遠い物体における基準的な長さに対する希望

しかし，この可能性を，それがもたらすであろうすべての利益とともに無視することは，あらかじめ予期できなかった他の場所に規則性を発見する熟練した観測者の証明された能力の立場から，賢明でないようにみえる．

*19 L を銀河内の標準的な要素（もし何かが見出されるならば）の実際の長さを表すとし，そして $\delta\theta$（ラジアン!）を，視線に垂直であると理想化された物体の，観測者が眺めたときの見かけの長さを表すとする．これら 2 つの量の比は源の“角有効距離”を定義する．

$$(\text{角有効距離}) = r_{\text{aed}} = L/\delta\theta \tag{29.38a}$$

平坦な空間でゼロ相対速度をもつ物体に対しては，この距離は源までの実際の距離，r あるいは源から観測者まで光の実際の飛行時間，t と同一視されるべきである．膨張している宇宙では事情は変わる．

角有効距離を赤方偏移の関数として計算するために，地球（受信機）を $\chi_r = 0$ に置き，そして研究対象（放射体）を χ_e に置け．基準の長さ L は χ_e における球上に存在させる（視線に垂直），そして標準の長さを θ_e から $\theta_e + \delta\theta$ までわたらせる［$(\chi_e, \theta_e, \phi_e)$ に基準要素の一端，$(\chi_e, \theta_e + \delta\theta, \phi_e)$ に他端］．そうすると

$$L = a(t_e)\Sigma(\chi_e)\delta\theta$$

および

$$r_{\text{aed}} = a(t_e)\Sigma(\chi_e) = [a(t_r)\Sigma(\chi_e - \chi_r)]a(t_e)/a(t_r)$$

すなわち［χ_r と χ_e とを逆転させた，式 (29.28) をみよ］，

*20
$$r_{\text{aed}} = R/(1+z) \tag{29.38b}$$

ここに R は源の赤方偏移，z，および宇宙論のパラメータ H_0, q_0, σ_0 の関数として一般に式 (29.32) によって，あるいはもし $\Lambda = 0$ ならば式(29.33) によって与えられる［式 (29.38b) はもしビームが優先的に低い質量密度（“銀河間の真空”）の領域を貫通するならば修正される．式 (22.37) および Gunn（1967）をみよ］．

*21 図 29.2 は角有効距離を，重要なパラメータのいくつかに対して赤方偏移の関数として示す．角有効距離は，宇宙が閉じてさえいるならば，大ざっぱに $z \sim 1$ 程度の赤方偏移に対して最大となることは明らかである．しかし，もし宇宙が開いているならば（図 29.2）大きい相違が存在する．電波天文学において生じている急速な改善は，Einstein がそうあるはずであると議論したように［Einstein（1950), pp.107–108］宇宙は閉じているかどうかをテストすることを可能とさせる魅力をもつ．さらに，1973 年において，光学望遠鏡を用いてでも，角有効距離の研究によって q_0 を測定する段階にあるだろう．予備的な研究［Sandage（1972b)］はもっとも明るい E 型銀河の光学的な等級は使用可能な基準の長さであるだろうと提案する．

---

*19　角有効距離が定義される

*20　赤方偏移の関数としての角有効距離

*21　宇宙は閉じているかどうかを定めるための道具としての角有効距離

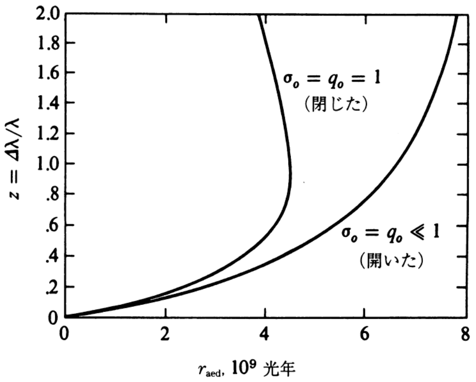


図 **29.2**　2 つの代表的な宇宙模型に対して角有効距離–赤方偏移—1 つは開いた模型（$0 < \sigma_0 = q_0 \ll 1$）で，もう 1 つは閉じた模型（$\sigma_0 = q_0 = 1$）．両方とも宇宙定数はゼロであり，$H_0{}^{-1} = 18 \times 10^9$ 光年である．

29.6　今日の宇宙の密度

*22　今日の宇宙の平均密度 ρ_{m0} を測定することはきわめて困難である．大量の物質は天文学者がいまだ観測できていない形（銀河系間の物質，ブラックホール，等）で存在するだろう．したがって，なしうる最善は，銀河内の明るい物質をすべて加え合わせて生ずる数を ρ_{m0} についての下限とみなすことである．明るい物質を加え合わせることさえ困難で危険な仕事であり，Oort (1958) の古典的な仕事以上に決定的な解析は今日でも存在しないほど難しい［しかし，Peebles (1971) の 4 章における問題の非常に詳細なレビューをみよ］．Oort の結果は

*23

$$\rho_{\text{明るい物質}} \sim (2 \times 10^{-31}\,\mathrm{g/cm^3})(H_0/55\,\mathrm{km\ sec^{-1}\ Mpc^{-1}})^2 \qquad (29.39)$$

であり，

$$\sigma_0 \gtrsim 0.02 \qquad (H_0 \text{ の値によらない}) \qquad (29.40)$$

に対応する．

このような評価に内在する危険な例（非典型的な例とはいえ）として，Oort は Virgo（おとめ座）銀河団を指摘する．もし Virgo 銀河団が重力的に束縛されていないならば，その ~2,500 個の銀河は飛び散り，約 10 億年内に，団のいかなる外見も破壊されるだろう．もし Virgo 銀河団が重力的に束縛されているならば，その銀河の他の銀河に相対的な平均速度は，ビリアル定理と結びつけると，銀河団の全質量の評価を与える．その評価は，銀河団の明るい質量を加え合わせる Oort の方法によって得られる値よりも 25 倍大きい．

*24　銀河間の空間における（宇宙を閉じさせるに十分な）大量の物質に対する，あるいはそれに反する決定的な証拠をもたないけれども，試験的な間接的な制限をもつ．(1) もし $\Lambda = 0$

---

*22　宇宙の平均質量密度の測定

*23　(1) 銀河内における明るい物質

*24　(2) 銀河間の空間における物質

(Einstein の観点と一致して) ならば $\sigma_0 = q_0$ である．したがって Sandage の値 $q_0 \lesssim 1$—銀河の進化についての仮定の中でもっともとっぴな仮定のもとで $q_0 < 10$ にまで延びる—では

$$\rho_{銀河間} \lesssim 10^{-28}\,\mathrm{g/cm^3} \qquad (\sigma_0 = q_0 < 10)$$

を意味する．(2) Gott and Gunn (1971) は，もし銀河間の空間におけるガスの密度が $\gtrsim 10^{-30}\,\mathrm{g/cm^3}$ であるならば（すなわち，もし $\sigma_0 \gtrsim 0.1$ ならば），Coma（かみのけ座）銀河団に落下するガスが衝撃波をつくり，それが大量の X 線を放出することが予期される．現在の X 線観測から，このような落下する物質の量に制限—したがって銀河間の空間内のガスの密度に制限

$$\rho_{銀河間} \lesssim 10^{-30}\,\mathrm{g/cm^3} \qquad (\sigma_0 \lesssim 0.1)$$

をおくことができる．しかしこれらの制限は，他の方法［レビューに対しては Peebles (1971) の 4 章をみよ］で得られる他の制限のように，まったく決定的なものでない，これらの制限が完全に十分であると感じられるにはあまりにも多く理論的な計算に依存している．

29.7　宇宙論のパラメータについての現在の知識の要約

*25　1973 年に利用できる最善のデータ (29.18)，(29.36)，(29.40) は宇宙の観測のパラメータに対して

$$\begin{aligned} &{H_0}^{-1} = (18 \pm 2) \times 10^9 年 \\ &q_0 = 1 \pm 0.5 \ (1\sigma) \qquad (もし \sigma_0 = q_0 (\Lambda = 0) ならば) \\ &\sigma_0 \gtrsim 0.02 \end{aligned} \tag{29.41}$$

を示す．これらの数は，宇宙が閉じているかあるいは開いているかどうか，および宇宙は永久に膨張し続けるかどうかあるいは最終的に遅くなって静止し再収縮するかどうかを示すのに適切でない．

*26　この知識の欠乏に落胆したとしても，少なくとも以下によって慰められるだろう．(1) 距離–赤方偏移，等級–赤方偏移，および角直径–赤方偏移の関係（コラム 29.4），の直線（低い z）部分に対する理論と観測との間のすぐれた一致が存在する．(2) H_0 の測定値から計算されたときの宇宙の年齢（もし $q_0 = \sigma_0 \ll 1$ ならば 180 億年，もし $q_0 = \sigma_0 = \frac{1}{2}$ ならば 120 億年)，(b) 星の進化の理論を観測された星の性質と比較することによって計算されるときのもっとも古い星の年齢（$\sim 10 \times 10^9$年)，(c) 種々の核種の測定された相対的な存在量から計算されたときの，地球上で見出されるウラン，トリウム，およびプルトニウム原子の核合成以来の時間（$\sim$90 億年)，および (d) 他の核種の測定された相対的な存在量から計算されたときのもっとも古い隕石およびもっとも古い月の岩の試料の年齢

*25　宇宙の観測のパラメータの要約
*26　宇宙論のいくらかの定量的な勝利

(46 億年)，の間に注目すべきよい一致が存在する．さらなる詳細に対しては，たとえば，Sandage (1968,1970)，Wasserburg *et al.* (1969)，Wasserburg and Burnett (1968)，および Fowler (1972) をみよ．(3) 宇宙マイクロ波放射の観測およびヘリウム存在量の測定は，現在，赤方偏移 $z \gg 1$ での宇宙における物理学的な過程 (28 章) についての直接的な情報を与えることができる．(4) さらに，$z \gtrsim 1$ までみられる電波源における "標準的な長さ" を見出し，それとともに角有効距離の方法 (29.5 節) によって q_0 および σ_0 を測定するだろう．(5) クエーサーの性質の謎およびクエーサーの赤方偏移についての奇妙な分布 ($z \sim 2$ での大きい集まり，$z \gtrsim 3$ での不在) の謎がさらに解かれ，その過程において，宇宙における構造の起源について多くの新しい情報を与えるだろう (コラム 28.1)．(6) 次の 10 年間は過去の 10 年間のように，多くの偉大な観測の驚きおよび対応する新しい洞察を明確にもたらすだろう．

[**練習問題**]

29.6 源を数える

(1) 固有光度 L についてすべて同一である，(2) 宇宙を通して一様に分布している，そして (3) 死ぬのと同じ割合で生まれるので単位の共動座標の体積内の数は永久に固定されている，という性質をもつ 1 群の光源あるいは電波源を発見できる (それはできない) と仮定せよ．

(a) 今日の地球から観測されるとき，z より小さい赤方偏移をもつこのような源の数 $N(z)$ は

$$N(z) = (\text{定数})\cdot z^3 \left[1 - \frac{3}{2}(1+q_0)z + O(z^2)\right] \tag{29.42}$$

であるだろうことを示せ．

(b) 今日の地球で観測されるとき，S より大きい束をもつ源の数 $N(S)$ は

$$N(S) = (\text{定数})\cdot \underbrace{\left(\frac{LH_0{}^2}{4\pi S}\right)}_{= z^2 + O(z^3)}{}^{3/2} \left[1 - \underbrace{3\left(\frac{LH_0{}^2}{4\pi S}\right)^{1/2}}_{\left[\begin{array}{c} q_0 \text{ および } \sigma_0 \text{ によらない} \\ 1\text{ 次の補正}\end{array}\right]} + O\left(\frac{LH_0{}^2}{4\pi S}\right)\right] \tag{29.43}$$

であるだろうことを示せ．

[**答え**：Robertson and Noonan (1968) の 15.7 節をみよ．]

29.7 宇宙線の密度 (Maarten Schmidt によって考案された問題)

宇宙は同じ数の銀河を不確定に過去に含んだと仮定せよ．さらに宇宙内の宇宙線は銀河内で創造され，そしてそれらは創成以来失われていないと仮定せよ．(1) 今日の銀河の数密度 N_0，そして (2) 平均の銀河が宇宙の過去の歴史の間に宇宙線のエネルギーを創造した

*27 観測的な宇宙論に対する明るい見通し

一定でない割合 dE/dz によって，今日の宇宙内での宇宙線についての平均のエネルギー密度に対する表現を導け［領域 dz 内の赤方偏移 z で，平均の銀河はエネルギー $(dE/dz)dz$ を宇宙線に解放する］.

29.8　銀河によって覆われる空の割合

クエーサーの赤方偏移は宇宙論的であると仮定する．今日の宇宙における単位の物理学的な体積あたりの銀河の数を N_0 とし，そして銀河は $z \gtrsim 7$ の赤方偏移以来創造されず，あるいは破壊されなかったと仮定する．D を銀河の平均の角直径とする．赤方偏移 z でのクエーサーからの光が，地球への旅行の間に，中間に存在する銀河を少なくとも 1 つ通過した確率を計算せよ［この問題の詳細な議論に対しては，Wagoner（1967 をみよ)］.

30章
非等方で不均質な宇宙論

[本章は完全にトラック–2である．27–29章は有用であるけれども，おもな題目は特別な準備を要求しない．

コラム30.1はより技術的な節を含んでいる．それに対する理想的な準備は4, 9–14, 21, および27–29章，および25.2節であるだろう．最小の準備は練習問題9.13，9.14，および25.2，また，21.8節を通しての21章，および27.8, 27.11および29.2節であるだろう．

30章はどの後の章に対する準備としても必要とされないだろう.]

30.1 宇宙はなぜそれほど均質で等方であるか？

前の3章はFriedmann宇宙模型およびそれらが宇宙とその進化について与える比較的に満足な描像を調べた．本章はあまり単純化されていない宇宙模型を記述し，そしてこれを用いて“非常に単純なFriedmann模型がなぜ満足なものであるのか?”という質問に答えることを始める．この質問は最初の，明白な答え，すなわち模型が観測と矛盾しないがゆえに満足であるということ以上に深く調べるように意図されている．観測との一致を受け入れて，**物理学の法則は，大きいスケールで高精度まで均質で等方である宇宙をなぜ要求すべき（たんに許すよりもむしろ）なのか**をわれわれは理解したい．この質問は1972年に明確に答えられないから，多くの読者は，最初読むときには本章を省略して，ブラックホール（33章)，重力波（35–37章)，および太陽系の実験（40章）のような他の領域におけるおもな結果を概観した後に，初めて本章に戻ることを好むだろう．

*1 “宇宙はなぜそんなに高度に対称的であるのか?”という質問へのここで記述されている取り組み方は，もし宇宙が高度に不規則に始まったとするならば，何が起こったであろうかをEinsteinの方程式がどう記述するかを尋ねることである．

この取り組み方における最初の段階は，もし宇宙がわずかに不規則に始まったとするならば何が起こったであろうかを尋ねることである．この問題はFriedmann模型の高い対称性から離れた小さい摂動を解析することによって取り組まれうる．このような解析は，銀河の形成の始まりの議論，およびマイクロ波背景放射の現在の非等方性についての小さい上限を，放射が放出された100億年前に存在したであろう密度および温度の不規則性についての制限に関係づける能力において，もっとも実り豊かである．これらの研究はZel’dovich and Novikov (1974）による本に非常によく記述されている［またField (1973)，Peebles

*1 不均質で非等方な宇宙論を調べるための動機：宇宙はなぜそんなに一様であるか？

(1969), Peebles and Yu (1970), Jones and Peebles (1972), およびそれらに引用されている文献をみよ] のでここではそれらを省略する.

別な取り組み方は Friedmann 宇宙の対称性からの大きいずれを認める. しかし非対称性をただわずかな自由度に置くことである.

30.2　非等方宇宙に対する Kasner 模型

*2　わずかな自由度において大きい非対称性をもつ宇宙模型に対する原型は, Kasner (1921a) 計量

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1}dx^2 + t^{2p_2}dy^2 + t^{2p_3}dz^2 \tag{30.1}$$

であり, Schücking and Heckmann (1958) によって宇宙模型として初めて研究された. この計量で p_i は

$$p_1 + p_2 + p_3 = (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 = 1 \tag{30.2}$$

を満たす定数である. この宇宙模型の各 $t=$ 一定 の超曲面は平坦な 3 次元空間である. 一定の x, y, z の世界線は時間的な測地線であり, 銀河あるいは他の物質は, 試験粒子として取り扱われるとき, それに沿って動くと想像されうる. この模型は膨張している宇宙を表す. なぜなら体積要素

$$\sqrt{-g} = \sqrt{{}^{(3)}g} = t$$

は一定に増大している. しかしそれは非等方に増大している宇宙である. 2 人の標準的な (一定の x, y, z) 観測者間の距離は, 彼らの x 座標のみが異なる場合は $t^{p_1}\Delta x$ である. こうして, x 軸に平行な距離は 1 つの割合で膨張する, $l_1 \propto t^{p_1}$. 他方 y 軸に沿う距離は異なる割合で膨張できる, $l_2 \propto t^{p_2}$. もっとも注目すべきはおそらく, 1 つの軸に沿って距離は膨張するよりもむしろ収縮するという事実である. この収縮は数学的には式 (30.2) は 1 つの p, たとえば p_1 が正でないことを要求する.

$$-\frac{1}{3} \le p_1 \le 0 \tag{30.3}$$

結果として, この種類の宇宙において, もし黒体放射が 1 つの時間 t に放出され続けてけっして散乱されないならば, 後の観測者は空の上で 1 対の正反対の点の近傍で青方偏移をみるだろう. そしてたいていの他の方向に赤方偏移をみるだろう. この例によって, 基本的な宇宙論の質問は, Friedmann 計量はなぜこの Kasner 計量よりも現実の宇宙へのより正確な近似であるべきかということである.

30.3　非等方性の断熱的な冷却

答えを求めるに際して, 質問する. とくに, 式 (30.1) の Kasner 計量によって記述される形で $t=0$ 近くで始まる宇宙はどうなるかを尋ねよ. この計量は真空の Einstein 方程式

*2　Kasner 計量：非等方な模型宇宙の例

$\boldsymbol{G}=0$ の厳密解である．それは Einstein 方程式における物質項が Riemann テンソルの代表的なゼロでない成分と比べて無視できる状況を近似する．Schücking and Heckmann
*3 (1958) は物質が圧力のない流体として含まれているときの解を与える．この状況で，空の時空の曲率は，初期の時間 $t \to 0$ における幾何学と膨張率の両方を支配する．しかしある特徴的な時間 t_m 後は物質項がより重要となり，そして計量は $k=0$ をもつ均質で，等方的な模型に漸近的に帰着する．

この例は宇宙が高度に不規則な状態で生まれたとしても，古い年齢で等方性と均質性の測度を達成するだろうという可能性を実証する．われわれの宇宙の対称性がこれらの線に沿って説明されうるかどうかは 1972 年にいまだ明白でない．まさに述べられた模型宇宙は，とりわけ臨界のパラメータ t_m はどのような値でも与えられうるから，ヒントに過ぎない．

*4 この模型の標準的な Einstein の一般相対性物理学は，"有効エネルギー密度" $\rho_{非等方}$ を空の時空の非等方的な運動の所為にすることによって，別な言葉で (Misner, 1968) 記述されうる．この密度は，Einstein 方程式の G_{00} 成分に，物質–エネルギー密度と等しい基礎をもって入る．それによって宇宙の膨張の説明に役立つ．

$$H^2 = \left(\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\ln\sqrt{{}^{(3)}g}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho_{非等方} + \rho_{物質}) \tag{30.4}$$

非等方エネルギー密度は状態方程式

$$\rho_{非等方} \propto {}^{(3)}g^{-1} = (体積)^{-2}$$

をもつべく見出される．他方

$$\rho_{物質} \propto {}^{(3)}g^{-\gamma/2} = (体積)^{-\gamma}$$

圧力をもたない物質に対しては $\gamma=1$，放射流体に対しては $\gamma=4/3$，非相対論的な理想気体に対しては $\gamma=5/3$ である．

*5 Einstein 方程式のこの取り扱いは，まさに理想気体の熱運動がそうであるように，非等方運動が宇宙の膨張によって断熱的に冷却すると考えることを許す．均質な非等方性に対する断熱指数は $\gamma=2$ であるから，非等方性は高度に圧縮された状態における "有効的なエネルギー" の支配的な源であるだろう．他方物質は膨張した状態において支配的であるだろう．

30.4　非等方性の粘性的な散逸

上にスケッチされた模型宇宙は非等方性のエネルギーを熱エネルギーに転換し散逸させる機構を導入することによってさらに練ることができる．このような非等方的な宇宙は 1

*3　物質をもつ Kasner 模型は "古い年齢" で等方的になる
*4　非等方エネルギー
*5　非等方性の断熱的な冷却

つの時間に熱放射で満たされたと想定せよ．もし放射が衝突がない，あるいはほとんどそうであったならば，収縮する x 軸に平行に動いている量子は青方偏移するだろう．そして高温度に対応するエネルギー分布を展開するだろう．他の（膨張している）軸に平行に動いている量子は低温度に対応するエネルギー分布に赤方偏移されるだろう．これら 2 つの粒子系間に生ずる任意の衝突はそれらの間の“熱的な接触”を導入し，エントロピーの対応する大量の生産を伴って，エネルギーを熱い系から冷たい系へ移動するだろう．これは，2 つの系が断熱膨張の条件のもとでもったであろう値に相対的に，$\rho_{\text{非等方}}$ を減少し $\rho_{\text{放射}}$ を増大する不可逆な散逸過程を与える［さらなる詳細に対しては，たとえば，Matzner and Misner（1972）をみよ］．

非等方性の断熱冷却およびほとんど衝突のない量子ガスへのその作用による非等方性の散逸の両方がわれわれの宇宙の進化において重要な役割を演じたことはありうる．とくに，10^{10}K 以上のニュートリノが十分な ν–e 散乱を受けて，宇宙の生涯の最初の数秒間に強い散逸を与えただろう．

30.5　非等方な宇宙における粒子生成

断熱的な冷却および粘性的な散逸は膨張している宇宙における非等方性のおもな破壊者
*6 でないだろう．より強力なのは依然，最初の“特異点”に非常に近く，なお初期の時間に起こるであろう，別な高度に散逸的な過程であるだろう．これは，DeWitt（1953）によって初めて取り扱われ，それから等方的な宇宙論に対して Parker（1966 および 1969）によって研究され，そして最後に非等方的な宇宙論の現在の状況において Zel'dovich（1970）によって研究された粒子創造の過程である．この過程のもっとも単純な例に対する Kasner 計量に再び引き返すが，しかし今や量子力学的な考察が描像に入る．異なる方向に伝播している現実の量子は赤方偏移および青方偏移を受けるだけでなく，仮想的な量子も同じく考慮されなければならないということを理解する．真空の揺らぎ（ゼロ点振動）は，強い重力場の赤方偏移および青方偏移の作用を受ける，ある最小数の仮想的な量子を含んでいる．十分激しく青方偏移される仮想的な量子は，エネルギーの獲得によって，現実の粒子として物質化できる．この状況で，“十分激しく”は**断熱的**でないことを意味する．

断熱的な膨張で，各粒子のエネルギーは変わるけれども，粒子の数は変わらない．この断熱的な極限はまさに 22.5 節で議論された，波動方程式の幾何光学的な近似である．そこで，もし時空が波長のスケールで平坦でなかったなら，波動方程式は保存される粒子数をもつ粒子の記述によって置き換えられえないだろうということをみた．こうして，断熱的な極限（幾何光学的な近似）は宇宙の始まりでの特異点近くの高い曲率の条件で破れる．

Kasner 背景計量での波動方程式を研究することによって，Zel'dovich and Starobinsky（1971）は定量的に，特異点の近くで断熱近似の破れの結果を見出す．古典的には，任意の与えられた時期に対する Hubble 定数に比べられうる振動数での波の振幅は，単純な青

*6　膨張の非等方性による粒子の創造

方偏移の計算が意味するであろうよりも早く増大する（パラメータ的な共鳴を通しての増大）．量子力学的には，同じ増大はゼロ点振動に適用されるとき，粒子–反粒子対の生成に通ずる．計算はこの効果は特徴的な時間 $t_q = \sqrt{G\hbar/c^5} \simeq 10^{-43}$ sec に非常に強いことを示す（こうして遂行されるすべての計算は，効果がこうして $t \lesssim t_q$ に対して，強くなるときは不適当である）．

質量をもたない粒子の生成に対しては，非等方的に膨張している宇宙を前提とすることが本質的である（粒子が共形不変な波動方程式を満たすのでなければ，粒子生成がすでに Friedmann 宇宙で起こるスカラー粒子を除いて）．等方的な Friedmann 宇宙はすべて初期の時間において共形平坦であるから，ゼロ静止質量の場に対する波動方程式の解は，粒子生成のない平坦な空間の波動方程式に対する解によって与えられうる．粒子が有限の静止質量と低いエネルギーをもつときに，等方的な Friedmann 宇宙においてさえある粒子生成が存在する．しかし，粒子生成の過程はふつう，放射のエネルギーに転換するエネルギー供給として非等方的なエネルギーを用いる．

*7 Parker および Zel'dovich による開拓者的な仕事は，初期条件は特異性であり，そして時間 $t = t_q$ 近くの量子効果はすべての非等方性を散逸させ，同時に模型の物質内容を生ずる，宇宙模型を詳細に研究すべきであることを提案する．揺籃期にある，この研究のプログラムは，物理学の法則を非常に自然な様相であるが非常識なほど小さい次元 $\sqrt{G\hbar/c^5} \simeq 10^{-43}$sec, あるいは同等のことであるが $\sqrt{G\hbar/c^3} \sim 10^{-33}$cm にまで外挿することを要求するようにみえる．

30.6 均質でない宇宙論

*8 上に考察された宇宙模型は非等方であるけれどもすべて均質であった．計量が空間座標に無意味でない依存性をもつ均質でない宇宙模型を研究することはまた決定的である．こ
*9 のような模型の 1 つのクラスは球対称な宇宙である．そこでは物質密度，膨張率，およびすべての他の局所的に測定できる物理量は，ある選ばれた原点の周りに球対称性をもつ．この種の模型は Lemaitre（1933a,b），Tolmann（1934b），および Datt（1938）によって初めて考慮された．そしてまた 1947 年に Bondi によって取り扱われた．これらの模型は大きい振幅の密度摂動を研究するための方法を与える．

*10 最近の手段は大きい振幅，他の対称性の空間の変化する曲率摂動の研究を可能ならしめることである．この手段は Gowdy（1971,1973）計量である．Einstein 方程式の厳密解である．これらの計量は，重力波を含む種々のトポロジー（$S^3, S^1 \times S^2, T^3$）をもつ閉じた宇宙を表す．これらの解における波形は本質的に任意であるが，すべての波はただ 1 つの選ばれた方向に沿って伝播し共通の偏りをもつ．

---

*7 非等方性はわれわれの宇宙の物質内容を創造したであろうその過程において，非等方性そのものを減衰した．

*8 均質でない宇宙模型

*9 (1) 球対称性をもつ模型

*10 (2)（むしろ対称的な）重力波をもつ模型

*11　Einstein 方程式の均質でない非等方な解の振る舞いを理解するむしろ異なる扱い方は Khalatnikov，Lifshitz，および彼らの協力者によって展開された．Einstein 理論を，厳密解が得られうる特殊化された事情に注意を制限することによって，切りつめるよりもむしろ，もっとも広い可能なクラスの解を研究するが，しかし特異性のごく近傍においてのみそれらの振る舞いを記述するように求められる．これらの研究は，それらの中に見出される現象が実際はるかに広いクラスの解を代表していることを示すことによって，厳密解のいくつかに大いに高められた重要性を与える．

こうして，研究された最初の大きいクラスの解の中で［Lihshitz and Khalatnikov (1963)］，特異点の近傍で，物質を含む解は，すでに真空解で見出されていない特徴を示さないことが発見された．さらに，Einstein 方程式における空間微分はこれらの解における特異点の近くで無視でき，Kasner 形式の計量 (30.1) は，特異点近くの時空の局所的な振る舞いを記述するが，しかし特異な超曲面の各点で p_i 値の異なる組が可能であるという結果をもつ．したがって，特異点の近くで解の広げられた研究［Belinsky and Khalatnikov (1970)］は，ミックスマスター（mixmaster）宇宙［Misner（1969b)，Belinsky，Khalatnikov, and Lifshitz（1970)］は Kasner 計量よりも特異点の振る舞いに対してよりよい一様な原型であることを示した．

30.7　ミックスマスター（mixmaster）宇宙

*12
*13　ミックスマスター宇宙のもっとも単純な例はコラム 30.1 に記述されている．それは，特異点の近くで，Kasner 成分 p_i はいかに時間の関数となりうるかを示す．結果は Khalanikov–Lifshitz パラメータ u によってもっとも単純に記述される．

$$\begin{aligned} p_1 &= -u/(1+u+u^2), \\ p_2 &= (1+u)/(1+u+u^2), \\ p_3 &= u(1+u)/(1+u+u^2) \end{aligned} \tag{30.5}$$

特異点に向かって時間について逆方向に外挿するとき，3 つの主軸方向における膨張率は，ある固定された u パラメータに対応する p_i 値をもつ式 (30.1) の Kasner 計量の膨張率に対応する．しかし，これらのミックスマスター模型で，計量は空間座標によらない（たとえば，空間的な超曲面は閉じた Friedmann 宇宙と同じ 3–球トポロジーをもつ)．

固定された u での Kasner 的な振る舞いは，計量の空間微分の効果が顕著になる前に，何十年もの体積膨張を持続させる．そうすると空間曲率が演じる役割は簡単で決定的である．膨張はパラメータ値 $u = u_0$ に対応する型から値 $u = -u_0$（それは軸をラベルし直して，値 $u = u_0 - 1$ とすることに同等である）に対応する型へ転換される．特異点へ向かってさらに逆方向へ外挿して，$u = u_0 - 2$ をもつ前の期間を見出す．全系列

*11　(3) いくつかの対称性をもつあるいは対称性をもたない特異性の近傍

*12　ミックスマスター宇宙

*13　(1) Kasner 模型によって説明される“非等方振動”

$u = u_0, u_0 - 1, u_0 - 2, u_0 - 3, \cdots$，（ここで，$u_0 \gg 1$）を通して，ほとんど全体積膨張は，3–方向についての膨張により，他方 1–方向および 2–方向はきわめてわずかしか変化せず，各段階で膨張と収縮の間を繰り返す．しかし，十分にはるか過去において，このような系列は 0 と 1 の間の u の値に通ずる．この値は，軸 2 および 3 の名前を交換する変換 $u \to 1/u$ を通して，別な同様の系列に対する出発点と解釈されうる．

$t = 0$ での特異点に向かって逆方向に宇宙の膨張を外挿することは，したがって驚くほど複雑な振る舞いを示す．そこでは類似しているが正確には同等でない振る舞いの系列が無限に多くの回数繰り返される．近似的に $\log(\log t^{-1})$ である時間変数を用いると，これら
*14 の振る舞いは準周期的である．Khalatnikov–Lifshitz の方法が導く一般的な例で，特異点近くの漸近的な振る舞いが，特異な超曲面の各点でミックスマスター型の振る舞いで記述されるような計量をもつ．その計量では，膨張の主軸が各段階で方向を役割とともに変えて（u パラメータによって特徴づけられるように），ミックスマスターパラメータが空間的に変化する［さらなる詳細に対しては Belinsky，Lifshitz，and Khalatnikov（1971），および Ryan（1971,1972）をみよ］．

*15 Khalatnikov–Lifshitz の一般的な場合によって記述**されない**漸近的な特異性の振る舞いをもつ，宇宙論の問題の重要な解あるいは関連した解のクラスが存在するかどうかはいまだ知られていない（1972）．ここで決定的な評価に達することの困難は，Khalatnikov and Lifshitz はただ 1 つの座標の断片に閉じ込められた本質的に局所的な方法を用いているということである．しかるに望まれる評価は本質的に大域的な論点をもち出す．大域的な取り扱い方は（34 章に記述されている）しかし，証明されるべき特異性の性質の必然性について，いかなる適当な記述も与えていない．技術と内容においてこれらの相違の橋渡しをする 1 つの試みは Eardly，Liang，and Sachs（1972）による仕事である．

コラム 30.1 ミックスマスター宇宙論

ミックスマスター宇宙論は貴重な例である．30.7 節に記述されているように，それは知られているもっとも一般的な例に対する特異性の振る舞いの最も多くの特徴を例示する．とくに，それは弾性体を思い出させる空の空間の性質が，宇宙論の特異点近くでいかに明白になるかを示す．

この例への数学的な道筋は，このコラムで与えられているように，また Einstein 方程式に対して変分原理を用いてその解を得るための種々の重要な技術を例示する．ミックスマスターの例はまた，超空間のアイデアおよび重力の法則の量子論的な定式化［Misner（1972a)］の単純な例を与えるために用いられうる．

*14 (2) 特異点近くの一般的な振る舞いに対する原型として
*15 特異点近くの振る舞いのどのような別な包括的な型が存在するか？

一般化された Kasner 模型

宇宙論の特異点の Kasner 例 (30.1) からミックスマスター例へ前進するために 2 つの一般化が行われなければならない．最初は，指数 p_i への条件 (30.2) の単純さのいくつかを保持しながら，より一般的な時間依存性を許すことである．これらの指数は，たとえば，$p_2 \equiv d\ln g/d\ln g$ を満たすことに注意せよ．したがって 3×3 空間計量を

$$g_{ij} = e^{2\alpha}(e^{2\beta})_{ij} \tag{1}$$

あるいは同等であるが，$(\ln g)_{ij} = 2\alpha\,\delta_{ij} + 2\beta_{ij}$ とする．ここに β_{ij} はゼロトレースの 3×3 対称行列である．そして指数関数は行列のべき級数であり，したがって $\det e^{2\beta} = 1$ および，

$$\sqrt{g} = e^{3\alpha} \tag{2}$$

としてパラメータ化するように導かれる．この節のみの目的のために，$p_{ij} = d(\ln g)_{ij}/d\ln\det g$ と定義する．そうすると式 (1) および (2) から，

$$p_{ij} = \frac{1}{3}\{\delta_{ij} + (d\beta_{ij}/d\alpha)\} \tag{3}$$

と計算できる．そうすると 1 つの Kasner 条件

$$1 = \sum_i p_i \equiv \mathrm{Tr}(p_{ij}) = 1 + \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(d\beta/d\alpha)$$

は，$\mathrm{Tr}\ \beta_{ij} = 0$ を考えれば恒等式である．Kasner 指数についての第 2 の条件は $\mathrm{Tr}(p^2) = 1$ であり，式 (3) によって $(d\beta_{ij}/d\alpha)^2 = 6$ である．これは恒等式でなくて，空の空間における Einstein 方程式の結果である．(Bianchi I 型) 計量

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\alpha}(e^{2\beta})_{ij}\,dx^i dx^j \tag{4}$$

に対して，そして β_{ij} が対角型である場合には，Einstein 方程式は

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\left[T^{00} + \frac{1}{16\pi}(d\beta_{ij}/dt)^2\right] \tag{5}$$

および

$$e^{-3\alpha}\frac{d}{dt}\left(e^{3\alpha}\frac{d\beta_{ij}}{dt}\right) = 8\pi\left(T_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}\right) \tag{6}$$

ならびに T_{kk} を含む余分な方程式および式 $T_{0k} = 0$ である [ストレス成分はここでは基底 1–形式 $\omega^i = e^{\alpha}(e^{\beta})_{ij}\,dx^j$ をもつ直交系に関係する]．式 (5) からただちに，物質のエネルギーと同程度の根拠で，式 (30.4) におけるように，Hubble 定数 $H = d\alpha/dt$ に寄与するときの I 型非等方性の有効性に対する公式として

$$\rho_{\text{非等方 (I)}} = (c^2/16\pi G)(d\beta_{ij}/dt)^2 \tag{7}$$

が導かれる．同様に，流体物質の場合（等方的な圧力）における式 (6) に対して，ストレス項はゼロになる．そして式 (30.4) に続く式におけるように $\rho_{\text{非等方 (I)}} e^{6\alpha} =$ 一定を得る．Kasner 条件 $\sum p_i{}^2 = 1$ あるいは $(d\beta_{ij}/d\alpha)^2 = 6$ は $T^{00} \ll \rho_{\text{非等方}}$ のときはつねに式 (5) から出る．

対角型の場合には，β_{ij} はただ 2 つの独立な成分をもち，そしてそれらをパラメータ化

$$\begin{aligned}\beta_{11} &= \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-,\\ \beta_{22} &= \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-,\\ \beta_{33} &= -2\beta_+\end{aligned} \tag{8}$$

によって明確に定義することはときどき好都合である．これらに対して Kasner 条件 $(d\beta_{ij}/d\alpha)^2 = 6$ は

$$(d\beta_+/d\alpha)^2 + (d\beta_-/d\alpha)^2 = 1 \tag{9}$$

になる．$\beta_\pm$ は Kasner 指数 p_i あるいは式 (30.5) の u パラメータに

$$\begin{aligned}d\beta_+/d\alpha &= \frac{1}{2}(1-3p_3)\\ &= -1 + (3/2)(1+u+u^2)^{-1}\\ d\beta_-/d\alpha &= \frac{1}{2}\sqrt{3}(p_1 - p_2)\\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{3}(1+2u)(1+u+u^2)^{-1}\end{aligned} \tag{10}$$

によって関係している．

空間曲率を導入する

Kasner 計量を一般化する第 1 段階は，非等方性の膨張についての微分である“速度”$\boldsymbol{\beta}' \equiv (d\beta_+/d\alpha, d\beta_-/d\alpha)$ に注意を集中している．すぐに現れるように，物質の効果あるいは空間曲率は，大きさ $\|\boldsymbol{\beta}'\|$ を 1 の Kasner 値から変えることができる．一般化の第 2 段階は空間曲率を導入することである．この段階は単純な例で式 (1) の計量成分を保持することによって，しかしそれらの成分を非ホロノミック（non-holonomic）基底で用いることによって達成する．練習問題 9.13 および 9.14 に導入されている回転群 SO（3）の基底ベクトルを用いて，（その双対 1–形式は

$$\begin{aligned}\sigma^1 &= \cos\psi\, d\theta + \sin\psi \sin\theta\, d\phi,\\ \sigma^2 &= \sin\psi\, d\theta - \cos\psi \sin\theta\, d\phi,\\ \sigma^3 &= d\psi + \cos\theta\, d\phi\end{aligned} \tag{11}$$

である）する計量

$$ds^2 = -N^2dt^2 + e^{2\alpha}(e^{2\beta})_{ij}\sigma^i\sigma^j \tag{12}$$

をつくる．ここに N, α，および β_{ij} は t のみの関数である．$\alpha = 0 = \beta_{ij}$ のとき，3 次元の空間計量はここでは，練習問題 13.15 で研究された計量に帰着し，群空間 SO (3) について最高の対称性をもつ．単純連結の包含（covering）空間は 3–球トポロジーをもち，そして Euler 角 ψ の領域を拡張して包含空間に 4π 周期［回転群の SU (2) あるいはスピン 1/2 の包含］を与えることによって得られる．$N = 1$，$\frac{1}{2}a = e^{\alpha}$，および $\beta_{ij} = 0$ とすることで，式 (12) から練習問題 14.4 および閉じた Friedmann 宇宙模型の議論における 27 章で取り扱われたのと同じ計量（異なる座標における）を得る．β_{ij} のゼロでない値は，3–球が 3 つの互いに直交する主軸のおのおのにおける大円上で異なる円周をもつことを許す．こうして 3–球の等方性を破るが均質性を破らない．

式 (8) におけるように，対角型の β_{ij} をもつ場合のみを考えよう．そうすると Einstein 方程式の T^{00} 成分は（時間座標の条件として $N = 1$ をもつ）

$$3(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_+{}^2 - \dot{\beta}_-{}^2) + \frac{1}{2}({}^3R_{\rm IX}) = 8\pi T^{00} \tag{13}$$

となる．ここに項

$${}^3R_{\rm IX} = \frac{1}{2}e^{-2\alpha}{\rm Tr}(2e^{-2\beta} - e^{4\beta}) \tag{14}$$

のみが式 (5) と異なる．この項［式 (21.92) をみよ］は 3 次元の薄片，$t =$ 一定［それは式 (11) および (12) の計量に対する "Bianchi IX 型" として知られる対称性をもつ］のスカラー曲率である．もし式 (13) が，T^{00} で，体積の膨張 $\dot{\alpha}^2$ に寄与する非等方なエネルギー密度によって解釈されるならば，運動エネルギー項 $\dot{\beta}^2$［式 (5) および (7) におけるように］のみならず，ポテンシャルエネルギー項もまた存在する．この項は，非等方性（$\beta \neq 0$）によって生み出されうる負のスカラー曲率は，正のポテンシャル（あるいは "内部"）エネルギーに同等であることを示し，そして空の空間は弾性的な固体に類似した性質をもち，ずれのひずみに抵抗することを示している．より詳細な解析は，特異点の近くではスカラー曲率は正であるときにはつねに無視できることを示す．

しかし，この閉じた宇宙では負の曲率は，特異点の近くの大きいずれ（β）変形から生じ，1 つの Kasner ずれ運動［u 値等，式 (10)］を逆転してそれを他の Kasner ずれ運動に変えるほど大きくなる．

これらの結論および "ミックスマスター" 計量 (11), (12) の時間発展のさらなる詳細は，原理的に，たんに T^{00} に対する式 (13) でなく，すべての Einstein 方程式の研究を要求する．しかし，21 章に記述されているように，この T^{00} の束縛方程式は本質的であり，そして実際適切に定式化されるときは Einstein 方程式の完全な内容を暗黙のうちに含んでいる．

変分原理

ここで採用されている1つの適切な定式化は，式 (13) をエネルギー方程式（速度を含む）としてでなく，Hamiltonian（運動量を含む）として取り扱うことを含んでいる．ADM 形式 (21.95) で Einstein の変分原理 (21.15) をとり，そして

$$\int \sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge \sigma^3 = \int \sin\theta \, d\phi \wedge d\theta \wedge d\psi = (4\pi)^2$$

を用いて，空間積分を遂行して，形式

$$I = (\pi) \int \left\{ \pi^{ij} dg_{ij} + N e^{3\alpha} \left[{}^3R_{\mathrm{IX}} + e^{-6\alpha} \left(\frac{1}{2} (\pi^l{}_l)^2 - \pi^{ik} \pi_{ik} \right) \right] dt \right\} \tag{15}$$

における作用積分を得る．g_{ij} に対する特別な形式 (1) および (8) を導入するとき，対角型の行列 $\pi^i{}_k$ を以下のようにとる．

$$\begin{aligned} p_\alpha &= (2\pi)\pi^k{}_k, \\ p^i{}_k &= (2\pi)\left(\pi^i{}_k - \tfrac{1}{3}\delta^i{}_k \pi^l{}_l\right) \end{aligned} \tag{16}$$

ただし

$$\begin{aligned} 6p^1{}_1 &= p_+ + p_- \sqrt{3}, \\ 6p^2{}_2 &= p_+ - p_- \sqrt{3}, \\ 6p^3{}_3 &= -2p_+ \end{aligned} \tag{17}$$

パラメータ化することはまた好都合である［式 (8) をみよ］．結果は

$$I = \int p_+ \, d\beta_+ + p_- d\beta_- + p_\alpha \, d\alpha - \frac{N e^{-3\alpha}}{24\pi} [-p_\alpha^2 + p_+{}^2 + p_-{}^2 - 24\pi^2 e^{6\alpha} ({}^3R_{\mathrm{IX}})] dt$$

である．これはさらなる研究に対して以下のように整えられ，

$${}^3R_{\mathrm{IX}} = \frac{3}{2} e^{-2\alpha} (1 - V) \tag{18}$$

と書く．ここに

$$V = V(\beta) = \frac{1}{3} \mathrm{Tr}(1 - 2e^{-2\beta} + e^{4\beta}) \tag{19}$$

したがって $V(0) = 0$，そして α のゼロを $e^{2\alpha} \to (6\pi)^{-1} e^{2\alpha}$ となるように調整する ($\alpha \to \alpha - \alpha_0$)．そうすると計量は

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + (6\pi)^{-1} e^{2\alpha} (e^{2\beta})_{ij} \sigma^i \sigma^j \tag{20}$$

であり，そして変分原理は

$$I = \int p_+ d\beta_+ + p_- d\beta_- + p_\alpha d\alpha - (3\pi/2)^{1/2} N e^{-3\alpha} \mathcal{H}\, dt \tag{21}$$

ただし

$$2\mathcal{H} \equiv -p_\alpha{}^2 + p_+{}^2 + p_-{}^2 + e^{4\alpha}(V-1) \tag{22}$$

である．**Einstein の方程式を得るには** $p_\pm$，p_α，$\beta_\pm$，α，N **の任意の独立な変分に対して** $\delta I = 0$ **を要求する．** N を変えることから，基本的な条件式 $\mathcal{H} = 0$ を得る［それは，もし座標条件 $N = 1$ が課されるならば，運動量が速度によって置き換えられるときには（p を変えることによって得られる式を通して）式 (13) の真空のバージョンに帰着するだろう］．

ADM Hamiltonian

この変分原理を正準形式（Hamilton 形式）に帰着するための標準的な ADM 処方は，場の変数の 1 つあるいは運動量を時間座標として選び，その共役な Hamiltonian に対する制限を解くことである．ここでは明白で満足のいく選択は $t = \alpha$ と置き，

$$H_{\text{ADM}} = -p_\alpha = [p_+{}^2 + p_-{}^2 + e^{4\alpha}(V-1)]^{1/2} \tag{23}$$

に対して，$\mathcal{H} = 0$ を解くことである．$\dot{\alpha}$ 式［式 (21) における p_α を変える］は

$$\dot{\alpha} = -(3\pi/2)^{1/2} N e^{-3\alpha} p_\alpha \tag{24}$$

であり，選択 $\alpha = t$（したがって $\dot{\alpha} = 1$）は

$$N_{\text{ADM}} = (2/3\pi)^{1/2} e^{3\alpha} / H_{\text{ADM}} \tag{25}$$

を要求する．式 (23) が用いられて p_α を消去するとき生ずる既約された正準な変分原理は $\delta I_{\text{既約}} = 0$ となる．ただし

$$I_{\text{既約}} = \int p_+ d\beta_+ + p_- d\beta_- - H_{\text{ADM}}\, d\alpha \tag{26}$$

そして式 (25) によって補足されなければならない．

超 Hamiltonian

ここでのより好都合な取り扱いは ADM の方法よりも Dirac の Hamiltonian の方法により密接に関係している．しかし，経過（lapse）関数は，座標のある指定された関数 $N(t)$ であるとすることによって，この関数における任意性を取り除かないことに注意せよ．代わりにここで採用される手続きは，N を場の変数および運動量のある選ばれた関数，$N = N(\alpha, \beta_\pm, p_\alpha, p_\pm)$ に選ぶ（座標条件！）ことによって，N を変分原理 (21) から消去することである．任意のこのような選択は，式 (21) に挿入される

と，変分積分を正準 Hamiltonian 形式で残す．この新しい変分原理の内容は，もはや変分原理から導くことのできない制限

$$\mathcal{H} = 0 \tag{27}$$

によって補充されるときのみ元の変分原理に同等になる［これらの 2 つの原理に対する別な Euler–Lagrange 方程式は $\mathcal{H}$ に比例する項によってのみ異なる．こうして $\mathcal{H} = 0$ が初期条件に課されるとき同等である］．選択

$$N = (2/3\pi)^{1/2} e^{3\alpha} \tag{28}$$

は明白であり好都合である．それは $\mathcal{H}$ を超 Hamiltonian たらしめ，次の変分原理が生ずる．

$$I = \int p_+ d\beta_+ + p_- d\beta_- + p_\alpha \, d\alpha - \mathcal{H} \, d\lambda \tag{29}$$

ここに $t \equiv \lambda$ は，式 (28) が意味する特別な時間座標の選択をラベルすべく書かれている．

ミックスマスター力学

もし付加的な自由度をもたない物質項が含まれるならば，式 (29) における超 Hamiltonian は単純なものに修正される．たとえば，時間軸 $\boldsymbol{e}_{\hat{0}} = N^{-1}(\partial/\partial t)$ をもつ系における物質のエネルギー密度に対して

$$T^{\hat{0}\hat{0}} = -T^0{}_0 = (3/4)^2(\mu e^{-3\alpha} + \Gamma e^{-4\alpha}) \tag{30}$$

を選べ．2 つの項は非相対論的な完全流体 ($\rho \propto V^{-1}$) および放射流体 ($\rho \propto V^{-4/3}$) を，それぞれ表す．そして

$$2\mathcal{H} = -{p_\alpha}^2 + {p_+}^2 + {p_-}^2 + e^{4\alpha}(V-1) + \mu e^{3\alpha} + \Gamma e^{2\alpha} \tag{31}$$

に通ずる．単純な 2 次の運動量依存性をもつこの Hamiltonian は，ただ 2 つの点で基礎的な力学の Hamiltonian と異なる．すなわち，(1) ${p_\alpha}^2$ の項の符号において，そして (2) 関数 $V(\beta)$ の研究に帰着する，α および $\beta_\pm$ の関数としての “ポテンシャル” 項の詳細な形である．Hamilton の方程式は，式 (29) における α，$\beta_\pm$，p_α，および $p_\pm$ を変えることから，

$$\frac{d^2\beta_\pm}{d\lambda^2} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\beta_\pm} = -\frac{1}{2}e^{4\alpha}\frac{\partial V}{\partial\beta_\pm} \tag{32}$$

および

$$\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2} = +\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\alpha} = 2e^{4\alpha}(V-1) + \frac{3}{2}\mu e^{3\alpha} + \Gamma e^{2\alpha} \tag{33}$$

を与える．こうして ${p_\alpha}^2$ 項の符号は，α をして “ポテンシャル” 項 $e^{4\alpha}(V-1) + \mu e^{3\alpha} +$

$\Gamma e^{2\alpha}$ のより高い値（から離れるよりもむしろ）の方へ加速させる．$|V| \ll 1$（小さい非等方性）のときは，式 (33) は等方的な Friedmann 模型の形に同等である．そして α が，正曲率項（$-e^{4\alpha}$）が物質項（$\mu e^{3\alpha}$）および放射項（$\Gamma e^{2\alpha}$）を支配するほど十分大きいときにのみ減速を許す．特異点（$\alpha \to -\infty$）の近くで，正曲率項はつねに放射項および物質項に比べて無視できる．

特異点の振る舞いの研究に対しては，単純化された超 Hamiltonian

$$2\mathcal{H} \sim -{p_\alpha}^2 + {p_+}^2 + {p_-}^2 + e^{4\alpha} V(\beta) \tag{34}$$

を研究すれば十分である．なぜなら他の項は $\alpha \to -\infty$ に対して明らかにゼロになるからである．この形式は，この閉じた宇宙の曲率が負になる，$V \gg 1$，ときに支配的になり，${}^3R_{\mathrm{IX}} = \frac{3}{2} e^{-2\alpha}(1-V)$ における V 項のみを保持する．もし $V(\beta)$ における項がまた無視できるならば，$\mathcal{H} = -{p_\alpha}^2 + {p_+}^2 + {p_-}^2$ はおのおのの $p_\alpha, p_\pm$ を一定にし，予期されるように

$$d\beta_\pm / d\alpha = p_\pm / p_\alpha = 一定$$

および $|d\boldsymbol{\beta}/d\alpha|^2 = 1$（物質および曲率が無視されているから）をもつ Kasner の振る舞いを与える．さらに進むには，式 (19) と (8)，およびそれらの直接の結果

$$\begin{aligned} V(\beta) = \frac{1}{3} e^{-8\beta_+} - \frac{4}{3} e^{-2\beta_+} \cosh 2\sqrt{3}\beta_- \\ +1 + \frac{2}{3} e^{4\beta_+} (\cosh 4\sqrt{3}\beta_- - 1) \end{aligned} \tag{35}$$

に基づいて，$V(\beta)$ の研究が要求される．$V(\beta)$ は $\beta_+\beta_-$ 平面における正三角形と同じ対称性をもつ**明確に正の**“ポテンシャル壁”であることが見出される．原点，$\beta_\pm = 0$ の近くでは，等ポテンシャルは円である．なぜなら

$$V(\beta) = 8({\beta_+}^2 + {\beta_-}^2) + O(\beta^3) \tag{36}$$

であるからである．大きい β 値に対して

$$V(\beta) \sim \frac{1}{3} e^{-8\beta_+}, \qquad \beta_+ \longrightarrow -\infty \tag{37}$$

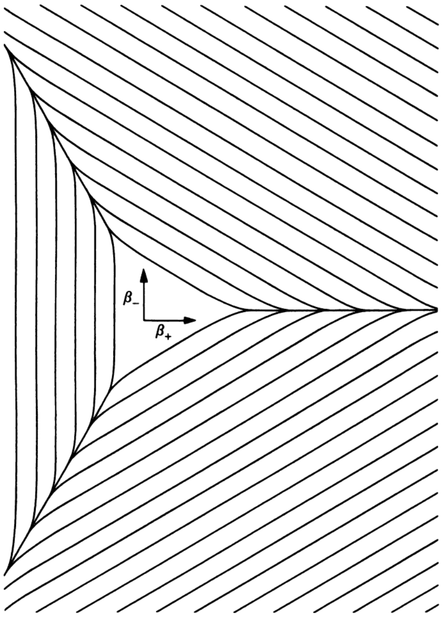
および

$$V(\beta) \sim 1 + 16{\beta_-}^2 e^{4\beta_+}, \qquad \begin{aligned} &\beta_+ \longrightarrow +\infty, \\ &|\beta_-| \ll 1 \end{aligned} \tag{38}$$

が見出される．これらの 2 つの漸近的な形式は三角形的な対称性とともに，$V(\beta)$ の完全な漸近的な記述を与える．図にスケッチされているように，$\Delta\beta = 1$ によって分離されている相続くレベルで，ポテンシャル V は $e^8 = 3\times 10^3$ の因子だけ増大する．

“はね返り”は特異点に向かう Kasner 的な段階をさえぎる

$V(\beta)$ ポテンシャルの支配的な特徴は明らかに，研究の代表的な式 (37) のもつ急峻



いくつかの等ポテンシャル曲線，$V(\beta)$＝一定が，式(35)で定義されている関数に対して示されている．β-平面の原点近くの等ポテンシャル曲線は，$V<1$ に対しては閉じた曲線である，そしてここでは省略されている．

な（指数関数的な）三角形の壁である．このポテンシャルの壁の影響のもとで，この模型宇宙の発展は超 Hamiltonian

$$2\mathcal{H} \sim -{p_\alpha}^2 + {p_+}^2 + {p_-}^2 + \frac{1}{3}e^{4(\alpha-2\beta_+)} \tag{39}$$

によって支配される．もし $d\beta_+/d\alpha > 1/2$ で［式 (39) における最後の項が小さいときに，$d\beta_+/d\alpha =$ 一定，$|d\boldsymbol{\beta}/d\alpha| = 1$ を思い出せ］$\alpha \to -\infty$ であるならば，ポテンシャル項は増大し最終的には運動に影響するほど大きくなるだろう．超空間の計量（運動量について 2 次の係数）によって提案される単純な "Lorentz" 変換は，計算をさらに単純化する．

$$\bar{\beta}_+ = \left(\beta_+ - \frac{1}{2}\alpha\right)/\sqrt{3/4},$$
$$\bar{\alpha} = \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta_+\right)/\sqrt{3/4}$$

と置く．そして

$$2\mathcal{H} = -{\bar{p}_\alpha}^2 + {\bar{p}_+}^2 + {p_-}^2 + \frac{1}{3}\exp(-4\sqrt{3}\bar{\beta}_+) \tag{40}$$

を見出す．この超 Hamiltonian に対して $\bar{p}_\alpha$ および p_- の両方は運動の定数である．他方，$\bar{\beta}_+$–Hamiltonian，${\bar{p}_+}^2 + \frac{1}{3}e^{-4\sqrt{3}\bar{\beta}_+}$ は符号だけが異なる $\bar{p}_+$ の最初と最後の値をもつ 1 次元のポテンシャル壁に対する単純なはね返りを表す．特異点近くの非等方性のパラメータ $\beta_\pm$ の振る舞いは，こうして単純な Kasner 段階（ここに $d\beta_\pm/d\alpha =$ 一定，ただし，$d\beta_+/d\alpha \geq \frac{1}{2}$，あるいは 3 つの壁の 1 つに対して満たされる対称性による同等

な条件とともに）からなり，その壁に対するはね返り，他の Kasner パラメータをもつ新しい Kasner 段階が始まる［この振る舞いのもっとも詳細な記述およびより一般的な宇宙模型へのその関係は，まったく異なる方法を用いた Belinsky，Khalatnikov and Lifshitz（1970）に見出されうる．また簡単なリポート，Khalatnikov and Lifshitz（1970）をみよ．Misner（1969b）の，部分的な Lagrangian 方式に取って代わった Hamiltonian 方式による詳細な展開に対しては，Misner (1970, 1972a)，および Ryan（1972a,b）をみよ］．

定常状態，特異点に近づく準周期的な無限個の“はね返り”

多くの Kasner 的な段階を含む，特異点の振る舞いのある大域的な特徴は，計量場のパラメータ空間（超空間）の別な変換によって示されうる．変換は $\alpha\beta_\pm$ 空間の原点から“半径方向の”t 座標を導入し，他方超 Hamiltonian の形式によって含まれるこの超空間の計量の性質を尊重する．こうして（任意の一定の α_0 に対して）

$$\begin{aligned}\alpha_0 - \alpha &= e^t \cosh\zeta \\ \beta_+ &= e^t \sinh\zeta\cos\phi, \\ \beta_- &= e^t \sinh\zeta \sin\phi\end{aligned} \tag{41}$$

を定義し

$$2\mathcal{H} = e^{-2t}[(-{p_t}^2 + {p_\zeta}^2 + {p_\phi}^2\sinh^{-2}\zeta) + e^{2t}e^{4\alpha}V] \tag{42}$$

を見出す．この変換の利点は極限 $t\to\infty$（$\alpha\to-\infty$，特異点）においてポテンシャル項は，第 1 近似で，t に依存しなくなることである．こうして式 (37) は，1 つのポテンシャル壁に対して，

$$e^{2t}e^{4\alpha}V \sim \frac{1}{3}e^{2t}\exp\left[4\alpha_0 - 8e^t\left(\sinh\zeta\cos\phi + \frac{1}{2}\cosh\zeta\right)\right] \tag{43}$$

を与える．$t\to\infty$ に対してこの表現は明らかに，括弧内の表現の符号に依存して，ゼロあるいは無限大に向かう．したがって漸近的なポテンシャル壁を，領域 $|\phi-\pi| < \pi/3$ において

$$\tanh\zeta + \frac{1}{2}\sec\phi = 0 \tag{44}$$

によって定義する．そして三角形の他の辺に対しては ϕ が $\phi\pm(2\pi/3)$ によって置き換えられる，同等の公式が得られる．したがって，超 Hamiltonian に対する漸近的な近似は

$$2\mathcal{H} = e^{-2t}[-{p_t}^2 + {p_\zeta}^2 + {p_\phi}^2\sinh^{-2}\zeta + V'(\zeta,\phi)] \tag{45}$$

である．ここに $V'(\zeta,\phi)$ は漸近的な壁 (44) の内部でゼロになり，そして外部では $+\infty$ に等しい．残りの t 依存性は式 (45) における共通の因子であるから，式 (29) におけ

る独立変数，$e^{-2t}d\lambda = d\lambda'$ の単純な変化—式 (28) の代わりに

$$N = (2/3\pi)^{1/2}\, e^{-2t} \exp[3(\alpha_0 - e^t \cosh\zeta)] \tag{46}$$

を選択することに同等である—は変分積分

$$I = \int p_t\, dt + p_\zeta\, d\zeta + p_\phi\, d\phi - \mathcal{H}'\, d\lambda' \tag{47}$$

をもつ新しい超 Hamiltonian $\mathcal{H}' = e^{2t}\mathcal{H}$ を与える．

$$2\mathcal{H}' = -{p_t}^2 + {p_\zeta}^2 + {p_\phi}^2 \sinh^{-2}\zeta + V'(\zeta, \phi) \tag{48}$$

の漸近的な近似によりただちに p_t は運動の定数である．そして漸近的なポテンシャル壁内で $\zeta\phi$ 値の“はね返り”はこの時間座標 λ'（あるいは，$dt/d\lambda' = -p_t =$ 一定であるから t）において定常的で準周期的な過程であることをみる［この漸近的な超 Hamiltonian に基づいたより詳細な研究は，$\zeta\phi$ は $t\to\infty$ のとき無限に多くの回数，任意の与えられた値に任意に密接に近づくように，運動はエルゴード的でさえある，ことを示している．Chitre（1972a）をみよ］．

要　約

このミックスマスター例における特異点の振る舞いは異常に能動的であることが発見された．単純な Kasner 特異点では，2 つの軸は崩壊するが，3 番目の軸は体積の圧縮によって伴われる単純な潮汐変形で伸ばされる．しかしミックスマスター例では，すべてのこのような崩壊の試みは，それに伴う高い負の曲率によって挫折される．あるいはむしろこのような試みは圧縮が容赦なく続くにつれて別な試みにそらされる．しかし潮汐変形は最初 1 つの構成を試み，それから別な構成を試み，すべての可能な構成を無限に繰り返して証明する．

時間および特異点についての思索

宇宙論の特異点（その特徴が不安定であることが知られていないすべての例において）は，無限大の曲率と無限大の密度を含む．このような理論的な予言の拒否は，これらの無限大は過去の有限の固有時間に起こった．そしてもしそれらが繰り返すならば，未来のある有限の固有時間に再び起こるだろうという相互関係のある予言によってとりわけ強められる．特異点の予言は，もし無限大の密度が無限に離れた過去へ移動されうるならば，もっと許すことができるだろう．そうすれば宇宙は，現在のように，その自然な状態が膨張の 1 つであることを見出し，したがってすべての**有限の**密度がある適当に離れた過去の時間に経験されたであろう．しかし**無限大の**密度は進化の過程においてけっして実現されない形式的な抽象概念となる．

無限大の曲率を有限の過去から押し出すことは 2 つの方法で達成されるだろう．ど

ちらかがうまくいくとしても，どちらであるかは知られていない．1 つの方法は，重力の法則を適当な量子論的な言葉で述べるような，多分明白で望ましい方法でのみ物理法則を変えて，特異点を要求する物理法則を変えることである．しかし，量子幾何学の計算はいまだ明白でなく，ある（おそらく不適当な）近似［Misner (1972a)］は特異点の問題を取り除かない．

特異点を廃棄する別な方法は，古典的な Einstein の方程式の数学を受け入れるが，それを無限大の過去の時間によって解釈し直すことである．もちろん，これを $\tau = 0$ の特異点を $t = -\infty$ における特異点に変える $t = \ln \tau$ のような任意の座標変換によって行う単純でまったく不適当な方法が存在する．しかし任意の座標は意味をもたない．問題は，特異点が過去の有限の**固有**時間に起こるということであり，そして固有時間はもっとも物理学的に意味があり，われわれの知るもっとも物理学的に実在する時間であるということである．それは物理学的な時計の動きにに対応し，実際の事象の自然なリズムを測定する．有限の過去の時間を無限大と解釈し直すには，これらの基礎に正確に基づいて固有時間に立ち向かい，それが物理学として適当でないと要求しなければならない．特殊相対論が成り立つ，局所的な基礎に基づいて，固有時間の物理学的な意味への挑戦は成功しえない．固有時間の物理学的な優越が再検討される必要があるのは，より大域的なスケールに基づいてでなくてはならない．

“宇宙論の特異点は 100 億年前に起こった”，この陳述で，時間は太陽系の世界線に沿う固有時間，天体歴時間を意味するものとする．そうすると，もし地球が宇宙の始まり以来太陽の周りを 10^{10} 周回ったことを意味するならば，陳述はもっとも直接な物理学的意味をもつだろう．しかし固有時間は実際の物理現象に密接に結びついた現象でない．陳述はたんに，地球が実際に達成したであろう 5×10^9 軌道は時間の標準を与える，すなわちそれは定められた方法で外挿されるべきであり，こうして太陽系の形成に先立ったと主張される他の 5×10^9 年に理論的な意味を与えることを意味する．

より丈夫な標準時計は議論の詳細を変えるが，しかし議論の定性的な結論を変えない．10^{10} 年を SI（国際単位系）秒によって解釈することは，中性セシウム（cesium）における超微細遷移のある 3×10^{27} 振動を含む過去の歴史を定める．しかし再び宇宙の初期に時計のチクタクする音（実際の物理学的な事象によって特異点を時間について位置づけるのに必要とされる）が欠けている．星の核合成が最初のセシウムを生成するために必要とされる時間は，歴史的な基礎の上でこの時計を不適格にする．そして，たとえこの元素が日付以前の星の痕跡をもっていたとしても，特異点により近いさらに初期の高い温度はすべてのセシウムをイオン化してしまうだろう．

こうして特異点近くの固有時間は単純で実際の物理現象の直接の勘定でなく，手の込んだ数学的な外挿である．おのおのの実際の時計は適当な因子，地球–太陽系からの軌道あたり 3×10^7 秒，セシウムの遷移に対する振動あたり 1.1×10^{-10} 秒，等だけ割り引かれた “刻み音” をもつ．ただ 1 つの時計（その有限の大きさおよび強さのゆえに）も特異点へ逆方向に戻ることはありえないから，特異点以降の固有時間について

の陳述は，相続いてより小さくより頑丈な，割り引かれたり加えられたりした刻み音をもつ時計の無限な列の概念を含む．“有限の固有時間” は，そうすると，事象の任意の有限系列は可能であることを意味する必要はない．それは任意の物理学的に考えられうる歴史において，数学によって非局所的収束因子の作用で，および “刻み音” を “固有時間” に転換するのに適用される “割り引き” によって，必然的に無限の数の事象（“刻み音”）を記述するだろう．

ここに Zeno のパラドックスと逆な概念をもつ．振り子のただ 1 つの振動は無限に複雑である—半周期，プラス 1/4 周期，プラス 2^{-n} 周期，無限，から構成されている—という Zeno の提案は，彼の無限級数における項は数学的な抽象であって，演じられなければならない劇において物理学的に達成される不連続な行為でないゆえに受け入れられない．比較できる標準によって，もし宇宙の過去の歴史の間演じられる無限個の不連続の行為が存在しなければならないことが証明されうるならば，宇宙の年齢に対する固有時間の系列の有限の和を数学的な抽象として無視すべきである．両方の場合において，有限さは実現できない数学的な抽象によってでなく，実現できる時計についての不連続な刻み音の数を勘定することによって判断されるだろう．

宇宙がこの基準によって無限に古いかどうかは定められるべく残っている．量子論的な影響は，とりわけ計算されるべく残っている．決定的な質問はおのおのの存在している時期の事象は無限に多くの先立つ不連続な事象の影響を受けているかどうかである．その場合に統計的な仮定（大きい数，ランダムな位相等）は，宇宙論の理論により強い方法で入りうるだろう．ミックスマスター宇宙模型はこの意味で無限の過去の歴史をもつ．なぜなら 1 つの Kasner 的な運動から他の Kasner 的な運動への各 “はね返り” は，任意の有限の時期と特異点との間で無限に多くの事象が実現されなければならない，認められうる宇宙論の事象であるからである．

30.8 地平線とマイクロ波背景の等方性

基本的な宇宙論の質問—“混沌として生まれている宇宙がわれわれの宇宙のように必然
*16 的に均質で等方にならなければならないか，—はさらなる問題を含んでいる．この問題は**地平線**である．27.10 節で議論されたように，Friedmann 宇宙の進化における任意の与えられた時期（たとえば，現在の時期）に，宇宙には，そこから光信号あるいは他の因果的に伝播する影響は最初の特異点以来利用できる時間内にいまだ地球に達していないだろう部分が多く存在する．“もしわれわれが非常に長く存在しているとするならば”，“次の 10 億年間に初めてみえてくる宇宙の新しい部分はすでにみられている近傍の部分に統計的に同等にみえるだろうか?” という質問が生ずるだろう．

幸いに，この質問は将来に対してのみ主張される必要はない．それはある過去の時間の質

*16 Friedmann 宇宙における地平線

*17 問として尋ねられうる．そして答えはハイである．マイクロ波背景放射はきわめてほとんど同じ温度をもって空のすべての方向から地球に達する［Boughn, Fran, and Partridge (1971) および Conklin (1969) のデータは $\Delta T/T \lesssim 0.004$ を示す］．空の 1 方向から地球に来るマイクロ波放射を放出したプラズマは，放出の時期以前に，他の方向から達する放射を放出するプラズマと因果的に情報を伝えることができなかった．もし宇宙の Friedmann 模型を採用するならば，マイクロ波で満ちた空の異なる部分は，もし両方の部分が 30° 以上互いに分離しているならば，たとえマイクロ波が $z=7$ ほど最近に放出されたとしても，この意味で互いにつながっていない（もしマイクロ波が $z=1{,}000$ で最後に散乱されたとすれば臨界角はさらに小さい）．これから，宇宙の均質性と等方性に対する基礎は，宇宙が近似的に Friedmannn になるはるか前に用意されたと結論する．なぜならもし宇宙の統計的な均質性と等方性がもっとも長い波長で以前にすでに達成されていなかったとすれば，これらの地平線の限界は大きいスケールにわたって，どのような条件のさらなる一致も妨げたであろう．しかるに宇宙はほとんど Friedmann 状態であった．そして等方性からの小さい振幅のずれ（10%）が今日観測されるはずである．

*18 　ミックスマスター宇宙はこの問題の解に寄与できるだろうという希望からその名前を受
*19 けた．ミックスマスター宇宙における特異点近くで無限回散発的に起こる非常に大きい u 値は，$p_1=1$，$p_2=p_3=0$ をもつ Kasner 模型の幾何学に近い幾何学を与える．この模型は形式

$$ds^2 = e^{2\eta}(-d\eta^2 + dx^2) + dy^2 + dz^2 \tag{30.6}$$

で書かれうる．ここに $\eta = \ln t$ である．もしこの計量が x, y, z をそれぞれ周期 4π をもつ角座標として解釈することによって閉じた宇宙の模型に転換されるならば，光線は時間間隔 $\Delta\eta = 4\pi$ で x 方向に宇宙を周航でき，それは因子 $\sqrt{-g_1}/\sqrt{-g_2} = e^{4\pi}$ による体積膨張に対応することがわかる．不幸にして，ミックスマスター宇宙がこの特別な Kasner 形式を達成する度合いと振動数の定量的な解析は，地平線の破れが宇宙の現在の状態を説明するのに不適当であることを提案している［Doroshkevich, Lukash, and Novikov (1971),
*20 Chitre (1972)］．特異点近くの粒子創造が，非等方性の散逸を与えるとともにこの地平線の問題を解きうることがわかるかもしれない．希望は粒子創造が純粋に古典的な表現で記述されるとき，たとえそれは量子論的なレベルで厳密に因果的な過程であるとしても，ある非因果的な様相をもつという事実によって与えられる［Zel'dovich (1972)］.

---

*17　マイクロ波放射の観測される等方性は宇宙が Friedmann 的になる前に，均質性に対する基礎が用意されていたことを証明する

*18　何が宇宙を均質で等方にしたか？

*19　(1) ミックスマスター振動？—おそらくイイエ

*20　特異点近くの粒子創造？

パート **VII**

重力崩壊とブラックホール

読者がどのようにしてブラックホールの領土に運ばれ，そして静的な極限 (**static limit**)，エルゴ球 (**ergosphere**)，および地平線 (**horizon**) の集落に遭遇しようとも，そのベールの背後には隠れてぽっかり口を開けている，残忍な特異点が存在する．

31章
Schwarzschild幾何学

31.1　重い星の崩壊の必然性

太陽のバリオンの数の約2倍以上を含んでいる ($A > A_{最大} \sim 2A_{\odot}$) **星に対しては，熱核進化の終点で平衡状態は存在しない．**これは24章における議論のもっとも驚くべき，そして悩ましい結果の1つである．異なる述べ方をすれば，$A > A_{最大} \sim 2A_{\odot}$ をもつ星は，そのバリオンの $A_{最大}$ 以外のすべてを，たとえば，新星あるいは超新星爆発によって—最終の静止状態に落ち着くまでに吐き出さなければならない．さもなければこの星が落ち着く最終の静止状態は存在しないだろう．

熱核進化の終点に近づく前に余分のバリオンを放出できない星の運命は何であるか？ たとえば，非常に重い超新星の爆発後，崩壊した縮退している中性子の中核が $A_{最大}$ より多いバリオンを含むとき，この中性子の中核はどうなるだろうか？ このような超限界質量は爆発できない．なぜならそれは重力的に束縛されており解放すべきさらなる熱核エネルギーをもたないからである．それはまた静的な平衡状態に達しえない．なぜなら，それほど大きい質量に対してはそのような状態は存在しないからである．唯一の別な状態が残る．超限界質量は，重力を及ぼしている“ブラックホール”を空間内に後に残して，その“重力半径” $r = 2M$ を通って崩壊しなければならない．

[*1] 重力半径を通っての崩壊現象は，古典的な一般相対論によって記述されるように，次章の主題であるだろう．しかし，それに取り組む前に，ブラックホール，崩壊している星および静的な星を取り巻くSchwarzschild時空幾何学をいままで以上に完全に理解しなければならない．

本章は，最初関係がないようにみえる2つの題目に関するだろう．1つは，静的とみなされるが，しかしある時間前に崩壊してしまった星の残骸ともみなされうる，あらかじめ存在するSchwarzschild幾何学内での試験粒子の落下である．2つ目はこの幾何学そのものについての物理学的特徴である．この幾何学の探究に対しては，試験粒子はすべての探求者に最善なものとして役立つ．しかし試験粒子はまた別な見方で考えられるだろう．それは落下している星の物質の有象無象の新参者の1つとみなされうる．このようにみると，それは崩壊している星の質量の分布における非対称性のすべての例示の中でもっとも単純なものを与える．この非対称性が自らに決着をつけることは，したがってより複雑な非対

[*1] 本章，Schwarzschild幾何学は，重力崩壊（次章）およびブラックホール（33章）を理解するための重要な準備である

称性が，またいかに自らに決着をつけるかにある予備的な洞察を与えるだろう．要するに，試験粒子の運動と Schwarzschild 幾何学の力学（なぜならこの幾何学は力学的であることがわかるだろう），2 つの見かけ上異なる問題は，幸せなことに互いに他に光を投げかける．

31.2 重力半径の非特異性

*2 Schwarzschild 時空幾何学

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{31.1}$$

は $r = 2M$ の近くで危険な振る舞いをするようにみえる．そこでは g_{tt} はゼロになり，そして g_{rr} は無限大になる．しかし，注意深い研究なしに線要素におけるこの病状は，時空幾何学自身の病状によるのかどうか，あるいはたんに $r = 2M$ 近くの (t, r, θ, ϕ) 座標系の病状によるのかどうか，確かでありえない（座標に起因する病状の例として，不変な球，$t =$ 一定，$r =$ 一定 の上で $\theta = 0$ の近傍を考える．そこでは $g_{\phi\phi}$ はゼロになる．なぜならこの座標系はひどい振る舞いをするからである．しかし，球の内在的な，座標によらない幾何学はそこでよい振る舞いをする．別な例に対しては，図 1.4 をみよ）．

Schwarzschild 幾何学の面倒な領域 $r = 2M$ は，“重力半径”，“Schwarzschild 半径”，“Schwarzschild 面”，“Schwarzschild 地平線”，あるいは “Schwarzschild 球” とよばれる．それはまたより古い文献のあるものでは，“Schwarzschild 特異点” とよばれる．しかしそれは誤称である．なぜなら，以下に示されるように，時空幾何学はそこで特異的でないからである．

時空幾何学が重力半径で特異的であるかどうかを定めるには，それを図で示すために調査者をはるか遠くから送れ．単純さのために，調査者を半径方向に重力半径まで自由落下させ，落ちるときに直交テトラッド（tetrad，四つ組）を運ばせる．彼の時空を通しての軌道［“放物線軌道”，計量 (31.1) の半径方向の測地線］は

$$\begin{aligned}\frac{\tau}{2M} &= -\frac{2}{3}\left(\frac{r}{2M}\right)^{3/2} + \text{定数},\\ \frac{t}{2M} &= -\frac{2}{3}\left(\frac{r}{2M}\right)^{3/2} - 2\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} + \ln\left|\frac{(r/2M)^{1/2}+1}{(r/2M)^{1/2}-1}\right| + \text{定数}\end{aligned} \tag{31.2}$$

である［導出と議論に対しては 25.5 節およびとくに式 (25.38) をみよ］．最初の式を逆にすることによって，探求者が運ぶ時計上で測定される固有時間によって探求者の r 座標 $r(\tau)$ を得る．2 番目の式を逆にすることによって，座標時間によって探求者の r 座標 $r(t)$ を見出す．

*3 旅行者の軌道のすべての特徴の中で，もっとも明白にそして悩ましげに目立っているものは，重力半径 $r = 2M$ に達するには，固有時間の有限の経過を要求するが，しかし座標時間の無限の経過を要求するということである．

---

*2 Schwarzschild 線要素は $r = 2M$（“重力半径”）で特異点になる

*3 落下する観測者は $r = 2M$ に有限の固有時間で，しかし無限の座標時間で達する

$$
\begin{aligned}
r/2M &= 1-(\tau+\text{定数})/2M & &r=2M \text{ に近いときに} \\
r/2M &= 1+\text{定数}\times\exp(-t/2M) & &t\to\infty \text{ としての極限で}
\end{aligned}
\tag{31.3}
$$

（図 25.5 をみよ）．もちろん，固有時間こそが探求者の心臓の鼓動と健康に重要な量である．座標系は探求者が $r=2M$ に達するのを妨げる力をもたない．時空の座標系によらない幾何学のみがおそらくそれをなしうるだろう．そして式 (31.3) は，時空による幾何学はそうではないことを示す！

探求者が $r=2M$ に近づきそして達したとする．そうすると，彼はそこでどのような時空幾何学を測定するか？　それは特異的であるか，あるいは非特異的であるか？　測定の言葉で述べ直すと，旅行者が $r=2M$ に近づくとき無限大の潮汐重力が彼を引き裂き粉砕するか，あるいは彼は有限の潮汐重力のみを感じ，彼の体は原理的にそれによく耐えうるか？

探求者が与えられた半径 r を通過するときに彼によって感じられる潮汐力は，そこでの彼の直交系についての Riemann 曲率テンソルの成分（測地線のずれの式）によって測定される．r におけるそれらの曲率成分を計算するために 2 段階で進む．(1) 旅行者の系においてでなく，むしろ彼が通過する事象の位置での "静的な" 直交系

$$
\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}=\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2}\boldsymbol{d}t,\quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{r}}=\frac{\boldsymbol{d}r}{(1-2M/r)^{1/2}},\quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}=r\boldsymbol{d}\theta,\quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}=r\sin\theta\,\boldsymbol{d}\phi
\tag{31.4a}
$$

において，成分を計算せよ．結果［式 (14.50) および (14.51) から $e^{2\Phi}=e^{-2\Lambda}=1-2M/r$ と置くことによって得られうる］は，

$$
\begin{aligned}
R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} &= \frac{-2M}{r^3}, & R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} &= R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = \frac{M}{r^3}, \\
R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} &= \frac{2M}{r^3}, & R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} &= R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = \frac{-M}{r^3},
\end{aligned}
\tag{31.4b}
$$

Riemann の対称性によって式 (31.4b) から得られるものを
除いて，すべての他の $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ はゼロになる

である．(2) "静的な系" の成分 (31.4b) に適当な変換を適用することによって探求者の系における成分を計算せよ．$r>2M$ に対しては，通常の速度 $v^{\hat{r}}$ をもつ $\boldsymbol{e}_{\hat{r}}$ 方向における Lorentz ブースト（boost），$r<2M$ に対しては，"ブースト" でなく，$v^{\hat{r}}>1$ をもつ標準的なブースト公式（コラム 2.4）によって与えられる変換を適用する．ここに

$$
v^{\hat{r}}=\frac{(g_{rr})^{1/2}dr}{(-g_{tt})^{1/2}dt}=\frac{dr/dt}{1-2M/r}=-\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}
\tag{31.5}
$$

驚くべき結果（Schwarzschild 幾何学の特別な代数的な性質の結果，そして電磁場 $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{B}$ がともにブーストに平行であるとき，それらの成分に生ずるもの—あるいは，むしろ，生じないものに—類似した何か）は次のことである．***Riemann*** のすべての成分は，ブーストによって完全に影響を受けない．もし $\boldsymbol{e}_{\hat{\rho}}$ が旅行者の半径方向の基底ベクトルであり，そして $\boldsymbol{e}_{\hat{\tau}}=\boldsymbol{u}$ は時間の基底ベクトルであるならば，

$$R_{\hat{\tau}\hat{\rho}\hat{\tau}\hat{\rho}} = -2M/r^3, \qquad R_{\hat{\tau}\hat{\theta}\hat{\tau}\hat{\theta}} = R_{\hat{\tau}\hat{\phi}\hat{\tau}\hat{\phi}} = M/r^3,$$
$$R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = 2M/r^3, \qquad R_{\hat{\rho}\hat{\theta}\hat{\rho}\hat{\theta}} = R_{\hat{\rho}\hat{\phi}\hat{\rho}\hat{\phi}} = -M/r^3 \tag{31.6}$$

(練習問題 31.1 をみよ).

*4 この計算の報酬は，式 (31.6) によれば，***Riemann*** の成分のいずれも探求者の直交系で重力半径で無限大にならないということである．旅行者が $r = 2M$ に近づくときに感じる潮汐力は有限である．潮汐力は旅行者を引き裂かない（少なくとも質量 M が十分大きくないときは）．なぜなら $r = 2M$ で曲率テンソルの代表的なゼロでない成分 $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ は $1/M^2$ の程度であるからである．重力半径は完全によい振る舞いをする，特異点でない時空の領域であり，そして何ものもそこで探求者が内部へ落下することを妨げられない．

*5

対照的に，重力半径の内部深く，$r = 0$ で，旅行者はそこに達するために用いるルートに無関係に，無限大の潮汐力に遭遇しなければならない．“$r = 0$ は時空の物理学的な特異点である” と述べる．これをみるには，式 (31.4b) あるいは (31.6) から “曲率不変量”

$$I \equiv R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} R^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = 48M^2/r^6 \tag{31.7}$$

を計算しさえすればよい．すべての局所 Lorentz 系でこれは曲率成分の積の和であるだろう．そして同じ値 $48M^2/r^6$ をもつだろう．こうして，旅行者の系を含む，すべての局所

*6 Lorentz 系で，***Riemann*** は $r \to 0$ のとき，1 つあるいはより多くの無限大の成分をもつだろう．すなわち，潮汐力は無限大になるだろう．

コラム 31.1　“Schwarzschild の特異点”，歴史的な注意

Eddington (1924) は $r = 2M$ で特異点でない座標系を初めて構成したけれども，彼は彼の結果の意味を認識していなかったように思われる．Lemaître (1933c, とくに p.82) は $r = 2M$ におけるいわゆる “Schwarzschild 特異点” は特異点でないことを初めて認めたようである．彼は “Schwarzschild の場の特異点はしたがって de Sitter の宇宙の原型において中心の地平線が存在するというセルに類似した，仮想的な特異点である” と記している．彼はまた $r = 2M$ を通過する座標系を与えた．しかし，彼の座標系は，Eddington の座標系のように，Schwarzschild 幾何学の半分のみを覆った（図 31.3 の領域 I および II）．Synge (1950) は初めて Eddington および Lemaître の座標系における不完全性を発見し，そして全幾何学（図 31.3 の領域 I, II, III, IV）を覆う座標を与えた．Fronsdal (1959) は Synge の仕事に気づかずに，図と計算をはめ込むことによって Schwarzschild 幾何学の大域的な構造を再発見した．最大の洞察を Schwarzschild 幾何学に与える座標系は，一般に Kruskal–Szekeres 座標系として

*4 落下する観測者は $r = 2M$ で無限大の潮汐力を感じない
*5 こうして時空は $r = 2M$ でよい振る舞いをする，しかし座標系は異常である
*6 $r = 0$ で曲率は無限大である

知られている座標系である．それは Kruskal (1960) および Szekeres (1960) によって独立に構成された．

[練習問題]

31.1　落下する探求者への潮汐力

(a) Riemann テンソルの成分 (31.6) の導出の詳細を遂行せよ．

(b) もし $M > M_{臨界}$ ならば探求者の体（標準的な筋肉と骨からつくられる人間の体）が $r = 2M$ における潮汐力に耐えうる．しかしもし $M < M_{臨界}$ ならば，彼の体が潮汐力によって手足を切り取られるような臨界質量 $M_{臨界}$ を，大ざっぱに計算せよ［**答え：** $M_{臨界} \sim 1000 M_{\odot}$．明らかに，もし $M \sim M_{\odot}$ ならば物理学者は激動を受ける前に蟻に変換されなければならない！　詳細については 32.6 節をみよ］．

31.3　$r = 2M$ での Schwarzschild 座標の振る舞い

*7　時空幾何学は重力半径でよく振る舞うから，Schwarzschild の計量成分，$g_{tt} = -(1 - 2M/r)$ および $g_{rr} = (1 - 2M/r)^{-1}$ のそこでの特異的な振る舞いは，Schwarzschild 座標 t, r, θ, ϕ のそこでの病状によらなければならない．何とかしてその病状を取り除く方法を見出さなければならない．すなわち，病状が存在しない新しい座標系を構成しなければならない．これをする前に，病状の性質をより正確に理解することが有用である．

*8　$r = 2M$ でのもっとも明白な病状は時間的なおよび空間的な座標としての t および r の役割のそこでの逆転である．領域 $r > 2M$ で，t 方向 $\partial/\partial t$ は時間的である ($g_{tt} < 0$)．そして r 方向 $\partial/\partial r$ は空間的である ($g_{rr} > 0$)．しかし領域 $r < 2M$ で，$\partial/\partial t$ は空間的であり ($g_{tt} > 0$)，そして $\partial/\partial r$ は時間的である ($g_{rr} < 0$)．

r が "空間的な座標から時間的な座標へ特徴を変える" ことは何を意味するか？　ジェットエンジンつきの宇宙線内の探求者は $r = 2M$ に到着する前につねにジェットエンジンを働かせて運動を減少する r（落下）から増大する r（脱出）へ変える選択をもつ．探求者がひとたび $r = 2M$ 内に落下したときには事情はまったく逆である．そうすると r のさらなる減少は時間の経過を表す．旅行者が彼のジェットエンジンに与えうる命令は時間を逆にすることができない．すべての者を好むと好まざるとにかかわらず 20 歳から 40 歳へそして 40 歳から 80 歳へ前方に引きずる世界の見えざる力はまた，ロケットを時間座標 $r = 2M$ から時間座標 $r = 0$ の後の値へ引きずる．人間の意志の力，エンジン，ロケット，

---

*7　$r = 2M$ での座標の病状の性質

*8　(1) t および r は時間的なおよび空間的な座標としての役割を逆にする

力（練習問題 31.3 をみよ）は，時間を静止させておくことができない．たしかにセルが死ぬのと同じように，旅行者の時計が“許されざる分”を同じ確かさで刻むのと同じように，けっして誰も経路に沿って，r が $2M$ から 0 に落ちることを止めない．

r および t が空間座標と時間座標としての役割を交換する $r = 2M$ で，g_{tt} はゼロ
*9 になり，他方 g_{rr} は無限大である．g_{tt} がゼロになることは，**Schwarzschild 座標系** $(-\infty < t < +\infty, 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi)$ **で 3 次元であるようにみえる曲面** $r = 2M$ **は，ゼロ体積をもち，実質 2 次元に過ぎない，あるいはヌルであること**を提案する．こうして

$$\begin{aligned}&\int_{r=2M} |g_{tt}g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|^{1/2} dt\, d\theta\, d\phi = 0,\\ &\int_{(r=2M,t=\text{一定})} |g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|^{1/2} d\theta\, d\phi = 4\pi(2M)^2\end{aligned} \tag{31.8}$$

$r = 2M$ での g_{rr} の発散は，$r = 2M$ は時空のすべての他の領域から無限に離れていることを意味しない．逆に，$r = 2M$ から任意の r をもつ点までの固有距離は

$$\int_{2M}^{r} |g_{rr}|^{1/2} dr = \begin{cases} [r(r-2M)]^{1/2} + 2M \ln |(r/2M-1)^{1/2} + (r/2M)^{1/2}| \\ \qquad\qquad (r > 2M \text{ のとき}) \\ -2M \cot^{-1}[r^{1/2}/(2M-r)^{1/2}] - [r(2M-r)]^{1/2} \\ \qquad\qquad (r < 2M \text{ のとき}) \end{cases} \tag{31.9}$$

である．それは $0 < r < \infty$ のすべてに対して有限である．

まさに，いかに領域 $r < 2M$ は物理学的に領域 $r > 2M$ に結びついているかは，Schwarzschild の計量の半径方向の測地線を吟味することによって発見されうる．具体性のために，$r = 0$ での特異点から吐き出され，半径方向を外向きに $r = 2M$ を通して飛び，最大半径 $r_{\text{最大}}$（“軌道の頂点”）に固有時間 $\tau = 0$ および座標時間 $t = 0$ に達し，それから下向きに $r = 2M$ を通って $r = 0$ に落下する，試験粒子の軌道に注意を集中せよ．このような軌道に対する測地線の方程式の解は 25.5 節で導かれ図 25.3 で記述された．それは“サイクロイド形”（$-\pi$ から $+\pi$ まで走るパラメータ η をもつ）をもつ．

$$r = \frac{1}{2} r_{\text{最大}}(1 + \cos\eta) \tag{31.10a}$$

$$\tau = ({r_{\text{最大}}}^3/8M)^{1/2}(\eta + \sin\eta) \tag{31.10b}$$

$$\begin{aligned} t = 2M \ln &\left| \frac{(r_{\text{最大}}/2M - 1)^{1/2} + \tan(\eta/2)}{(r_{\text{最大}}/2M - 1)^{1/2} - \tan(\eta/2)} \right| \\ &+ 2M\left(\frac{r_{\text{最大}}}{2M} - 1\right)^{1/2} \left[\eta + \left(\frac{r_{\text{最大}}}{4M}\right)(\eta + \sin\eta)\right] \end{aligned} \tag{31.10c}$$

図 31.1 は r, t–座標平面におけるこの軌道（曲線 F–F'–F''）を，他の型の半径方向の測地線のいくつかとともに描く．

*10 すべての半径方向の測地線は“測度ゼロの測地線の組”を除いて $t = +\infty$（あるいは $t = -\infty$，あるいは両方）で図 31.1 および図の背後の計算（学生に対する練習問題！ 25

*9　(2) 領域 $r = 2M$，$-\infty < t < +\infty$ は 3 次元よりもむしろ 2 次元である

*10　(3) 半径方向の測地線は領域 $r = 2M, t = \pm\infty$ は時空の“有限”部分であることを明かす

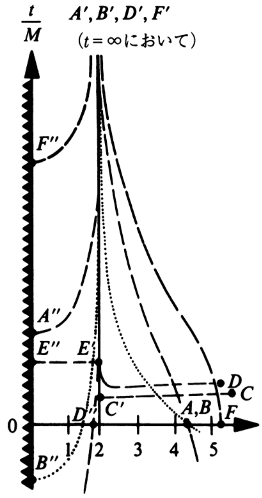


図 31.1　Schwarzschild 座標で図に示されたときの，Schwarzschild 幾何学の代表的な半径方向の測地線（概略図）．$FF'F''$［式 (31.10) をみよ］は，$r = 5.2M$ で静止から出発し直線状に落下して有限の固有時間に特異点 $r = 0$（ジグザグの標識）に達する，試験粒子の時間的な測地線である．Schwarzschild 座標系の不適切さは 2 つの方法で現れる．それは，(1) 運動を通しての途中までに t は ∞ になるという事実において，(2) τ（示されていない）が増大し続けるときに t はその後減少するという事実において現れる．$t = 0$ より先の同じ軌道の経路は図を水平軸について反射することによって構成されるだろう（"時間反転"）．F'' の時間反転された像は試験粒子の特異点からの放出を示す．$AA'A''$ は $r = +\infty$ から入る時間的な測地線である．$BB'B''$ は直線状に落下する光子によってたどられるヌル測地線である（頂点は存在しない，けっして静止しない!）．$DD'D''$ は空間的な半径方向の測地線である．CC' は空間的であるが，しかし $E'E''$ は時間的である．後の 2 つのいずれも $r = 2M$ を横切ることに永遠に成功しない［これらの測地線について答えられていない質問は図 31.4（そこでは同じ世界線は "Kruskal–Szekeres 図" で示されている）で答えられるだろう］．

式 (31.10) によって数学的に記述されているが，測地線 $F''_{\text{時間反転}}F'_{\text{時間反転}}FF'F''$ は，

$$r = 0 \quad \left[t = -2\pi M\left(\frac{r_{\text{最大}}}{2M} - 1\right)^{1/2}\left(\frac{r_{\text{最大}}}{4M} + 1\right), \quad \tau = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{r_{\text{最大}}{}^3}{2M}\right)^{1/2} \text{において}\right]$$

での放出で出発し，増大する固有時間 τ，しかし減少する座標時間 t とともに外に向かって飛び続け，

$$r = 2M \quad \left[t = -\infty, \quad \tau = -\left(\frac{r_{\text{最大}}{}^3}{8M}\right)^{1/2}\cos^{-1}\left(\frac{4M}{r_{\text{最大}}} - 1\right) - r_{\text{最大}}\left(1 - \frac{2M}{r_{\text{最大}}}\right)^{1/2} \text{において}\right]$$

に達し，それから外に向かって飛び続けるが，しかし $t = -\infty$ から今や増大する座標時間とともに，最大半径

$$r = r_{\text{最大}} \quad [t = 0, \qquad \tau = 0 \text{ (図の事象 } F\text{) において}]$$

に達する．それから増大し続ける t とともに，内に向かって落下し，再び重力半径を横切る

$$r = 2M \quad \left[t = +\infty, \quad \tau = +\left(\frac{r_{\text{最大}}{}^3}{8M}\right)^{1/2}\cos^{-1}\left(\frac{4M}{r_{\text{最大}}} - 1\right) + r_{\text{最大}}\left(1 - \frac{2M}{r_{\text{最大}}}\right)^{1/2} \text{において}\right]$$

(図の事象 F')

そして減少する t（しかし，もちろん，増大する τ）とともに内に向かって最終的に

$$r = 0 \quad \left[t = +2\pi M\left(\frac{r_{\text{最大}}}{2M} - 1\right)^{1/2}\left(\frac{r_{\text{最大}}}{4M} + 1\right), \qquad \tau = +\frac{\pi}{2}\left(\frac{r_{\text{最大}}{}^3}{2M}\right)^{1/2} \text{において}\right]$$

(図の事象 F'')

に落ちる．

章をみよ）によれば，重力半径と交差する．したがって $r = 2M$ でのすべての物理学は，Schwarzschild 座標の選択ではある不幸な理由によって $t = \pm\infty$ にゆだねられる．よりよい座標系は，これら 2 つの "無限遠における点" をとりそれらを新しい $(r_{\text{新しい}}, t_{\text{新しい}})$–平面における線に広げる．そして "線" ($r = 2M, t$ は$-\infty$ から$+\infty$ まで) を $(r_{\text{新しい}}, t_{\text{新しい}})$–平

面における一点に圧縮する，と信じる．1 つはこの試験的な結論を受け入れ，これに基づいて考察を進めるべきより準備されたものである．なぜなら $r=2M$ での (θ,ϕ)2–球を覆い，そして $t=-\infty$ から $t=+\infty$ まで延びる領域は，ゼロ固有体積をもつことをすでに見ているからである [式 (31.8)]．“線” $r=2M$，$-\infty<t<\infty$ は，実際に点であるということ以上に，どのようなより時宜を得た暗示を望みうるだろうか？

31.4 若干のよい振る舞いをする座標系

もっとも視覚化しやすいよい振る舞いをする座標系は式 (31.10) の半径方向に動く試験粒
*11 子がつねに静止している（“共運動座標”）座標系である．このような座標は初めて Novikov
*12 (1963) によって用いられた．Novikov は彼の半径方向の座標の特別な値 R^* を，$r=0$ における無限大の潮汐力の特異点から現れる各試験粒子に結びつけ，そして粒子が R^* のその値を “サイクロイド的な生涯” を通して—$r=2M$ を通って上に $r=r_{最大}$ まで，それから $r=2M$ を通って $r=0$ まで逆戻りする—保持することを主張する．明確さのために Novikov は，軌道上の頂点における各粒子の R^* 値を

$$R^* = (r_{最大}/2M-1)^{1/2} \tag{31.11}$$

によって表す．時間座標として，Novikov は軌道の頂点で $\tau=0$ になるように規格化された，試験粒子の固有時間 τ を用いる．群の中のすべての粒子は，Schwarzschild 座標時間の 1 つそして同じ値，すなわち $t=0$ で，その軌道の頂上 $(r=r_{最大},\tau=0)$ に到達するように吐き出される．

概念的に単純であるけれども，Novikov 座標は非常に複雑な変換によって元の Schwarzschild 座標に関係している．(1) 式 (31.10b) と (31.11) を結びつけて $\eta(\tau,R^*)$ を得る，(2) $\eta(\tau,R^*)$ を式 (31.10a) および (31.11) と結びつけて $r(\tau,R^*)$ を得る，(3) $\eta(\tau,R^*)$ を式 (31.10c) および (31.11) と結びつけて $t(\tau,R^*)$ を得る．生ずる座標変換は，Schwarzschild 計量 (31.1) に適用されると，線要素

*13
$$ds^2 = -d\tau^2 + \left(\frac{R^{*2}+1}{R^{*2}}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial R^*}\right)^2 dR^{*2} + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2) \tag{31.12a}$$

を与える（**“Novikov 座標における Schwarzschild 幾何学”**）．ここで r はもはや半径方向の座標でない．それは今や陰に

$$\begin{aligned}\frac{\tau}{2M} &= \pm(R^{*2}+1)\left[\frac{r}{2M}-\frac{(r/2M)^2}{R^{*2}+1}\right]^{1/2} \\ &\quad +(R^{*2}+1)^{3/2}\cos^{-1}\left[\left(\frac{r/2M}{R^{*2}+1}\right)^{1/2}\right]\end{aligned} \tag{31.12b}$$

によって与えられる計量関数 $r(\tau,R^*)$ である．図 31.2 はこの座標系で Schwarzschild 時

*11 Novikov 座標
*12 (1) いかに構成されるか
*13 (2) 線要素

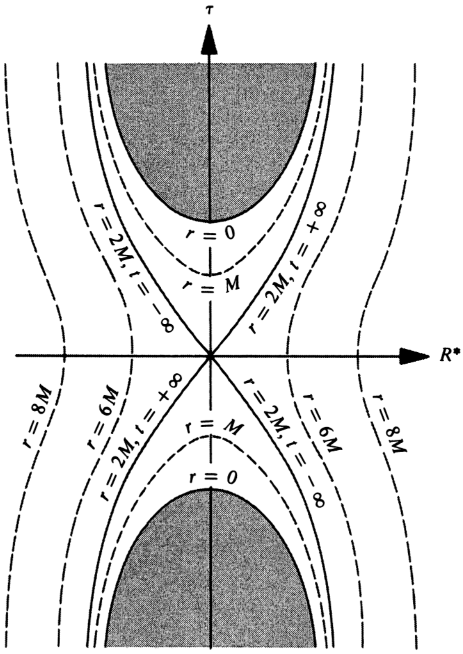


図 31.2 Schwarzschild 時空に対する Novikov の座標系（概略図）．破線の曲線は一定の r の曲線である（$4\pi r^2$ = 対称中心周りの表面積であることを思い出せ）．陰をつけられた灰色の領域は時空の部分でない．それは $r<0$ に対応する，$r=0$ での時空の特異点のために達することができない領域である．Schwarzschild 座標図（図 31.1）の "線" $(r=2M, -\infty<t<+\infty)$ は，31.3 節の終わりにおける議論と一致して，ここでは点に圧縮されている．

空のいくつかの重要な領域の位置を示す．$r=0$（特異点）をもつ 2 つの異なる領域と，$r\to\infty$（漸近的に平坦な領域，$4\pi r^2$ = 表面積であることを思い出せ!）をもつ 2 つの異なる領域の存在は，31.5 節で議論されるだろう．

Novikov の座標系は概念的に非常に単純であるけれども，この系における計量成分に対する数学的な表現はむしろ扱いにくい．より単純で，より使用可能な表現は Kruskal (1960)，および独立に Szekeres (1960) によって異なる座標系（"Kruskal–Szekeres 座標"）で得られている．

*14　Kruskal と Szekeres は

$$\left.\begin{aligned} u &= (r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\cosh(t/4M) \\ v &= (r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\sinh(t/4M) \end{aligned}\right\} \; r>2M \text{ のとき} \tag{31.13a}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= (1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\sinh(t/4M) \\ v &= (1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\cosh(t/4M) \end{aligned}\right\} \; r<2M \text{ のとき} \tag{31.13b}$$

によって，Schwarzschild の r および t に関係する次元をもたない半径座標 u および次元をもたない時間座標 v を用いる（このような座標を導入するための動機は，コラム 31.2 に与えられている）．Schwarzschild 計量 (31.1) に対してこの座標変化を行うことによって，次の線要素

*14　Kruskal–Szekeres 座標

$$ds^2 = (32M^3/r)e^{-r/2M}(-dv^2 + du^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{31.14a}$$

を得る（"**Kruskal–Szekeres 座標における Schwarzschild 幾何学**"）．ここに r は

$$(r/2M - 1)e^{r/2M} = u^2 - v^2 \tag{31.14b}$$

によって陰に定義される u および v の関数とみなされるべきである［式 (31.13) を参照せよ］．

コラム 31.2 Kruskal–Szekeres 座標に対する動機 *

A. Eddington–Finkelstein 座標

Kruskal–Szekeres 系に対する動機は，Eddington（1924）によって初めて発見され，Finkelstein（1958）によって再発見された，異なる座標系を導入することによって始まる．Eddington および Finkelstein は座標系の基礎として，Novikov がしたように自由落下する粒子でなく，自由落下する光子を用いる．より特別に，彼らは出ていくおよび入ってくる半径方向のヌル測地線に対するラベルとして，座標 $\tilde{U}$ および $\tilde{V}$ を導入する．測地線は

$$ds^2 = 0 = -(1 - 2M/r)dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1}\, dr^2$$

によって与えられる．同等のことであるが，出ていく測地線は $\tilde{U}$ = 一定 によって与えられる．ここに

$$\tilde{U} \equiv t - r^* \tag{1a}$$

そして入ってくる測地線は $\tilde{V}$=一定によって与えられる．ここに

$$\tilde{V} \equiv t + r^* \tag{1b}$$

ここに r^* は 25.5 節および図 25.4 の "カメ座標" である．

$$r^* \equiv r + 2M \ln|r/2M - 1| \tag{1c}$$

入っていく Eddington–Finkelstein 座標— r および $\tilde{V}$ を，r および t の代わりに座標として採用する

Schwarzschild 計量は

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)d\tilde{V}^2 + 2d\tilde{V}dr + r^2\, d\Omega^2 \tag{2}$$

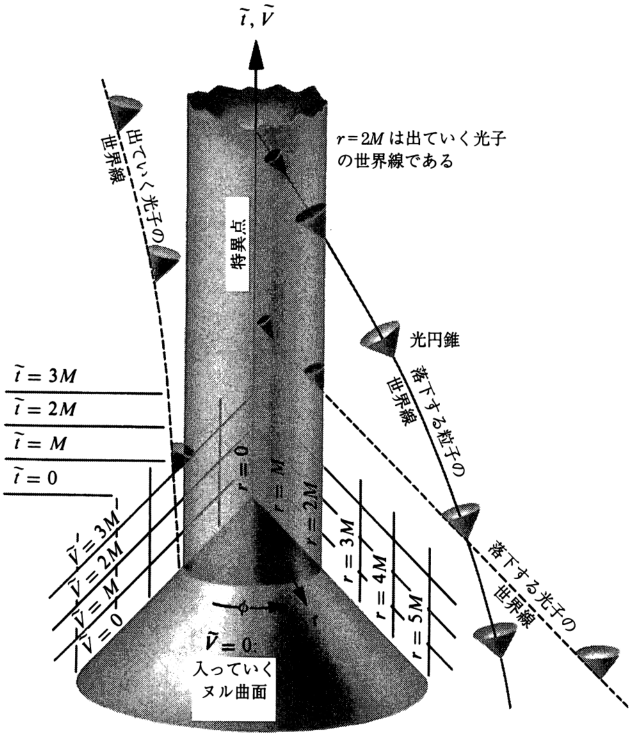
となる．半径方向の光円錐，$ds^2=0$ は，1 つの脚

$$d\tilde{V}/dr=0 \tag{3a}$$

および，別な脚

$$\frac{d\tilde{V}}{dr}=\frac{2}{1-2M/r} \tag{3b}$$

をもつ．これ，そしてこれのみから，図のすべての特徴を推測できる．



入っていく Eddington–Finkelstein 座標（1 個の回転自由度は削除されている．すなわち，θ は $\pi/2$ に等しく置かれている）．一定の $\tilde{V}$ の曲面は，入っていくヌル曲面であるが，ちょうど平坦な時空内にあるように，45 度の傾斜で描かれている．同等のことであるが，一定の

$$\tilde{t}\equiv\tilde{V}-r=t+2M\ln|r/2M-1|$$

の面は水平面として描かれている．

出ていく Eddington–Finkelstein 座標— r および $\tilde{U}$ を，r および t の代わりに座標として採用する

Schwarzschild の計量は

$$ds^2=-(1-2M/r)d\tilde{U}^2-2\,d\tilde{U}dr+r^2d\Omega^2 \tag{4}$$

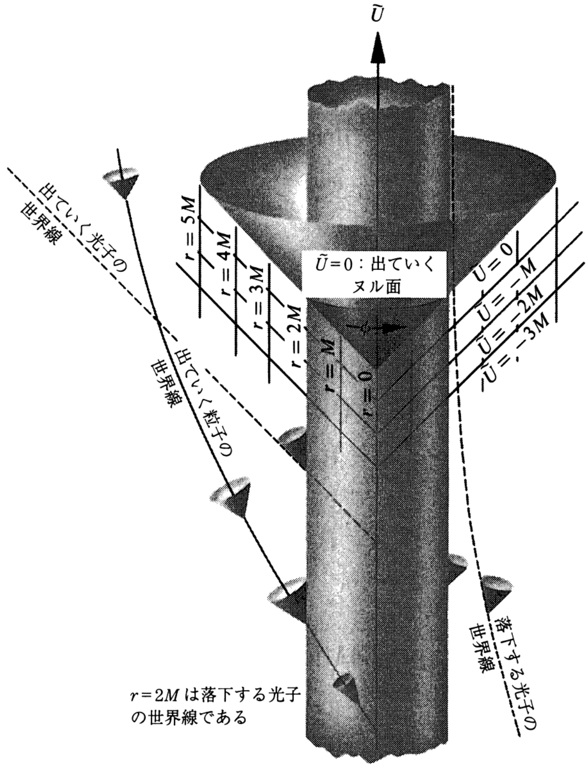
となる．半径方向の光円錐，$ds^2=0$ は，1 つの脚

$$d\tilde{U}/dr=0 \tag{5a}$$

および，別な脚

$$\frac{d\tilde{U}}{dr} = -\frac{2}{1-2M/r} \tag{5b}$$

をもつ．これ，そしてこれのみから，図のすべての特徴を推測できる．



出ていく Eddington–Finkelstein 座標（1 つの回転の自由度は削除されている）．（一定の $\tilde{U}$ の曲面は，出ていくヌル曲面であるが，ちょうど平坦な時空内にあるように，45 度の傾斜で描かれている．）

Eddington–Finkelstein 座標系はともに，Schwarzschild 座標系よりも重力半径でよりよい振る舞いをする．しかしそれらは**完全**によい振る舞いをするわけでないことに注意せよ．出ていく座標 $(\tilde{U}, r, \theta, \phi)$ は異常でない方法で $r = 0$ から $r = 2M$ を通って外部への粒子の放出を記述する．しかし $r = 2M$ を通っての落下の記述は，Schwarzschild 座標 (図 31.1) によって与えられる記述と同じ異常性をもつ．同様に，入っていく座標 $(\tilde{V}, r, \theta, \phi)$ は $r = 2M$ を通っての粒子の落下をよく記述する．しかし出ていく軌道の異常な記述を与える．さらに，2 つの図を比べると，パラドックスにみえる．一方では，重力半径は出ていく光子の世界線からつくられ，他方では，重力半径は入っていく光子の世界線からつくられる！ パラドックスを解くには，別なよい振る舞いをする座標系を求めなければならない［しかし**注意せよ**．入っていく Eddington–Finkelstein 座標は落下を非常によく記述するから，この座標は重力崩壊 (32 章) およびブラックホール (33 章および 34 章) の議論で広く用いられる］．

B. Eddington–Finkelstein から Kruskal–Szekeres への推移

おそらく完全によい振る舞いをする座標系は，r を考察から落とし，$\tilde{U}, \tilde{V}$ を半径–時間平面内における 2 つの座標として用いることによって得られるだろう．生ずる座標系は Schwarzschild 座標に

$$\tilde{V} - \tilde{U} = 2r^* \tag{6a}$$

$$\tilde{V} + \tilde{U} = 2t \tag{6b}$$

によって［式 (1) をみよ］関係している．そして新しい座標による線要素は

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)d\tilde{U}d\tilde{V} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{7}$$

になる．希望に反して，この座標系は $r = 2M$ で異常である．

構成についての 2 番目の思索は困難を明らかにする．構成に用いられる面 $\tilde{U}$=一定（出ていくヌル面）は，面 $\tilde{V}$=一定（入っていくヌル面）と同じく，幾何学的によく定義されているが，しかしそれらをラベルする方法はよく定義されていない．任意の再ラベル，$\bar{u} = F(\tilde{U})$ および $\bar{v} = G(\tilde{V})$ は面を物理学的に不変にとどめるだろう．必要とするものは線要素 (7) における特異的な，因子 $1 - 2M/r$ を除く再ラベルである．成功した再ラベルは式

$$\exp[(\tilde{V} - \tilde{U})/4M] = \exp(r^*/2M) = (r/2M - 1)\exp(r/2M) \tag{8}$$

によって提案される．それは式 (6a) および (1c) から出る．この関係で速やかに試みてみると，再ラベル

$$\tilde{u} \equiv -e^{-\tilde{U}/4M} = -(r/2M - 1)^{1/2}e^{r/4M}e^{-t/4M} \tag{9a}$$

$$\tilde{v} \equiv e^{+\tilde{V}/4M} = (r/2M - 1)^{1/2}e^{r/4M}e^{t/4M} \tag{9b}$$

は不快な $1 - 2M/r$ を計量係数から取り除くだろうことを明らかにする．これらの新しい座標によって，線要素は

$$ds^2 = -(32M^3/r)e^{-r/2M}d\tilde{v}\,d\tilde{u} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{10a}$$

になる．ここに r は依然 $4\pi r^2 =$ 表面積 によって定義される．しかしそれは $\tilde{v}$ および $\tilde{u}$ の関数とみなされなければならない．

$$(r/2M - 1)e^{r/2M} = -\tilde{u}\tilde{v} \tag{10b}$$

この式は r を積 $\tilde{u}\tilde{v}$ によって一義的に定める［Misner（1969a）における詳細］ことを容易に確かめることができる（$r > 0$ を思い出せ!）．

入っていくそして出ていくヌル面をラベルする座標，$\tilde{u}, \tilde{v}$ はヌル座標である．すな

わち，

$$\partial/\partial\tilde{u}\cdot\partial/\partial\tilde{u} = g_{\tilde{u}\tilde{u}} = 0, \qquad \partial/\partial\tilde{v}\cdot\partial/\partial\tilde{v} = g_{\tilde{v}\tilde{v}} = 0$$

[式 (10a) をみよ]．もしヌル座標で仕事をすることに慣れていないならば，$\tilde{u}$ および $\tilde{v}$ を

$$u \equiv \frac{1}{2}(\tilde{v}-\tilde{u}) = (r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\cosh(t/4M) \tag{11a}$$

$$v \equiv \frac{1}{2}(\tilde{v}+\tilde{u}) = (r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\sinh(t/4M) \tag{11b}$$

によって定義される空間的なおよび時間的な座標，u および v（Kruskal–Szekeres 座標！）によって置き換えるのが有用である．したがって

$$dv^2 - du^2 = d\tilde{v}\,d\tilde{u} \tag{12}$$

これらの座標によって，線要素は Kruskal 形式 (31.14) をもつ，それは重力半径で完全によい振る舞いをする．

Kruskal–Szekeres 線要素は $r = 2M$ でよい振る舞いをするが，Schwarzschild から Kruskal–Szekeres への変換 (11) はよい振る舞いをしない．$r > 2M$ から $r < 2M$ へ動くときそれは意味をなさない（u および v は "虚数" である）．もちろん，これは Schwarzschild 座標の病状の表れである．思考錯誤によって，$r < 2M$ で式 (11) を置き換えるべく，Schwarzschild から Kruskal–Szekeres 座標に通ずる新しい変換

$$u = (1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\sinh(t/4M) \tag{11c}$$

$$v = (1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\cosh(t/4M) \tag{11d}$$

が容易に見出される．

---

* このコラムは Misner（1969a）に基づいている．

31.5 Kruskal–Szekeres 座標と Schwarzschild 座標の関係

*15 Kruskal–Szekeres 座標系では，特異点 $r = 0$ は $v^2 - u^2 = 1$ に位置している．こうして実際には 1 つでなく **2** つの特異点が存在する．両者は

$$v = +(1+u^2)^{1/2} \text{ および } v = -(1+u^2)^{1/2} \text{ は } r = 0 \text{ に対応する！} \tag{31.15}$$

これは Kruskal–Szekeres 線要素 (31.14) に隠されている唯一の驚きでない．$r \gg 2M$（重力半径のはるか外部の時空領域）は $u^2 \gg v^2$ によって与えられることにも注意せよ．こう

*15 Kruskal–Szekeres 座標は，Schwarzschild 時空は 2 つの "$r = 0$ 特異点" および 2 つの "$r \to \infty$ 外部領域" をもつことを表す

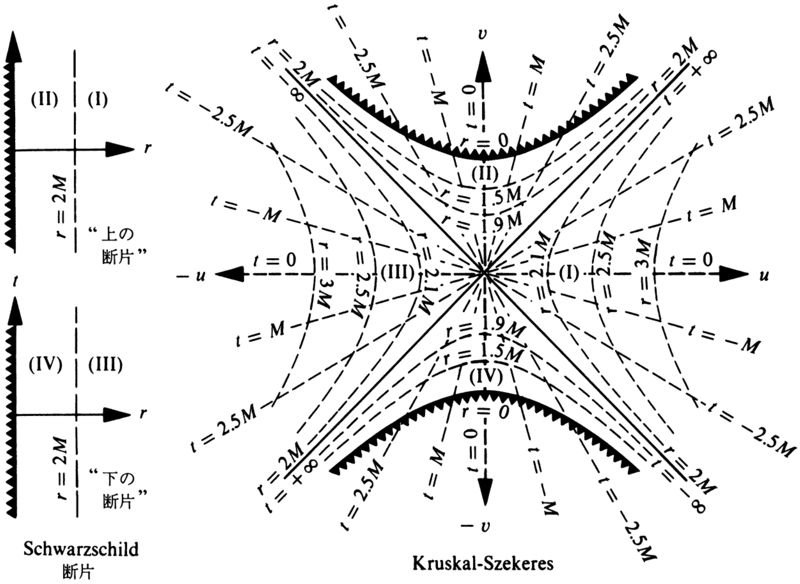


図 31.3　Schwarzschild 座標と Kruskal–Szekeres 座標間の Schwarzschild 真空幾何学の変換．2 個の Schwarzschild 座標の断片 I, II, および III,IV（図 31.5, a の上の部分と下の部分に例示されている）は完全な Schwarzschild 幾何学を覆うべく要求される．一方，1 個の Kruskal–Szekeres 座標系はこれだけで十分である．Schwarzschild 幾何学は 4 個の領域 I, II, III, IV からなる．領域 I および III は 2 個の，異なるがしかし同等の，漸近的に平坦な宇宙を表す．そこでは $r > 2M$ である．一方領域 II および IV は 2 個の，同一であるがしかし時間反転された領域である．そこでは物理学の特異点 ($r = 0$) が展開する．Schwarzschild 座標系と Kruskal–Szekeres 座標系を互いに関係づける変換法則が式 (31.17) および (31.18) によって与えられている．Kruskal–Szekeres u, v–平面内で，一定の r の曲線は漸近線 $u = \pm v$ をもつ双曲線である，一方一定の t の曲線は原点を通る直線である．

して実際には **2** つの外部領域*が存在する．両者は

$$u \gg +|v| \text{ および } u \ll -|v| \text{ は } r \gg 2M \text{ に対応する！} \tag{31.16}$$

いかにしてこれが可能でありうるか？　幾何学が Schwarzschild 座標で図にされるときは，図は 1 つの特異点と 1 つの外部領域を含んでいる．しかし Kruskal–Szekeres 座標で表されるときには，図はおのおのを 2 つ示す．答えは Schwarzschild 座標は時空多様体の部分のみを覆うということでなければならない．それらはただ完全な多様体上の局所的な座標断片でなければならない．何とかして，Kruskal–Szekeres 座標に通ずる座標変換によって，計量に対する制限された Schwarzschild 解を解析的に延長して，多様体のすべて（あるいはほとんどすべて）を覆わなければならない．

この覆いをより明白に理解するために，Kruskal–Szekeres 座標から Schwarzschild 座標へ逆変換する（図 31.3 をみよ）．変換方程式は，式 (31.13) に書き下ろされているように Kruskal 座標の象限 $u > |v|$ ［式 (31.13a)］ および $v > |u|$ ［式 (31.13b)］ に対してのみ成立した．これらの象限を数字 I および II によって記せ．そして他の象限を III および IV（図 31.3 をみよ）によって記せ．別な象限でも，また Kruskal–Szekeres 線要素 (31.14)

* Schwarzschild 幾何学の大域的な構造は，2 つの特異点および 2 つの外部領域の存在を含めて，Synge (1950) によって初めて発見された．コラム 31.1 をみよ．

を Schwarzschild 線要素 (31.1) に変換することができるが，しかしわずかに異なる変換方程式が必要とされる．下の変換の組がうまくいくことは容易に確かめられる．

*16

$$(\mathrm{I})\begin{cases} u=(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\cosh(t/4M) \\ v=(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\sinh(t/4M) \end{cases} \tag{31.17a}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases} u=(1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\sinh(t/4M) \\ v=(1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\cosh(t/4M) \end{cases} \tag{31.17b}$$

$$(\mathrm{III})\begin{cases} u=-(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\cosh(t/4M) \\ v=-(r/2M-1)^{1/2}e^{r/4M}\sinh(t/4M) \end{cases} \tag{31.17c}$$

$$(\mathrm{IV})\begin{cases} u=-(1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\sinh(t/4M) \\ v=-(1-r/2M)^{1/2}e^{r/4M}\cosh(t/4M) \end{cases} \tag{31.17d}$$

逆変換は

$$(r/2M-1)e^{r/2M}=u^2-v^2 \quad (\text{I, II, III, IV において}) \tag{31.18a}$$

$$t=\begin{cases} 4M\tanh^{-1}(v/u) & (\text{I および III において}) \\ 4M\tanh^{-1}(u/v) & (\text{II および IV において}) \end{cases} \tag{31.18b}$$

である．

*17 これらの座標変換は図 31.3 にグラフで示されている．2 つの Schwarzschild 座標断片，I, II, および III, IV は全 Schwarzschild 幾何学を覆うために要求される．しかしただ 1 つの Kruskal 座標系で十分である．Schwarzschild 断片 I, II, は 2 つの領域，すなわち重力半径の外部 ($r > 2M$) にある領域 I, および重力半径の内部 ($r < 2M$) にある領域 II に分けられる．同様に，Schwarzschild 断片 III, IV は外部領域 (III) および内部領域 (IV) からなる．

式 (31.18) は，一定の r の領域（一定の表面積）は Kruskal–Szekeres 図では漸近線 $u=\pm v$ をもつ双曲面であり，そして一定の t の領域は原点を通る直線であることを表す．

*18 完全な Schwarzschild 幾何学の半径方向の測地線のいくつかが，図 31.4 における Kruskal–Szekeres 座標系で描かれている．測地線の曲線は Kruskal–Szekeres 座標系において，Schwarzschild 座標系におけるよりもはるかに理にかなってみえることに注意せよ．また**半径方向の，光的な測地線（半径方向の光線の経路）は Kruskal–Szekeres 座標系における 45 度線であること**に注意せよ．これは Kruskal–Szekeres 線要素 (31.14) からみられうる，式 (31.14) に対しては $du=\pm dv$ は $ds=0$ を保証する．この 45 度の性質のゆえに，Kruskal–Szekeres 図における半径方向の光円錐は特殊相対論の時空図におけるのと同じ形をもっている．“一般に上方を” 指し示す（すなわち，垂直な v 軸と 45 度よりも小さい角度をつくる）任意の半径方向の曲線は時間的である．そして “一般に外部

*16 Schwarzschild 座標と Kruskal–Szekeres 座標間の変換
*17 2 つの Schwarzschild 座標断片は時空のすべてを覆うために要求される
*18 Kruskal–Szekeres 座標系の性質

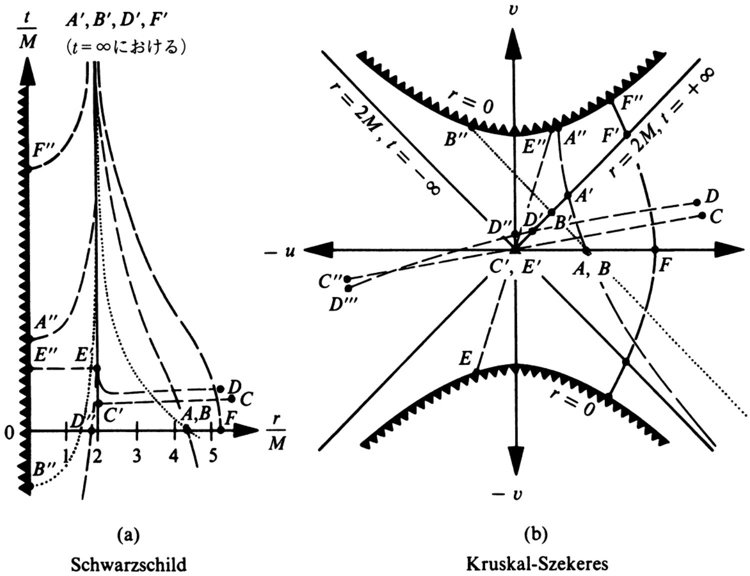


図 31.4　(a) Schwarzschild 座標系でみられたときの，Schwarzschild 幾何学の代表的な半径方向の時間的な (A, E, F)，光的な (B)，および空間的な (C, D) 測地線（概略図のみ）．これは図 31.1 の再現である．
(b) Kruskal–Szekeres 座標系でみられたときの，そして無限大の長さまで，あるいは $r = 0$ での無限大の曲率をもつ特異点までのいずれかに拡張されたときの同じ測地線（概略図のみ）．

方向を"指し示す曲線は空間的である．この性質は Kruskal–Szekeres 図が時空内の 1 つの事象と別な事象間の因果関係を容易に示すことを可能にする（練習問題 31.2 から 31.4 までをみよ）．

[練習問題]

31.2　非半径方向の光円錐

非半径方向に進む光子の世界線は，Kruskal–Szekeres 座標図の垂直な v 軸と 45 度より小さい角度をつくることを示せ．これから，非半径方向にあるいは半径方向に進む，有限の静止質量をもつ粒子は，"一般に上方に"（垂直な v 軸と 45 度より小さい角度）つねに動かなければならないことを推論せよ．

31.3　最後の審判

Kruskal 図を用いて以下のことを示せ．

(a) もし人間が重力半径 $r = 2M$ を通って落下するならば，彼は $r = 0$ での特異点に衝突する（そして殺される）のを避ける方法は何も存在しない．

(b) ひとたび人間が $r = 2M$ を通って内部へ落下したならば，彼が $r > 2M$ での友人に通信を送りうる方法は何も存在しない．しかし彼は友人から通信を受け取る（たとえば，電波あるいはレーザービーム，あるいは落下する"小包"によって）ことはつねにできる．

31.4 どれほど長く生きるか?

内方へ落下している人間がひとたび重力半径に達すると，引き続いて彼が何をしようとも（どの方向に，いかに長く，そしていかに激しく彼のロケットエンジンを発進させようと）彼は

$$\tau < \tau_{最大} = \pi M = 1.54\times 10^{-5}(M/M_{\odot})\ 秒 \tag{31.19}$$

の固有時間内に特異点に引っ張られ，そして殺されるだろうということを示せ［ヒント：もっとも長い固有時間の経過の軌道は測地線でなければならない．25 章の数学的な道具を用いて $r = 2M$ と $r = 0$ 間のもっとも長い固有時間の経過の測地線は $r_{最大} = 2M$ をもつ半径方向の測地線 (31.10a) であり，それに対して時間経過は πM であることを示せ]．

31.5 Eddington–Finkelstein と Kruskal–Szekeres が比較される

座標図を用いてコラム 31.2 の入っていくおよび出ていく Eddington–Finkelstein 座標を Kruskal–Szekeres 座標と比較せよ．それに合わせて図 31.3 および 31.4 における Schwarzschild と Kruskal–Szekeres 間の比較をつくれ．

31.6 別な座標系

コラム 31.2 の $\tilde{U}, \tilde{V}, \theta, \phi$ 座標系［式 (6) および (7)］に対する座標図を構成せよ．このような特徴を（1）Schwarzschild への関係および Kruskal–Szekeres 座標への関係，（2）$r = 2M$ の位置，（3）半径方向の測地線として示せ．

31.6 Schwarzschild 幾何学の力学

Schwarzschild 幾何学はどのようにみえるか？ この質問は平衡状態にある星（23.8 節，図 23.1，およびコラム 23.2 の終わり），および正と負の空間曲率［式 (27.23)，(27.24) およびコラム 27.2］の Friedmann 宇宙に対するはめ込み図に類似したはめ込み図を描くことによってもっとも容易に答えられる．

まず，$u = +\infty(r = \infty)$ から $u = 0(r = 2M)$ へ，それから $u = -\infty(r = \infty)$ へ延びる空間的な超曲面 $v = 0$ の幾何学を吟味せよ．Schwarzschild 座標でこの面は一定時間，$t = 0$ の薄片［式 (31.18b) をみよ］である．それは正確にはめ込み図が式 (23.34b) で計算された面である．はめ込まれた面は，回転の 1 自由度が削除されると，計量

$$d\sigma^2 = d\bar{r}^2 + d\bar{z}^2 + \bar{r}^2\, d\bar{\phi}^2 \tag{31.20}$$

をもつ平坦な Euclid 的な空間における回転放物面

$$\bar{r} = 2M + \bar{z}^2/8M \tag{31.21}$$

によって記述される（図 31.5 をみよ）．

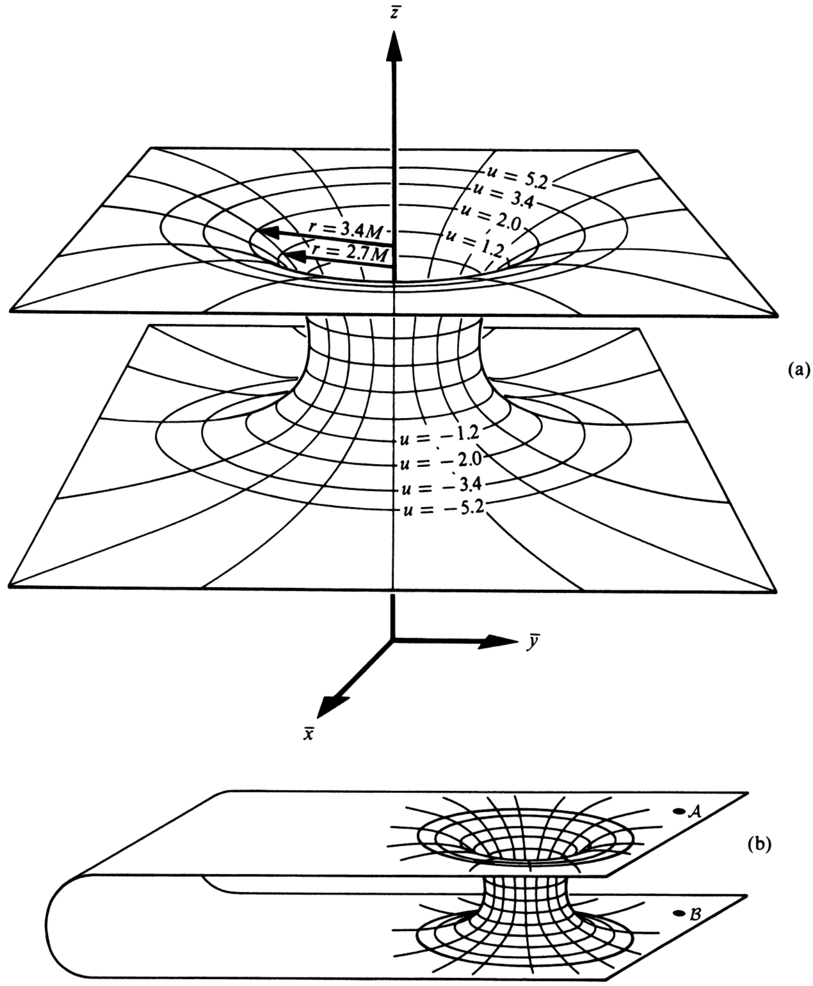


図 31.5　(a) $t = v = 0$ の "時間の瞬間" の Schwarzschild の空間幾何学．1 個の回転の自由度が削除されている ($\theta = \pi/2$)．その回転の自由度を取り戻し完全な Schwarzschild 3–幾何学を得るためには，心の中で一定の $\bar{r} = (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{1/2}$ の円を表面積 $4\pi\bar{r}^2$ の球面で置き換える．生ずる 3–幾何学は，両方向（両 "宇宙"）への橋の喉からはるかに離れたところで平坦（Euclid 的）になることに注意せよ．
(b) "時間" $t = v = 0$ での Schwarzschild の空間幾何学のはめ込み．それは幾何学的にははめ込み (a) に同一であるが，しかしトポロジー的には異なる．Einstein の場の方程式は時空の局所幾何学を固定するが，そのトポロジーを固定しない．コラム 27.2 の終わりにおける議論をみよ．ここでは Schwarzschild の "ワームホール" が 1 個の，漸近的に平坦な宇宙の 2 個の離れた領域を結びつける．トポロジーのこの選択に関係する因果律の問題の議論に対しては，Fuller and Wheeler (1962) をみよ．

*19　図 31.5(a) のはめ込み図から，空間的な超曲面 $t =$ 一定上のSchwarzschild 幾何学は 2 つの別個の，しかし同じ，漸近的に平坦な宇宙をつなぐ橋あるいは "ワームホール (wormhole)" からなることに注意せよ．この橋はあるときは "Einstein–Rosen 橋" そしてあるときは "Schwarzschild の喉" あるいは "Schwarzschild ワームホール" とよばれる．もし望むならば，Schwarzschild の喉から遠く離れた領域で 2 つの漸近的に平坦な宇宙をともにつな

*19　3–面 $v = t = 0$ は 2 つの漸近的に平坦な宇宙あるいは 1 つの宇宙の 2 つの異なる領域をつなぐ "ワームホール" である

ぐことによって Schwarzschild 幾何学のトポロジーを変えることができる [Fuller and Wheeler (1962)，図 31.5(b)]．そうするとただ 1 つの独特な宇宙は，多重連結になる，Schwarzschild の喉は点 $\mathcal{A}$ から点 $\mathcal{B}$ への 1 つの空間的な経路を与え，Einstein–Rosen の宇宙とは別なほとんど平坦な宇宙を与える．具体的には，Wheeler の多重連結なただ 1 つの宇宙によってでなく，むしろ図 31.5(a) の Einstein–Rosen の 2 種類の宇宙によって，Schwarzschild 幾何学の解釈に注意を集中せよ．

*20 Schwarzschild 幾何学は静的であると考えるのに通常慣れている．しかし，Schwarzschild 幾何学を不変にとどめる静的な "時間変換" $t \to t + \Delta t$ は Schwarzschild 幾何学の領域 I および III においてのみ，言葉の厳密な意味において時間変換である．領域 II および IV においては，$t \to t + \Delta t$ は空間的な運動であり，時間的な運動でない（図 31.3 をみよ）．したがって図 31.5(a) の曲面 $t =$ 一定 のような空間的な超曲面は，領域 I から $u = v = 0$ を通って領域 III に延び，静的でない．この空間的な超曲面は時間について前方に（Kruskal 図の $+v$ 方向に）押しやられるから，この超曲面は領域 II に入る．そしてその幾何学は変化し始める．

Schwarzschild 幾何学の時間発展を吟味するためには，はめ込み図の列を必要とする．おのおのは，先立つ超曲面の未来への空間的な超曲面の幾何学に対応する．しかし超曲面はいかに選ばれるべきか？ Newton 理論あるいは特殊相対論では，一定時間の超曲面を選ぶ．しかし曲がった時空の力学的な領域では，自然に選ばれた時間座標は存在しない．この事情は，超曲面の全体として**任意の**選択によって幾何学の時間発展が思い描かれ，そしてその選択はどれほど任意であったかを思い出させる．

*21 図 31.6 は Schwarzschild 幾何学の時間発展を表現するために 2 つの非常に異なる超曲面を用いる（依然として別な選択が図 21.4 に示されている）．発展する橋の明白な幾何学は空間的な超曲面の任意の選択に依存する．しかし発展の定性的な性質は超曲面の選択によらないということに注意せよ．定性的に述べれば，2 つの漸近的に平坦な宇宙は分離し始め，おのおのの宇宙は無限大の曲率の特異点 ($r = 0$) を含む．2 つの宇宙が時間発展するにつれて，それらの特異点は互いに一致し異常でない橋をつくる．橋は $r = 2M$（$4\pi M$ の最大の円周，$16\pi M^2$ の最大の表面積）の喉で最大の半径に達するまで増大する．それから収縮し細くなり，2 つの宇宙を分離されたまま残し特異点 ($r = 0$) を再び含む．橋の形成，膨
*22 張，そして崩壊は非常に早く起こるので，粒子あるいは光線は 1 つの宇宙の遠く離れた領域から別な宇宙の遠く離れた領域へ喉が細くなるときにとらえられ，喉で粉砕されることなしに橋を通り過ぎることができない（これを確かめるには，図 31.3 の Kruskal–Szekeres 図を吟味せよ．そこでは半径方向の光線は 45 度線に沿って動く）．

*23 Kruskal–Szekeres 図と半径方向の光線の 45 度線の性質から，時空の領域 IV に存在したことのあるどの粒子も先の特異点で "創造" されたに違いない．そして領域 II に落下す

*20 Schwarzschild 幾何学は領域 $r < 2M$ で力学的である
*21 ワームホールの時間発展：創造，膨張，再収縮，および圧迫
*22 ワームホールを通しての連絡は不可能である．ワームホールはあまりにも早く細くなる
*23 特異点についての創造と崩壊

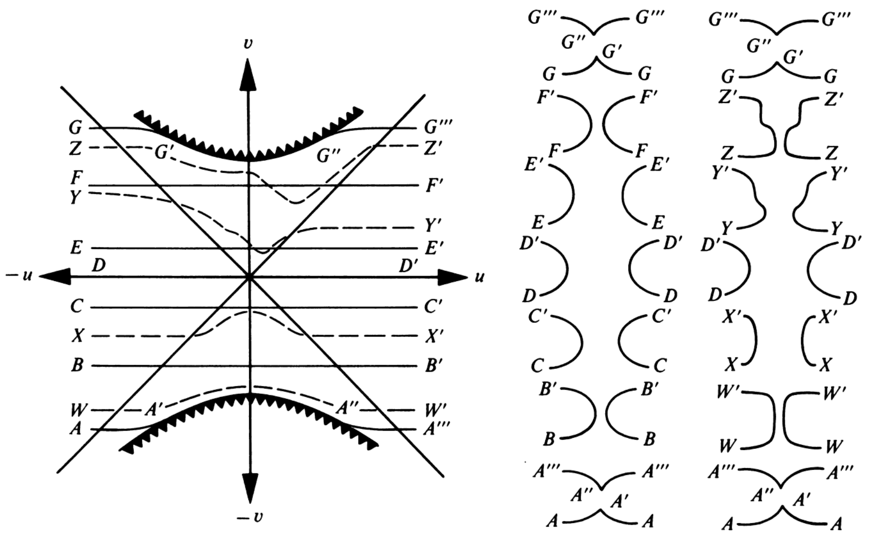


図 31.6　真空の Schwarzschild 幾何学の Einstein–Rosen 橋の力学的な発展（概略図）．ここには橋の発展をみる 2 個の異なる方法に対応するはめ込み図の 2 個の筋道—履歴 A–B–C–D–E–F–G，および履歴 A–W–X–D–Y–Z–G が示されている．はめ込み図は概略化されていて，おのおのの図は図 31.5(a) に類似の 2 次元面になるために適当な垂直軸の周りに回転されなければならない［超曲面のはめ込み図が与えられており，それらの超曲面は接線方向にのみ特異点に交わるべく与えられている．u, v–平面内で有限の角度で特異点に交わる超曲面は示されていない．なぜならそれらは Euclid 空間にはめ込むことができないからである．代わりに，少なくとも $r = 0$ の近くでは，Minkowski 空間（未定の計量）が用いられなければならない．Minkowski 空間内でのはめ込みの例に対しては，式 (27.23) と (27.24) およびコラム 27.2C における一定の負の空間曲率をもつ宇宙の議論をみよ］．図 21.4 は Schwarzschild 幾何学における別な空間的薄片に対するはめ込み図を示す．

るどの粒子も後の特異点で崩壊されるべく運命づけられる．重力半径の外で $(r > 2M)$，漸近的に平坦な宇宙 I あるいは III の 1 つに永久に滞在する粒子のみが，永久に特異点から安全である．

*24　$r = 0$ での特異点あるいは Schwarzschild の幾何学の “二重宇宙” の性質によって邪魔される若干の研究者は，そのトポロジーの修正を提案した．1 つの提案は先の特異点と後の特異点が互いに同一視され，領域 II の特異点に落下する粒子は破壊されずに，領域 IV の特異点から吐き出され，突然再出現するだろうということである．この観点への反論を誇張できない: 領域 $r = 0$ は無限大の潮汐重力と無限大の Riemann 曲率の物理学的な特異点である．その特異点に落下する任意の粒子はこれらの力によって破壊されなければならない．Einstein の場の方程式を用いて特異点を通って粒子の運命を外挿するどのような試みも失敗しなければならない．方程式は無限大の曲率に直面して予言力を失う．したがって，粒子が先の特異点から再出現すると仮定することは特別な数学的規則，物理学に関係のない規則をつくることである．しかしわずかな者が真実であると信ずるように，有限の質量をもつ任意の物体は $r = 0$ に近づくにつれて特異性の幾何学を，特異点を通過し再出現できるほどまでに，修正するだろうことは考えられる．しかし，このような思索が正し

*24　Schwarzschild の時空のトポロジーを修正するための実行不可能な提案

いかどうかは特別な規則によるのでなく，一般相対論の枠組内で具体的な，難しい計算によって答えられなければならない（34 章をみよ）.

Schwarzschild 幾何学のトポロジーを修正するための 2 番目の提案は次のことである. Kruskal–Szekeres 座標系において各点 (v, u, θ, ϕ) を反対の点 $(-v, -u, \theta, \phi)$ と同一視することによって，2 つの異なる漸近的に平坦な宇宙の存在を避けるべきである．この提案への 2 つの反対は，(1) それは $(v, u) = (0, 0)$ で，すなわち，最大膨張の瞬間に橋のくびれで，一種の "円錐状の" 特異点を生み出す（局所 Lorentz 系が存在しない），そして (2) 人間が時間について逆方向へ進むと自分と会うことができるという，因果律の破れに通ずる.

読者が Schwarzschild 幾何学の基礎的な特徴と精通する 1 つの良い方法は 31.1–31.4 節を注意深く再読して，そこに述べられているすべてのことを Kruskal–Szekeres 図によって再解釈することである.

[**練習問題**]

31.7 等方座標における Schwarzschild 計量

(a) 練習問題 23.1 の等方座標で書き直すと，Schwarzschild 計量は

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - M/2\bar{r}}{1 + M/2\bar{r}}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^4 [d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \qquad (31.22)$$

となることを示せ．そして 2 つの半径方向の座標間の変換

$$r = \bar{r}(1 + M/2\bar{r})^2 \qquad (31.23)$$

を導け.

(b) 時空のどの領域（I, II, III, IV，図 31.3 をみよ）が等方座標断片によって覆われるか，そしてどの領域が覆われないか？

(c) 空間的な超曲面 $t = 0$，$0 < \bar{r} < \infty$ に対するはめ込み図を計算し，そして構成せよ.

(d) $\bar{r} = 0$ 近くの領域を $\bar{r} = \infty$ 近くの領域と交換し，計量係数を元の形にとどめる座標変換を見出せ.

31.8 Reissner–Nordstrøm 幾何学

(a) 球対称で，静的な重力場に対する Einstein の場の方程式

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)}\, dt^2 + e^{2\Lambda(r)}\, dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

を，物質が存在せずに，しかし静的な直交系

$$\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} = e^{\phi}\, \boldsymbol{d}t, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{r}} = e^{\Lambda}\, \boldsymbol{d}r, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} = r\, \boldsymbol{d}\theta, \quad \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} = r \sin\theta\, \boldsymbol{d}\phi$$

で半径方向の電場 $\boldsymbol{B} = 0$, $\boldsymbol{E} = f(r)\boldsymbol{e}_{\hat{r}}$ がある場合に対して解け．Einstein の場の方程式における源として電場のストレス–エネルギーを用いよ［**答え**：

$$\boldsymbol{E} = (Q/r^2)\boldsymbol{e}_{\hat{r}} \tag{31.24a}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2) \tag{31.24b}$$

これは “Reissner（1916）–Nordstrøm（1918）計量” とよばれる].

(b) 定数 Q は, Gauss 的な束積分を用いた, あるいは質量に対する電荷の比 $e/\mu \gg Q/M$ をもつ試験電荷の Coulomb 力の支配する軌道を研究する遠く離れた観測者（$r \gg 2M$ および $r \gg Q$）によって測定されたときの全電荷であることを示せ．質量に対する電荷の比は，次元をもたない単位で，電子に対して何であるか？　定数 M は電気的に中性の粒子の Kepler 的な軌道を用いて遠く離れた観測者によって測定されたときの全質量であることを示せ．

(c) $Q > M$ に対しては，Reissner–Nordstrøm 座標系は，$r = \infty$ から物理学的な特異点および無限大の潮汐力が存在する，$r = 0$ までよい振る舞いをすることを示せ．

(d) $Q < M$ に対する時空幾何学の性質を，本章の技術（座標変換，Kruskal のような座標，粒子の軌道の研究，はめ込み図，等）を用いて，探求せよ．
[解：Graves and Brill（1960）をみよ，また本書の図 34.4 をみよ．]

(e) 同様に $Q = M$ に対する時空幾何学を探求せよ．[解：Carter（1966b）をみよ．]

(f) 質量に対する電荷の比が大きい場合に対して [(c) におけるように $Q > M$]，$r = 0$ の近くの領域は物理学的でないことを示せ．より明確に，境界外に場 (31.24) を生ずる電荷を帯びた圧縮された物質の任意の球対称の分布は $r < r_0 = Q^2/2M$ に対してこれらの場を修正しなければならないことを示せ [ヒント：一方で，式 (31.24) から演繹された値に注意し，他方で，物質の分布内で適当な Einstein の方程式から，式 (23.18) および (23.22) で定義された量 $m(r)$ を研究せよ．同様な議論に対しては Misner（1969a）の図 26 をみよ]．

32章
重力崩壊

今，ここで，同じ場所にとどまるためには，全速力で走り続けなければならないことがわかる．もしどこか他の場所へ行くことを望むならば，その2倍速く走らなければならない．

赤の女王，"Through the Looking Glass（鏡の国のアリス）"

LEWIS CARROLL（1871）

32.1 Schwarzschild幾何学の重要性

前章で説明した話は異様であった！ それは無害にみえるSchwarzschildの線要素

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2) \tag{32.1}$$

で始まった．この線要素は元来静的な星の外部場として導かれた．もし星が存在しないならば何が起こるだろうかと尋ねてみた．すなわち，幾何学を生成する星が存在しないときにSchwarzschildの幾何学の性質を徹底的に調べた．それは $r = 0$ に静止している質点の幾何学であると期待しただろう．しかしそうではなかった．幾何学は2つの漸近的に平坦な宇宙を結ぶ"ワームホール"を表すことがわかった．さらに，ワームホールは力学的であった．ワームホールはおのおのの宇宙に1つ存在する，2つの"$r = 0$"の特異点の"結合"によってつくられた．ワームホールは $4\pi M$ の最大の円周まで膨張し，それから再収縮し圧縮されて，おのおのが自らの"$r = 0$"特異点をもった2つの宇宙へと再び引き離した．

*1 Einsteinの場の方程式への解として，この膨張し，再収縮しているワームホールは真摯に受け取られなければならない．それは厳密解である．そしてすべての厳密解の中でもっとも単純なものの一つである．しかしこのようなワームホールが実際の宇宙に存在するということを信ずる理由は少しも存在しない！ それらは膨張している宇宙が，$\sim 10 \times 10^9$ 年前，必要な初期条件で—"$r = 0$"のSchwarzschild特異点が準備されワームホールに向かって開花するのを待って，"生まれた"場合に限り存在しうる．このような異常な初期条件を信ずる理由はまったく存在しない！

そうすると，Schwarzschild幾何学を理解するために，それほど多くの時間と努力がなぜ31章で使われたか？ それは，(1) 重力が強くなるときに時空幾何学の高度に非Euclid的な特徴を明白に例示し，(2) 強い重力場を解析するために用いうる技術の多くを例示し，

*1 Schwarzschild幾何学の役割と重要性

(3) 適当に切断されたときに，それは，ワームホールと同じように，ブラックホールおよび崩壊している星の時空幾何学を説明するためである．

本章は重力崩壊における Schwarzschild 幾何学の役割を探求し，次章はブラックホール物理学におけるその役割を探求する．

32.2 Birkhoffの定理

*2 Schwarzschild 幾何学は重力崩壊に重要であることは **Birkhoff (1923)** の**定理**から出る．**時空の与えられた領域の幾何学が (1) 球対称である，そして (2) 真空における Einstein の場の方程式への解であるとする．そうするとその幾何学は必然的に Schwarzschild 幾何学の一片である．** 任意の電気的に中性な球状の星は，静的であろうと，振動していようと，崩壊していようと，Birkhoff の定理を満たす．したがって外部場は Schwarzschild 幾何学の一片でなければならない．

*3 Birkhoff の定理は物理学的な基礎に基づいて容易に理解される．重力崩壊に対して不安定であり，そしてすべての平衡状態にある形状 (23.6 節をみよ) のように，外部重力場として Schwarzschild 幾何学をもつ，平衡状態にある形状を考える．この平衡状態にある形状を球対称な方法で摂動すると，それは半径方向に崩壊し始める．摂動と続く崩壊は，厳密な球対称が維持される限り，外部の重力場に影響することができない．ちょうど Maxwell の法則が単極子の電磁波を禁止するように，Einstein の法則は単極子の重力波を禁止する．半径方向の崩壊の重力的な影響が外部へ伝播することは不可能である．

*4 Birkhoff の定理は容易に理解されるだけでなく，証明することもまたかなり容易である．時空の球状の領域を考える．球対称性のみが，コラム 23.3 の条件 (i)，(ii)，および (iii) が満たされることを保証し，こうして Schwarzschild 座標

$$\begin{gathered} ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \\ \Phi = \Phi(t,r) \qquad \text{および} \qquad \Lambda = \Lambda(t,r) \end{gathered} \tag{32.2}$$

を導入できることを保証するのに十分である [証明に対してはコラム 23.3 をみよ．そして (1) 一般性のために，$g_{tt} = -e^{2\Phi}$ および $g_{rr} = e^{2\Lambda}$ が正あるいは負 (符号について制限はない!) であることを許さなければならない，(2) "円周関数" r の勾配がゼロあるいはヌルであるような事象において，Schwarzschild 座標は導入されえないことに注意せよ．特別な場合 $(\boldsymbol{\nabla} r)^2 = 0$ は練習問題 32.1 で取り扱われている]．練習問題 14.16 に導かれている Einstein テンソルの正規直交系での成分を用いて，Einstein の真空の場の方程式に計量 (32.2) を課する．

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = r^{-2}(1 - e^{-2\Lambda}) + 2(\Lambda_{,r}/r)e^{-2\Lambda} = 0 \tag{32.3a}$$

$$G_{\hat{t}\hat{r}} = G_{\hat{r}\hat{t}} = 2(\Lambda_{,t}/r)e^{-(\Lambda+\Phi)} = 0 \tag{32.3b}$$

*2 Schwarzschild 幾何学の一義性：Birkhoff の定理
*3 Birkhoff の定理の基礎となる物理学
*4 Birkhoff の定理の証明

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = 2(\Phi_{,r}/r)e^{-2\Lambda} + r^{-2}(e^{-2\Lambda} - 1) = 0 \tag{32.3c}$$

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = +(\Phi_{,rr} + {\Phi_{,r}}^2 - \Phi_{,r}\Lambda_{,r} + \Phi_{,r}/r - \Lambda_{,r}/r)e^{-2\Lambda}$$
$$- (\Lambda_{,tt} + {\Lambda_{,t}}^2 - \Lambda_{,t}\Phi_{,t})e^{2\Phi} = 0 \tag{32.3d}$$

式 (32.3b) は Λ は r のみの関数であることを保証する．そして式 (32.3a) はそうすると Λ は Schwarzschild 計量に対するのと同じ形

$$\Lambda = -\frac{1}{2}\ln|1 - 2M/r| \tag{32.4a}$$

をもつことを保証する．式 (32.3c)，(32.3d) はそうすると $\Phi(t, r)$ に対する 2 つの同等な方程式となる—Bianchi の恒等式，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{G} = 0$ によって同等である—その解は

$$\Phi = \frac{1}{2}\ln|1 - 2M/r| + f(t) \tag{32.4b}$$

である．ここに f は任意の関数である．表現 (32.4) を線要素 (32.2) に入れる．それによって

$$ds^2 = -e^{2f(t)}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

を得る．それから時間座標を再定義する

$$t_{\text{新しい}} = \int e^{f(t)}dt$$

それによって線要素は Schwarzschild 形式となる．

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

結論：任意の物体を取り囲む時空が球対称をもち，そして電荷，質量，および重力以外のすべての場をもたないときは，計量が Schwarzschild の計量である座標を導入できる．座標に関係しない言葉で結論を言い直せば，時空の任意の球対称な真空領域の幾何学は，Schwarzschild 幾何学の一片である（Birkhoff の定理）．Q.E.D.

[**練習問題**]

32.1 Reissner–Nordstrøm 幾何学の一意性 ［トラック–2］

Birkhoff の定理の以下の一般化を証明せよ．時空の与えられた領域の幾何学は，(1) 球対称である，そして (2) 電磁場を源としてもつ Einstein の場の方程式への解である，とする．そうするとその幾何学は，必然的に標準的な静的な直交系で測定されたとき，電場および磁場

$$\boldsymbol{E} = (Q_e/r^2)\boldsymbol{e}_{\hat{r}}, \qquad \boldsymbol{B} = (Q_m/r^2)\boldsymbol{e}_{\hat{r}}, \qquad Q = ({Q_e}^2 + {Q_m}^2)^{1/2}$$

をもつ Reissner–Nordstrøm 幾何学 (31.24b) の一片である．［ヒント：(1) まず Birkhoff の定理に対して，本文と同じ方法を用いて，$(\boldsymbol{\nabla}r)^2 \neq 0$ である時空の領域を考える．結果は Reissner–Nordstrøm 解である．(2) $(\boldsymbol{\nabla}r)^2 = 0$（たとえば，Schwarzschild の半径）である 4 より小さい次元の任意の領域は，$(\boldsymbol{\nabla}r)^2 \neq 0$ をもつ 4 次元の領域間のつなぎ目として取り扱われうる．さらに，このような領域の幾何学は，結合する 4 次元の領域の幾何学（“接合条件”，21.13 節）によって一義的に定められる．結合する領域は必然的に Reissner–Nordstrøm である（段階 1）から，したがってこのような “サンドイッチされた” 領域である．(3) 次に $\boldsymbol{\nabla}r = \boldsymbol{d}r$ はヌルであり，ゼロでないような 4 次元の領域を考える．このような領域では

$$ds^2 = -2\Psi dr\, dt + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

をもつ座標系が存在する．ここに $\Psi = \Psi(r, t)$ である．さらにこの線要素に対して Ricci テンソルは，直交化された成分

$$R_{\hat\theta\hat\theta} = 1/r^2$$

をもつことを示せ．ただし球対称な電磁場に対するストレス–エネルギーテンソルは

$$8\pi T_{\hat\theta\hat\theta} = 8\pi\left(T_{\hat\theta\hat\theta} - \frac{1}{2}g_{\hat\theta\hat\theta}T\right) = Q^2/r^4 \qquad (Q = \text{一定})$$

をもつ．これらの量，$R_{\hat\theta\hat\theta}$ および $8\pi T_{\hat\theta\hat\theta}$ は，等しくなければならない（Einstein の場の方程式）が，しかしそれらの異なる r 依存性のゆえに等しくなりえない．こうして，電磁場は $\boldsymbol{d}r \neq 0$，$\boldsymbol{d}r \cdot \boldsymbol{d}r = 0$ の領域を生成できない．(4) 最後に，$\boldsymbol{d}r = 0$ である 4 次元の領域を考える．r の一定値を a によって記せ．そして任意の事象は，

$$ds^2 = a^2(-d\tilde\tau^2 + e^{2\lambda}dz^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2),$$

$$\lambda = \lambda(\tilde\tau, z), \qquad \lambda(\tilde\tau = 0, z) = 0, \qquad \dot\lambda(\tilde\tau = 0, z) = 0$$

をもつ局所的によい振る舞いをする座標系の原点として選ばれうることを示せ［Novikov 型座標系，31.4 節をみよ］．関連している直交系で，球対称性は

$$\boldsymbol{E} = (Q_e/a^2)\boldsymbol{e}_{\hat z}, \qquad \boldsymbol{B} = (Q_m/a^2)\boldsymbol{e}_{\hat z}, \qquad Q \equiv ({Q_e}^2 + {Q_m}^2)^{1/2}$$

を要求する．そして Einstein の場の方程式はそうすると，$Q = a$ および $e^\lambda = \cos\tilde\tau$，したがって

$$ds^2 = Q^2(-d\tilde\tau^2 + \cos^2\tilde\tau dz^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

を要求することを示せ．(5)［しばしば “Bertotti (1959)–Robinson (1959a) の電磁気的な宇宙” とよばれ，Lindquist (1960) によってこの座標系で探求された］場の方程式のこの解は，特別な場合 $Q = M$ に対して実際 Reissner–Nordstrøm 解の喉である．この要求を，Reissner–Nordstrøm の喉の領域［$Q = M$ および $|r - Q| \ll Q$ をもつ式 (31.24b)］について，以下の座標変換を遂行することによって確かめよ．

$$r - Q = Qe^{-z}\cos\tilde{\tau}, \qquad t = Qe^{z}\tan\tilde{\tau}$$

(6) こうして，おのおのの可能な場合はまったく解に通じないか，あるいは Reissner–Nordstrøm 幾何学の部分である．Q.E.D.] **注意：**Birkhoff の定理の本文の証明における，欠けている場合，$(\nabla r)^2 = 0$ は，$Q = 0$ に対しては，上述の段階 (3) および (4) はまったく解に通じないことを指摘することによって解決される．われわれはこの本の準備的なバージョンにおいて，場合 $(\nabla r)^2 = 0$ が省略されていることを指摘されたことに対して，G. F. R. Ellis に感謝する．

32.3 崩壊している星の外部の幾何学

瞬間的に静止しているが，しかし続いて崩壊し始めるであろう星を考える．Schwarzschild の座標時間の最初の瞬間，$t = 0$ における星の空間幾何学は，2 つの部分をもつ．外部の真空領域 $(r > R > 2M)$ においては，それは Schwarzschild の幾何学である（Birkhoff の定理!）．しかし星の内部では，それはある別なまったく異なる幾何学である．内部の幾何学は何であろうと，それは時間 $t = 0$ に，定性的に図 23.1 のはめ込み図のようである（この議論と証明に対しては，23.8 節をみよ）．星の空間幾何学は完全な Schwarzschild 幾何学の下方の宇宙を取り除き（図 31.5a），それを星の物質が含まれている滑らかな “鉢” で置き換えることによって得られることに注意せよ．

*5 後に続くこの星の崩壊を，Schwarzschild 座標系で，あるいは Kruskal–Szekeres 座標系で，あるいは入っていく Eddington–Finkelstein 座標系でたどるには，同様に星の表面の内部に存在する座標図の部分を捨て，そして外部の Schwarzschild 領域のみを維持することができる（図 32.1 をみよ）．取り除かれた内部の Schwarzschild 領域の代わりに，崩壊している星の内部を正しく記述する，ある別な座標系，線要素，および座標図を導入しなければならない．

切断された座標図［図 32.1 (a)，(b)，(c) のような］から，重力半径を通る崩壊の種々な特別な特徴を容易に発見し，理解できる．

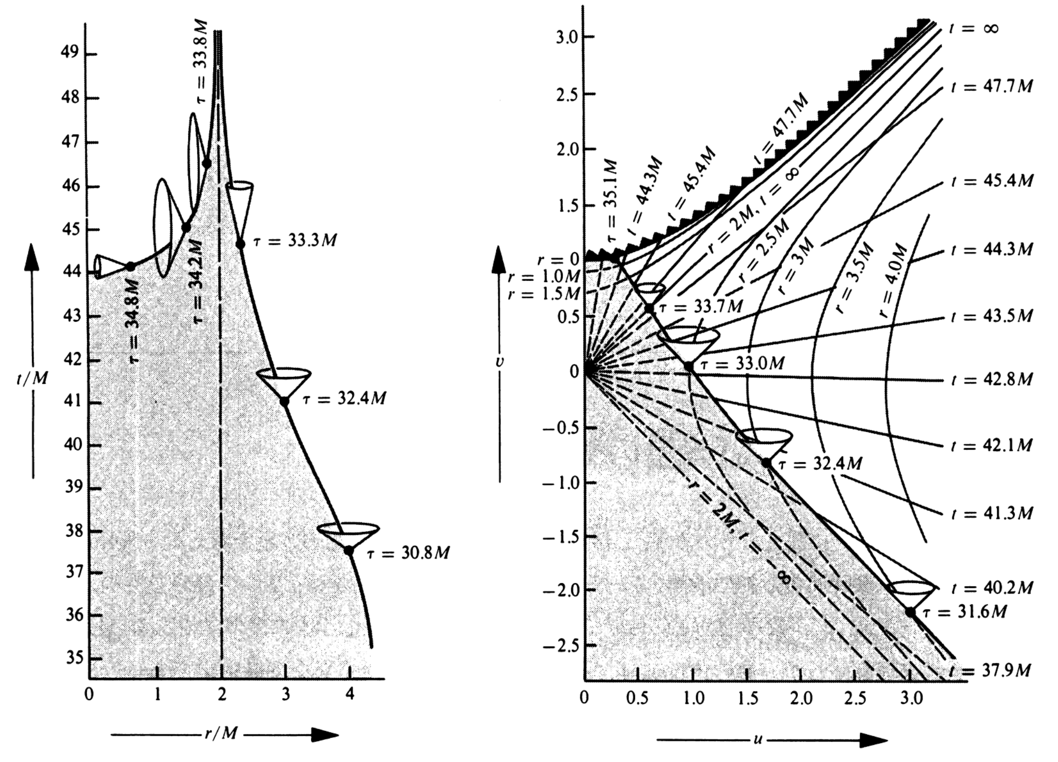
*6 (1)（球状の）星をつくっている物質がいかに固くても，ひとたび星の表面が重力半径の内部に崩壊すれば，星は，その表面が $r = 0$ での特異点において粉砕されるまで崩壊し続けるだろう．星の表面が光の速さよりも速く動くことができないことを思い起こせば，これを発見する．したがってその世界線はつねに Kruskal–Szekeres 図の v 軸と 45 度よりも小さい角度をつくらなければならない．

(2) 星の表面が重力半径の内部に崩壊した後，星の表面から吐き出された信号（たとえば，光子）は外部の観測者へ逃れることができない．むしろ，重力半径の内部から放出さ

---

*5 重力崩壊は星の外部，Schwarzschild 幾何学を吟味することによって解析される

*6 戻れない点としての重力半径，および $r = 0$ での “粉砕”



(a) Schwarzschild　　　　(b) Kruskal-Szekeres

図 32.1　最初の半径 $R_i = 10M$ の星の自由落下崩壊が三者択一的に (a) Schwarzschild 座標，(b) Kruskal–Szekeres 座標，および (c) 入っていく Eddington–Finkelstein 座標（コラム 31.2 をみよ）で描かれている．崩壊している星の内部の時空領域は灰色であり，外部の時空領域は白色である．外部領域の幾何学のみが Schwarzschild の幾何学である．灰色の領域と白色の領域とを分離する曲線が崩壊している星の表面の測地線の世界線である $[r_{最大} = R_i = 10M$ をもつ式 (31.10) あるいは (32.10)]．この世界線は，星の表面上に座っている観測者によって測定されるとき，固有時間 τ によってパラメータ化される．半径方向の光円錐は，$ds^2 = 0$ から計算され，星の表面に結びつけられている．

光円錐の形は Schwarzschild 座標に対して，あるいは Eddington–Finkelstein 座標に対して，すべては同じでないけれども，それらは Kruskal–Szekeres 座標に対してはすべて同じであることに注意せよ．これは光線は u, v–平面内では 45 度の線に沿って進むが $(dv = \pm du)$，しかし r, t–平面および $r, \tilde{V}$–平面内では曲がった経路に沿って進むからである．

ここに示されている Kruskal–Szekeres の時空図は，式 (31.13) によって Schwarzschild 図および Schwarzschild 時間の並進 $t \to t + 42.8M$ に関係している．Eddington–Finkelstein 図は Schwarzschild 図に

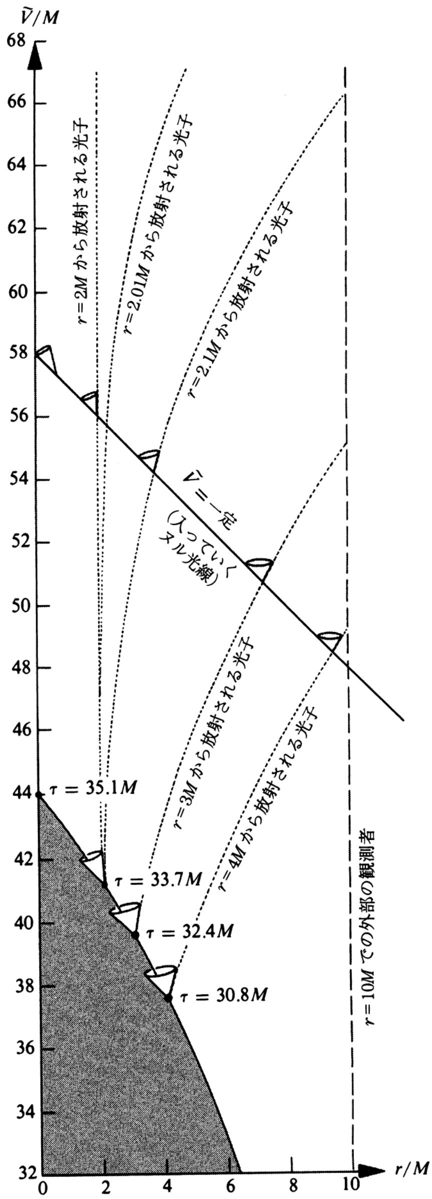
$$\tilde{V} = t + r^* = t + r + 2\,M \ln|r/2M - 1|$$

によって関係している（コラム 31.2 をみよ）．

自由落下崩壊は，有限で短い共運動している固有時間間隔 $\Delta\tau = 35.1M$ 内に $R = 10M$ から $R = 0$ へ落下し，一定に減少する半径によって特徴づけられる，ということはこれらの図から明白である．点 $R = 0$ および星の外部の全領域 $r = 0$ は，古典的な量子化されていない，一般相対論によれば—物質を無限大の密度まで押しつぶしうる，そして押しつぶす無限大の潮汐重力の物理学の“特異点”をつくり上げる（31.2 節の終わりをみよ，また 32.6 節をみよ）．

Eddington–Finkelstein 図は，崩壊している星の表面から半径方向に放射され，そして $r = R_{最初} = 10M$ での観測者によって受信される一連の光子を描いている．観測者は重力半径の外部から半径方向に放射されるすべての光子を最終的に受信する．星がその重力半径を通過した後に放射されるすべての光子は最終的に $r = 0$ での特異点に引っ張られる．重力半径で半径方向に放射される任意の光子は重力半径に永久にとどまる．

非自由落下崩壊はここで描かれている崩壊に似ている．圧力勾配が存在するときには，星の表面の世界線の詳細な形のみが変化する．



(c) Eddington-Finkelstein

れたすべての信号はとらえられ，空間が星の周りに“締めつけられる”につれて，周りの幾何学の崩壊によって $r=0$ での特異点へ破壊される．

(3) したがって，外部の観測者は，彼が自ら重力半径を通って落下して得られる知識に対する死の代償を支払うことを選ばなければ，星が重力半径を通過した後に星をけっしてみることができない，そして彼は星の崩壊を終わらせる特異点をけっしてみることができない．

これは崩壊している星が重力半径に達した際に瞬間的に，そして完全に外部の視界からみえなくなることを意味するか？　イイエ，図 32.1 (c) に描かれている解析によればイイ
*7 エ．天体物理学者を崩壊している星の表面に置き，そして彼に $r \gg 2M$ に静止している，遠く離れた天文学者に崩壊の進行について知らせるために一様な間隔をもつ信号の列を送らせる．これらの信号は図 32.1 (c) の時空図におけるヌル線に沿って伝播する．信号は星の表面の世界線に始まり，そして遠く離れた天文学者の世界線，$r=$ 一定 $\gg M$ に交差するとき天文学者によって受信される．星の崩壊が重力半径，$R=2M$ にますます近づくにつれて，天体物理学者の時計によって等間隔で送られる信号は，ますます広い間隔で天文学者によって受信される．ちょうど重力半径に到達する前に放出された信号を，天文学者は無限大の時間が経過した後までは受信しない．そして重力半径が通過された後には天文学者は放出された信号をけっして受信しない．それらの信号は，それらを送る天体物理学者のように，わずかの進行の後にとらえられ，$r=0$ での特異点で崩壊している幾何学によってとらえられ，そして破壊される．崩壊するのは星のみでない．星の周りの幾何学が崩壊する．

したがって，遠く離れた天文学者にとって，崩壊している星はその重力半径に近づくにつれてゆっくり進むようにみえる．星からの光はますます赤方偏移する．星の上の時計はますますゆっくり進むようにみえる．星が重力半径に達するには無限大の時間を要し，そして遠く離れた天文学者によってみられるように，星はけっしてそこを越えない．

*8 崩壊している星の光学的な現象は，J. R. Oppenheimer and H. Snyder (1939) によって，半径方向に伝播している光子をおもに注意して，初めて数学的に解析された．より最近に，多くの研究者は問題を再吟味した [たとえば，Podurets (1964)，Ames and Thorne (1968) および Jaffe (1969) をみよ]．これらの研究のもっとも重要な定量的な結果は次のようである．崩壊の最後の段階で，遠く離れた天文学者は星が重力半径に非常に近いのをみるとき，彼は星の全光度が時間について指数関数的に減少するのを観測する．

$$L \propto \exp\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{t}{2M}\right) \tag{32.5}$$

同時に，半径方向の軌道に沿って彼の方に進む光子は指数関数的に増大する赤方偏移

$$z = \Delta\lambda/\lambda \propto e^{t/4M} \tag{32.6}$$

を受ける．しかし，星からの光は，重力半径近くからの半径方向の軌道に沿って飛ぶ光子

*7　重力半径をちょうど通過する前に放出された信号の赤方偏移
*8　崩壊している星の光学的な現象

によってでなく，星の表面が $r=3M$ を通過するときの不安定な円形軌道にある星（25.6 節およびコラム 25.7 をみよ）によって堆積された光子によるものが，これらの遅い段階で支配的である．時間が経過するにつれて，これらの光子は徐々に，$r=3M$ でとらえられていた光子の薄い球状の殻から漏れ出て遠く離れた観測者まで飛び去り，観測者は赤方偏移 $z \approx 2$ をもつ光子を測定する．したがって，崩壊の遅い段階で星のスペクトル線は途方もなく広くなるが，光子は赤方偏移 $z \approx 2$ でもっとも明るい．

光度の減少および半径方向の赤方偏移に対して，特徴的な $1/e$ になる時間はいかに短いかに注意せよ．

$$\begin{aligned}\tau_{\text{特徴的な}} &= 2M \approx 1\times 10^{-5}(M/M_{\odot})\ \text{秒} \\ &= \begin{pmatrix}\text{平坦な空間の中，重力半径と} \\ \text{同じ距離を光が横切る時間}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{32.7}$$

ここに $M_{\odot}$ は 1 太陽質量を表す．

[練習問題]

32.2　崩壊の間の赤方偏移

(a) 崩壊している球状の星の表面上の電波送信機に波長 λ_e の単色波を放出させる．そして遠く離れた観測者に，同じ θ, ϕ で，受信機によって波を受信させる．後の時間に受信される波長は

$$\lambda_{\text{受信}}/\lambda_{\text{放出}} \propto e^{t/4M} \tag{32.8a}$$

のように変化する［式 (32.6)］ことを示せ．ただし t は遠く離れた観測者によって測定される固有時間である．

(b)［トラック–2］出ていく光子に対する運動論（位相空間における密度の保存．Liouville の定理，22.6 節）を用いて，受信される放射のエネルギー束（erg/cm^2 sec）は

$$F \propto e^{-t/4M} \tag{32.8b}$$

のように変化することを示せ．

[本章の残りはトラック–2 である．先立つトラック–2 の材料は本章に対する準備として必要とされない．しかし本章は (1) 33 章（ブラックホール）のトラック–2 部分，および (2) 34 章（特異点および大域的な方法）に対する準備として必要とされる．]

(c) 崩壊している星の中心での核反応は，エネルギー E_e のニュートリノを生成し，そしてこれらのニュートリノは自由に外部へ流れる（星内部での吸収は無視される）と仮定せよ．遠く離れた観測者によって受け取られるニュートリノのエネルギーは，後の時間には

$$E_{\text{受信}}/E_e \propto e^{-t/4M} \tag{32.9a}$$

のように減少することを示せ．

(d) ニュートリノのエネルギー束は後の時間には

$$F \propto e^{-t/2M} \tag{32.9b}$$

のように死に絶えることを示せ．

(e) エネルギーに対する減衰の法則 (32.8a) および (32.9a) は同じであるが，しかしエネルギー束に対する減衰の法則 (32.8b) および (32.9b) は異なるのはなぜであるかを基本的な表現で説明せよ．

(f) 崩壊している星にその表面から黒体放射率

$$\frac{dN}{d\tau} = \left(1.5\times10^{11}\frac{\text{光子}}{\text{cm}^2\,\text{sec}\,\text{K}^3}\right)\times(\text{星の表面積})\times(\text{表面の温度})^3$$

で光子を放出させる．半径 $r \gg M$ の遠く離れた観測者に，光子が彼の球を通過するとき，光子を勘定させる．星の表面の中心が半径 $r = 3M$ を通過するのを彼がみる（半径方向に外部へ進む光子によって）とき，彼の勘定 $(t = 0)$ を始めさせよ．出ていくであろう最後の光子が彼と彼の仲間に到達してしまうまで，彼らが待たなければならない時間は，大きさの程度で，

$$t = (M/M_\odot)[8\times10^{-4} + 5\times10^{-4}\log_{10}(T_{11}M/M_\odot)]\ \text{秒} \tag{32.9c}$$

であることを示せ．ただし T_{11} は 10^{11}K の単位での星の表面温度である．

32.4 一様な密度で圧力がゼロの星の崩壊

崩壊している星の内部と，その表面が Schwarzschild 幾何学内にとどまるという正確な世界線に注意を向けるとき，幾分複雑な数学に遭遇する．取り扱われるべきもっとも単純な場合は，密度が一様で圧力がゼロの "星" の場合である．そして，実際，最近までそれが
*9
詳細に取り扱われた唯一の場合であった．最初の—そして非常に完全な—このような一様な密度の "塵の球" の崩壊の解析は，Oppenheimer and Snyder (1939) の標準的な論文において与えられた．より最近に，他の研究者がわずかに異なる観点から，異なる座標系を用いてそれを議論した．ここでとられる方法は Beckedorff and Misner (1962) によって案出された．

任意の塵の球の表面上の粒子の運動をそらせる圧力勾配が存在しないから，粒子は外部の Schwarzschild 幾何学における半径方向の測地線に沿って動かなければならない．時間 $t = 0$ で，有限の半径 $R = R_i$ で静止から始まる球に対しては，後に続くその表面の測地線の運動は式 (31.10) によって与えられる．

---

*9　一様な密度の "塵" の球の静止からの崩壊

*10

$$R = (R_i/2)(1 + \cos\eta) \tag{32.10a}$$

$$t = 2M \ln\left|\frac{(R_i/2M - 1)^{1/2} + \tan(\eta/2)}{(R_i/2M - 1)^{1/2} - \tan(\eta/2)}\right| + 2M(R_i/2M - 1)^{1/2}[\eta + (R_i/4M)(\eta + \sin\eta)] \tag{32.10b}$$

ここに R は Schwarzschild 時間 t における Schwarzschild の半径方向の座標（すなわち，$4\pi R^2$ は星の表面積である）である．この世界線は Schwarzschild 座標, Kruskal–Szekeres 座標，および Eddington–Finkelstein 座標によって，$R_i = 10M$ に対して図 32.1 に描かれている．崩壊している星の表面上の時計によって読み取られる固有時間は式 (31.10b) によって与えられている．

$$\tau = (R_i^3/8M)^{1/2}(\eta + \sin\eta) \tag{32.10c}$$

崩壊はパラメータ η がゼロであるときに（$R = R_i, t = \tau = 0$）始まり，塵の球とともに落下している任意の試験粒子上で測定されたときに，

$$\Delta\tau = \pi(R_i^3/8M)^{1/2}$$

に等しい固有時間の経過の後に，特異点（$R = 0, \eta = \pi$）で崩壊は終わることに注意せよ．これが正確に，Newton の理論で無限大の密度への自由落下の崩壊に対して要求される時間の経過と同じであることは，偶然であるけれども，興味がある［式 (25.27′)，図 25.3，および関連した議論をみよ］．

塵の球が崩壊するときに球の内部の振る舞いはどのようであるか？　圧力のない塵に対する種々の異なる内部が想像されうる（練習問題 32.8）．しかしここではそれらの中でもっ
*11 とも単純なものに注意を集中する．表面を除いて，いたるところ均質で等方的な内部，すなわち，塵で満たされた Friedmann 宇宙論の模型（コラム 27.1）に局所的に同等な内部である．Friedmann 内部は "開いている"($k = -1$) べきであるか，"平坦"($k = 0$) であるべきか，あるいは "閉じている"($k = +1$) べきであるか？　閉じている場合のみが適当である．なぜなら星は最初静止している（密度の最初の変化率はゼロに等しい，"最大膨張の瞬間"）ことをすでに要求したからである［式 (32.10)］．

星の内部に対して共運動超球面座標，χ, θ, ϕ を用い，そして座標の原点を星の中心に置いて，内部における線要素をよく知られた Friedmann 形式

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \tag{32.11}$$

に書くことができる．ここに $a(\tau)$ はよく知られたサイクロイド的な関係

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}a_m(1 + \cos\eta), \\ \tau &= \tfrac{1}{2}a_m(\eta + \sin\eta) \end{aligned} \tag{32.12}$$

そして密度は

---

*10　(1) 外部の Schwarzschild 座標における球の表面の世界線

*11　(2) 球の内部は閉じた Friedmann 宇宙の一部に同等である

$$\rho = (3a_m/8\pi)a^{-3} = (3/8\pi {a_m}^2)\left[\frac{1}{2}(1+\cos\eta)\right]^{-3} \tag{32.13}$$

によって与えられる［コラム 27.1 の式 (1)，(9)，(4)，および (5) をみよ．ただし η は $\eta + \pi$ で置き換えられている］.

[*12] この内部解について，1 つの可能な困難が存在する．宇宙論的な場合において，解はいたるところ均質で等方であった．ここで均質性と等方性は星の表面で破られている．それはある半径

$$\chi = \chi_0 \tag{32.14}$$

で，超球面の極（polar）角度 χ，共運動座標（コラム 27.2 における最初の図）によって測定されるとき，すべての τ に対して存在する．その表面で（すなわち，星の流体を取り囲む 3 次元の世界管），内部の Friedmann 幾何学は，外部の Schwarzschild 幾何学に滑らかに一致しなければならない．もし接続が達成されえないならば，Friedmann の線要素 (32.11) は崩壊している星の内部を表現できない．接続がどうしても達成されえない場合の一例は一様な密度とともに，一様でゼロでない圧力がある内部である．その場合には星の表面に無限大の圧力勾配が存在するだろう．それが星の外殻を吹き飛ばし，そして星の中心に向かって内部へ伝播する希薄波を送るだろう．密度と圧力の一様な分布は素早く破壊されるだろう．

ゼロ圧力の場合に対しては，接続は可能である．接続の部分的な確認として，星の表面で固有時間 τ の関数として，星の円周，$C = 2\pi R$ に対して，内部および外部の解によって分離した独立な予言を吟味することができる．外部の Schwarzschild 解はサイクロイド的な関係，

$$\begin{aligned} C &= 2\pi R = 2\pi(R_i/2)(1+\cos\eta), \\ \tau &= (R_i^3/8M)^{1/2}(\eta + \sin\eta) \end{aligned} \tag{32.15}$$

を予言する［式 (32.10)］．内部の Friedmann 解は同様なサイクロイド的な関係を予言する．

$$\begin{aligned} C &= 2\pi R = 2\pi a \sin\chi_0 = 2\pi\left(\frac{1}{2}a_m \sin\chi_0\right)(1+\cos\eta), \\ \tau &= \frac{1}{2}a_m(\tau + \sin\eta) \end{aligned} \tag{32.16}$$

2 つの予言は

$$R_i = a_m \sin\chi_0 \tag{32.17a}$$

$$M = \frac{1}{2}a_m \sin^3\chi_0 \tag{32.17b}$$

である場合に限りすべての時間に対して完全に一致する．接続のより完全な確認は練習問題 32.4 に与えられている．

重力崩壊のこの理想化された模型へのさらなる洞察に対しては，コラム 32.1 をみよ．

[*12] (3) Friedmann 内部と Schwarzschild 外部との間の接続

[練習問題]

32.3　崩壊している星に対するはめ込み図と光子の伝播

コラム 32.1 に記述されている均質な崩壊の特徴を詳細に確かめよ．

32.4　Friedmann 内部の Schwarzschild 外部への接続

Einstein の場の方程式は星の表面で，表面の 3 次元の世界管の内在的なおよび外在的な幾何学が同じである場合に限り，星の内部で測定されようと外部で測定されようと満たされる（証明と議論に対しては 21.13 節をみよ）．上で議論されている崩壊している星に対して，内在的な幾何学と外在的な幾何学は Friedmann 内部と Schwarzschild 外部との間の接続で一致することを確かめよ［ヒント：(a) 星の表面の世界管上での座標として η, θ, ϕ を用いよ．そして内在的な幾何学は，Schwarzschild 外部で測定されようとあるいは Friedmann 内部で測定されようと，同じ線要素

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + \sin^2\chi_0(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \tag{32.18a}$$

をもつことを示せ．(b) 世界管の外在的な曲率は，Schwarzschild 外部で測定されようとあるいは Friedmann 内部で測定されようと，同じ成分

$$\begin{gathered} K_{\eta\eta} = K_{\eta\theta} = K_{\eta\phi} = K_{\theta\phi} = 0, \\ K_{\theta\theta} = K_{\phi\phi}/\sin^2\theta = -a(\eta)\sin\chi_0\cos\chi_0 \end{gathered} \tag{32.18b}$$

をもつことを示せ]．

32.5　無限大から崩壊する星

(a) 切断された Schwarzschild 幾何学と切断された “平坦な”($k = 0$)，塵で満たされた Friedmann 宇宙を継ぎ合わせて，無限大の最初の半径での静止から崩壊する星の模型を得よ［ヒント：Schwarzschild 幾何学における星の表面の世界線は式 (31.2) によって与えられる]．

(b) 同様に切断された Schwarzschild 幾何学と切断された “開いた”（$k = -1$），塵で満たされた Friedmann 宇宙を継ぎ合わせて最初の内向きの有限速度で無限大から崩壊する星を得よ．

コラム 32.1　Friedmann 内部と Schwarzschild 外部をもつ，理想化された崩壊している星

(ここで記述される結果の正当化については **32.4** 節および練習問題 **32.3** および **32.4** をみよ)

初期状態

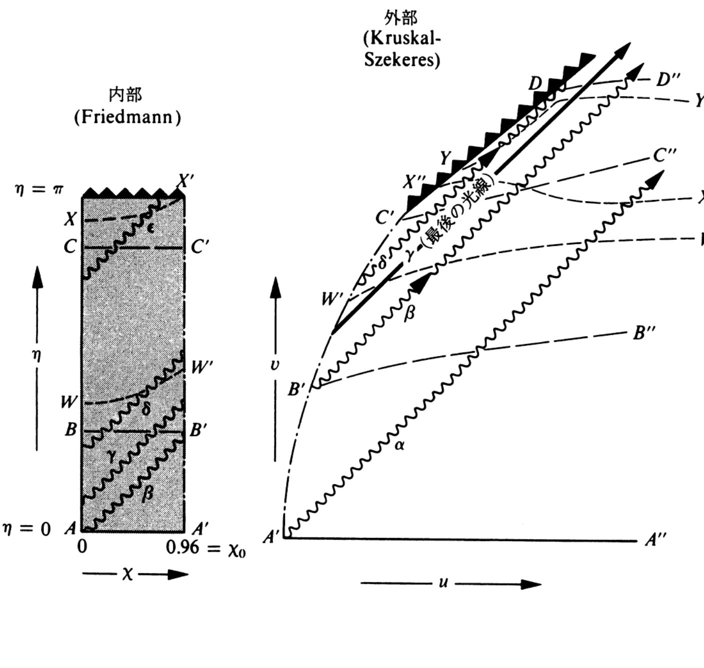
(1) 最大膨張，$\eta = 0$ の瞬間に，半径 $a = a_m$ の Friedmann 宇宙をとり，そして領域 $\chi_0 < \chi \leq \pi$ の部分を薄く切り取り，捨てよ．ただし χ_0 は，$\pi/2$ よりも小さいある角度である．(2) 瞬間 $t = 0$ で，質量 $M = (a_m/2)\sin^3\chi_0$ の Schwarzschild 幾何学をとれ．そして領域 $r < R_i = a_m \sin\chi_0$ の部分を薄く切り取り，捨てよ．(3) Friedmann の残りの部分と Schwarzschild 幾何学とをそれらの切断面に沿って滑らかに接続せよ．生ずる物体は，一様な密度 $\rho_i = 3/(8\pi a_m{}^2)$，質量 $M = (a_m/2)\sin^3\chi_0$，そして半径 $R_i = a_m \sin\chi_0$ の瞬間的に静止している星であるだろう．

続いて起こる発展

この星をその初期状態から自由にし，そして Einstein の場の方程式と一致して崩壊させる．内部の切断された Friedmann 宇宙と外部の切断された Schwarzschild 幾何学は，切り取られそして継ぎ合わせてつくられたことのないように発展するだろう．この発展は内部と外部との間の接続の滑らかさを維持するだろう！

崩壊の詳細

崩壊の詳細を，はめ込み図（履歴 $ABCD$ および $AWXY$）の列を用い，半径方向に外部へ伝播する光子 (光子$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$) を用いて調べる．ここに示されている例は $\chi_0 = 0.96$ および $R_i/M = 2/\sin^2\chi_0 = 3$ をもつ．



超曲面 $ABCD$ で調べられたときの崩壊の履歴

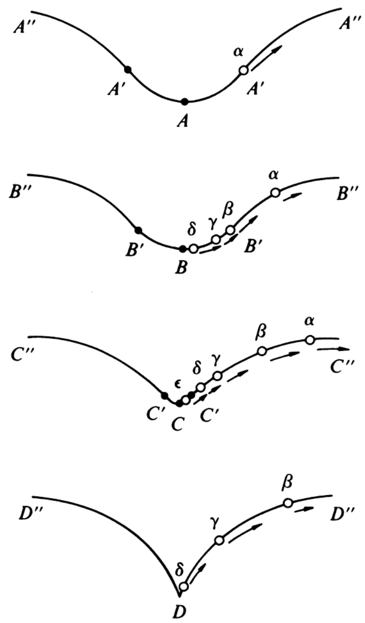
(1) 初期の形状, $A - A' - A''$ は, 時間 $\eta = t = 0$ に切り取りと継ぎ合わせによって構成された形状である.

(2) おのおのの続く形状はその内部として, 一定の Friedmann 時間 η の薄片をもつ.

(3) 内部はつねに半角度 χ_0 の椀にとどまる. しかし内部は, 時間が増大するにつれて半径 $R = R_i = a_m \sin\chi_0$ から $R = 0$ に収縮する.

(4) 星の内部の物質は R がゼロに達するとき, すべて同時に無限大の密度に粉砕される. そして外部の Schwarzschild“じょうご” はその点でカスプのような特異点を展開する.

(5) 時間がさらに増大するにつれて, このカスプはじょうごの領域 $r < 2M$ を $r = 0$ に非常に速く引っ張るので, 外向きに進む光子 δ はむさぼり食われて粉砕される.



これらのはめ込み図は, 図 23.1 に似た 2 次曲面になるためには垂直軸の周りに回転されなければならない.

超曲面 $AWXY$ で調べられたときの履歴

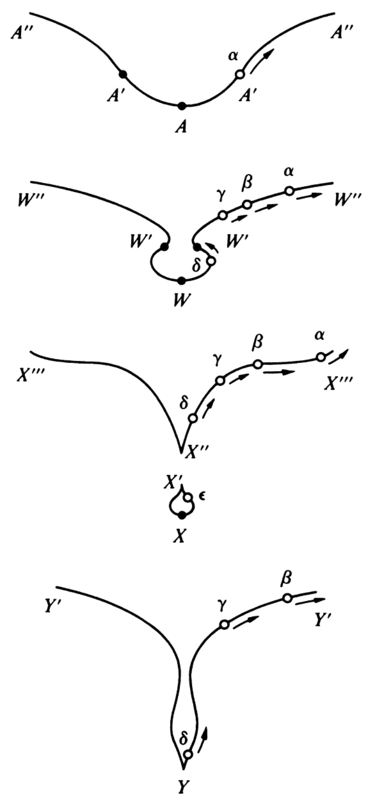
(1) 初期の形状, $A - A' - A''$ は, 再び $\eta = t = 0$ で切り取りと継ぎ合わせによって構成される形状である.

(2) 後に続く超曲面は $\eta =$ 一定 から非常に異なる.

(3) 時間が経過するにつれて, ネックは星の表面のごく外側の幾何学において展開する.

(4) このネックは堅く堅くなり締めつけられて, 星を完全に宇宙の残りから孤立して残し, 星がつねにそうであるように, 致命的なカスプ状の特異点を外部の幾何学内に残す.

(5) 孤立した星は, それ自身の小さい閉じた宇宙において無限大の密度へ圧縮されるまで収縮し続ける. 他方外部の幾何学は別なネックを発展し始めそして尖端は素早く光子 δ をむさぼり食う.



履歴 $ABCD$ および $AWXY$ の間の極端な相違は一般相対論の “多くの指をもつ時間” を強調す

る．その幾何学を探求している超曲面は，探求者の団体の選択で，1つの領域で時間について より速く前方へ押し動かされうる．こうして星の1つの領域が最初に崩壊するか，あるいは別な領域が最初に崩壊するか，あるいは全体の星が同時に崩壊するかどうかは，時空幾何学と薄片の選択の両方の関数である．探求者の団体はこの薄片の選択を彼ら自身制御できる．こうして彼らの探求が時間について前方に進むにつれてみるであろう空間的な薄片がどのような種類であるかをこの程度まで彼ら自身支配する．しかし，彼らが薄切りする時空幾何学は，彼らの探求のままに支配したり変化したりすることがまったくできない．彼らの質量は無視でき，そして彼らはたんに試験物体として役立つ程度で，彼らは時空について何らの影響ももたない．時空は崩壊に対する初期条件の指定によって完全に固定された．要するに，時空は4次元であり薄片はたんに3次元である（そしてここでの図ではたんに2次元か1次元にみえる）．薄片の任意の1組は全体の履歴の一面的な観点のみをとらえている．全体図をみるには幾何学の力学を，薄切りの種々の選択において現れるときに吟味しなければならないか，あるいは時空幾何学を全体として描くことに慣れなければならない．

32.5　内部圧力をもつ球対称な崩壊

*13　外部の重力場に関する限り，自由に崩壊している星と，球対称な内部圧力をもって崩壊している星との間の唯一の相違は次のことである．それは2つの星の表面は，外部のSchwarzschild幾何学における異なる世界線に沿って動くということである．外部の幾何学は両方の場合において同じであるから，**自由落下崩壊の定性的な様相は，前節に記述されているように無視できない内部圧の場合に直接もち越されうる．**

尋ねるべき重要で魅惑的な質問は次のことである．大きい内部圧はどのような方法で，崩壊している星を，無限大の潮汐重力によって無限大の密度に粉砕されることから妨げられうるか？　図32.1bのKruskal–Szekeres図から，ひとたび星がその重力半径の内部$(r < 2M)$へ通過すると，内部圧力は，いかに大きかろうとも，星の表面が特異点で粉砕されることから妨げることができない．表面は時間的な世界線に沿って動かなければならない．そしてすべてのこのような世界線は$r = 2M$の内部で$r = 0$に衝突する．今日利用できるこのような定理はないけれども，もし球状の構成の表面が$r = 0$特異点で粉砕されるならば，内部全体もまた粉砕されなければならないと，論理的に推論できる．

圧力をもつ球対称な崩壊している星の内部力学の詳細は，外部のSchwarzschild力学ほどよく理解されていない．しかし，内部力学の理解におけるおもな進歩は，現在数値的な計算と分析的な解析によってなされている［レビューについてはMisner (1969a)をみよ］．これらの計算と解析において，前節の単純で一様密度の，自由落下崩壊で起こったものを越える新しい特徴（少なくとも，予期されない特徴でない）はみつかっていない．

*13　圧力をもつ球状崩壊は定性的に圧力をもたない場合と同じである

［練習問題］

32.6 一般的な球状崩壊：共運動座標における計量

球状崩壊している圧力をもつ一様でない星を考える．球対称性のみで星の内部および外部を通して Schwarzschild 座標系 (t, r, θ, ϕ) の存在を保証するに十分である［式 (32.2) および先行する議論をみよ］．星のおのおのの球殻をパラメータ a によってラベルせよ．それはどれだけのバリオンがその殻の内部に含まれているかを告げる．そうすると $r(a, t)$ はラベル a をもつ殻の世界線である．これらの世界線に対する表現は，逆に時間 t における半径 r の内部のバリオンの数 $a(t, r)$ を得ることを可能にする．新しい時間座標 $\tilde{t}(t, r)$ が存在し，線要素 (32.2) は，座標 $(\tilde{t}, a, \theta, \phi)$ について書き直されると，形式

$$ds^2 = -e^{2\tilde{\Phi}}d\tilde{t}^2 + \left[\frac{(\partial r/\partial a)_{\tilde{t}}da}{\Gamma}\right]^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{32.19a}$$

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(\tilde{t}, a), \qquad r = r(\tilde{t}, a), \qquad \Gamma = \Gamma(\tilde{t}, a) \tag{32.19b}$$

をもつようになることを示せ．これらは星の内部に対する“共運動で同時の座標”である．

32.7 断熱的な球状崩壊：発展の方程式［Misner and Sharp (1964)］

崩壊している星の内部を，共運動で同時の計量 (32.19)，バリオンの数密度 n，質量–エネルギーの全密度 ρ，そして圧力 p によって記述する．星の流体の 4–速度は

$$\boldsymbol{u} = e^{-\tilde{\Phi}}\partial/\partial\tilde{t} \tag{32.20}$$

である．なぜなら流体は共運動座標系で静止しているからである．ドットは流体によってみられたときの固有時間微分を記すものとする．たとえば，

$$\dot{n} \equiv \boldsymbol{u}[n] = e^{-\tilde{\Phi}}(\partial n/\partial\tilde{t})_a$$

そしてダッシュはバリオンの数についての偏微分を記すものとする．たとえば，

$$n' \equiv (\partial n/\partial a)_{\tilde{t}}$$

U によって，与えられた殻内に乗っている人間によって測定されたときの，$(1/2\pi)\times$(殻の円周）の変化率を記す．

$$U \equiv \dot{r} \tag{32.21a}$$

そして $m(\tilde{t}, a)$ によって，時間 $\tilde{t}$ に殻 a の内部の全質量–エネルギーを記す．

$$m(\tilde{t}, a) \equiv \int_0^a 4\pi r^2 \rho(\tilde{t}, a) r' da \tag{32.21b}$$

（質量–エネルギーを局所化するこの方法に対する論議についてはコラム 23.1 をみよ）．崩壊が断熱的であることを仮定せよ（隣り合う殻の間にエネルギーの流れはない．ストレス–エネルギーテンソルは完全に完全流体のものである）．

(a) 崩壊の方程式［バリオンの保存，式 (22.3)，局所的なエネルギー保存，式 (22.1a)，Euler の方程式 (22.13) そして Einstein の場の方程式（練習問題 14.16)］は 8 個の関数 $\tilde{\Phi}, \Gamma, r, n, \rho, p, U, m$ に対する以下の 8 個の方程式に帰着されうる．

$$\dot{r} = U \quad \text{（}r\text{ に対する力学方程式）} \tag{32.22a}$$

$$\frac{(nr^2)^{\cdot}}{nr^2} = -\frac{U'}{r'} \quad \text{（}n\text{ に対する力学方程式）} \tag{32.22b}$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho + p} = \frac{\dot{n}}{n} \quad \text{断熱的に破壊する衝撃正面を除いて（}\rho\text{に対する力学方程式）} \tag{32.22c}$$

$$\dot{U} = -\frac{\Gamma^2}{\rho + p}\frac{p'}{r'} - \frac{m + 4\pi r^3 p}{r^2} \quad \text{（}U\text{ に対する力学方程式）} \tag{32.22d}$$

$$p = p(n, \rho) \quad \text{（状態方程式）} \tag{32.22e}$$

$$\tilde{\Phi}' = -p'/(\rho + p), \tilde{\Phi} = 0 \quad \text{（星の表面で）} \quad \text{（}\tilde{\Phi}\text{ に対する源の方程式）} \tag{32.22f}$$

$$m' = 4\pi r^2 \rho r' \quad (m = 0,\ a = 0\ \text{で}) \quad \text{（}m\text{ に対する源の方程式）} \tag{32.22g}$$

$$\Gamma = \text{符号}\ (r')(1 + U^2 - 2m/r)^{1/2} \quad \text{（}\Gamma\text{ に対する代数方程式）} \tag{32.22h}$$

(b) 上述の方程式は数値的な計算に対して有用な形式をしている［特別な数値的な解に対して，および衝撃の取り扱いに対しては，May and White (1966) をみよ］．解析的な仕事に対しては式 (32.22b) を

$$n = \Gamma/(4\pi r^2 r') \tag{32.22b$'$}$$

によって置き換え，そして式 (32.22d) を

$$\dot{m} = -4\pi r^2 pU \tag{32.22d$'$}$$

で置き換えることがしばしば有用である．これらの式を導け．

(c) 式 (32.22g) および (32.22d′) はなぜエネルギーの局所化についてのコラム 23.1 においてなされる注意を正当化するかを説明せよ．

32.8　圧力をもたない崩壊に対する解析的な解［Tolman (1934b)，Datt (1938)］

ゼロ圧力の場合における式 (32.22) への一般解は以下のように求められることを示せ．

(a) 殻 a の内部の質量 $m(a)$ を指定せよ．$p = 0$ をもつ式 (32.22d′) を用いよ．それは時間 $\tilde{t}$ とともに変化しないだろう．

(b) すべての塵粒子は半径に依存する静止質量 μ，$\mu(a)$ をもつと仮定せよ．そうすると

$$\rho = \mu n \tag{32.23a}$$

(c) Γ を式

$$\Gamma = m'/\mu \tag{32.23b}$$

から計算せよ．それは $\tilde{t}$ に無関係になるだろう．

(d) a の関数としての円周 $2\pi r$ の初期の分布を指定し，そして力学的な方程式

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \tilde{t}}\right)^2 - \frac{2m(a)}{r} = \Gamma^2(a) - 1 \tag{32.23c}$$

を解いて $r(\tilde{t}, a)$ の相続く発展を求めよ．この式は Newton の理論における場合と同じ形を恒等的にもつことに注意せよ！

(e) 興味ある残りの量を代数方程式

$$ds^2 = -d\tilde{t}^2 + (r'da/\Gamma)^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{32.23d}$$

$$\rho = \mu n = m'/(4\pi r^2 r') \tag{32.23e}$$

$$\tilde{\Phi} = 0, \qquad U = \partial r/\partial \tilde{t} \tag{32.23f}$$

から計算せよ［**注意**：この解で，相続く“殻”は互いに通過しあって，そのとき無限大の密度の表面を生み出す ($r' \to \infty$，ここに $m' \neq 0$)．なぜなら殻が横切るのを止めるべくつくられる圧力は存在しないからである．これが起こるときには，座標系は異常になる（a はもはや外部へ単調に増大しない)，しかし時空はよい振る舞いにとどまる．無限大の密度の表面は (1) 隣の塵粒子に無視できる潮汐力を生み出す．そして (2) 21.13 節の表面層のように，有限の圧力によって有限の密度までどのような痕跡も残らぬようになるのが理想化である]．

32.9　一様な密度をもつ崩壊

一様な密度とゼロ圧力をもつ崩壊に対する Friedmann–Schwarzschild の解を，練習問題 32.8 の記述における $m(a)$ および $r(a)$ に対して適当な形を指定することによって回復せよ．星の内部では，粉末の粒子にゼロでない静止質量，$\mu =$ 一定 $\neq 0$ を与えよ．外部ではそれらにゼロ静止質量 $\mu = 0$（真空における“仮想的な粉末粒子”）を与えよ．生ずる計量 (32.23d) を，星の内部で Friedmann の計量に，そして星の外部で Schwarzschild 幾何学に対する Novikov の計量 (31.12) に帰着せよ．

32.6　$r = 0$ での特異点に落下する人間の運命

*14　自由落下する星が $r=0$ に崩壊する際の，星の表面上に立っている実験家の天体物理学者の状態を考える．

崩壊が $r=0$ に向かって進むにつれて，天体物理学者の体の種々の部分は異なる重力を体験する．星の表面上にある足は，無限に増大する重力によって星の中心に向かって引っ張られる．他方さらに離れている彼の頭は絶えず増加する力であるがわずかにより小さい力によって下方へ加速される．2 つの加速度（潮汐力）間の相違は崩壊が進むにつれてますます大きくなり，r がゼロに近づくにつれて最終的に無限大になる．このような極端な力に抵抗できない天体物理学者の体は，r がゼロに落ちるときに頭と足の間で無制限の伸張を受ける．

*14　$r=0$ 特異点に落下する人間の体に対する潮汐力の効果

しかしこれはけっしてすべてでない．この頭の足に対する伸張と同時に，天体物理学者は，絶えず減少している表面積，$4\pi r^2$ をもつ時空の領域に重力によって引っ張られる．これを達成するためには，潮汐重力は天体物理学者を頭から足へ引き延ばすときにすべての側で彼を圧縮しなければならない．周方向の圧縮は縦の伸張より実際より極端であるから，天体物理学者は，極限 $r \to 0$ で，ゼロ体積で無限に長い状態に破壊される．

上の議論は以下のように数学的な基礎に置かれうる．

天体物理学者の死には 3 段階がある．(1) 彼の体がうまく潮汐力に抵抗する，初期の段階，(2) 彼の体が徐々に屈服する，中間の段階，(3) 彼の体が完全に壊滅されてしまった最後の段階．

*15 初期の段階の間は，天体物理学者の直交系 $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\tau}}$，$\boldsymbol{\omega}^{\hat{\rho}}$，$\boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}}$，$\boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}}$ (31.2 節をみよ) で求められた，測地線のずれの方程式によって潮汐力を解析することができる．この系で，Riemann 曲率テンソルのゼロでない成分は式 (31.6) によって与えられる．

$$\begin{aligned} &R_{\hat{\tau}\hat{\rho}\hat{\tau}\hat{\rho}} = -2M/r^3, && R_{\hat{\tau}\hat{\theta}\hat{\tau}\hat{\theta}} = R_{\hat{\tau}\hat{\phi}\hat{\tau}\hat{\phi}} = M/r^3, \\ &R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = 2M/r^3, && R_{\hat{\rho}\hat{\theta}\hat{\rho}\hat{\theta}} = R_{\hat{\rho}\hat{\phi}\hat{\rho}\hat{\phi}} = -M/r^3 \end{aligned} \tag{32.24a}$$

測地線のずれの方程式は，天体物理学者の局所的な慣性系で瞬間的に静止しており，そして 3–ベクトル

$$\boldsymbol{\xi} = \xi^{\hat{j}} \boldsymbol{e}_{\hat{j}}$$

によって分離されている 2 個の自由に動いている粒子は，

$$\begin{aligned} D^2\xi^{\hat{j}}/d\tau^2 &= -R^{\hat{j}}{}_{\hat{\tau}\hat{k}\hat{\tau}}\xi^{\hat{k}} = -R_{\hat{j}\hat{\tau}\hat{k}\hat{\tau}}\xi^{\hat{k}} \\ &= -R_{\hat{\tau}\hat{j}\hat{\tau}\hat{k}}\xi^{\hat{k}} \end{aligned}$$

によって与えられる相対的な加速度で離ればなれに加速されなければならないことを述べる．曲率テンソルの成分 (32.24a) を用いて

$$\begin{aligned} D^2\xi^{\hat{\rho}}/d\tau^2 &= +(2M/r^3)\xi^{\hat{\rho}}, \\ D^2\xi^{\hat{\theta}}/d\tau^2 &= -(M/r^3)\xi^{\hat{\theta}}, \\ D^2\xi^{\hat{\phi}}/d\tau^2 &= -(M/r^3)\xi^{\hat{\phi}} \end{aligned} \tag{32.24b}$$

であることがわかる．

これらの方程式を天体物理学者の体に適用するために，天体物理学者の体を（単純さのために）質量 $\mu \approx 165$ ポンド $\approx 75\,\mathrm{kg}$, $\boldsymbol{e}_{\hat{\rho}}$ 方向に長さ $l \approx 70$ インチ $\approx 1.8\,\mathrm{m}$，そして $\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}$および$\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}$ 方向に，幅と深さ $w \approx 10$ インチ $\approx 0.2\,\mathrm{m}$ である均質で長方形の箱として理想化する．それからこの理想化された体に，体内の粒子が発散する（そして収束する）測地線に沿って動くことを妨げるように働かなければならない応力を計算せよ．

式 (32.24) の形から，ストレスの主軸方向は $\boldsymbol{e}_{\hat{\rho}}$，$\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}$，および $\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}$ であるだろうというのは明白である（すなわち，$\boldsymbol{e}_{\hat{\rho}}$，$\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}$，$\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}$ 基底で，ストレステンソルは対角型であるだろ

*15　段階 1：体が変形に抵抗する，ストレスが形成される

う）．ストレスの縦成分は，天体物理学者の質量中心で，以下のように求められうる．質量 $d\mu$ をもち，質量中心の上方高さ h に位置している（距離 h は $\boldsymbol{e}_{\hat\rho}$ 方向に沿って測定される）彼の体の体積要素は，もし自由に動くことが許されるならば，質量中心から離れて $a=(2M/r^3)h$ で加速するだろう．この加速度を妨げるには，天体物理学者の筋肉に力

$$dF = a\,d\mu = (2M/r^3)h\,d\mu$$

を与えなければならない．この力は質量中心を通って水平面（$\boldsymbol{e}_{\hat\theta}\wedge\boldsymbol{e}_{\hat\phi}$ 平面）を横切るストレスに寄与する．その面を横切る全力はその上のすべての質量要素に対する力の和である（それはその面の下の質量要素に対する力の和にもまた等しい）．

$$\begin{aligned}F &= \int_{\text{平面より上の領域}} a\,d\mu = \int_0^{l/2}\left(\frac{2Mh}{r^3}\right)\left(\frac{\mu}{lw^2}\right)(w^2dh)\\ &= \frac{1}{4}\frac{\mu Ml}{r^3}\end{aligned}$$

ストレスはこの力を断面積 w^2 によって割って，負の符号をつけたものである．なぜならそれは圧力よりもむしろ張力であるからである．

$$T_{\hat\rho\hat\rho} = -\frac{1}{4}\frac{\mu Ml}{w^2r^3} \approx -\,1.1\times10^{15}\frac{M/M_\odot}{(r/1\,\mathrm{km})^3}\frac{\mathrm{dyne}}{\mathrm{cm}^2} \tag{32.25a}$$

質量中心での $\boldsymbol{e}_{\hat\theta}$ および $\boldsymbol{e}_{\hat\phi}$ 方向における成分は，同様に，

$$T_{\hat\theta\hat\theta} = T_{\hat\phi\hat\phi} = +\frac{1}{8}\frac{\mu M}{lr^3} \approx +\,0.7\times10^{13}\frac{M/M_\odot}{(r/1\,\mathrm{km})^3}\frac{\mathrm{dyne}}{\mathrm{cm}^2} \tag{32.25b}$$

（圧力の 1 気圧は $1.01\times10^6\,\mathrm{dyne/cm^2}$ であることを思い出せ）．

*16　人間の体は破裂せずに $\gtrsim 100$ 気圧 $\approx 10^8\,\mathrm{dyne/cm^2}$ の張力あるいは圧力に抵抗できない．したがって 1 太陽質量の自由に崩壊している星上の天体物理学者は，星の半径が $R\sim 200\,\mathrm{km}\gg 2M\approx 3\,\mathrm{km}$ であるとき潮汐力によって殺されるだろう．

*17　星が重力半径よりもはるかに小さくなる時間までに，天体物理学者の体のバリオンは測地線に沿って動いていて，彼の筋肉および骨は完全につぶれてしまっている．崩壊のこの最終段階で，時間的な測地線は曲線であって，その曲線に沿って Schwarzschild の "時間" 座標 t は，ほとんど一定である［図 32.1 (a) における $r=0$ 近くの光円錐が狭くなることを参照せよ．また極限 $r\ll 2M$ における式 (31.2) を参照せよ］．天体物理学者の足が t の 1 つの値（たとえば $t=t_f$）で星の表面に接触し，他方彼の頭は曲線 $t=t_h>t_f$ に沿って動く．したがって，天体物理学者の体の長さは公式

$$\begin{aligned}l_{\text{天体物理学者}} &= [g_{tt}(R)]^{1/2}[t_h-t_f] = [2M/R]^{1/2}[t_h-t_f]\\ &\propto R^{-1/2}\propto(\tau_{\text{崩壊}}-\tau)^{-1/3}\end{aligned} \tag{32.26a}$$

に従って増大する．ここに $\tau=[-\int^R|g_{rr}|^{1/2}dr+\text{定数}]$ は，もし天体物理学者がまだ生きているとしたら彼によって測定されるであろうときの固有時間である．そして $\tau_{\text{崩壊}}$ は彼

*16　段階 2：体がつぶれる，人間は死ぬ
*17　段階 3：体は破壊されそして引き延ばされる

が $r=0$ に衝突する時間である．重力場はまた，崩壊の最終段階の間，天体物理学者の体のバリオンが一定の θ および ϕ の世界線に沿って落下すべく制限する．したがって，彼の断面積は法則

$$\mathcal{A}_{\text{天体物理学者}} = [g_{\theta\theta}(R)g_{\phi\phi}(R)]^{1/2}\Delta\theta\,\Delta\phi \propto R^2 \propto (\tau_{\text{崩壊}}-\tau)^{4/3} \tag{32.26b}$$

に従って減少する．式 (32.26a)，(32.26b) を結合することによって，天体物理学者の体の体積は崩壊の最後のわずかの時期に，法則

$$\mathcal{V}_{\text{天体物理学者}} = l_{\text{天体物理学者}}\mathcal{A}_{\text{天体物理学者}} \propto R^{3/2} \propto (\tau_{\text{崩壊}}-\tau) \tag{32.26c}$$

に従って減少する．

無限に大きい潮汐重力による無限大の密度までの物質のこの破壊は，崩壊している星の表面上でのみならず，星の表面外でも $r=0$ の特異点に沿う任意の他の点でも起こる．したがって，外部重力場の半径 $r=2M$ 以下へ冒険するあらゆる馬鹿なロケット技師は，破壊の運命にある．

時空の特異点の，および量子重力効果によって余儀なくされる，古典重力理論で予言される特異点の再考察の可能性の，さらなる議論に対しては，30章，34.6節，および44章をみよ．

32.7　現実的な重力崩壊—概略

*18　不安定性，内方への破壊，地平線，および特異点．これらは任意の星の球状崩壊におけるおもな段階である．**不安定性**：星が，核燃料を使い果たし，内方へゆるやかに収縮して，圧力を保持する電子あるいは光子を原子核に圧縮し始める．これは不安定性を誘起する状態方程式を弱める［詳細に対してはたとえば，Zel'dovich and Novikov（1971）の10.15および11.4節をみよ］．**内方への破壊**：1秒間のわずかな時間で不安定性は，完全なスケールの内方への破壊に発展する．現実の密度分布に対しては，星の中核は急速に内方へ落下し，外被は背後に沿って引きずられる［たとえば，Colgate and White（1966）の数値計算，Arnett（1966,1967），May and White（1966），およびIvanova, Imshennik, and Nadezhin（1969）をみよ］．**地平線**：理想化された球状の場合においては，星の表面は重力半径（“地平線”，外部との伝達の終わり，戻れない点）を通って落下する．星の全体を見渡せる有利な位置からは，これは固有時間の有限の短い経過の後に起こる．しかし外部の有利な位置からは星は地平線に達するのに，その過程において急速に指数関数的に黒くなるけれども，無限大の時間を必要とする［$1/e$ になる時間 $\sim M \sim 10^{-5}(M/M_{\odot})$ 秒］．結果は“ブラックホール”であり，その境界は地平線（重力半径）であり，その内部はけっして外部と意志を疎通することができない．**特異点**：星の内部の全体を見渡せる有利な位置からは，短い固有時間間隔 $\Delta\tau \sim M \sim 10^{-5}(M/M_{\odot})$ 秒以内で地平線を通過した後，特異点に到達する（ゼロ半径，無限大の密度，無限大の潮汐重力）．

*18　球状崩壊のレビュー

*19 この基礎的な状況—不安定性，内方への破壊，地平線，特異点—は現実の星に対してどのような重要性をもつか？ 回転，非球状性，磁場，およびニュートリノの束のような複雑さは定性的な状況を変えるだろうか？ イイエ，球状からの小さい初期の摂動に対してはイイエ．コラム 32.2 および練習問題 32.10 に記述される摂動論による解析は，**現実的な，ほとんど球対称な崩壊は，理想化された崩壊のように，不安定性，内方への崩壊，地平線によって特徴づけられる**．そして Penrose（1965b，34.6 節をみよ）は，**特異点のある型がその後で生ずる**ことを証明している．

高度に非球対称な崩壊はもちろん，もっと知られていない．にもかかわらず，たくさん
*20 の詳細な計算および正確な定理はいくばくかの信頼をもって 2 つの結論を指摘する．(1) **地平線は，（おそらく）質量 M が “すべての” 方向での円周が $C \lesssim 4\pi M$ である領域に**
*21 **収縮されるときにのみ形成される（コラム 32.3）**．(2) **すべての “塵” および重力波が取り除かれてしまった後に，地平線（ブラックホール）の外部重力場は，ほとんどたしかに Schwarzschild 幾何学の Kerr–Newmann 一般化である**（33 章）．**もしそうなら，外部場は，“ホール” に落下した質量，電荷，および角運動量によって一義的に定まる**（このほとんど証明された定理は話し言葉のような題名 “ブラックホールは髪をもたない” を与えられている）．

*22 地平線の内部，そして崩壊の終点（もし何か存在するならば）は今日非常に不十分にしか理解されていない．種々の可能性が 34 章にレビューされるだろう．特異点が起こることは，Penrose, Hawking, および Geroch の定理のお陰で十分な確かさで述べることができる．しかし崩壊する物質および場のすべてであろうと，若干のみであろうと，あるいは何もなくとも，最終的にわれわれの知らない特異点に遭遇する．

コラム 32.2 小さな非球状の摂動をもつ崩壊

[Richard H. Price（1971, 1972a,b）による詳細な計算に基づいている]

A. 密度の摂動

1. 星が崩壊し始めるとき，星は密度の分布について小さい非球状の “塊” をもつ．

2. 崩壊が進むにつれて，塊はますます大きくなる［小さい摂動に対して崩壊の不安定性—Newton 理論においてよく知られている現象，たとえば，Hunter（1967），Lin, Mestel, and Shu（1965）をみよ］．

3. 大きくなる塊は重力波を放射する．

4. 短い波長 ($\lambda \ll M$) の波は，地平線の近く ($r - 2M \lesssim M$) から放射されて，部分的に無限遠へ伝播し，部分的に時空の “背景”Schwarzschild 曲率によって逆散乱

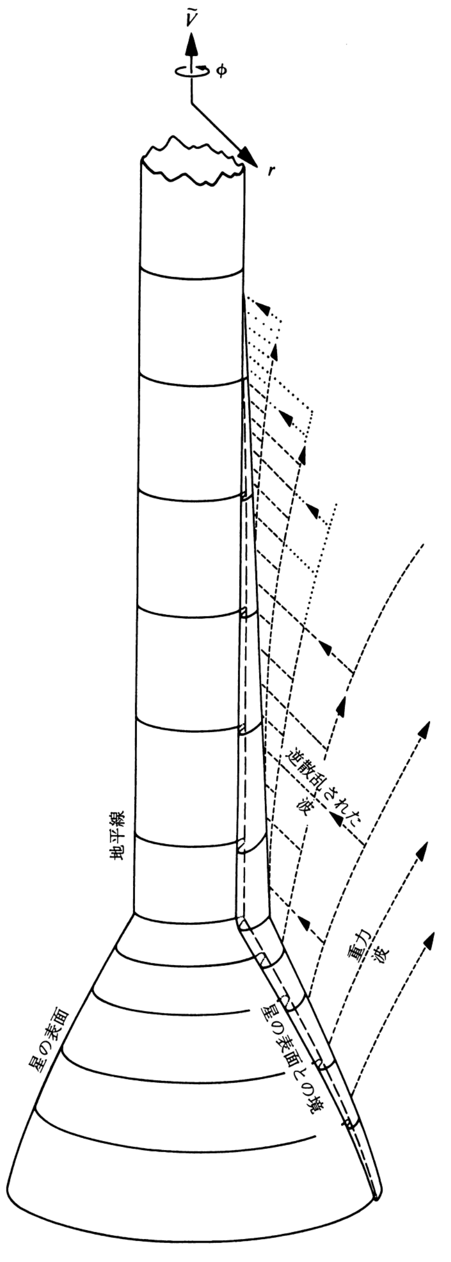
*19 現実的な，球対称でない崩壊について 1972 年の知識の要約
*20 (1) 地平線
*21 (2) ブラックホール
*22 (3) 特異点

される．逆散乱された波は崩壊している星によってつくられる地平線（ブラックホールの表面，重力半径）に伝播する．

5. 長い波長 ($\lambda \gg M$) の波は，地平線の近く ($r - 2M \lesssim M$) から放射され時空の曲率によって完全に逆散乱される．それらの波は $r \sim 3M$ をけっして越えない．それらの波は“ホールへ下降し”伝播して終わる．

6. 星の上の塊は，星が地平線を通って落ち込むときに依然存在して，それによって変形された（塊で覆われた）地平線を創生するか？　ハイ，計算によればそうなる．

7. しかし外部の観測者は，最終の重力場における変形（四重極モーメント）を吟味することによって，“最終の塊”の存在について学ぶことができるだけである．場におけるその最終の変形は，無限大の速さで外部へ伝播しないし伝播できない（瞬間的な“遠隔作用”は存在しない）．それは，ほとんど無限大の波長（地平線の端から任意の外部半径への無限大の赤方偏移）をもつ重力波の形で，光の速さで伝播する．最終の場における変形は，長い波長の任意の他の波のように，$r \lesssim 3M$ での時空の曲率によって完全に逆散乱される．それは外部の観測者に到達できない．外部の観測者はけっして最終の塊の存在について学ぶことができない．**最終の外部場は完全に球状の，塊のない，Schwarzschild 幾何学である！**



入っていく Eddington–Finkelstein 座標に描かれている崩壊

8. 逆散乱の領域 ($2M < r \lesssim 3M$) においてさえ，最終場は塊をもたない．最終の塊の存在についての情報を保持する，逆散乱された波は，同じ情報を保持する外部に進む波と破壊的な干渉をする．結果は外部場および地平線におけるすべての変形の破壊である！

9. 最終のブラックホールは Schwarzschild ブラックホールである！

B. 角運動量についての摂動

1. 星が崩壊し始めるとき，星は小さい，ゼロでない内在的な角運動量（“スピン”）$\boldsymbol{S}$ をもつ．

2. 崩壊が進むにつれて，$\boldsymbol{S}$ は保存される（波によってもち去られる角運動量による非常に小さい無視できる変化を除いて，その変化は波の振幅の 2 乗に比例する．すなわち，星における摂動の振幅の 2 乗，すなわち $\boldsymbol{S}^2$ に比例する）．

3. したがって，外部場はつねにいたるところで角運動量 $\boldsymbol{S}$ の形跡を保持する（形跡については，19 章をみよ）．形跡が地平線近くから外部へ伝播する必要は存在しない．さらに，たとえ試みられても角運動量 $\boldsymbol{S}$ は，保存則のゆえに伝播できないだろう（双極子重力波は存在しない．36.1 および 36.10 節をみよ）．

4. したがって，最終の外部場は変形されない，ゆるやかに回転するブラックホールの外部場である．

$$ds^2 = \underbrace{-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-2M/r} + r^2 d\Omega^2}_{\text{Schwarzschild 幾何学}} \underbrace{-\left(\frac{4S\sin\theta}{r^2}\right)(r\sin\theta\, d\phi)dt}_{\text{回転の形跡，練習問題 26.1，また 19 章をみよ}}$$

ここに極（polar）軸は $\boldsymbol{S}$ に沿って方向づけられている．

C. 電磁場についての摂動

1. 星はその内部における流れによって生成される磁場，および任意の内部電荷分布による電場をもつ．そして電磁放射は星の熱い物質によって放出される．単純さのために，$\boldsymbol{S}$ はゼロと仮定される．

2. 外部電磁場の展開は外部重力場における摂動の展開に似ている．遠くの観測者は変化できる量（磁気双極子モーメント，電気双極子モーメント，四重極モーメント，…）の “最終” 値をけっして知ることはできない．最終値はほとんど無限大の波長の電磁波によって保持され，地平線から伝播しようとする．しかしそれらは外へ出ることはできない．時空曲率はそれらを反射してホールへ逆戻りさせる．それらは出ていく波と破壊的に重ね合わさり，ゼロの正味の場を生み出す．

3. 変化できるすべての他の量と対照的に，電気単極子モーメント（電場の全束，$4\pi\times$ 全電荷に等しい）は保存される．それは，星が崩壊段階を通して，静止したブラックホールの段階へ崩壊するまでけっして変化しない．

4. したがって，最終の外部電磁場は球対称な Coulomb 場である．

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= (Q/r^2)\boldsymbol{e}_{\hat r}\\ \boldsymbol{B} &= 0\end{aligned}\right\}\ \text{静的な観測者 } (r,\theta,\phi,\text{一定})\text{ によって測定されるとき}$$

そして最終の時空幾何学は Reissner and Nordstrøm の幾何学である（電荷を帯びたブラックホール，練習問題 31.8 および 32.1 をみよ）．

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - 2M/r + Q^2/r^2)} + r^2 d\Omega^2$$

D. 一般化：Price の定理

1. 星に“ゼロ静止質量，整数スピンの場”を生成させる［“ゼロ静止質量”は古典場と結合した量子化された粒子に関係する．古典的にそれは，場は大きい距離で Coulomb 法則（$1/r$）で減少することを意味する．スピンはまた量子化された粒子の性質である．古典的にそれは，伝播の方向回りに回転している単色平面波の対称性を記述するものとしてもっとも容易に視覚化される，35.6 節をみよ．スカラー場はスピンゼロをもつ，電磁場はスピン 1 をもつ，Einstein の重力場はスピン 2 をもつ，…．このような場の中で，重力場（$s=2$）および電磁場（$s=1$）のみが現実の宇宙に存在することが知られている．たとえば，さらなる議論に対しては，Dirac（1936），Gårding（1945），Bargmann and Wigner（1948），Penrose（1965a）をみよ］．

2. スピン s の場は十分弱く，そのストレス–エネルギーは星の外部の Schwarzschild 幾何学を非常にわずかにのみ摂動するとする．

3. 外部場を球関数（$s=0$ に対してスカラー球関数，$s=1$ に対してベクトル球関数，$s \geq 2$ に対してテンソル球関数）に分解せよ．そして球関数を通常の整数 l でラベルせよ（単極子に対しては $l=0$，双極子に対しては $l=1$，四重極子に対しては $l=2$ 等）．

4. $l < s$ をもつすべての多重極場は崩壊の間保存される（古典的な放射理論からの定理）．スカラー場（$s=0$）は何も保存しない．電磁場（$s=1$）は単極子部分のみを保存する（電気的な Coulomb 場，および存在しない磁気的な Coulomb 場）．重力場（$s=2$）は単極子部分を保存し（質量に等しい痕跡をもつ），そしてその双極子部分（角運動量を測定する痕跡をもつ．そして標準的な重力的双極子モーメント—それは座標系が星上に中心をもつならばゼロになる）．

5. $l \geq s$ に対しては，そして $l \geq s$ に対してのみ，放射は可能である（スカラー波は任意の多重極をもつことができる．電磁波は双極子および高次の極でなければならない．重力波は四重極および高次の極でなければならない．36.1 節をみよ）．

6. Price の定理は，ほとんど球状の星は，崩壊してブラックホールをつくるにつれて，放射されうるすべてのもの（すべての多重極 $l \geq s$）は完全に放射されてしまうことを述べる．あるものは“無限遠へ離れていく”，またあるものはホールに落ちていく（“強制的にこれが許される”）．最終の場は保存される量によって完全に特徴づけられる（$l < s$ をもつ多重極モーメント）．

7. スカラー場の場合における Price の定理の証明に対しては，練習問題 32.10 を

みよ．

E. 非古典的な場への一般化

ニュートリノ場に対しては Hartle（1971, 1972）および Teitelboim（1972b,c）をみよ，パイオン場に対しては Bekenstein（1972a,b）および Teitelboim（1972a）をみよ．

コラム 32.3　1次元および2次元における崩壊

A. 質問

ブラックホール（何ものもそこから現れえない地平線）を生み出すには，物質を3次元の空間内すべての方向に円周 $\mathcal{C} \lesssim 4\pi M$ まで強く圧縮しなければならないか（準球状の圧縮），あるいは1次元あるいは2次元においてのみ圧縮すれば十分であるか？

B. 1次元に対する答え

容易に一般化される例として，塵の回転楕円体（ゼロ圧力）の重力崩壊を考えよ．回転楕円体は最初の，瞬間的な静止状態で高度に Newton 的である ($r \ggg 2M$) とする．そしてわずかに平らになっている（扁平な）とする．Newton 理論では，塵の任意の均質な，非回転の回転楕円体は崩壊するにつれて均質にとどまるが，しかしその変形は大きくなる［たとえば，詳細に対しては Lin, Mestel, and Shu（1965）をみよ］．したがって，興味ある回転楕円体は内方へ爆発して，無限大の密度をもつが単位表面積あたり有限の質量のパンケーキとなる．塵粒子の最終の運動エネルギーは大ざっぱに粒子の最終のポテンシャルエネルギーに等しい．

$$\frac{1}{2}v^2 \sim \frac{M}{(\mathcal{C}/2\pi)}$$
$$M = \text{回転楕円面の質量},$$
$$\mathcal{C} = \text{最終のパンケーキの周囲}$$

したがって，$\mathcal{C}/2\pi \gg 2M$ である限り，崩壊速度は光よりもはるかに小さくとどまり，そして重力エネルギーは静止質量–エネルギーよりもはるかに小さくとどまる．これは，$\mathcal{C}/2\pi \gg 2M$ に対しては，Newton 的な解析がパンケーキの終点までつねに一般相対論へのすぐれた近似であることを意味する．したがって**地平線は形成されえない**，どんな重力波もほとんど放出されない．全ストーリーは極端に単純であり完全に Newton 的である．しかし，パンケーキの終点は時空の特異点でないから（練習問題

32.8 の終わりにある注意をみよ)，発展は重力半径を越えて進むことができる．そして $\mathcal{C}$ が $\lesssim 4\pi M$ に収縮するにつれて，発展は非常に複雑になり高度に相対論的になる (図 24.3 の“崩壊，追跡，激動のシナリオ”をみよ).

C. 2 次元に対する答え

それほど容易に一般化されない例として，最初高度に Newton 的な，塵の均質な横長の回転楕円体の重力崩壊を考える．このような回転楕円体は崩壊して薄い“糸”あるいは“軸”をつくる [Lin, Mestel, and Shu (1965) をみよ]．回転楕円体の糸状の状態が達成されるときは回転楕円体は依然 Newton 的であると仮定せよ．そのとき回転楕円体は，長さ l，単位長あたりの質量 $\lambda = M/l \ll 1$ をもち，そして急速に収縮している赤道半径 $R \ll l$ をもつ．したがって，糸の各部分は無限大の円柱の部分であるかのように半径方向に崩壊する [“ビーズ”への分割の不安定性を無視せよ．たとえば，Hunter (1967)，Chandrasekhar (1968) をみよ]．半径方向の崩壊速度は光の速さに近づき糸が極度に薄くなったとき，$R \lesssim R_{臨界} \sim l\exp(-1/4\lambda)$ のみ，重力エネルギーは静止–質量エネルギーに近づく．この段階で，Newton 的な崩壊からの相対論的なずれが現れる．Thorne (1972) および Morgan and Thorne (1973) は理想化された無限大の円柱模型を用いて相対論的な効果を解析した．結果は球状の場合あるいはパンケーキの場合のいずれとも非常に異なる．崩壊する円柱は重力波の大きい束を放出する．しかしそれらは崩壊を止める力がない．**崩壊はどのような地平線の創造もなしに糸状の特異点へ内向きに進む (ブラックホールは存在しない!).**

D. 答えへの異議，応答と推測

パンケーキおよび円柱の崩壊はともに，それらの終点までに，とくにパンケーキの崩壊は，止められうると反論できる．パンケーキの厚さがゼロに近づくにつれて，重力の鉛直方向の引っ張りが有限にとどまるが，任意の有限の圧力によって引き起こされる圧力勾配は無限大に近づく．したがって，圧力が崩壊を止める．したがってパンケーキの輪は相対論的な領域 $\mathcal{C}/2\pi \lesssim 2M$ に向かって収縮する．円柱の崩壊において，圧力–密度の関係 $p \propto \rho^\gamma$ をもつ Newton 理論により，重力加速度 a_g および圧力–浮力の加速度 a_p は

$$a_g = -2\lambda/R, \qquad a_p \sim \rho^{-1}(p/R) \propto \rho^{\gamma-1}/R$$

のように変化する．したがって，$\gamma > 1$ (もっとも共通の現実的な場合) に対して圧力は崩壊を止める．しかし $\gamma < 1$ に対しては圧力は崩壊を止めない．相対論的な領域が達成された後にはこれがまた真実であるかどうかは，いまだわからない．

実際に，圧力が崩壊を止める能力はブラックホールおよび地平線の問題に重要でない．重要なことは**最終の円周 $\mathcal{C} \gg 4\pi M$ をもつ長円の崩壊**において，また**最終の糸の**

長さ $l \gg 2M$ をもつ横長の崩壊において，地平線は創造されない．これは，ほとんど球状の崩壊（コラム 32.2）において偏在する地平線と結合すると，以下の推測［Thorne (1972)］を暗示する．**地平線をもつブラックホールは，質量 M が "すべての" 方向における円周が $\mathcal{C} \lesssim 4\pi M$ である領域に収縮されるときに限り形成される**（たいていの推測のように，この推測は多くの異なる数学的な定式化に対して余地を残し，十分曖昧である！）

［練習問題］

32.10　スカラー場に対する Price の定理［ここで提供されるより以上の詳細については Price（1971, 1972a)，また Thorne（1972）をみよ.］

任意の非球状 "スカラー電荷分布" をもつ，崩壊している球状の星は，外部のスカラー場 Φ を生成する．Φ に対する真空の場の方程式は $\Box\Phi = \Phi_{;\alpha}{}^{\alpha} = 0$ である．時空の幾何学に対する場のストレス–エネルギーの逆反応を無視せよ．

(a) 外部場を，外部 Schwarzschild 幾何学に対する Schwarzschild 座標を用いて，スカラー球関数に分解する．

$$\Phi = \sum_i \frac{1}{r} \Psi_l(t,r) Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{32.27a}$$

真空の場の方程式は

$$-\Psi_{l,tt} + \Psi_{l,r^*r^*} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\Psi_l \tag{32.27b}$$

に帰着することを示せ．ここに r^* は 25.5 節および図 25.4 の "カメ座標" である

$$r^* = r + 2M\ln(r/2M - 1) \tag{32.27c}$$

式 (32.27b) は有効ポテンシャル

$$V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right) \tag{32.27d}$$

をもつ平坦な空間の，1 次元の波動方程式であることに注意せよ．この有効ポテンシャルの部分 $[l(l+1)/r^2]$ は "遠心力の障壁" であり，そして部分 $[2M/r]$ は時空の曲率による．スカラー波に対するこの有効ポテンシャルは，Schwarzschild 幾何学内で動く粒子および光子に対する有効ポテンシャルに類似していることに注意せよ（コラム 25.6 および 25.7).

$$(\tilde{V}^2)_{\text{粒子}} = (1 - 2M/r)(1 + \tilde{L}^2/r^2),$$
$$(B^{-2})_{\text{光子}} = (1 - 2M/r)r^{-2}$$

スカラー波のポテンシャルは，光子のポテンシャルのように，すべて $r > 2M$ に対して正である．それは $r = 2M$ で 0 から，障壁の頂点まで増大する．それから $r = \infty$ で 0 に逆に落ちる．

(b) Schwarzschild ブラックホールの物理学的に許される，静的なスカラー波の摂動は存在しないことを示せ［より正確に，式 (32.27b) へのすべての静的な解は，地平線 ($r = 2M, r^* = -\infty$) であるいは半径方向の無限大でのいずれかで無限大になることを示せ］．これは，どうしたわけか崩壊によって形成されるブラックホールは，平静な状態に落ち着きうるまでに星の外部スカラー場を捨てなければならないことを暗示する．

(c) 波動方程式 (32.27b) への一般解は Fourier 変換によって書ける．地平線の近くで始まり，外部へ伝播し，そして部分的に透過され部分的に反射される（"右へ伝播する波"）波に対して，一般解は

$$\Psi_l(t, r^*) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) R_k^l(r^*) e^{-ikt}\, dk \tag{32.28a}$$

ここに

$$d^2 R_k^l / dr^{*2} = [-k^2 + V_{\mathrm{eff}}(r)] R_k^l \tag{32.28b}$$

$$R_k^l = e^{ikr^*} + \varGamma_k^{(R)} e^{-ikr^*} \qquad (r^* \to -\infty \text{ のとき})$$

$$R_k^l = T_k^{(R)} e^{ikr^*} \qquad (r^* \to \infty \text{ のとき}) \tag{32.28c}$$

"右へ伝播する波に対する反射と透過"，$\varGamma_k^{(R)}$ および $T_k^{(R)}$ は，$|k| \ll 1/M$（小さい波数，長い波長）に対して次の漸近形をもつことを示せ．

$$\varGamma_k^{(R)} = -1 + \alpha 2Mik, \qquad T_k^{(R)} = \underbrace{\frac{\beta}{(2l-1)!!}(2Mik)^{l+1}} \tag{32.28d}$$

［極限 $k \to 0$ で完全な反射と完全な破壊的な干渉を生み出す．結果の詳細な議論に対してはコラム 32.2 をみよ］（$\varGamma_k^{(R)}$ の -1 に対して）

［極限 $k \to 0$ で透過はない　コラム 32.2 をみよ］（$T_k^{(R)}$ に対して）

ここに α および β は 1 程度の定数である．Schwarzschild ブラックホールに外部から衝突する波（"左に伝播する波"）に対して類似の解析を与えよ．

(d) 星が地平線に崩壊するとき，(t, r^*) 座標での星の表面の世界線は

$$r^* = R^*(t) \equiv -t - R_0{}^* \exp(-t/2M) + \text{定数} \tag{32.29a}$$

である．ここに $R_0{}^*$ は，表面の 4–加速度の大きさ a（外向きの 4–加速度に対しては $a > 0$）に

$$R_0{}^* = (8M/e)\left\{1 + 16Ma\left[Ma + \left(M^2a^2 + \frac{1}{8}\right)^{1/2}\right]\right\} \tag{32.29b}$$

によって関係していることを示せ．こうして，表面の世界線は地平線の近くでヌルになるようにみえる（$t + r^* \equiv \tilde{V} =$ 定数）．もちろん，これはそこでの座標系の病態による．さらに，Ψ_l の変化率が星の表面上で測定されるときに有限であるためには，星が地平線に近づくときに（$t \to \infty$，$r^* \to -\infty$，$\tilde{U} \to \infty$），星の表面（$\tilde{V} =$ 一定）上のスカラー場は

$$\Psi_l = Q_{l0} + Q_{l1} e^{-\tilde{U}/4M}, \qquad \tilde{U} \equiv t - r^* \tag{32.29c}$$

のように変化しなければならないことを示せ．Q_{l0} は星の表面上でスカラー場の“最終値”であることに注意せよ．それはゼロ波数 (無限大の波長) をもつ出ていく波とみなされうる．そして，**それは完全にそして破壊的に，有効ポテンシャルによって反射される** [式 (32.28d) をみよ，またコラム 32.2 をみよ]．**結論**：スカラー場のすべての多重極は $t \to \infty$ のとき有限の r^* で死に絶える (スカラー場に対する Price の定理)．より詳細な解析に対しては，多重極が死に絶える割合を含めて，Price (1971, 1972a) あるいは Thorne (1972) をみよ．

32.11 Newman–Penrose “定数”

[ここで提供される以上の詳細に対しては，Press and Bardeen (1971)，Bardeen and Press (1972)，および Piir (1971) をみよ.]

Wheeler (1955) は，Schwarzschild 幾何学に内在する l 極の電磁場に対する Maxwell の方程式は波動方程式

$$-\Psi_{l,tt} + \Psi_{l,r^*r^*} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{l(l+1)}{r^2} \Psi_l \tag{32.30}$$

に帰着されうることを示した [式 (32.27b) の電磁気的な類似]．この方程式が解かれた後に，電磁場の成分は $\Psi_l(t, r^*) Y_{lm}(\theta, \phi)$ にある微分演算子を適用することによって得られうる．

(a) 双極子 ($l = 1$) の場に対する電磁気の波動方程式 (32.30) への一般解は，$r^* \to +\infty$ で出ていく波の境界条件で，形

$$\Psi_1 = f_0(\tilde{U}) + \frac{f_1(\tilde{U})}{r} + \frac{f_2(\tilde{U})}{r^2} + \cdots \tag{32.31a}$$

をもつ．ここに

$$\tilde{U} = t - r^* \text{は“遅延時間” である，そして}$$

$$f_1{}' = f_0, \quad f_2{}' = 0, \cdots, f_n{}' = -\frac{(n+1)(n-2)}{2n} f_{n-1} + (n-2) M f_{n-2} \tag{32.31b}$$

時空が平坦である ($M = 0$) とき，この解は

$$\Psi_1 = f_1{}'(\tilde{U}) + f_1(\tilde{U})/r \tag{32.31N}$$

になる [放射場 $f_1'(\tilde{U})$ の $1/r$ 減少は Ψ_1 から分解されている．スカラー波動関数 (32.27a) をみよ]．平坦な時空内に存在しない項 $f_2(\tilde{U})/r^2 + \cdots$ は，出ていく波の時空の曲率による逆散乱に帰することができる．それらはときどき波の “シッポ” とよばれる．

(b) 一般的な静的な双極子場は

$$\begin{aligned} &(f_0)_{\text{静的な}} = 0, \quad (f_1)_{\text{静的な}} \equiv D = \text{双極子モーメント}, \\ &(f_2)_{\text{静的な}} = \tfrac{3}{2} M D, \cdots \end{aligned} \tag{32.32}$$

の形式 (32.31a) をもつことを示せ．

(c) 最初静的である双極子場をもつ星（ブラックホールでない！）を考える．時間 $t=0$ に，星が突然その双極子モーメントを新しい静的な値 D' に変える．式 (32.31b) は f_2 が保存されることを要求する［"**Newman–Penrose (1965) 定数**"］．したがって，f_2 は**つねに古い双極子モーメントに対応する値 $\frac{3}{2}MD$ を示し，$\frac{3}{2}MD'$ にけっして変化できない．**これは双極子モーメントにおける突然の変化によって生成される波のシッポの表れである．このシッポの効果をより明白に理解するために，そして上の結果における重要な欠点を発見するために，遅延時間 $\tilde{U}>0$ に対する解 (32.31) を仮定

$$\begin{aligned}&(1)\ \text{場は}\tilde{U}<0\ \text{に対する静的な形式 (32.32) をもつ}\\&(2)\ f_1=D' \quad (\tilde{U}>0\ \text{に対して})\end{aligned} \tag{32.33}$$

を用いて求めよ．答えを形式

$$\Psi_1=\frac{D'}{r}+\frac{\frac{3}{2}MD}{r^2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2M(D'-D)(-1)^{n+1}(n+1)\tilde{U}^{n-2}}{(2r)^n}+O\left(\frac{M^2}{r^3},\frac{M^2\tilde{U}}{r^4}\right) \tag{32.34}$$

に表現する（無視されている項は $r\gg M$ である限り，すべての $\tilde{U}/r$ に対して保持される項に比べて小さい）．明らかに，級数が収束する限り Newman–Penrose"定数"（$1/r^2$ の係数）は古い D 値を記憶し，上に要求されているように保存される．しかし，級数は $\tilde{U}>2r$ に対しては発散する．すなわち，級数は漸近的に $\frac{1}{3}\times$光の速さで外向きに動く球内で発散する．こうして，**Newman–Penrose"定数" はよく定義されており，そして "$\frac{1}{3}\times$ 光速の円錐" の外部でのみ保存される．**

(d) 式 (32.34) における級数の和を求めて，$\tilde{U}>2r$ に対しても成り立つ解を得よ．

$$\begin{aligned}\Psi&=\underbrace{\frac{D'}{r}+\frac{3}{2}\frac{MD'}{r^2}}_{\text{新しい静的な解}}-\underbrace{\frac{2M(D'-D)}{r}\frac{(\tilde{U}+3r)}{(\tilde{U}+2r)^2}}_{\text{“シッポの項”}}+\mathrm{O}\left(\frac{M^2}{r^3}\right)\\&=\text{級数 (32.34) }[\tilde{U}<2r\ \text{(その級数の収束の領域) に対して}]\\&=\frac{D'}{r}+\frac{3}{2}\frac{MD'}{r^2}+\mathrm{O}\left(\frac{M}{\tilde{U}r},\frac{M^2}{r^3}\right)\qquad(\tilde{U}\gg r\gg M\ \text{に対して})\end{aligned} \tag{32.35}$$

この結果から，**固定された r で最終時間には電磁場は漸近的に静的になる．そして Newman–Penrose の "定数" は新しい双極子モーメントに適当な新しい値 $\frac{3}{2}MD'$ をとることを結論せよ．**

33章
ブラックホール

地球と同じ密度をもち，そしてその直径が太陽の直径よりも250倍大きいはずの明るい星は，引力の結果，その光線の何ものもわれわれに到達することを許さないだろう．したがって宇宙におけるもっとも大きい明るい物体は，この原因によってみえないことも可能である．

P. S. LAPLACE (1798)

33.1 なぜ“ブラックホール”？

*1　Sagredus：“ブラックホール”についてのすべてのこの話は何であるか？ 外部の観測者が星の崩壊を観察するとき，観測者は，相対論的な状態に達するまで，絶えず増大する速さで星が内方に破壊するのをみる．その後，星はゆるやかになり，そしてちょうど星の地平線（重力半径）の外側で“凍ってしまう”ようにみえる．観測者がいかに長く待っても，彼は星がさらに進むのをけっしてみない．けっして視界からなくならない，このような凍った物体に“ブラックホール”という名を，いかに理性的に与えることができるか？

Salvatius：“ブラックホール”という名を別個にとらえよう．まず黒さを考える．たしかに何ものもブラックホールよりも黒くはなりえない．崩壊している星を凍るようにみえさせる赤方偏移そのものは星を暗くし，黒くさせる．光子の不連続性を無視する連続近似で，遠く離れた観測者によって受信される放射の強度は時間が経過するにつれて指数関数的に $L \propto \exp(-t/3\sqrt{3}M)$ で減少する．ここで，$1/e$ になる時間は非常に短く

$$\tau = 3\sqrt{3}M = (2.6\times10^{-5}\mathrm{sec})(M/M_\odot)$$

である．わずかなうちに，星は本質的に黒くなる．光子の不連続性はさらに黒くさせる．星がその地平線を横切る前に放出される光子の数は有限である．したがって指数関数的な崩壊は永久に続くことはできない．最終的に—星が薄暗くなり始める，たったの $10^{-3}(M/M_\odot)$ 秒後（練習問題32.2をみよ）—出ていくであろう最後の光子が遠く離れた観測者に到達する．その後何ものも現れない．星はたんに“本質的に黒い”のでない，その星は“**絶対的に黒い**”のである．

*　“ブラックホール”物理学の基礎のより詳細な説明に対しては，DeWitt and DeWitt (1973) をみよ．

*1　なぜブラックホールはその名に値するかを説明する対話

Sagredus：了解した．しかし私にとって重要であるのは“ホール”という言葉であって“黒い”ではない．ちょうど地平線の外側に永久にただよう物体に対して“ホール”という名がどうして適当とみなせるか？ 光の本当の不在は，物体をみえなくする．しかし物体の表面で信号光を照らすことによって，つねに物体をみることができないか？ そして物体の表面にロケット船で飛び降りて星のバリオンの若干をかき集めることがつねにできないか？ 結局，物体の表面にあるバリオンは外からみたとき，けっして，けっして，どうしたって地平線に落下しない！

Salvatius：あなたの議論は説得力があるように思える．その妥当性を試すために，球対称な系の崩壊を，図33.1の入っていくEddington–Finkelstein図を用いて吟味する．外部の観測者の集団に，あなたが提案したように星の表面で信号光を照らさせる．星の表面を注意深く銀メッキさせ，したがって星はその表面に達するすべての光を逆に反射する．最初（図33.1の時空図におけるずっと下にある）入射する光のビームは星の表面に達し，そして困難なしに逆に信号光として反射される．しかし臨界点が存在する—入射する半径方向のヌル表面 $\mathcal{N}$—それを越えて反射は不可能である．$\mathcal{N}$ に沿って内向きに放出される光子はちょうど地平線を通過するときに星に達する．反射後，これらの光子は地平線に沿って“外向きに”飛び，永久に $r = 2M$ にとどまる．他の光子は信号光が $\mathcal{N}$ を通過した後内向きに放出され，星の表面に達し，星がその地平線の内部に存在するようになった後に初めて反射される．このような光子はけっして輝いている信号光に戻ることはできない．ひとたび地平線の内部に存在すれば，光子はけっして脱出できない．こうして，戻される光

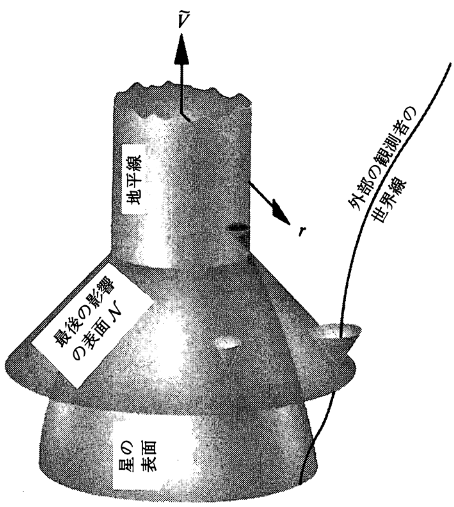


図 33.1　入っていくEddington–Finkelstein座標でみられたときの，ブラックホールをつくる星の球状の重力崩壊．“最後の影響の表面” $\mathcal{N}$ は，崩壊している星の表面と一致して地平線と交差する，入っていくヌル表面である．外部の観測者は，時間について前方に動き，最後の影響の表面を通過した後，外部の観測者は地平線を通って飛び込む前に星と相互作用することはできないし，また星に影響することはできない．こうして，最後の影響の表面をブラックホールの“誕生点”と考えることができる．この表面を通過する前には，外部の観測者は彼の信号光は崩壊している星の形を調査していると言うことができる．この表面を通過した後には，彼は彼の信号をブラックホールの探索とみなすことができる．さらなる議論に対しては，本文をみよ．

子の総数は有限であり，星の固有の光度と同じ黒色の減衰法則に従う．さらに，**もし観測者が彼らの信号光がヌル面 $\mathcal{N}$ を通過する後まで信号光を逆にしないならば，観測者はけっしていかなる反射された光子も受信することができない！** 明らかに，信号光は“凍りついた星”をみるのに有用でない．

Sagredus：私はあなたの議論の論理から逃れることができない．にもかかわらず，みることは凍りついた星と相互作用する唯一の手段でない．私はすでにロケット船に舞い降りて若干のバリオンを星の表面から盗むことを提案した．同様に，物質を凍りついた星に半径方向に内向きに落下させる．物質は星の表面に衝突し，落下の大きい運動エネルギーは熱と出ていく放射に変換されるだろう．

Salvatius：こうして一見したところそのようにみえるだろう．しかし図 33.1 を再び吟味する．舞い降りるロケット船や落下する物質は光線よりも速く内向きに動くことができない．こうして，もし船が表面 $\mathcal{N}$ を通過した後に舞い降りる決心がなされるならば，ロケット船は地平線に突っ込む前に星に達する可能性をもたない．ロケットとパイロットは星に接触し，バリオンを掃き，そして戻って彼らの話を告げることができない．同様に $\mathcal{N}$ の未来へ落下する物質は，地平線を通過する前にけっして星の表面に衝突することができない．表面 $\mathcal{N}$ は，実際“最後の影響の表面”である．ひとたび何者あるいは何物かが $\mathcal{N}$ を通過したならば，彼あるいは物は地平線に突っ込む前にいかなる方法でも星に影響を及ぼしたり，あるいは星と相互作用するいずれの可能性ももたない．**こうして“因果的な”あるいは“相互作用”の観点から，崩壊している星は表面 $\mathcal{N}$ で空間の穴になる**．この穴は最初黒くない．崩壊している星からの放射は $\mathcal{N}$ の後に有限の光の伝播時間のゆえに依然として現れる．ちょうど放射が宇宙の熱いビッグバン爆発から依然として今日われわれに達するように．しかしもし半径 $r \gg 2M$ での観測者が $\mathcal{N}$ を通過した後，時間 $2r$（$\mathcal{N}$ が地平線に達する時間および $R \sim 3M$ で放出された光線が観測者に逆戻りする時間）の間待つならば，彼は新しくつくられた穴が黒く変わり始めるのをみるだろう．その後，時間 $\Delta t \sim (10^{-3}\text{秒})(M/M_\odot)$ 以内に穴は完全に黒くなるだろう．

Sagredus：あなたは私を納得させた．すべての実際的な目的に対して熟語“ブラックホール”はすぐれた記述である．私が 1969 年以前に物理学の文献で発見した，別な熟語，“凍りついた星”および“崩壊した星”は現象の光学的な思い違いの様相を強調している．注意はブラックホールを創造した星から離れなければならない．なぜなら最後の影響の表面を越えてその星と相互作用する手段をもたないからである．星は続いて起こる物理学および天体物理学に無関係である．地平線およびその外部の時空幾何学のみが未来に対して重要である．その地平線を“ブラックホールの表面”とよび，その外部の幾何学を“ブラックホールの重力場”とよぶことに同意しよう．

Salvatius：了解した．

33.2　ブラックホールの重力場と電磁場

球対称で電気的に中性な星の崩壊は，Schwarzschild の線要素

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{33.1}$$

によって記述される外部の重力場をもつ，球状のブラックホールを生み出す．ブラックホールの表面，すなわち，地平線は，$r = 2M =$（重力半径）に位置している．ブラックホールの上および外部の領域，$r \geq 2M$ のみが，外部の観測者に重要である．地平線内部の事象はけっして外部に影響することができない．

現実的な星の重力崩壊（小さいがしかしゼロでない，1 つの符号あるいは他の符号の正味の電荷をもつ非球状の崩壊）は単純な Schwarzschild ホールといくらか異なるブラック
*2 ホールを生み出す．小さい電荷と小さい非対称性をもつ崩壊に対しては，摂動理論の計算（コラム 32.2）は，崩壊している星の質量 M，電荷 Q，および内在的な角運動量 S によって完全に定まる外部場をもつ最終のブラックホールを予言する．大きい非対称性とおそらく大きい電荷をもつ完全に相対論的な崩壊に対しては，最終のブラックホール（もし形成されるならば）はまた M，Q，および S によって一義的に特徴づけられる．これはコラム 33.1 に記述されている有力な定理の組から 1972 年に強く提案されている結論である．

*3 なぜ M，Q，および S はブラックホールの最終の外部場の完全な支配者であるはずであるかを，以下のように発見法的に理解をすることができる．重力と電磁気の任意の孤立した源に内在的なすべての量の中で，M，Q，および S のみが源［保存される Gauss の束の積分，コラム 19.1 および 20.2 節をみよ］の遠く離れた外部場に**一義的な，保存される痕跡**をもつ（そしてそれによって定義される）．星が崩壊してブラックホールを形成するときは，その遠く離れた外部場は M，Q，および S の痕跡を不変に保持することを強制される．実際，M，Q，および S は場の形に固定的なものあるいは制限を与える．最初他の制限が星の内部で，質量，運動量，ストレス，電荷，および流れによって生み出される．しかし最終的には星は地平線に突っ込み，因果的に外部の宇宙から自らを切り離す（長い波長の波が曲がった時空を通って伝播しないことがこの切り離しに重要な役割を演ずる．コラム 32.2 をみよ）．したがって，外部場に対して残る唯一の固定的なものは M，Q，および S の保存される痕跡である．したがって，外部場は与えられた M，Q，および S に対応する一意的な形に速やかに落ち着く．もちろん，落ち着くのは場の力学的な変化と重力波および電磁波の関係した流出を含む．そして，もちろん，流れ出る波は質量と角運動量（しかし電荷でない）を運び去る．それによって M および S を変化させて残す．そして，もちろん外部場は，新しい M および S に自らを再調整しなければならない．しかし経過は急速に収束し，M, Q，および S の明確な最終値とそれらの値によって一意的に定まる外部場をもつブラックホールを生み出す．

---
*2　ブラックホールの構造はその質量 M，電荷 Q，および内在的な角運動量 S によって一意的に定まる
*3　M–Q–S 一意性の発見法的な説明

コラム 33.1 ブラックホールは“髪”をもたない

以下の定理は定常的なブラックホール（“最終”状態に落ち着いたブラックホール）の外部の重力場と電磁場はホールの質量 M，電荷 Q，および内在的な角運動量 S によって一義的に定まる—すなわち，ブラックホールは“髪”をもちえない（他の独立な特徴は存在しない）．詳細なレビューに対しては，Carter（1973）をみよ．

I. Stephan Hawking（1971b,1972a）：定常的なブラックホールは，球状のトポロジーをもつ地平線をもたなければならない．そしてブラックホールは静的（ゼロ角運動量）であるか，あるいは軸対称であるか，あるいは両方のいずれかでなければならない．

II. Werner Israel（1967a,1968）：球状のトポロジーの事象地平線をもつ任意の静的なブラックホールは，その質量 M および電荷 Q によって一意的に定まる外部場をもつ．さらに，これらの外部場はもし $Q=0$ ならば Schwarzschild の解であり，そしてもし $Q\neq 0$ ならば Reisner–Nordstrøm の解（練習問題 31.8 および 32.1）である（両方とも Kerr–Newman の特別な場合である．33.2 節をみよ）．

III. Brandon Carter（1970）：“球状のトポロジーの事象地平線をもつ，電荷をもたない定常的な軸対称なすべてのブラックホールは，互いに変形できないばらばらの群になる．各群におけるブラックホールは 2 つのパラメータ，質量 M および角運動量 S によって一意的に定まる外部の重力場をもつ”（注意：“Kerr 解”—すなわち，$Q=0$ をもつ“Kerr–Newman”解—は 1 つのこのような群を形成する．他の解が存在しないことは非常に本当らしい．しかしこれは 1972 年 12 月現在で証明されていない．Carter の定理は電荷をもつ場合に拡張されうることはまた本当らしい．しかしこれはまた，いまだなされていない）．

IV. すべての 3 つの定理を結合することによってなされる結論

(a) すべての定常的なブラックホールは軸対称である．

(b) すべての静的な（非回転の）ブラックホールは，M および Q によって一意的に特徴づけられる，そして Reissner–Nordstrøm 形式をもつ．

(c) すべての電荷をもたない，回転しているブラックホールは，異なるばらばらの群になる．与えられた群内の各ブラックホールは，M および S によって一意的に特徴づけられる．Kerr 解は 1 つのこのような群を形成する．おそらく他の群は存在しないだろう．

V. 注意と警告

(a) 定理についての上の陳述はすべていくらか発見法的である．各定理は時空の大

域的な性質について，ここで述べられていない若干の高度に技術的な仮定をする．これらの仮定は物理学的に妥当でありそして無害にみえるが，そうでないかもしれない．

(b) ブラックホール物理学における進歩は非常に急速なので，本書が出版されるときまでに，現実に "ブラックホールは髪をもたない" ことを証明する，上述よりもさらに強力な定理が十分存在するだろう．

(c) 上述の定理およびそのような他の定理を証明するのに用いられる "大域的な幾何学" の技術への洞察に対しては，34 章をみよ．さらに大きい詳細については Hawking and Ellis (1973) による来るべき本をみよ．

(d) ブラックホールは，衰えてしまったレプトンによって引き起こされるどのような弱い相互作用も及ぼすことができないことを示す解析については，Hartle (1971,1972) および Teitelboim (1972b,c) をみよ．ホールへ落ちてしまったバリオンから強い相互作用が存在しないことを示す同様な解析については，Bekenstein (1972a,b) および Teitelboim (1972a) をみよ．

与えられた M，Q，および S およびそれらの与えられた痕跡に対する外部場を計算する問題は，プラトー (Plateau) の問題—与えられた形*の針金に定着している石けんの薄膜の形を計算すること—に類似している．曲がった針金に広がる最小面積の表面を求めることによって石けん膜の形を計算する．最小面積の条件は石けん膜を記述する微分方程式に通ずる．それは針金の形によって課される制限を受けて解かれなければならない．

*4　ブラックホールの外部場を計算するためには，半径方向の無限遠での M，Q，および S の固定された痕跡を受け，そして物理学的に特異性をもたない地平線（地平線で無限大の曲率をもたない!）の存在を条件とし，相互作用している重力場と電磁場に対する "作用積分" $\int(\mathcal{R}+\mathcal{L})\sqrt{-g}d^4x$ を極値化する (21 章をみよ)．作用を極値化することは M, Q, および S によって刻み込まれる制限，および地平線の存在を条件とする結合した Einstein–Maxwell の場の方程式を解くことに同等である．解の導出およびその一意性の証明はここで与えられるにはあまりにも複雑すぎる（コラム 33.1 に引用されている文献をみよ）．しかし，解は "**Kerr–Newman 幾何学**" および関係する電磁場であることがわかる**.

*5　Boyer and Lindquist (1967) の t, r, θ, ϕ 座標 (Schwarzschild 座標の一般化) で書くと，Kerr–Newman 幾何学は形式

* プラトーの問題について，たとえば，Courant (1937), Darboux (1941), あるいは Lipman Bers (1952) の p.157 をみよ．

** 電荷をもたない ($Q = 0$) バージョンは，Einstein の真空の場の方程式への解として，Kerr (1963) によって初めて発見された．電荷をもつ一般化は Einstein–Maxwell の場の方程式への解として Newman, Couch, Chinnapared, Exton, Prakash, and Torrence (1965) によって初めて発見された．後になって初めてブラックホールへのつながりが発見された．コラム 33.1 をみよ．

*4　ブラックホール構造に対する変分原理

*5　ブラックホール構造の詳細

*6
$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}[dt - a\sin^2\theta\, d\phi]^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(r^2+a^2)\, d\phi - a\, dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \tag{33.2}$$

をもつ．ここに

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \tag{33.3a}$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta \tag{33.3b}$$

$$a \equiv S/M \equiv \text{単位質量あたりの角運動量} \tag{33.4}$$

対応する電磁場のテンソルは，2–形式（$\boldsymbol{dx}^\alpha \wedge \boldsymbol{dx}^\beta \equiv \boldsymbol{dx}^\alpha \otimes \boldsymbol{dx}^\beta - \boldsymbol{dx}^\beta \otimes \boldsymbol{dx}^\alpha$ を思い出せ）として書かれると，

*7
$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} = {} & Q\rho^{-4}(r^2 - a^2\cos^2\theta)\boldsymbol{dr}\wedge[\boldsymbol{dt} - a\sin^2\theta\boldsymbol{d\phi}] \\ & + 2Q\rho^{-4}ar\cos\theta\sin\theta\boldsymbol{d\theta}\wedge[(r^2+a^2)\boldsymbol{d\phi} - a\boldsymbol{dt}]\end{aligned} \tag{33.5}$$

である．

計量に対する表現 (33.2) および電磁場に対する表現 (33.5) はぞっとするほど長い．したがって，それらを用いた詳細な計算を試みる前にそれらへのおよびそれらの言外の意味へのある定性的な洞察を展開することは有用である．コラム 33.2, 33.3, および 33.4 は，Kerr–Newman 幾何学の重要な特徴の要約およびブラックホールの物理学および天体物理学の要約を，導出なしに提供することによって定性的な洞察を展開する．本章の残りはコラム 33.2–33.4 に引用されている結果の若干，しかしすべてでない，の正当化および導出であり，トラック–2 に相当する．

コラム 33.2　Kerr–Newman 幾何学および電磁場

I. 計量および電磁場に対する式

A. 式に現れるパラメータ

M = 質量，Q = 電荷，$a \equiv S/M$ = 単位質量あたりの角運動量，すべては遠く離れた場へのそれらの標準的な痕跡によって測定されるとき．

B. パラメータについての制限

Kerr–Newman 幾何学は地平線をもつ．したがって $M^2 \geq Q^2 + a^2$ である場合に限りブラックホールを記述する．この制限を破る任意の崩壊している物体で，遠心力およびあるいは静電気の反発は大きさが $\sim M$ に達する前に崩壊を止めることはあり

*6 (1) 計量（“Kerr–Newman 幾何学”）

*7 (2) 電磁場

そうである．式 (33.56) をみよ．

C. 限定的な場合

$Q=0$	Kerr（1963）幾何学,
$S=0$	Reisner–Nordstrøm 幾何学および電磁場（練習問題 31.8 および 32.1）,
$Q=S=0$	Schwarzschild 幾何学,
$M^2=Q^2+a^2$	“極端な Kerr–Newman 幾何学”

D. Boyer–Lindquist (1967) 座標 (t, r, θ, ϕ, Schwarzschild 座標の一般化．ブラックホールは ϕ 方向に回転する)

$$\begin{aligned} ds^2 = &-(\Delta/\rho^2)[dt - a\sin^2\theta\, d\phi]^2 + (\sin^2\theta/\rho^2)[(r^2+a^2)d\phi - a\, dt]^2 \\ &+ (\rho^2/\Delta)dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \qquad \rho^2 \equiv r^2 + a^2\mathrm{cosd}^2\theta \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} = &\, Q\rho^{-4}(r^2 - a^2\cos^2\theta)\boldsymbol{dr} \wedge [\boldsymbol{dt} - a\sin^2\theta \boldsymbol{d\phi}] \\ &+ 2Q\rho^{-4} ar\cos\theta\sin\theta \boldsymbol{d\theta} \wedge [(r^2+a^2)\boldsymbol{d\phi} - a\,\boldsymbol{dt}] \end{aligned} \tag{3}$$

E. Kerr 座標 [$\tilde{V}, r, \theta, \tilde{\phi}$, 入っていく Eddington–Finkelstein 座標の一般化．($\tilde{V}, \theta, \tilde{\phi}$)=一定は入射する “半径方向の” ヌル測地線である．ブラックホールは $\tilde{\phi}$ 方向に回転する]

Boyer–Lindquist への関係

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}\tilde{V} &= \boldsymbol{dt} + (r^2+a^2)(\boldsymbol{dr}/\Delta), \\ \boldsymbol{d}\tilde{\phi} &= \boldsymbol{d\phi} + a(\boldsymbol{dr}/\Delta) \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} ds^2 = &-[1-\rho^{-2}(2Mr - Q^2)]d\tilde{V}^2 + 2dr\, d\tilde{V} + \rho^2 d\theta^2 \\ &+ \rho^{-2}[(r^2+a^2) - \Delta a^2\sin^2\theta]\sin^2\theta\, d\tilde{\phi}^2 - 2a\sin^2\theta\, d\tilde{\phi}\, dr \\ &- 2a\rho^{-2}(2Mr - Q^2)\sin^2\theta\, d\tilde{\phi}\, d\tilde{V} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} = &\, Q\rho^{-4}[(r^2 - a^2\cos^2\theta)\boldsymbol{dr} \wedge \boldsymbol{d}\tilde{V} - 2a^2 r\cos\theta\sin\theta \boldsymbol{d\theta} \wedge \boldsymbol{d}\tilde{V} \\ &- a\sin^2\theta(r^2 - a^2\cos^2\theta)\boldsymbol{dr} \wedge \boldsymbol{d}\tilde{\phi} + 2ar(r^2+a^2)\cos\theta\sin\theta \boldsymbol{d\theta} \wedge \boldsymbol{d}\tilde{\phi}] \end{aligned} \tag{6}$$

II. 時空幾何学の性質

A. 対称性（33.4 節）: Boyer–Lindquist 座標における計量係数は t および ϕ に無関係である．そして Kerr 座標では $\tilde{V}$ および $\tilde{\phi}$ に無関係である．こうして時空幾何学は “時間に無関係であり”（定常的である），そして軸対称である．これら 2 つの対称性と関係する “Killing ベクトル”（25.2 節）は $(\partial/\partial t)_{r,\theta,\phi} = (\partial/\partial \tilde{V})_{r,\theta,\tilde{\phi}}$ および

$(\partial/\partial\phi)_{t,r,\theta} = (\partial/\partial\tilde{\phi})_{\tilde{V},r,\theta}$ である．

B. 慣性系の引きずりおよび静的な極限（33.4 節）

1. ブラックホールの角運動量による“慣性系の引きずり”は遠く離れた星に相対的なジャイロスコープの歳差運動を生み出す．この歳差運動量によってブラックホールの角運動量を定義し測定する（19.2 および 19.3 節をみよ）．

2. 引きずりは，ブラックホールの地平線に近く接近するにつれて，ますます極端になる．地平線に達する前に，

$$
\begin{aligned}
r &= r_0(\theta) \\
&\equiv\ M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2\cos^2\theta}
\end{aligned} \tag{7}
$$

によって記述される表面で，引きずりは非常に極端になるのでどのような観測者も遠く離れた星に相対的に，そこで静止してとどまる（すなわち，“静的である”）ことはおそらくできない．この表面でおよび内部で（“**静的な極限とよばれる**”），固定された r および θ をもつすべての観測者は，ブラックホールが回転するのと同じ方向にブラックホールの周りを回らなければならない．

$$
\begin{aligned}
\Omega \ &\equiv\ d\phi/dt \\
&> \frac{a\sin\theta - \sqrt{\Delta}}{(r^2+a^2)\sin\theta - \sqrt{\Delta}a\sin^2\theta} \\
&(\geq 0,\ \ a = S/M > 0\ \ \text{および}\ \ r \leq r_0 \text{に対して})
\end{aligned}
$$

静的な極限内部の固定された (r,θ) で，観測者がいかに激しく彼のロケットエンジンを爆発させても，彼はけっして遠く離れた星に相対的な彼の角運動量を止めることができない．

3. 上述の陳述に対する数学的な基礎は次のことである．形式，$(r,\theta,\phi) =$ 一定［接線ベクトル $\propto \partial/\partial t =$ “時間方向についての Killing ベクトル”］の世界線は，静的な極限の外部で時間的であることから，その内部で空間的であることに変化する．したがって，静的な極限上および内部で，観測者は静止してとどまることはできない．

C. 地平線（33.4 節）

1. 地平線は

$$
r = r_+ \equiv M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \tag{8}
$$

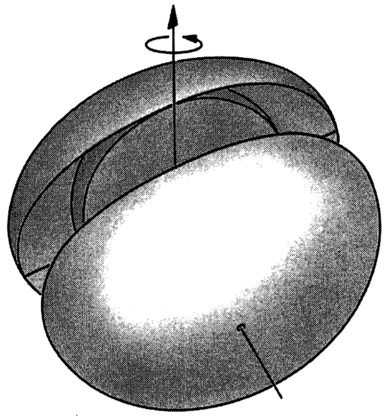
に位置している．

2. 非回転のブラックホールの Schwarzschild 地平線についてのように，ここでもまた，粒子および光子は地平線を通って内部へ落下できる．しかし粒子あるいは光子は地平線を通って外部へ現れることができない．

3. 地平線は出ていくヌル測地線（出ていく光子の世界線）によって“生成される”．

D. エルゴ球（Ergosphere）（33.4 節）

1. “エルゴ球” は地平線と静的な極限との間の空間–時間の領域である．それはブラックホールの物理学における基本的な役割を演ずる（コラム 33.3，33.7 節）．



地平線，エルゴ球および静的な極限の定性的な表示［Ruffini and Wheeler (1971b) より改変］．

2. 静的な極限と地平線は，ブラックホールの回転軸によって切られる点（$\theta = 0, \pi$）で接触する．それらは $a = 0$（回転がない）でなければ，地平線の外部に静的な極限をもち，他のところでよく分離されている．$a = 0$ のときは，静的な極限と地平線は一致する．慣性系の引きずりは存在せず，エルゴ球は存在しない．

E. Boyer–Lindquist 座標における特異点

1. 非回転のブラックホールに対しては，Schwarzschild 座標は地平線で特異的になる．特異点の 1 つの表示は，任意の粒子あるいは光子が地平線に達するのに要求される座標時間が無限大となることである，$r \to 2M$ のとき $t \to \infty$．特異点を取り除く 1 つの方法（Eddington–Finkelstein の方法）は，t を落下する光子に結びつけられたヌル座標によって置き換えることである．

$$\tilde{V} = t + r + 2M \ln |r/2M - 1|$$

［したがって $(\partial/\partial r)_{\tilde{V},\theta,\phi}$ は光子の世界線への接線ベクトルである.］

2. 回転しているブラックホールに対しては，Boyer–Lindquist 座標は，Schwarzschild 座標の一般化であるので，地平線においてもまた特異的である．任意の粒子あるいは光子が地平線に達するには無限大の座標時間を要し，$r \to r_+$ のとき $t \to \infty$ である．しかしそれはすべてでない．慣性系の引きずりは地平線近くの粒子および光子を，ブラックホールの周りに $\Omega \equiv d\phi/dt > 0$ で回らせる．したがって，地平線に落下する（$r \to r_+$）粒子に対しては，$t \to \infty$ のときにまた $\phi \to \infty$ である（地平線の周りで世界線は無限大にねじれている）．

3. 座標の特異点を取り除くには，地平線の近傍で座標時間の無限大の圧縮，および無限大のねじれの戻しを遂行しなければならない．Kerr 座標はこれを，t をヌル座標 $\tilde{V}$ で置き換え，そして ϕ をねじれのない角座標 $\tilde{\phi}$ で置き換えることによって達成する．

$$\boldsymbol{d}\tilde{V} = \boldsymbol{d}t + (r^2 + a^2)(\boldsymbol{d}r/\Delta),$$
$$\boldsymbol{d}\tilde{\phi} = \boldsymbol{d}\phi + a(\boldsymbol{d}r/\Delta)$$

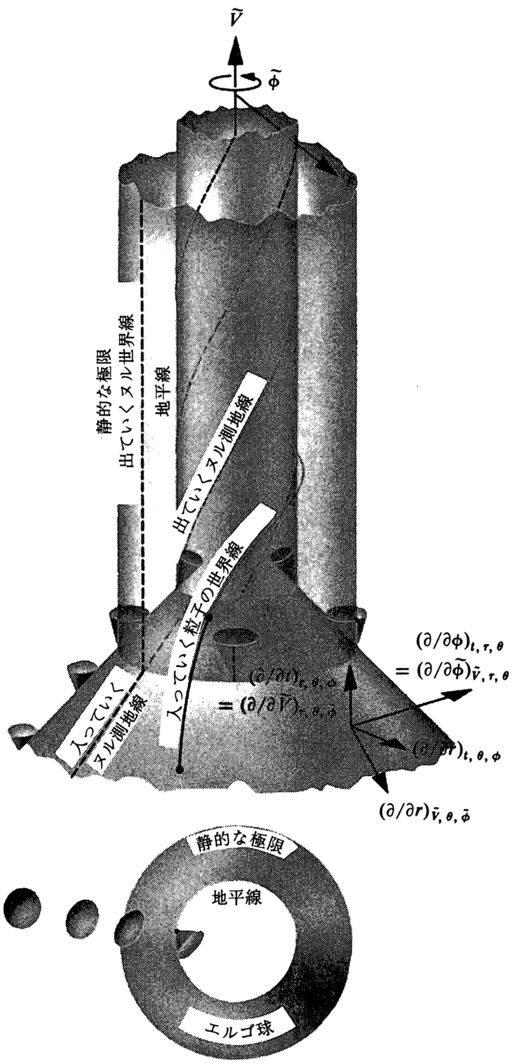
新しい座標の両方は，落下する光子の特別な群の世界線に結びついている．$(\partial/\partial r)_{\tilde{V},\theta,\tilde{\phi}}$ はこの光子の群の世界線への接線ベクトルの場である（入射する主要なヌル合同，33.6 節）．

F. 時空図

1. Kerr 座標における時空図は，Schwarzschild 幾何学に対する Eddington–Finkelstein 図にきわめて似ている．両方の場合に，一定の $\tilde{V}$ の表面を水平面としてでなく，“逆向きの光円錐”（“45 度の表面”）として描く．なぜならそれらは入射光子の世界線によってつくられるからである．同等に，一定の $\tilde{t} \equiv \tilde{V} - r$ の表面を水平面として描く．

2. Kerr 図と Eddington–Finkelstein 図との間の主要な相違は，以下のことである．(a) Kerr–Newman 幾何学は球状でないから，1 つの回転の自由度が削除された Kerr 図は，幾何学についての情報を失う．Kerr 図は通常赤道“平面”，$\theta = \pi/2$ に対して描かれる．(b) ちょうど地平線が光円錐を内部に引っ張るように，慣性系の引きずりは $a > 0$ および $r =$ 一定 に対して光円錐を増大する $\tilde{\phi}$ の方向に傾ける．(c) 光円錐の内部にいく境界（$dr/d\tilde{V} = -\infty$）は増大する $\tilde{\phi}$ の方向に傾かない．Boyer–Lindquist 座標から Kerr 座標への変換は，さもなければ“系の引きずり”によって生み出されるであろうが，r を減少させるとともにねじれをほどく．

“極端な Kerr”ブラックホール（$Q=0$, $a=M$）の時空を通る赤道薄片（$\theta=\pi/2$）に対する Kerr 図．



半径の関数としての光円錐の形を示す，上から見た図．

3. 光円錐の形は静的な極限と地平線の特別な特徴を明かす．静的な極限では，鉛直の世界線［$r, \theta, \tilde{\phi}$ は一定，$(\partial/\partial\tilde{V})_{r,\theta,\tilde{\phi}} = (\partial/\partial t)_{r,\theta,\phi} =$ 接線ベクトル］は光円錐上に存在する．地平線では光円錐は，地平線へのただ 1 つの接線を除いて，完全に内向きに傾く．接線は $d\tilde{\phi}/d\tilde{V} = a/({r_+}^2 + a^2) \neq 0$ をもつことに注意せよ．同等に，地平線を生成する出ていくヌル測地線は，地平線の周りにねじれる［（赤白 2 色の）理髪店の看板柱のねじれ］，これは慣性系の引きずりの依然として別な表れである．

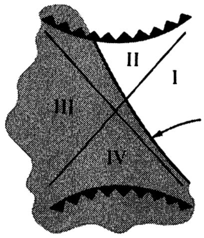
4. Kerr 図は，Eddington–Finkelstein 図のように，忠実で，特異的でない方法で

地平線を通っての落下を記述する.

5. [術語 "Kerr 図" は誤った名称である. 今日他の人たちは Kerr の座標系を用いてこのような図を構成するけれども, Kerr は自らこのような図を発表していない. Penrose はこのような図の創始者であり, 最大の開発者である(たとえば, Penrose, 1969 をみよ). しかしいくつか別な型の図が Penrose の名前をもつので, それらの図すべてに Penrose にちなんで彼の名前をつけることは混乱させるだろう].

G. Kerr–Newman 幾何学の最大の解析的な延長

1. Schwarzschild 幾何学をすべての源から離れて抽象するとき(31章), Schwarzschild 幾何学は2つの異なる宇宙を結びつける, 膨張したり再収縮したりする橋を記述することを発見する. しかしブラックホールの状況においては, Schwarzschild 幾何学の半分のみ(領域 I および II)が重要である. 他の半分(領域 III および IV)は崩壊してブラックホールを形成する星の内部によって完全に置き換えられる. Schwarzschild 幾何学の一部分のみがかかわるので, 入っていく Eddington–Finkelstein 座標—それは I および II をよく記述するが, しかし III および IV をうまく記述できない—はブラックホール物理学によく適している.



2. 同様に, Kerr–Newman 幾何学をすべての源から離れて抽象するとき, Kerr–Newman 幾何学は今まで疑ったであろうよりもはるかに大きく, そしてはるかに複雑な時空多様体を記述することを発見する. Kerr–Newman 幾何学のこの "最大の解析的な延長" は Boyer and Lindquist(1967)によっておよび Carter(1966a,1968a)によって解析されている. しかしそれはブラックホールの題目に対して, 2つの理由のためにまったく重要でない. 第1に Schwarzschild と同様に崩壊してブラックホールを形成した星は, Kerr–Newman 多様体の内向きの延長の多くを置き換える. 第2は星の外部でも, Kerr–Newman 幾何学は初期の時代に, 真実の幾何学を適切に表していない. 初期の時代に星は崩壊への道に到達していない. 星の重力の重要性は, 肉挽き機にかけられていない山あるいは突出部あるいは乱気流あるいは別な特異性から生ずる. 幾何学は(1)距離によって割られた質量のように, 大きい距離に対して変化する項によって, そして(2)距離の2乗によって割られ, そして1次の球関数によって掛けられた角運動量のように変化する他の項, しかしまた(3)高次の球関数によって掛けられた高次の質量モーメントに比例する高次の項によって, 平坦さからそれる. これらの高次の項は一般に初期の時代には Kerr–Newman 幾何学の数学的な解析における対応する項からそれるだろう—時間が経過するにつれて逸脱は死に絶えるだろうけれども. 球対称な系に対しては, このような高次の項は起こらないしあるいは起こりえない. したがって外部の幾何学は崩壊のすべての段階で, Schwarzschild 的である. しかし, 系が球対称性を欠くときは, 外部の幾何学は最初 Kerr–Newman の特徴からそれる. **崩壊が起こった後に初めて**(漸近的な未来), **地平線の領域内でおよび**

外部で **Kerr–Newman 幾何学はブラックホールを忠実に記述する**．この領域は非特異的な方法で Kerr 座標および Kerr 図によって記述される．そしてそれが本書が探求する唯一の領域である．

H. 試験粒子の軌道

33.5–33.8 節およびコラム 33.5 をみよ．

III. 電磁場の性質（33.3 節）

A. ブラックホールから遠く離れて，時空がほとんど平坦なところでは，通常の球座標系 ($\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} = \boldsymbol{d}t, \boldsymbol{\omega}^{\hat{r}} = \boldsymbol{d}r, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} = r\boldsymbol{d}\theta, \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} = r\sin\theta\boldsymbol{d}\phi$) で，電場および磁場は支配的な成分

$$E_{\hat{r}} = \frac{Q}{r^2},$$
$$B_{\hat{r}} = \frac{2Qa}{r^3}\cos\theta, \quad B_{\hat{\theta}} = \frac{Qa}{r^3}\sin\theta$$

をもつ．これらは

$$Q = \text{ブラックホールの電荷}$$
$$\mathcal{M} \equiv Qa = \text{ブラックホールの磁気双極子モーメント}$$

を表す．

B. ジャイロ磁気回転比，$\gamma \equiv$ (磁気モーメント)/(角運動量）は，$Q/M =$ (電荷)/(質量)，ちょうど電子に対するように等しいことに注意せよ！

C. 磁気モーメントの値は，ブラックホールのすべての他の特徴のように，ホールの質量，電荷，および角運動量によって一義的に定まる．$\mathcal{M} = QS/M$．これはブラックホールは “髪” をもたないという定理（コラム 33.1）を例示する．

D. 他の電気モーメントおよび磁気モーメントはゼロでなく，M，S，および Q によって一義的に定まる．

E. ブラックホールの近くでは，時空の曲率は電荷を帯びた，回転しているブラックホールによって生み出される電場および磁場をひずめる．このひずめられた場の数学的な記述に対しては，Cohen and Wald（1971）をみよ．図による表現に対しては，Hanni and Ruffini（1973）をみよ．

コラム 33.3　ブラックホールの天体物理学

自然の中のブラックホールは，星と同じように，多種多様である天体物理学の過程に参加するはずである．これらの過程と関係する観測可能な現象を捜索することによって，天文学者は 1970 年中のあるとき，最初のブラックホールを発見するよい機会を

もつ．このコラムは観測可能な天体物理学の過程，およびいくつかの重要な文献をリストする．

I. 形成の力学

A. “直接的に，孤立して” 重い星（$M \gtrsim 3M_\odot$）がほとんど球状に崩壊し，崩壊した中性子星の中核を生み出し，それが重すぎて重力に対して自らを支えられない．重力は中核を内部に引っ張り，地平線とブラックホールを生み出す［May and White (1966, 1967)，本書の 32 章］.

B. “非直接的に孤立して” 図 24.3 に描かれている，“崩壊，追求，そして激突の筋書き”［Ruffini and Wheeler (1971b)］.

C. “活動の真っ最中に” 密度の高い群に集められた星（たとえば，銀河の中核）がエネルギーを交換する．ある星はエネルギーを獲得して暈へ立ち去る．他の星はエネルギーを失いより圧縮された群をつくる．この分離の過程が続く．群は非常に圧縮されるので衝突が起こりガスは立ち去らされる．ガスは明らかに重力ポテンシャルの中心へ動く．それから新しい星が形成される．過程は続く．最終的には星と星との衝突は十分エネルギー的になり，そして非弾性的になるので衝突する星の中心が合体する．このようにして超越的に重い物体が形成され進化するだろう．最終的には (1) 多くの “小さい” 星が崩壊して “小さい” ブラックホール（$M \sim M_\odot$）を形成するだろう．(2) 1 個あるいはそれ以上の超重量星が崩壊して巨大なブラックホール（$M \sim 10^4 M_\odot$ から $10^9 M_\odot$ まで）を形成するだろう．(3) 星とガスとホールの全集合体は非常に稠密になり，ただ 1 つの巨大なホールになるだろう［Sanders (1970)，Spitzer (1971)，Lynden–Bell (1967, 1969)，Colgate (1967)，本書の 24.5–25.7 節］.

D. “原始的に” 膨張している宇宙の初期の密度分布についての摂動が崩壊を生み出して，“原始的なブラックホール” を生むだろう．これらのホールは引き続く放射および物質の付着によって成長するだろう．今日まですべてのこのようなホールは巨大な物体に成長しているだろう［$M \sim 10^{17} M_\odot$; Zel'dovich and Novikov (1966)．しかしそれらのいくつかはこのような成長を免れただろう，そして 10^{-5}g ほどに小さくなるだろう［Hawking (1971a)］.

II. どれくらい多くのブラックホールが今日われわれの銀河に存在するか？

Peebles (1972) はこの問題と，近い未来にブラックホールを発見することに対する見通しのすぐれたレビューを与えた．彼は，“われわれの銀河の円盤の質量の相当な部分がブラックホールに崩壊できる星に蓄積されている［遠く昔に]….それが示すのは，銀河の円盤は 10^9 個程度のブラックホールを含むだろうということである” と述べている．

III. “生きている” ブラックホール対 “死んでいる” ブラックホール

A. Schwarzschild ブラックホールは，質量–エネルギーの何ものもけっして抽出で

きないという意味で“死んでいる”．この“死”の 1 つの様相—Schwarzschild ブラックホールは小さい摂動に対して安定であるという事実—は，(1) 大きい質量の最終的な“基底状態”との同定に対して，そして (2) 一般相対性理論はブラックホールの可能な存在を予言するといういかなる主張に対しても，本質的である [安定性の証明に対しては Vishveshwara (1970) をみよ．問題は Regge and Wheeler (1957) によって定式化され，必要な技術の多くが展開された．また Zerilli (1970a) による本質的な寄与がある]．こうして Schwarzschild ブラックホールに入射する重力的な (あるいは他の) 放射の小さいパルスは，ブラックホールを非常に異なる物体あるいは状態へ遷移させることを始めない．

B. Kerr–Newman ブラックホール—それは回転しているかあるいは電荷を帯びているかあるいは両方—は死んでいない．質量–エネルギーへの回転および電磁気的な寄与は抽出されうる (数学的な詳細に対して 33.7 および 33.8 節をみよ)．こうして，このようなブラックホールは“生きている”．それらはエネルギーをそれらの周囲に注入できる．外部の装置の適切な調整によって，指数関数的に増大するエネルギーの解放の引き金を引くことができる [Press and Teukolsky (1972)]．しかし摂動される孤立したブラックホールに対しては，解放はつねに“支配され”そして減衰される．すなわち Kerr ブラックホールは任意の古典的な状況において安定である [Press and Teukolsky (1973)]．

C. 崩壊してブラックホールを形成できる多くの物体 (重い星，銀河系の中核,…) は，非常に多くの角運動量をもつのでこれらの物体が生み出すホールは“非常に生きている”はずである (a はほとんど M に等しい，S はほとんど M^2 に等しい) [Bardeen (1970a)]．

D. 対照的に，宇宙におけるブラックホールは実質上の電荷をもたない．すなわち，すべてのブラックホールは $Q \ll M$ をもつことはまったく確からしい (しかし確実からははるかに遠い)．$Q \sim M$ (たとえば，具体的なために $Q > 0$) をもつブラックホールは電子には，引力の静電気力を与えるだろう．そして陽子には，反発の静電気力を与えるだろう．それはホールの重力の引っ張りよりも因子

$$\frac{(\text{静電気力})}{(\text{重力})} = \frac{eQ}{\mu M} \sim \frac{e}{\mu} \sim 10^{20}$$

だけ大きい．ここに e は電子の電荷でありそして μ は電子 (あるいは陽子) の質量である．このような巨大で特異な力は十分な電荷をホールの外部から引っ張り込んでホールを中性化するだろう．

E. しかし中性子星に対する“単極子の誘導過程”[Goldreich and Julian (1968)] から，電荷の中性化は時には回避されうることを学んだ．任意のブラックホール過程がおそらく中性化を妨げうるかどうかは 1972 年にはわからない．

IV. ブラックホールとその環境との相互作用

A. 重力の引っ張り：ブラックホールは周囲の物質と星に重力の引っ張りを及ぼす．引っ張りは，半径 $r \gg M$ で，同じ質量をもつ星の引っ張りと区別できない．

B. 降着および X 線と γ 線の放出：ブラックホールを取り囲むガスは内方へ引っ張られ，断熱的な圧縮，衝撃波，乱気流，粘性，などによって熱せられる．ガスは地平線に達する前に非常に熱くなるので，X 線およびおそらく γ 線ほどの大きい束をも放出する．こうして，降着する物質はブラックホールを，成長する "白い" 物体に転換できる [文献のレビューに対しては，Novikov and Thorne (1973) をみよ]．非回転のガス雲からの降着はブラックホールの角運動量を減少しようとする ["負" の角運動量をもつ粒子の優先的な降着，Doroshkevich (1966)，Godfrey (1970a)]．しかしホールを取り囲んでいるガスはホール自身と同じ方向に回転し，そして $S \sim M^2$ を保持する傾向がある [より正確には，$S \approx 0.998M^2$，Thorne (1973b)]．

C. ブラックホールに落下する物質の塊 ("小惑星" あるいは "惑星" あるいは星) は，落下するときに重力波を噴出するはずである．放射される全エネルギーは $E \sim 0.01\mu(\mu/M)$，ここに μ は物体の質量である [Zerilli (1970b)，Davis Ruffini, Press, and Price (1971)，本書の図 36.2]．

D. ブラックホールの周りの安定な軌道にある物体は，重力放射を通してエネルギーの損失ゆえに，もっとも堅く束縛された，安定な円軌道に達するまで，ゆるやかに内方へらせん状に進むはずである．それから "最後に息が止まるほど急に" 重力波を放出して，ホールに素早く落ち込むはずである．ゆるやかな内方へのらせん状の進みの間に放射される全エネルギーは，最終の安定な円軌道の結合エネルギーに等しい．

$$E_{\text{放射}} = \mu - E_{\text{最終の軌道}} = \begin{cases} 0.0572\,\mu & (\text{Schwarzschild ホールに対して}) \\ 0.4235\,\mu & (S = M^2, Q = 0 \text{ をもつ Kerr ホールに対して}) \end{cases}$$

ここに μ はとらえられる物体の静止質量である (コラム 33.5)．最後の放出における全エネルギーは，もし $\mu \ll M$ ならば $E \sim 0.01\,\mu(\mu/M)$ である (図 36.2)．

E. 物質がブラックホールに落下するとき，物質はホールの外部の時空幾何学に振動を励起させることができる．振動は徐々に重力波に転換される．そのあるものは逃れ，他はホールへ落ちる [Press (1971)，Goebel (1972)]．これらの振動は "初期の重力的なジオン (geon)" [Wheeler (1962)，Christodoulou (1971)] に類似している．振動するブラックホールに対しては，背景の Kerr 幾何学が振動のエネルギーをとどめておき (振動のエネルギーをただちに伝播し去ることから防ぐ)，他方ジオンにおいては分裂を防ぐのは "振動のエネルギー" によって生み出される曲率であるという違いがある．

F. Newton 的でない，誘導帯 (すなわち，放射しない) との重力的な相互作用によって，ブラックホールは徐々にその角運動量を任意の軸対称でない，近くの物質あるいは

場の分布に移動する［Hawking（1972a），Ipser（1971），Press（1972），Hawking and Hartle（1972）］．

G. 大きいブラックホールに落ち込む星や惑星は潮汐重力によって引き裂かれるだろう．もし引き裂きが地平線の近くであるが外部で起こるならば，それは相対論的な速度で飛び出す（“練り歯磨きのチューブ効果”）星の物質のしずくを吐き出す．さらに，出ていくジェットはホールのエルゴ球から回転のエネルギーの相当な量を抽出するだろう．すなわち，ホールは元の落下する物体の静止質量を越えて，静止質量に運動エネルギーを加えて，それを放出するだろう［Wheeler（1971d），33.7 および 33.8 節］．

H. 電荷を帯びたブラックホールの磁力線は，周りのプラズマに固定され，ホールが回転するときには巻き重ねられるだろう．そしてプラズマを揺り動かし，素早く動かし，そして励起するだろう．

V. ブラックホール間の衝突

A. 2 個のブラックホールは衝突し合体することができる．しかし 1 個のブラックホールをいくつかのブラックホールに爆破する方法は存在しない［Hawking（1972a），練習問題 34.4］．

B. 2 個のブラックホールが衝突し合体するときには，最終のブラックホールの表面積は 2 個の最初のブラックホールの表面積の和を越えなければならない（“ブラックホール力学の第 2 法則”，Hawking（1971a,b），コラム 33.4，34.5 節）．この拘束は衝突において放出される重力放射の量に上限をもたらす．たとえば，もしすべての 3 個のホールが Schwarzschild の型であり，2 個の最初のホールが等しい質量 $M/2$ をもつならば，

$$4\pi(2M_{最終})^2 \geq 4\pi[2(M/2)]^2 + 4\pi[2(M/2)]^2,$$

$$M_{最終} \geq M/\sqrt{2}$$

したがって放射されるエネルギーは

$$E_{放射} \leq M - M/\sqrt{2} = 0.293M$$

である．

VI. どこにそしていかにブラックホールを捜すか［詳細なレビューについては，Peebles（1971）をみよ］

A. ブラックホールが形成されるときには，形成の間に与えられる重力放射の爆発あるいは爆発の連続によって，その形成が観測される（図 24.3）．

B. 連星系において，ブラックホールの成分は光学的に目にみえない．しかし降着による X 線および γ 線を放出するだろう．目にみえる成分は予告する Doppler 偏移を示す［Hoyle, Fowler, and Burbidge, and Burbidge,（1964），Zeldovich and Guseynov（1965），Trimble and Thorne（1969），Pringle and Rees（1972），Shakura and

Sunyaev (1973)]．目にみえる成分の速度および周期は目にみえない成分の質量についての情報を与える．もしこの目にみえない成分の質量が 4×太陽質量あるいはそれ以上であるならば，それは通常の星でありえない．なぜならその質量の通常の星は $(4)^3 = 64 \times$ (太陽の光度) をもつだろうからである．それは白色わい星でもあるいは中性子星でも，それらのいずれでもありえない．なぜならいずれの物体も非常に重くて，瞬間的にブラックホールに崩壊するだろうからである．したがって—必ずしも強制的でないけれども [Trimble and Thorne (1969) をみよ] —目にみえない物体をブラックホールと同定することは魅力的である．

C. [しかし連星系におけるブラックホールからのどのような重力的なレンズ作用も観測できると期待してはならない．もし何十年もかけて直径 4,800 km の水星の黒い円盤が太陽の大きい面を横切って渡るのをみるという重荷を天文学者が負わせられるとすれば，はるかに遠く離れた，わずか $\sim$3 km の有効半径をもつブラックホールが連星として隠れているのをみる希望はほとんどない．重要なレンズ作用は，レンズ (ブラックホール) が標準的な恒星間の距離だけ焦点となる星から離れていることを要求する．したがって，収束される光線の衝突径数は星の半径よりも大きいので，レンズ作用は通常の星の場合よりも大きくない．さらに，銀河内に 10^9 個のブラックホールをもつ場合でも，1 年あたりただ 1 個が地球とより遠く離れた星の間を直接通過し主要なレンズ作用を生み出すだろう (Refsdal, 1964)．正しい時間に十分強い望遠鏡で正しい地点を見張る機会はゼロである !]

D. ブラックホールが落ち着くであろう球形の群の中心で，その近傍に通常の星を引きつけ，それによって群から光の分布に尖点を生み出す [Cameron and Truran (1971)，Peebles (1971)]．

E. 銀河，わが銀河さえも含めて，の中核にただ 1 個の巨大なブラックホール ($M \sim 10^4$ から $10^8 M_\odot$ まで) が銀河の中核の初期の活動の終わりの産物として位置するだろう．このようなホールは物質を付着するにつれて重力波，光，および電波を放出するだろう．光の多くは周りのちりによって赤外線放射に転換されるだろう．ブラックホールはまたジェットおよび他の核の活動を生み出すだろう [Lynden–Bell (1969)，Lynden–Bell and Rees (1971)，Wheeler (1971d)，Peebles (1971)]．

コラム 33.4　ブラックホール力学の法則

コラム 33.3 に記述されているブラックホール過程は，物理学の標準的な法則によって支配される．一般相対論，Maxwell の電気力学，流体力学の法則，量子力学の法則，および物質および放射の物理学に対する他の法則．これらの標準的な物理学の法則から，すべてのブラックホール過程が満たされなければならない．いくつかの “規則” あるいは “制限” を導くことができる．これらの規則は，熱力学の法則の力，優美さ，お

よび単純さに匹敵する．そして類似している力，優美さ，および単純さをもっている．したがって，それらは類似した名前“ブラックホール力学の法則”を与えられている (Israel 1971)．このコラムはブラックホール力学の法則の2つおよびそれらの支流のいくつかを述べる．2つの付加的な法則は，ここでは議論されない，Bardeen, Carter and Hawking (1973) によって定式化されている．

I. ブラックホール力学の第1法則および第2法則

A. **第1法則**

1. 熱力学の第1法則のように，ブラックホール力学の第1法則は全エネルギーの保存の標準的な法則であり，全運動量，角運動量，および電荷の保存則によって補足される．これらの保存則の詳細な議論については，コラム19.1および20章をみよ．

2. 物質がブラックホールに落下し重力波が流れ出る場合に限ると，第1法則はコラム19.1の終わり近くで叙述され議論された形式をとる．

3. 落下する電荷の場合に限ると，第1法則はブラックホールの全電荷 Q は，ブラックホールから現れる電束によって測定されるとき，ホールに落下する全電荷に等しい量だけ変化する，

$$\Delta Q = q_{\text{落ち込む電荷}}$$

4. 2個のブラックホールが衝突して合体する（コラム33.3に与えられている例）場合に限ると，(a) $\boldsymbol{P}_1$ および $\boldsymbol{P}_2$ を，2個のブラックホールは非常によく離れているので互いに無視できる影響をもつとき，重力的に測定される2個のブラックホールの4–運動量とする．($\boldsymbol{P}_1$ および $\boldsymbol{P}_2$ は周りの漸近的に平坦な時空における4–ベクトルである)．同様に，$\boldsymbol{J}_1$ および $\boldsymbol{J}_2$ は周りの漸近的に平坦な時空においてある任意に選ばれた座標原点に相対的な，それらの全角運動量テンソルとする（内在的な角運動量ベクトルでない!）($\boldsymbol{J}_1$ および $\boldsymbol{J}_2$ は軌道角運動量を内在的な角運動量とともに含んでいる．コラム5.6をみよ)．(b) $\boldsymbol{P}_3$ および $\boldsymbol{J}_3$ を最終のブラックホールの同様の全4–運動量および全角運動量とする．(c) $\boldsymbol{P}_r$ および $\boldsymbol{J}_r$ を衝突および合体の間に重力波として放射される4–運動量および角運動量とする．**そうすると**

$$\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_r, \qquad \boldsymbol{J}_3 = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2 - \boldsymbol{J}_r$$

[**注意**：$\boldsymbol{P}_3$ および $\boldsymbol{J}_3$ の知識から最終のブラックホールの質量および内在的な角運動量を計算するには，コラム5.6の処方に従え．その処方で，最終のブラックホールの世界線は，遠方の漸近的にLorentz座標で，その上にホールの遠方の球状の場の中心が存在するような世界線である]．

B. **第2法則** [Hawking (1971b, 1972a) によって詳述され応用されている]．

何ものかがブラックホールに落ちるとき，あるいはいくつかのブラックホールが衝突して合体したり，あるいは衝突して散乱したり，あるいはブラックホールを含むど

のような他の過程においても，**含まれるすべてのブラックホールの表面積**（あるいは"不可逆質量"の2乗，式(3)をみよ）**の和はけっして減少できない**（証明に対しては34.5節をみよ）．これがブラックホール力学の第2法則である．

II. 可逆変換と不可逆変換，既約質量
[Christodoulou (1970)，Christodoulou and Ruffini (1971)．Hawkingの第2法則の発見と独立に，そして同時に導かれた結果.]

A. 周りの物質および場と相互作用しているただ1個のKerr–Newmanブラックホールを考える．その表面積は任意の時間の瞬間に，その瞬間の質量M，電荷Q，および単位質量あたりの内在的な角運動量$a \equiv S/M$を用いて

$$A = 4\pi[{r_+}^2 + a^2] = 4\pi[(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2})^2 + a^2] \tag{1}$$

によって与えられる（練習問題33.12）．物質および場との相互作用はM，Q，およびaを種々な方法で変え，Mは減少すらされうる．すなわち，エネルギーはブラックホールから抽出されうる！［Penrose (1969)，33.7節］．しかし変化がどうあろうと，変化はけっして表面積Aを減らすことができない．さらに，M，Q，およびaにおけるどのような変化が表面積を増大させようと，未来の過程は表面積を減らして最初の値に戻すことはできない．

B. こうして，ブラックホール過程を2つの群に分類できる．

1. **可逆変換**は，M，Q，あるいはa，あるいはそれらの任意の組を，表面積を固定したままに残して変換する．この変換はブラックホールを元の状態に戻して，逆転させうる．

2. **不可逆変換**は，M，Q，あるいはa，あるいはそれらの任意の組を変えて，そして過程において表面積を増大する．このような変換はけっして逆転されえない．ブラックホールは不可逆変換後に決して元の状態に戻されえない．

C. 落下する粒子によって引き起こされる可逆変換と不可逆変換の例は33.7および33.8節に提示される．

D. 電荷および角運動量のブラックホールからの可逆的な抽出（Aを固定したままでのQおよびaにおける減少）は，必ずブラックホールの質量を減少する（エネルギーの抽出!）．すべての電荷と角運動量が除去されてしまうときまでに，質量は

$$M_{\text{既約}} = (A/16\pi)^{1/2} = \begin{pmatrix}\text{表面積 } A \text{ の Schwarzschild} \\ \text{ブラックホールの質量}\end{pmatrix} \tag{2}$$

の最終の"既約値"に落ちてしまう．

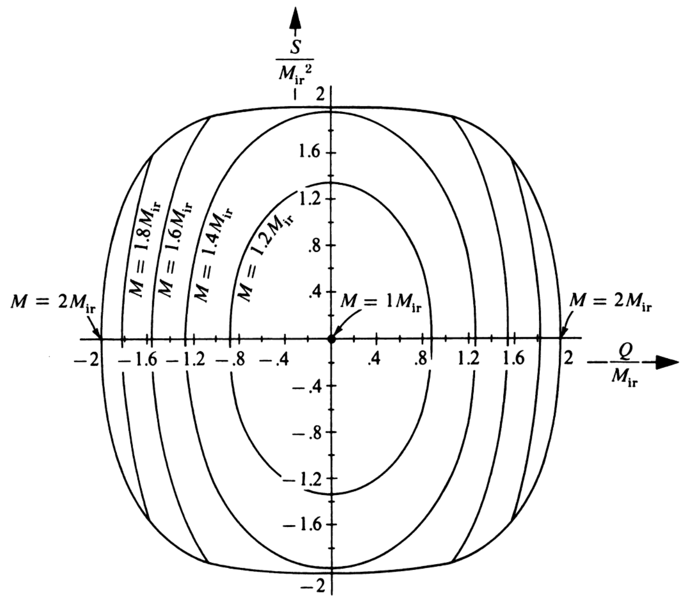
E. この最終の既約質量によって表すと，ブラックホールの最初の質量–エネルギー（電荷Qおよび内在的な角運動量Sをもつ）は，

$$M^2 = \left(M_{既約} + \frac{Q^2}{4M_{既約}}\right)^2 + \frac{S^2}{4M_{既約}{}^2} \tag{3}$$

である［この公式は，Christodoulou and Ruffini によって導かれたが，式 (1)，(2)，および $S = Ma$ を結合することによって得られるだろう］．

F. こうして，**ブラックホールの全質量–エネルギーは，既約質量，電磁気的な質量–エネルギー，そして回転エネルギーからつくられているとみなすことができる**．しかしこれらの寄与が線形的に加わると考える誘惑に抵抗しなければならない．これに反して，それらは静止質量と線形運動量が結合してエネルギーを与える方法，$E^2 = m^2 + \boldsymbol{p}^2$ に類似する方法［式 (3)］で結合する．

G. 定数 $M/M_{既約}$ の等高線は下の "電荷–角運動量平面" に表されている．ブラックホールは描かれている領域の内部 $(Q^2 + a^2 \leq M^2)$ にのみ存在しうる［Christodoulou (1971) から改変された図］．



H. ブラックホールの既約質量はその表面積の 2 乗根に比例するから，ブラックホール力学の第 2 法則を以下のように述べ直すことができる．

ブラックホールの過程において含まれるすべてのブラックホールの既約質量の 2 乗の和はけっして減少できない．

33.3　質量，角運動量，電荷，および磁気モーメント

［本章の残りはトラック–2 である．その準備には，32 章のトラック–2 部分（重力崩壊）を扱っておく必要がある．それを読むときには，25 章（Schwarzschild 幾何学における軌道）が大いに役立つだろう．本章の残りは，34 章（特異点および大域的な方法）に対する準備

として必要とされる.]

Kerr–Newman 幾何学および電磁場に対する式 (33.2)–(33.5) に現れる定数 M, Q, および a は, 上に主張されているように, 実際ブラックホールの質量, 電荷, および単位質量あたりの角運動量であることを確かめることは教育的である.

質量および角運動量はブラックホールから遠く離れた時空幾何学上の痕跡によって定義される. したがって, 質量および角運動量を計算するには, 線要素 (33.2) を $1/r$ のべきで展開し, 主要な項を吟味する.

*8

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right] dt^2 - \left[\frac{4aM}{r}\sin^2\theta + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right] dt\, d\phi \\ + \left[1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r}\right)\right] [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \tag{33.6}$$

吟味は, 漸近的に Lorentz 座標—$x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ に変換することによって容易になされる.

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right] dt^2 - \left[\frac{4aM}{r^3} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)\right] [x\, dy - y\, dx] \\ + \left[1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r}\right)\right] [dx^2 + dy^2 + dz^2] \tag{33.6$'$}$$

定常的な回転をしている源から遠く離れた計量の “標準的な形式” (19.13) との直接の比較は, (1) パラメータ M は, 実際, ブラックホールの質量である. そして (2) ブラックホールの内在的な角運動量ベクトルは

$$\boldsymbol{S} = (aM)\partial/\partial z = (aM) \quad \begin{pmatrix}\text{Boyer–Lindquist 座標の極軸} \\ \text{に沿う単位ベクトル}\end{pmatrix} \tag{33.7}$$

であることを示す.

*9 電荷は, 任意の源に対するように, ホールを取り囲む閉じた表面にわたる電場を Gauss の束積分することによって定義される. ブラックホールの漸近的な静止系における電場は, その直交成分として

*10

$$\begin{aligned} E_{\hat{r}} &= E_r = F_{rt} = Q/r^2 + \mathrm{O}(1/r^3), \\ E_{\hat{\theta}} &= E_\theta/r = F_{\theta t}/r = \mathrm{O}(1/r^4), \\ E_{\hat{\phi}} &= E_\phi/r\sin\theta = F_{\theta t}/r\sin\theta = 0 \end{aligned} \tag{33.8}$$

をもつ. したがって, 電場は純粋に半径方向であり, $4\pi Q$ の Gauss の束積分をもち, Q はブラックホールの電荷であることを表す.

磁場の主要な成分の同様な計算は

---

*8　ブラックホールの外部遠く離れた計量：質量および角運動量の痕跡

*9　ブラックホールの外部遠く離れた電磁場

*10　(1) 電場

*11
$$B_{\hat{r}} = F_{\hat{\theta}\hat{\phi}} = \frac{F_{\theta\phi}}{r^2 \sin\theta} = \frac{2Qa}{r^3}\cos\theta + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^4}\right),$$
$$B_{\hat{\theta}} = F_{\hat{\phi}\hat{r}} = \frac{F_{\phi r}}{r\sin\theta} = \frac{Qa}{r^3}\sin\theta + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^4}\right), \tag{33.9}$$
$$B_{\hat{\phi}} = F_{\hat{r}\hat{\theta}} = \frac{F_{r\theta}}{r} = 0$$

を表す．

これは双極子磁場である，そしてそれからただちに，ブラックホールの磁気モーメントに対して値

*12
$$\mathcal{M} = Qa = (Q/M)S = \underbrace{(\text{電荷}/\text{質量})}_{[\text{“磁気回転比”}]} \times (\text{角運動量}) \tag{33.10}$$

を読む．

*13 ブラックホールの回転が磁場を生み出すのとちょうど同じように，回転はまたブラックホールの重力場における球状でない変形を生み出す［定量的な議論については Hernandez (1967) をみよ］．しかしこれらの変形は，磁気モーメントのように，自由には詳述することができない．それらはブラックホールの質量，電荷，および角運動量によって一意的に定まる．

33.4 対称性と系の引きずり

Kerr–Newman ブラックホールの計量成分 (33.2) は，Boyer–Lindquist 時間座標 t および角座標 ϕ によらない．これは

*14
$$\boldsymbol{\xi}_{(t)} \equiv (\partial/\partial t)_{r,\theta,\phi} \quad \text{および} \quad \boldsymbol{\xi}_{(\phi)} \equiv (\partial/\partial\phi)_{t,r,\theta} \tag{33.11}$$

が，ブラックホールの定常性 (時間の並進に対して不変) および軸対称性と関係する Killing ベクトルであることを意味している (25.2 節をみよ)．これらの Killing ベクトルの自分自身と，そして互いに他の Killing ベクトルとのスカラー積は

$$\boldsymbol{\xi}_{(t)}\cdot\boldsymbol{\xi}_{(t)} = g_{tt} = -\left(\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) = -\left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2}\right) \tag{33.12a}$$

$$\boldsymbol{\xi}_{(t)}\cdot\boldsymbol{\xi}_{(\phi)} = g_{t\phi} = \frac{a\sin^2\theta(\Delta - r^2 - a^2)}{\rho^2} = -\frac{(2Mr - Q^2)a\sin^2\theta}{\rho^2} \tag{33.12b}$$

*11 (2) 磁場
*12 (3) 磁気双極子モーメント
*13 ホールの幾何学の非球状形
*14 Kerr–Newman 幾何学に対する Killing ベクトル

$$\boldsymbol{\xi}_{(\phi)}\cdot\boldsymbol{\xi}_{(\phi)} = g_{\phi\phi} = \frac{[(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta]\sin^2\theta}{\rho^2} \tag{33.12c}$$

である．Killing ベクトルは，任意のそしてすべての座標系に無関係に存在する，時空の幾何学的な性質であるから，それらのスカラー積もまた座標系に無関係な意味をもつ．したがって Boyer–Lindquist 計量成分 g_{tt}，$g_{t\phi}$，および $g_{\phi\phi}$ はこれらの座標系に無関係なスカラー積に等しくなる（偶然によってでなく，座標系の注意深い選択によって!）．こうして g_{tt}，$g_{t\phi}$，および $g_{\phi\phi}$ は時空の対称性についての情報を表現する 3 個のスカラー場と考えられうる．対照的に，計量計数 $g_{rr} = \rho^2/\Delta$ および $g_{\theta\theta} = \rho^2$ は対称性についてまったく情報を保持していない*．それらは存在と値については，Boyer–Lindquist の座標の選択に依存する．

*15　一様な角速度をもち一定の (r, θ) の世界線に沿って動く任意の観測者は，彼の近傍で不変の時空幾何学をみる．したがって，このような観測者は局所的な幾何学に相対的に **"定常**
*16 **的"** と考えられうる．彼の角速度がゼロである場合に限り，すなわち，彼が一定の (r, θ, ϕ) の世界線に沿って動く場合に限り，彼はまたブラックホールの漸近的な Lorentz 系に（すなわち，"遠く離れた星" に相対的に）**"静止している"** だろう．

*17　"漸近的な静止系に相対的な角速度" の明白な定義—あるいは単純に "角速度"—は

$$\Omega \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{u^\phi}{u^t} \tag{33.13a}$$

である（練習問題 33.2 をみよ）．Ω，Killing ベクトル，および Killing ベクトルのスカラー積によって，**定常的な観測者の 4–速度は**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} = u^t(\partial/\partial t + \Omega\partial/\partial\phi) &= \frac{\boldsymbol{\xi}_{(t)} + \Omega\boldsymbol{\xi}_{(\phi)}}{|\boldsymbol{\xi}_{(t)} + \Omega\boldsymbol{\xi}_{(\phi)}|} \\ &= \frac{\boldsymbol{\xi}_{(t)} + \Omega\boldsymbol{\xi}_{(\phi)}}{(-g_{tt} - 2\Omega g_{t\phi} - \Omega^2 g_{\phi\phi})^{1/2}} \end{aligned} \tag{33.13b}$$

である．定常的な観測者は Ω がゼロである場合に限り静的である．

与えられた r, θ での定常的な観測者は，任意のそしてすべての角速度をもつことができない．4–速度 $\boldsymbol{u}$ が未来の光円錐の内部に存在する．すなわち，

$$(\boldsymbol{\xi}_{(t)} + \Omega\boldsymbol{\xi}_{(\phi)})^2 = g_{tt} + 2\Omega g_{t\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi} < 0$$

*18　のような Ω の値のみが許される．こうして，**定常的な観測者の角速度は**

$$\Omega_{最小} < \Omega < \Omega_{最大} \tag{33.14}$$

* これはまったくは真実でない．Kerr–Newman 時空は 2 個の Killing ベクトルの他に，また Boyer–Lindquist 座標 r および θ に密接に連結されている "Killing テンソル" をもつ．Walker and Penrose (1970) をみよ，また 33.5 節をみよ．

*15　定常的な観測者
*16　静止している観測者
*17　定常的な観測者の角速度および 4–速度
*18　系の引きずり，静的な極限，およびエルゴ球

によって拘束される．ここに

$$\Omega_{最小} = \omega - \sqrt{\omega^2 - g_{tt}/g_{\phi\phi}} \tag{33.15a}$$

$$\Omega_{最大} = \omega + \sqrt{\omega^2 - g_{tt}/g_{\phi\phi}} \tag{33.15b}$$

$$\omega \equiv \frac{1}{2}(\Omega_{最小} + \Omega_{最大}) = -\frac{g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}} = \frac{(2Mr - Q^2)a}{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta} \tag{33.16}$$

そして $S/M = a > 0$ が仮定される．これらの極限の以下の特徴は注目に値する．(1) ブラックホールから遠く離れたところで，平坦な時空で光の速さによって課される標準的な極限に対応して，$r\Omega_{最小} = -1$ そして $r\Omega_{最大} = +1$．(2) 減少する半径とともに，$\Omega_{最小}$ は増大する（“慣性系の引きずり”）．最終的に，g_{tt} がゼロに達するとき，すなわち，

$$r = r_0(\theta) \equiv M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2\sin^2\theta} \tag{33.17}$$

において，$\Omega_{最小}$ はゼロになる．この表面および内部で，すべての定常的な観測者はブラックホールの周りを正の角速度でまわらなければならない．こうして，**静止している観測者は $r = r_0(\theta)$ の外部のみに存在する**．この理由のために $r = r_0(\theta)$ は “静的な極限” とよばれる．コラム 33.2 をみよ．(3) 静的な極限を通って “エルゴ球” 内へ入るにつれて，角速度の許される領域はますます正になることがわかる（さらなる “系の引きずり”）．同時に，許される領域は，最後に，地平線

$$r = r_+ \equiv M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \tag{33.18}$$

で極限 $\Omega_{最小}$ および $\Omega_{最大}$ が合体する（$\omega^2 = g_{tt}/g_{\phi\phi}$）まで狭くなるのがわかる．こうして，地平線では定常的な観測者は存在しない．すべての時間的な世界線は内部を指し示す．ブラックホールの “引っ張り” から脱出は存在しない．

定常的な観測者のさらなる特徴および “系の引きずり” は練習問題で探求される．

［練習問題］

33.1　Killing ベクトルの Kerr 記述

(a) Boyer–Lindquist 座標から Kerr 座標への変換則［コラム 33.2 の式 (4)］を用いて

$$\boldsymbol{\xi}_{(t)} \equiv (\partial/\partial t)_{r,\theta,\phi} = (\partial/\partial\tilde{V})_{r,\theta,\tilde{\phi}} \tag{33.19a}$$

$$\boldsymbol{\xi}_{(\phi)} \equiv (\partial/\partial\phi)_{t,r,\theta} = (\partial/\partial\tilde{\phi})_{\tilde{V},r,\theta} \tag{33.19b}$$

を示せ．計量成分を吟味することによって，式 (33.19a)，(33.19b) と一致して

$$g_{\tilde{V}\tilde{V}} = g_{tt}, \qquad g_{\tilde{V}\tilde{\phi}} = g_{t\phi}, \qquad g_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} = g_{\phi\phi} \tag{33.19c}$$

を明確に確かめよ．

(b) 定常的な観測者（一定の r, θ の世界線）に対して，Kerr 座標によって表される角速度は

$$\Omega \equiv d\phi/dt = d\tilde{\phi}/d\tilde{V} = u^{\tilde{\phi}}/u^{\tilde{V}}$$

であるから，Kerr 座標を用いた定常的な観測者の完全な議論は Boyer–Lindquist 座標を用いた議論に同等であることを示せ．座標系間の相違は，変化している r の世界線に沿って動くときにのみ現れる．この事実を両座標系は**同じ**座標 (r, θ)，しかし異なる時間および方位角（azimuthal）座標（t, ϕ 対 $\tilde{V}, \tilde{\phi}$）を用いる事実と一致させよ．

33.2　角速度の観測

ブラックホールから遠く離れたホールの漸近的な Lorentz 系に静止している観測者が，粒子が（彼の目で）ブラックホール近くの定常的な（測地線でない）軌道に沿って動くのを観察する．上に定義されそして議論されたように，$\Omega = d\phi/dt$ を粒子の角速度とする．遠く離れた観測者は彼のストップウォッチを用いて，粒子がブラックホールの周りを完全に 1 周する（遠く離れた観測者自身に相対的に，すなわち，ホールの漸近的な Lorentz 系に相対的に）時間を測定する．

(a) 測定される 1 周の時間は $2\pi/\Omega$ であることを示せ．こうして，**Ω は粒子の "無限遠から測定されるときの角速度" とみなされうる．**

(b) 粒子とともに動いている観測者は，漸近的な Lorentz 系に相対的な 1 周の時間を，彼の目と保持するストップウォッチを用いて測定する．1 周の時間に対する彼の答えは

$$\Delta\tau = \frac{2\pi}{\Omega} \underbrace{(-g_{tt} - 2\Omega g_{t\phi} - \Omega^2 g_{\phi\phi})^{1/2}}_{[\text{“赤方偏移因子”}]} \tag{33.20}$$

でなければならないことを示せ．

33.3　局所的に回転していない観測者（Bardeen 1970b）

(a) ブラックホールの周りに固定された (r, θ) に，堅い円形の鏡（“ring mirror”）を置く．(r, θ) での観測者が角速度 Ω で光の閃きを放出する．光子のいくらかは鏡によってとらえられ，正の ϕ 方向にブラックホールを周航して鏡の面に沿って滑るだろう．光子の他のいくらかはとらえられ負の ϕ 方向に滑るだろう．観測者は光子を両方向から角速度が

$$\Omega = \omega(r, \theta) = \text{表現 (33.16)}$$

である場合に限り，同時に受信するだろうことを示せ．こうしてこの場合において，そしてこの場合においてのみ，観測者は $+\phi$方向と $-\phi$方向 を局所的な幾何学を用いて同等とみなすことができる．別な表現をすれば，この場合において，そしてこの場合においてのみ観測者は “局所的な時空幾何学に対して非回転” である．こうして，角速度 $\Omega = \omega(r, \theta)$ で動く観測者に対して **“局所的に回転していない観測者”** という名前を用いることが適切である．

(b) 測地線の運動に対して，保存量 $p_\phi \equiv \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\xi}_{(\phi)}$ はブラックホールの軸対称性と関連している．任意の粒子に対するこの量は—粒子が測地線に沿って動いていようと動いていま

いと—“ブラックホールのスピン軸に沿う角運動量の成分”，あるいは単純に粒子の“角運動量”とよばれる（33.5 節をみよ）．固定された (r,θ) におけるすべての定常的な観測者の中で，“局所的に回転していない観測者”のみがゼロ角運動量をもつことを示せ［**注意：** Bardeen, Press, and Teukolsky (1972) は“局所的に回転していない観測者”はブラックホール近くの物理学的な過程の解析において，有力な道具でありうることを示した］．

33.4　局所的に回転していない観測者の直交系

(a) 時空が局所的に回転していない観測者の世界線で満たされており，おのおののこのような観測者は直交系をもっているとする．これらの系の空間の位置づけが，それらの基底 1–形式が

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}} &= |g_{tt}-\omega^2 g_{\phi\phi}|^{1/2}\boldsymbol{d}t, & \boldsymbol{\omega}^{\hat{\phi}} &= (g_{\phi\phi})^{1/2}(\boldsymbol{d}\phi-\omega\boldsymbol{d}t),\\ \boldsymbol{\omega}^{\hat{r}} &= (\rho/\Delta^{1/2})\boldsymbol{d}r, & \boldsymbol{\omega}^{\hat{\theta}} &= \rho\boldsymbol{d}\theta\end{aligned} \tag{33.21}$$

となるように選ばれうることを示せ．より明確に，これらの 1–形式は直交しておりそして双対基底は

$$\partial/\partial\hat{t} = \boldsymbol{u} \equiv \text{局所的に回転していない観測者の 4–速度} \tag{33.22}$$

をもつことを示せ．$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}$ は 1–形式 $[\boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\hat{t}}=0$，練習問題 4.4] の回転に無関係な場であることを示せ．

(b) “局所的に回転していない観測者”はある意味で局所的に慣性的であるという間違った概念にときどき出会う．この間違った印象を破るために，(i) このような観測者はゼロでない 4–加速度

$$\boldsymbol{a} = \Gamma_{\hat{j}\hat{t}\hat{t}}\boldsymbol{e}_{\hat{j}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\ln|g_{tt}-\omega^2 g_{\phi\phi}| \tag{33.23}$$

をもつことを立証せよ．(ii) もしこのような観測者がジャイロスコープを保持して，ジャイロスコープの質量中心に必要な加速度を適用するならば，観測者はジャイロスコープが彼の直交系 (33.21) に相対的に角速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}^{(\text{歳差})} &= \Gamma_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{t}}\boldsymbol{e}_{\hat{r}} + \Gamma_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{t}}\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}\\ &= \frac{1}{2}\frac{g_{\phi\phi}^{1/2}}{|g_{tt}-\omega^2 g_{\phi\phi}|^{1/2}}\left[\frac{\omega_{,\theta}}{\rho}\boldsymbol{e}_{\hat{r}} - \frac{\Delta^{1/2}\omega_{,r}}{\rho}\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}\right]\end{aligned} \tag{33.24}$$

で歳差運動をするのをみる．

［ヒント：練習問題 19.2, 式 (13.69)，および関連した議論をみよ．接続係数の計算は微分形式の方法を用いてもっとも容易に遂行される．14.6 節をみよ．］

33.5　局所的な光円錐

電荷を帯びない $(Q=0)$Kerr ブラックホールに対する Kerr 図に描かれている光円錐の形を計算せよ（コラム 33.2 の II.F）．とくに新しい時間座標

$$\tilde{t} \equiv \tilde{V} - r \tag{33.25}$$

を導入する．この時間座標に対しては，一定の $\tilde{t}$ の薄片は Kerr 図で水平面である．そうすると Kerr 図は $\tilde{t}$ を鉛直に，r を半径方向に，そして $\tilde{\phi}$ を方位角方向に描く，他方 $\theta = \pi/2$（"ブラックホールを通る赤道面の薄片"）を保つ．

(a) 与えられた $\tilde{t}, r, \tilde{\phi}$ から生ずる光円錐は形

$$\frac{dr}{d\tilde{t}} = a\left(\frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{t}}\right) - \frac{2M/r}{1+2M/r} \pm \sqrt{\frac{1}{(1+2M/r)^2} - \frac{r^2(d\tilde{\phi}/d\tilde{t})^2}{1+2M/r}} \tag{33.26a}$$

をもつことを示せ．

(b) 光円錐は曲線

$$dr/d\tilde{t} = 0, \qquad d\tilde{\phi}/d\tilde{t} = \varOmega_{\text{最小}} \quad \text{および} \quad \varOmega_{\text{最大}} \tag{33.26b}$$

に沿って，一定の半径の面を薄切りにする．ここに $\varOmega_{\text{最小}}$ および $\varOmega_{\text{最大}}$ は，表現 (33.15a), (33.15b)（定常的な観測者に対する最小のおよび最大の許される角速度）によって与えられることを示せ．

(c) 静的な極限，$r = r_0(\pi/2)$ で，光円錐は一定の $r, \theta, \tilde{\phi}$ の曲線に接することを示せ．

(d) 光円錐は一定の $\tilde{\phi}$ の面を曲線

$$\frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{t}} = 0, \qquad \frac{dr}{d\tilde{t}} = -1 \quad \text{および} \quad \frac{1-2M/r}{1+2M/r} \tag{33.26c}$$

に沿って薄く切ることを示せ．

(e) 光円錐は地平線に接することを示せ．

(f) 光円錐の形の図を半径の関数としてつくれ．

(g) 光円錐は Boyer–Lindquist 座標における地平線の近くでいかにみえなければならないかを定性的に記述せよ（**注意**：それは "馬鹿げている" ようにみえるだろう．なぜなら座標は地平線で特異的であるからである）．

33.5　試験粒子に対する運動方程式［Carter（1968a）］

電荷 e および静止質量 μ をもつ試験粒子がブラックホールの外部場内を動くとする．もしブラックホールが電荷をもたなければ，試験粒子は測地線に沿って動くだろう（ゼロ 4–加速度）．しかし電荷は電磁場を生み出し，それが今度は粒子に Lorentz 力を生み出す．$\mu\boldsymbol{a} = e\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}$（ここに $\boldsymbol{u}$ は粒子の 4–速度である．そして $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}$ は粒子の 4–加速度である）．

電荷をもたない場合に対する測地線の方程式 $\boldsymbol{a} = 0$ は，Hamilton の方程式

$$dx^\mu/d\lambda = \partial\mathcal{H}/\partial p_\mu, \qquad dp_\mu/d\lambda = -\partial\mathcal{H}/\partial x^\mu \tag{33.27a}$$

に同等である．ここに λ はアフィンパラメータであり，

$$d/d\lambda = \boldsymbol{p} = 4\text{–運動量} \tag{33.27b}$$

のように規格化され，そして

$$\mathcal{H} \equiv \text{“超 Hamiltonian”} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \tag{33.27c}$$

(練習問題 25.2 をみよ)．同様に (練習問題 33.6 をみよ) 電荷を帯びた場合に対する Lorentz 力の方程式 $\mu \boldsymbol{a} = e\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}$ は，位置 x^μ および "一般化された運動量" π_μ を用いて書かれた Hamilton の方程式

$$dx^\mu/d\lambda = \partial\mathcal{H}/\partial\pi_\mu, \qquad d\pi_\mu/d\lambda = -\partial\mathcal{H}/\partial x^\mu \tag{33.28a}$$

*19 に同等である．超 Hamiltonian $\mathcal{H}$ の形は，粒子の位置での計量係数 $g^{\mu\nu}(x^\alpha)$，および粒子の電荷 e および一般化された運動量 π_μ を用いて

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\pi_\mu - eA_\mu)(\pi_\nu - eA_\nu) \tag{33.28b}$$

である［平坦な時空における類似の超 Hamiltonian に対しては Goldstein (1959) の 7.3 節をみよ］．この超 Hamiltonian に対する Hamilton の第 1 の方程式は

$$p^\mu \equiv (4\text{–運動量}) \equiv dx^\mu/d\lambda = \pi^\mu - eA^\mu \tag{33.29a}$$

に帰着する (p^μ, e，および A^μ を用いた π^μ の値)．第 2 方程式は，第 1 と結合されると，Lorentz 力の方程式に帰着する．

$$dp^\mu/d\lambda + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = eF^{\mu\nu} p_\nu \tag{33.29b}$$

$$\begin{bmatrix} p_\nu \text{であって } u_\nu \text{でない．な} \\ \text{ぜなら} \lambda = \tau/\mu \text{であるから} \end{bmatrix} \tag{33.29c}$$

Kerr–Newman ブラックホールに対して，Boyer–Lindquist 座標でのベクトルポテンシャルは形式

*20
$$\boldsymbol{A} = -\frac{Qr}{\rho^2}(\boldsymbol{d}t - a \sin^2\theta\, \boldsymbol{d}\phi) \tag{33.30}$$

に表現されうる．それは

$$\boldsymbol{d}\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta})\boldsymbol{d}x^\alpha \wedge \boldsymbol{d}x^\beta$$

が式 (33.5) の Faraday 2–形式に帰着することをチェックすることによって確かめられる．

もっとも基本的な座標形式における Lorentz 力の方程式

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\gamma}{d\lambda} = eF^\alpha{}_\beta \frac{dx^\beta}{d\lambda}$$

*19 曲がった時空における任意の電磁場における電荷を帯びた試験粒子に対する超 Hamiltonian

*20 電荷を帯びたブラックホールに対するベクトルポテンシャル

に正面から取り組むよりもむしろ，この式のすべてを入念に調べることのよい理由がある．
*21 Hamilton 形式は 2 個の運動定数をただちに発見することを可能ならしめる．基本的な Lorentz 力の方程式ではみつからないが．主要な点は，$\boldsymbol{A}$ の成分 A_μ ［式 (33.30)］ および計量の成分 $g^{\mu\nu}$ ［式 (33.2) の $g_{\mu\nu}$ の逆，式 (33.35) をみよ］ は，t および ϕ によらない（電磁場および時空幾何学の両方の定常性と軸対称）ことである．したがって，超 Hamiltonian もまた t および ϕ によらない．それゆえ Hamilton の方程式

$$d\pi_\alpha/d\lambda = -\partial\mathcal{H}/\partial x^\alpha$$

は，π_t および π_ϕ は**運動の定数である**ことを保証する．

*22,*23 ベクトルポテンシャルはゼロになり，計量は

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

となるブラックホールから遠く離れたところでは，運動の定数は

$$\pi_t = p_t = -p^t = -\text{エネルギー},$$

$$\pi_\phi = p_\phi = rp^{\hat{\phi}} = \begin{pmatrix}\text{ブラックホールの回転軸}\\ \text{に沿う角運動量の射影}\end{pmatrix}$$

となる．こうして運動の定数 $-\pi_t$ および π_ϕ に対して，名前および記号

$$E \equiv (\text{“無限遠でのエネルギー”}) \equiv -\pi_t = -(p_t + eA_t) \tag{33.31a}$$

$$L_z \equiv \begin{pmatrix}\text{“角運動量の軸成分” ある}\\ \text{いは単純に“角運動量”}\end{pmatrix} \equiv \pi_\phi = p_\phi + eA_\phi \tag{33.31b}$$

を採用することが適切である．

*24 運動の 3 番目の定数は粒子の静止質量

$$\mu = |\boldsymbol{p}| = (-g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta)^{1/2} \tag{33.31c}$$

である．

一般に，4 次元時空を通過する粒子の軌道を一義的に定めるためには 4 個の運動の定数が必要とされる．もしブラックホールが付加的な対称性を有するならば，たとえば，もしブラックホールがたんに軸対称であるよりもむしろ，球状であるならば，自動的に 4 番目の運動の定数が存在するだろう．しかし一般に，ブラックホールは球状でない．したがってブラックホールの周りの試験粒子の運動はただ 3 個の**明白**な定数を有する．定数が存在することになれば，それはむしろ注目に値する．それは Carter（1968a）によって，Hamilton–Jacobi の方法を用いて発見された．1973 年現在では，なぜこの 4 番目の定数が存在すべきであるかの説得力のある幾何学的な説明を誰も与えていない．説明のヒントは Carter（1968c）および Walker and Penrose（1970）に見出されるだろうけれども．

*21　電荷を帯びたブラックホールの周りを動いている荷電試験粒子に対する “運動の定数”
*22　(1) “無限遠でのエネルギー” E
*23　(2) “角運動量の軸成分” L_z
*24　(3) 静止質量 μ

*25 Carter の運動の "4 番目の定数" は，練習問題 33.7 において導かれているように，

$$\mathcal{Q} = p_\theta{}^2 + \cos^2\theta[a^2(\mu^2 - E^2) + \sin^{-2}\theta\, L_z{}^2] \tag{33.31d}$$

である．

$\mathcal{Q}$，L_z，および E を結合することによって得られる運動の定数

$$\mathcal{K} \equiv \mathcal{Q} + (L_z - aE)^2 \tag{33.31e}$$

は，$\mathcal{Q}$ の代わりにしばしば用いられる．$\mathcal{Q}$ は負でありうるのに対して，$\mathcal{K}$ はつねに負でない．

$$\mathcal{K} = p_\theta{}^2 + (L_z - aE\sin^2\theta)^2/\sin^2\theta + a^2\mu^2\cos^2\theta$$

$\geq 0,$　　いたるところで

$= 0,$　　極軸 $(\theta = 0, \pi)$ に沿って動く光子 $(\mu = 0)$ の場合に対してのみ

試験粒子の 4–運動量の反変成分，$p^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ は，定数 $E, L_z, \mu, \mathcal{Q}$ を用いて，式 (33.31) を計量係数 (33.2) およびベクトルポテンシャルの成分 (33.30) と結合することによって容易に表される．結果は

*26

$$\rho^2\, d\theta/d\lambda = \sqrt{\Theta} \tag{33.32a}$$

$$\rho^2\, dr/d\lambda = \sqrt{R} \tag{33.32b}$$

$$\rho^2\, d\phi/d\lambda = -(aE - L_z/\sin^2\theta) + (a/\Delta)P \tag{33.32c}$$

$$\rho^2\, dt/d\lambda = -a(aE\sin^2\theta - L_z) + (r^2 + a^2)\Delta^{-1}P \tag{33.32d}$$

ここで式 (33.3b) に定義されているように $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$ であり，そして関数 Θ, R, P は

$$\Theta = \mathcal{Q} - \cos^2\theta[a^2(\mu^2 - E^2) + L_z{}^2/\sin^2\theta] \tag{33.33a}$$

$$P = E(r^2 + a^2) - L_z a - eQr \tag{33.33b}$$

$$R = P^2 - \Delta[\mu^2 r^2 + (L_z - aE)^2 + \mathcal{Q}] \tag{33.33c}$$

によって定義される．Kerr 座標で仕事をするときには（地平線での座標の特異点を避けるために），式 (33.32c) および (33.32d) を

$$\rho^2\, d\tilde{V}/d\lambda = -a(aE\sin^2\theta - L_z) + (r^2 + a^2)\Delta^{-1}(\sqrt{R} + P) \tag{33.32c$'$}$$

$$\rho^2\, d\tilde{\phi}/d\lambda = -(aE - L_z/\sin^2\theta) + a\Delta^{-1}(\sqrt{R} + P) \tag{33.32d$'$}$$

によって置き換えなければならない［これらは式 (33.32) および 2 つの座標系間の変換から出る．コラム 33.2 の式 (4) をみよ］．上式で，$\sqrt{R}$ および $\sqrt{\Theta}$ の符号は独立に選ばれうる．しかし一度選ばれると，それらはいたるところで一致して用いられなければならない．

*25　(4) "$\mathcal{Q}$"

*26　荷電試験粒子に対する運動方程式

これらの運動方程式の適用は，本章の残りで主要な役割を演ずるだろう．

［練習問題］

33.6　荷電粒子の運動に対する超 Hamiltonian

Hamiltonian (33.28b) に対する Hamilton の方程式 (33.28a) は，一般化された運動量の値に対する式 (33.29a)，および Lorentz 力の式 (33.29b) に帰着することを示せ［ヒント：関係式 $(g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma})_{,\mu}=0$ を用いよ］．

33.7　運動方程式の Hamilton–Jacobi の方法による導出［Carter (1968a) に基づく］

Kerr–Newman ブラックホールの外部場内で動いている荷電粒子に対する 1 次の運動方程式を導け．Hamilton–Jacobi の方法［本書のコラム 25.3 および 25.4，また Goldstein (1959) の 9 章］を，以下のように用いよ．

(a) 式 (33.28b) の超 Hamiltonian $\mathcal{H}$ を通して，一般化された運動量 π_α を Hamilton–Jacobi 関数の勾配 $\partial S/\partial x^\alpha$ によって置き換えよ．

(b) Hamilton–Jacobi の方程式［コラム 25.4 の式 (2) の一般化］を形式

$$-\frac{\partial S}{\partial\lambda}=\mathcal{H}\left[x^\alpha,\frac{\partial S}{\partial x^\beta}\right]=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\alpha}-eA_\alpha\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^\beta}-eA_\beta\right)\qquad(33.34\text{a})$$

に書き下ろせ．

(c) Boyer–Lindquist 座標における Kerr–Newman ブラックホールに対する計量成分 $g^{\alpha\beta}$ は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}\equiv g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta}&=-\frac{1}{\Delta\rho^2}\left[(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial\phi}\right]^2+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}+a\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial t}\right]^2\\&\quad+\frac{\Delta}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2\end{aligned}\qquad(33.35)$$

によって与えられることを示せ．

(d) これらの計量成分とベクトルポテンシャルの成分 (33.30) を用いて Hamilton–Jacobi の方程式 (33.33) を具体的な形

$$\begin{aligned}-\frac{\partial S}{\partial\lambda}&=-\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta\rho^2}\left[(r^2+a^2)\frac{\partial S}{\partial t}+a\frac{\partial S}{\partial\phi}-eQr\right]^2\\&\quad+\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial S}{\partial\phi}+a\sin^2\theta\frac{\partial S}{\partial t}\right]^2+\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2\end{aligned}\qquad(33.34\text{b})$$

にせよ．

(e) この Hamilton–Jacobi の方程式を変数分離によって解け［ヒント：方程式は λ,ϕ，あるいは t に明白な依存性をもたないから，解は形

$$S=\frac{1}{2}\mu^2\lambda-Et+L_z\phi+S_r(r)+S_\theta(\theta)\qquad(33.36\text{a})$$

をとらなければならない．ここに“積分定数”の値は $\partial S/\partial\lambda=-\mathcal{H}, \partial S/\partial t=\pi_t, \partial S/\partial\phi=\pi_\phi$ から出る．この仮定された形を式 (33.35) に挿入し，そして $S_r(r)$ および $S_\theta(\theta)$ に対して解き

$$S_r=\int \Delta^{-1}\sqrt{R}\,dr, \qquad S_\theta=\int\sqrt{\Theta}\,d\theta \tag{33.36b}$$

を得よ．ここに $R(r)$ および $\Theta(\theta)$ は式 (33.33) で定義された関数である．定数 Q はこの手続きにおける“変数分離定数”として自然に生ずることに注意せよ．Carter が最初，Newton 的な双極子場における定数（Corben and Stehle, 1969, p.209）への類似を求めるという Misner の提案に従って，Q を発見したのはこの方法においてであった]．

(f) 連続して $\partial S/\partial[Q+(L_z-aE)^2], \partial S/\partial\mu^2, \partial S/\partial E$ および $\partial S/\partial L_z$ をゼロに置くことによって試験粒子の軌道を記述する以下の式を得よ．

$$\int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}}=\int^r\frac{dr}{\sqrt{R}} \tag{33.37a}$$

$$\lambda=\int^\theta \frac{a^2\cos^2\theta}{\sqrt{\Theta}}d\theta+\int^r\frac{r^2}{\sqrt{R}}dr \tag{33.37b}$$

$$t=\int^\theta\frac{-a(aE\sin^2\theta-L_z)}{\sqrt{\Theta}}d\theta+\int^r\frac{(r^2+a^2)P}{\Delta\sqrt{R}}dr \tag{33.37c}$$

$$\phi=\int\frac{-(aE\sin^2\theta-L_z)}{\sin^2\theta\sqrt{\Theta}}d\theta+\int\frac{aP}{\Delta\sqrt{R}}dr \tag{33.37d}$$

(g) これらの方程式を微分し，それらを結合することによって，本書に引用されている運動方程式 (33.32) を得よ．

(h) $\partial S/\partial x^\alpha=\pi_\alpha=p_\alpha+eA_\alpha$ と置くことによって E, L_z, μ，および Q に対する式 (33.31) を導け．

33.6 主要なヌル合同

*27 **光子**の軌道の 2 つの特別な群が Kerr–Newman 幾何学に特別によく調和のとれた方法で“形づくられる”．それらは幾何学の“**主要なヌル合同**”とよばれる（“合同 (congruence)”は“空間を満たす曲線の群”を意味する優雅な言葉である）．これらの合同は，

$$\mu=0 \qquad \text{(ゼロ静止質量，光子)} \tag{33.38a}$$

$$e=0 \qquad \text{(光子についてのゼロ電荷)} \tag{33.38b}$$

$$L_z=aE\sin^2\theta \qquad \begin{pmatrix}\text{ただ } d\theta/d\lambda \text{ がゼロになるから}\\ L_z \text{ に対する許される値}\end{pmatrix} \tag{33.38c}$$

*27 ブラックホールの時空幾何学に対する主要なヌル合同

$$\mathcal{Q} = -(L_z - aE)^2 = -a^2 E^2 \cos^4\theta \tag{33.38d}$$

をもつ試験粒子の運動方程式への解である．運動の定数に対するこれらの値に対して，運動方程式 (33.32) は

$$k^\theta \equiv d\theta/d\lambda = 0 \tag{33.39a}$$

$$k^r \equiv dr/d\lambda = \pm E \qquad (\text{“}+\text{” 出ていく光子に対して, “}-\text{” 入射に対して}) \tag{33.39b}$$

$$k^\phi \equiv d\phi/d\lambda = aE/\Delta \tag{33.39c}$$

$$k^t \equiv dt/d\lambda = (r^2 + a^2)E/\Delta \tag{33.39d}$$

*28 これらの光子の軌道はどのような意味で他の軌道よりも興味があるか？（1）それらは，もし $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ が Weyl の共形テンソル（13.5 節）であり，そして ${}^*C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} C^{|\mu\nu|}{}_{\gamma\delta}$ はその双対であるならば，

$$C_{\alpha\beta\gamma[\delta} k_{\epsilon]} k^\beta k^\gamma = 0, \qquad {}^*C_{\alpha\beta\gamma[\delta} k_{\epsilon]} k^\beta k^\gamma = 0 \tag{33.40}$$

であるような方法で時空の曲率に形づくられる［この関係は，Kerr–Newman 幾何学は “Petrov–Pirani D 型” であり，これらの光子軌道は “二重に縮退した，主要なヌル合同” であることを意味する．これらの術語の意味および暗示の詳細に対しては，たとえば，Sachs（1964）の 8 章，あるいは Ehlers and Kundt（1962），あるいは Petrov（1954, 1969）および Pirani（1957）による最初の論文をみよ］．(2) 座標の適当な変換によって（練習問題 33.8），Kerr–Newman 計量を形式

$$ds^2 = (\eta_{\alpha\beta} + 2Hk_\alpha k_\beta)dx^\alpha dx^\beta \tag{33.41}$$

にもたらすことができる．ここに H はスカラー場であり，k_α は主要なヌル合同の 1 つ（いずれかの 1 つ．しかし両方でない!）に対する波動ベクトルの成分である［これはその最初の発見（Kerr, 1963）にいたった Kerr–Newman 計量の性質であった．この形式の計量についてのさらなる詳細に対しては，Kerr and Schild（1965）をみよ］．(3) Kerr 座標では（コラム 33.2），入射する主要なヌル合同は

$$r = -E\lambda, \qquad \theta = \text{一定}, \qquad \tilde{\phi} = \text{一定}, \qquad \tilde{V} = \text{一定} \tag{33.42a}$$

（E：任意の規格化の因子．λ の再定義によって除かれうる）

である．これらの入射光子の世界線は，コラム 33.2 の Kerr 図における円錐曲面 $\tilde{V}$ = 一定の生成子である．(4) 永久に地平線にとどまりうる唯一の種類の粒子は，出ていく主要なヌル合同に世界線をもつ光子である（練習問題 33.9）．このような光子の世界線は地平線の “生成子” である（コラム 33.2 の Kerr 図における “理髪店の看板柱のねじれ” をも

*28　主要なヌル合同の重要性

つ点曲線)．それらは角速度

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{V}} = \frac{a}{{r_+}^2 + a^2} = \frac{a}{2M^2 - Q^2 + 2M(M^2 - a^2 - Q^2)^{1/2}} \tag{33.42b}$$

をもつ．

［練習問題］

33.8 Kerr–Schild 座標

(a) Kerr 座標で，入射ヌル合同 (33.39) は形式 (33.42a) をもつことを示せ．また波動ベクトルの共変成分は—新しいアフィンパラメータ $\lambda_{\text{新しい}} = \lambda_{\text{古い}} E$ に換えた後には

$$k_r^{(\text{入射})} = 0, \qquad k_\theta^{(\text{入射})} = 0, \qquad k_{\tilde{\phi}}^{(\text{入射})} = a\sin^2\theta, \qquad k_{\tilde{V}}^{(\text{入射})} = -1 \tag{33.43}$$

であることを示せ．

(b)

$$x + iy = (r + ia)e^{i\tilde{\phi}}\sin\theta, \qquad z = r\cos\theta, \qquad \tilde{t} = \tilde{V} - r \tag{33.44a}$$

によって定義される新しい座標 $\tilde{t}, x, y, z$ を導入し，そしてこの "Kerr–Schild 座標系" で計量は，形式

$$ds^2 = (\eta_{\alpha\beta} + 2Hk_\alpha^{(\text{入射})}k_\beta^{(\text{入射})})dx^\alpha dx^\beta \tag{33.44b}$$

ここに

$$H = \frac{Mr - \frac{1}{2}Q^2}{r^2 + a^2(z/r)^2} \tag{33.44c}$$

$$k_\alpha^{(\text{入射})}dx^\alpha = -\frac{r(x\,dx + y\,dy) - a(x\,dy - y\,dx)}{r^2 + a^2} - \frac{z\,dz}{r} - d\tilde{t} \tag{33.44d}$$

をとることを示せ．

$$ds^2 = (\eta_{\alpha\beta} + 2Hk_\alpha^{(\text{出ていく})}k_\beta^{(\text{出ていく})})dx^\alpha dx^\beta$$

である類似の座標への変換に対しては，たとえば，Boyer and Lindquist (1967) をみよ．

33.9 地平線のヌル生成子

(a) Kerr 座標で出ていく主要なヌル合同は接線ベクトル

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = 0, \qquad \frac{dr}{d\lambda} = E, \qquad \frac{d\tilde{\phi}}{d\lambda} = 2a\frac{E}{\Delta}, \qquad \frac{d\tilde{V}}{d\lambda} = 2(r^2 + a^2)\frac{E}{\Delta} \tag{33.45}$$

によって記述されることを示せ．

(b) 波動ベクトルのこれらの成分は地平線で特異になる ($\Delta = 0$). それは座標系における特異点のゆえでない—座標系はよい振る舞いをする!—しかしアフィンパラメータの粗末な規格化のゆえである. おのおのの出ていく測地線に対して, Δ_0 を測地線が超曲面 $\tilde{V} = 0$ を薄切る事象での Δ の値として定義される定数とする. それからおのおのの測地線に対するアフィンパラメータを再規格化する

$$\lambda_{新しい} = (E/\Delta_0)\lambda_{古い} \tag{33.46}$$

生ずる波動ベクトル

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = 0, \qquad \frac{dr}{d\lambda} = \Delta_0, \qquad \frac{d\tilde{\phi}}{d\lambda} = 2a\frac{\Delta_0}{\Delta}, \qquad \frac{d\tilde{V}}{d\lambda} = 2(r^2 + a^2)\frac{\Delta_0}{\Delta} \tag{33.45$'$}$$

は, 地平線に近づくときによい振る舞いをすることを示せ. そして地平線上の測地線は形

$$\theta = 一定, \qquad r = r_+ = 一定, \qquad \tilde{\phi} = 2a\lambda, \qquad \tilde{V} = 2({r_+}^2 + a^2)\lambda \tag{33.47}$$

をもつことを示せ.

(c) これらは永久に地平線上にとどまる唯一の試験粒子の軌道であることを示せ [ヒント : 光円錐を吟味せよ].

33.7 ブラックホールへのエネルギーの貯蔵およびブラックホールからのエネルギーの除去 [Penrose (1969)]

物体がブラックホールに落下するとき, 物体はホールの質量, 電荷, および固有な角運動量を変える (ブラックホール力学の第 1 法則, コラム 33.4). もし落下する物体が大きいならば, その落下は重力的な, そして電磁気的な放射を多く生み出す. 放出される放射が保持し去るエネルギーおよび角運動量を計算することは—それはブラックホールの最終
*29 状態のどのような計算にも不可欠である—極端に困難な仕事である. しかしもし物体が非常に小さいならば (物体の大きさ ≪ 地平線の大きさ, 物体の質量 ≪ ホールの質量), そ
*30 して十分小さい電荷をもつならば, 物体がホールの周りの各巡回で放出する放射は無視できる. たとえば, 重力放射に対しては

$$\frac{(巡回あたりに放出されるエネルギー)}{(物体の静止質量)} \sim \frac{(物体の静止質量)}{(ホールの質量)} \tag{33.48}$$

[36.5 節をみよ, また Bardeen, Press, and Teukolsky (1972) をみよ]. 放出されるエネルギーは無視できるから, 放射の反作用もまた無視できる. そして物体はきわめてほとんど試験粒子の軌道に沿って動く. この場合にはブラックホール力学の第 1 法則の適用は単

*29　小さい物体が大きいホールに落下するとき
*30　(1) 放射されるエネルギーは物体の静止質量に比べて無視できる

純であり素直である．

*31 まず，遠く離れたところからブラックホールに直接落下する小さい物体を考える．第1法則によれば，物体はブラックホールの質量，電荷，角運動量に以下の変化を生み出す．

$$\Delta M = E = (\text{落下する物体の“無限遠でのエネルギー”}) \tag{33.49a}$$

$$\Delta Q = e = (\text{落下する物体の電荷}) \tag{33.49b}$$

$$\Delta S \equiv \Delta|\boldsymbol{S}| = L_z = \begin{pmatrix}\text{ブラックホールの回転軸に} \\ \text{対する物体の角運動量の成分}\end{pmatrix} \tag{33.49c}$$

落下する物体は $\boldsymbol{S}$ の方向をも変えるだろう．ブラックホールの初期の漸近的な Lorentz 系において，その最初の角運動量ベクトルは z 方向を指し示す．

$$(S_z)_{\text{最初}} = S, \qquad (S_x)_{\text{最初}} = 0, \qquad (S_y)_{\text{最初}} = 0$$

したがって，落下する物体の角運動量の z 成分のみが $\boldsymbol{S}$ の大きさにおける何かの主要な変化を生み出しうる．しかし x 成分および y 成分，L_x および L_y は $\boldsymbol{S}$ の方向を変えることができる．もし物体が無限遠で無視できる速さをもつならば，物体は変化を生み出す（練習問題 33.10）．

$$\Delta S_x = L_x = -(\sin\phi_\infty)\sqrt{\Theta}_\infty - (\cot\phi_\infty \cos\phi_\infty)L_z \tag{33.49d}$$

$$\Delta S_y = L_y = (\cos\phi_\infty)\sqrt{\Theta}_\infty - (\cot\theta_\infty \sin\phi_\infty)L_z \tag{33.49e}$$

$$\Delta({S_x}^2 + {S_y}^2)^{1/2} = \sqrt{\mathcal{Q}} = (L^2 - {L_z}^2)^{1/2} \tag{33.49f}$$

ここに下つき文字“∞”はブラックホールから遠く離れた軌道上の点での（“無限遠”での）量の値を意味する．

次に，Penrose (1969) によって初めて考えられた，より複雑な過程を考える．(1) 小さい物体 A をブラックホールに外部から，無限遠でのエネルギー E_A, 電荷 e_A および角運動量の軸成分 L_{zA} で，投げる．(2) 物体が地平線に非常に近づいたとき，物体を2つの部分，B および C に爆発させて，そのおのおのは引き続いて新しい運動定数 e_B および e_C, E_B および E_C, L_{zB} および L_{zC} をもって新しい試験粒子の軌道に沿って動く．(3) そして，物体 B はホールに落下し捕獲される．しかし物体 C は逆に半径方向の無限遠に逃れ去るような爆発を考えよ．ブラックホールの質量，電荷，および角運動量における変化は何であるだろうか？ ブラックホール力学の第1法則によれば，

$$\Delta M = \begin{pmatrix}\text{遠くの観測者が自分たちのそ} \\ \text{ばを内部に向かって落下する} \\ \text{のをみるときの全エネルギー}\end{pmatrix} - \begin{matrix}\text{再出現するのをみるときの全} \\ \text{エネルギー}\end{matrix}\Bigg)$$

$$= E_A - E_C$$

同様に，$\Delta Q = e_A - e_C$ および $\Delta S = L_{zA} - L_{zC}$．予期しなくはないが，これらの

*31 (2) ホールの質量，電荷，および角運動量は $\Delta M = E$，$\Delta Q = e$，$\Delta S = L_z$ だけ変化する

変化はホールに落ちた物体 B に対する運動の定数を用いてより単純に書かれうる．爆発 "$A \to B + C$" を爆発事象を中心とする，ホール近くの局所 Lorentz 系で眺めよ．この系で眺められるとき，この爆発は物理学の特殊相対論の法則を満たさなければならない（等価原理!）．とくに，この爆発は電荷の保存

$$e_A = e_B + e_C \tag{33.50a}$$

および全 4–運動量の保存

$$(\boldsymbol{p}_A)_{\text{爆発の直前}} = (\boldsymbol{p}_B + \boldsymbol{p}_C)_{\text{爆発の直後}}$$

に従わなければならない．さらに，4–運動量 $\boldsymbol{p}$ および電荷 e の保存は，また一般化された運動量 $\boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}$ の保存，

$$\boldsymbol{n}_A = \boldsymbol{p}_A - e_A\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p}_B + \boldsymbol{p}_C - (e_B + e_C)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{n}_B + \boldsymbol{n}_C$$

を意味する．したがってまた一般化された運動量の，ベクトル $\partial/\partial t$ および $\partial/\partial\phi$ に沿う成分の保存，

$$E_A \equiv -\pi_{tA} = -\pi_{tB} - \pi_{tC} = E_B + E_C \tag{33.50b}$$

$$L_{zA} \equiv \pi_{\phi B} + \pi_{\phi C} = L_{zB} + L_{zC} \tag{33.50c}$$

を意味する（爆発における，"無限遠でのエネルギー" および "角運動量の軸成分" の保存）．これらの保存則を表現

$$\Delta M = E_A - E_C, \qquad \Delta Q = e_A - e_C, \qquad \text{および} \qquad \Delta S = L_{zA} - L_{zC}$$

と結合して

$$\Delta M = E_B, \qquad \Delta Q = e_B, \qquad \Delta S = L_{zB} \tag{33.51}$$

を得る．この結果を言葉で述べ直すと，ブラックホールの質量，電荷，および角運動量の変化は，たとえ物体 B が半径方向に無限遠に逆戻りせず，試験粒子の軌道上で終わったとしても，物体 B が地平線を横切って内部へ保持する "無限遠でのエネルギー"，電荷，および "角運動量の軸成分" に等しい．

*32　上の思考実験の率直な拡張は次の一般化を生む．**落下，衝突，および無視できる重力放射を放出する物質の爆発する断片を含む任意の複雑なブラックホールの過程において，ブラックホールの質量，電荷，および角運動量における全変化は**

$$\Delta M = \left(\begin{array}{l}\text{地平線を横切るすべての物体に対する無限遠での}\\ \text{エネルギー，}E\text{ の値の和（ここに }E\text{ は横切るとい}\\ \text{う事象での各物体に対して計算される）}\end{array}\right) \tag{33.52a}$$

*32　任意の放射しないブラックホール過程に対する M, Q, S における変化

$$\Delta Q = \begin{pmatrix}\text{地平線を横切るすべての物体}\\ \text{に対する電荷},\ e\ \text{の同様の和}\end{pmatrix} \tag{33.52b}$$

$$\Delta S = \begin{pmatrix}\text{地平線を横切るすべての物体に対す}\\ \text{る角運動量の軸成分},\ L_z\text{の同様の和}\end{pmatrix} \tag{33.52c}$$

である．

この結果はけっして驚くべきでない．それは正確にもっとも素朴な観点から予期されるものである．しかし，以下の結果［Penrose (1969)］はそんなに予期されるものでない．
*33 **物体を注意深く選ばれた方法でブラックホールに注入することによって，ブラックホールの全質量–エネルギーを減少させることができる．すなわち，ホールからエネルギーを抽出することができる．**

電荷をもたない落下物体に対しては，エネルギー抽出への手段はエルゴ球［したがってその名前は，Ruffini and Wheeler (1971a) によって，“仕事” に対するギリシャ語 “$\epsilon\rho\gamma o\nu$” からつくり出された］である．エルゴ球の外部では，Killing ベクトル $\boldsymbol{\xi}_{(t)} \equiv \partial/\partial t$ は，すべての試験粒子の 4–運動量 $\boldsymbol{p}$ と同じく時間的である．それゆえ $E = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\xi}_{(t)}$ は必然的に正である．しかしエルゴ球の内部では（地平線と静的な極限との間），$\boldsymbol{\xi}(t)$ は空間的であるから，時間的な運動量ベクトルのある選択に対しては（電荷をもたない試験粒子のある軌道），$E = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\xi}_{(t)}$ は負である．他方別な選択に対しては正である．負の E の軌道は完全にエルゴ球に閉じ込められる．こうして，負の E をもち電荷をもたない物体をブラックホールに注入するには—それによってエネルギーをホールから抽出するには—つねに物体の E を正から負へ変えなければならない，それゆえ物体がエルゴ球に侵入した後，また物体の軌道を変えなければならない，もちろん，これは原理的に困難でないし，おそらく実際的にも困難でない．図 33.2 をみよ．

電荷を帯びた物体に対しては，電磁気力は負の無限遠でのエネルギーの軌道が存在する領域を変える．もし物体およびホールの電荷が逆符号をもつならば，ホールの電磁場は物体を内部に引っ張り，ホールの近くで物体に予期される以上の運動エネルギーを与える．こうして，$-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\xi}_{(t)}$ は E を過大評価する．

$$E = -(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{\xi}_{(t)} = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\xi} + \underbrace{eQr/\rho^2}_{\substack{\uparrow \\ [<0\ \ \text{もし}\ eQ<0\ \text{ならば}]}} \tag{33.53}$$

そして $E < 0$ をもつ軌道はエルゴ球よりも少し大きい領域に存在する．もし，反対に，e および Q が同じ符号をもつならば，$E < 0$ をもつ軌道はエルゴ球よりも小さい領域に制
*34 限される．与えられた値 e, Q, および静止質量μ に対しては，$E < 0$ をもつ軌道が存在する領域は “**有効エルゴ球**” とよばれる．

---

*33 エルゴ球における過程によってブラックホールからエネルギーを抽出する
*34 荷電粒子の過程に対する “有効なエルゴ球”

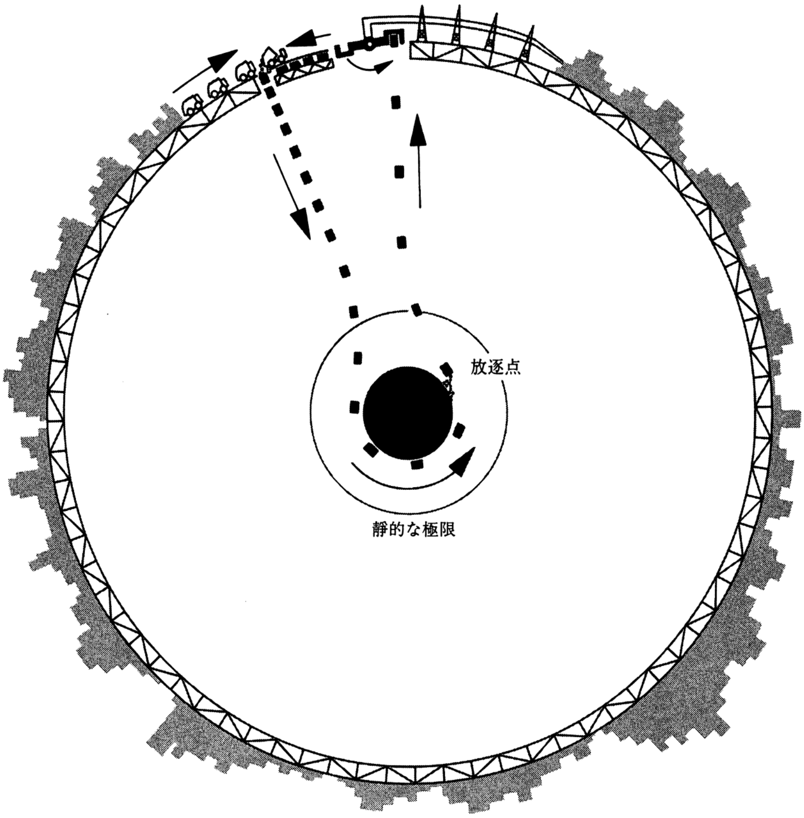


図 33.2　前進した文明はブラックホールの周りに堅い枠組みを構成した．そしてその枠組みの上に巨大な都市を建設した．どの日もトラックが 100 万 t の廃棄物を都市から廃棄物の貯蔵所に運ぶ．貯蔵所で廃棄物は往復運搬車に投げ入れられる．往復運搬車はそれから，次々にブラックホールの中心に向かって落とされる．慣性系の引きずりはおのおのの往復運搬車を地平線近くを旋回する，内部方向へらせん状に進む軌道に動かす．往復運搬車がある "放逐点" に達するとき，その廃棄物の荷物を負の無限遠でのエネルギー，$E_{\text{廃棄物}} < 0$ の軌道に放逐する．廃棄物は，ホールの全質量–エネルギーを $\Delta M = E_{\text{放逐された廃棄物}} < 0$ だけ変えて，ホールに飛び降りるとき，往復運搬車は放逐からはね返りそして往復運搬車が降ろした以上の無限遠でのエネルギーで逆に飛び出していく

$$\begin{aligned} E_{\text{飛び出していく運搬車}} &= E_{\text{運搬車+降ろされる廃棄物}} - E_{\text{放逐された廃棄物}} \\ &> E_{\text{運搬車+降ろされる廃棄物}} \end{aligned}$$

運搬車はその巨大な運動エネルギーを廃棄物の貯蔵所に隣接する巨大なはずみ車に預ける．そしてはずみ車は発電機をまわして都市に対して電気を生み出す．一方往復運搬車は別な廃棄物の積み荷のために逆戻りする．往復運搬車のおのおのの 1 周旅行で生成される全電気的なエネルギーは

$$\begin{aligned} (\text{旅行あたりのエネルギー}) &= E_{\text{飛び出していく運搬車}} - (\text{運搬車の静止質量}) \\ &= (E_{\text{運搬車+降ろされる廃棄物}} - E_{\text{放逐された廃棄物}}) - (\text{運搬車の静止質量}) \\ &= (\text{運搬車の静止質量} + \text{廃棄物の静止質量} - \Delta M) - (\text{運搬車の静止質量}) \\ &= (\text{廃棄物の静止質量}) + (\text{量}, -\Delta M, \text{それだけホールの質量が減少する}) \end{aligned}$$

である．こうして，都市の居住者はブラックホールを用いて彼らの廃棄物の全静止質量を運搬車の運動エネルギーに変換し，それから電力に変換しうるのみならず，またブラックホールの質量のいくらかを電力に変換することができる！

[練習問題]

33.10　落下する粒子に対する角運動量ベクトル

ブラックホールに落下する粒子の軌道角運動量の成分 L_x および L_y に対する式 (33.49d), (33.49e), (33.49f) を導け．無視できる最初の速さ，$E^2 - \mu^2 \approx 0$ を仮定せよ．

33.8　可逆変換と不可逆変換 [Christodoulou (1970), Christodoulou and Ruffini (1971)]

与えられた質量 M，電荷 Q，および角運動量 S のブラックホールをとる．小さい物体の注入によって，M，Q，および S について種々の変化をつくる．任意の望ましい変化，ΔM，ΔQ，および ΔS を選び，そしてそれを達成する過程を案出することができるか？あるいは制限が存在するか？

ブラックホール力学の第 2 法則（ブラックホールの表面積は減少しない，コラム 33.4，次章の 34.5 節における証明）が厳密な制限を与える．

そうするとその制限内ですべての値が達成されうるか，そしてその制限は試験粒子の軌道の直接の吟味によって発見されうるか？

答えはハイである．そして，実際，制限は Christodoulou (1970) および Christodoulou and Ruffini (1971) によって試験粒子の軌道の吟味から，Hawking (1971) のブラックホール力学の第 2 法則の発見と独立に，そして同時に発見された．

*35 試験粒子の軌道の性質から，減少しない表面積の制限を導くには，無限遠でのエネルギー E のどのような値がブラックホール外部の与えられた位置 (r, θ) で許されるかを吟味しなければならない．式 (33.32a)，(33.32b) は，結合されると，E の値を，試験粒子の位置 (r, θ)，静止質量 μ，電荷 e，角運動量の軸成分 L_z，および r と θ 方向についての運動量 $p^r = dr/d\lambda$，$p^\theta = d\theta/d\lambda$ によって与える．

*36
$$\alpha E^2 - 2\beta E + \gamma = 0, \qquad E = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha} \tag{33.54a}$$

ここに

$$\alpha = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta > 0 \quad \text{(地平線外部のいたるところで)} \tag{33.54b}$$
$$\beta = (L_z a + eQr)(r^2 + a^2) - L_z a \Delta \tag{33.54c}$$
$$\gamma = (L_z a + eQr)^2 - \Delta(L_z/\sin\theta)^2 - \mu^2 \Delta \rho^2 - \rho^4[(p^r)^2 + \Delta(p^\theta)^2] \tag{33.54d}$$

*35　試験粒子の軌道の性質

*36　(1)　$\mu, e, L_z, r, \theta, p^r$ の関数としての E

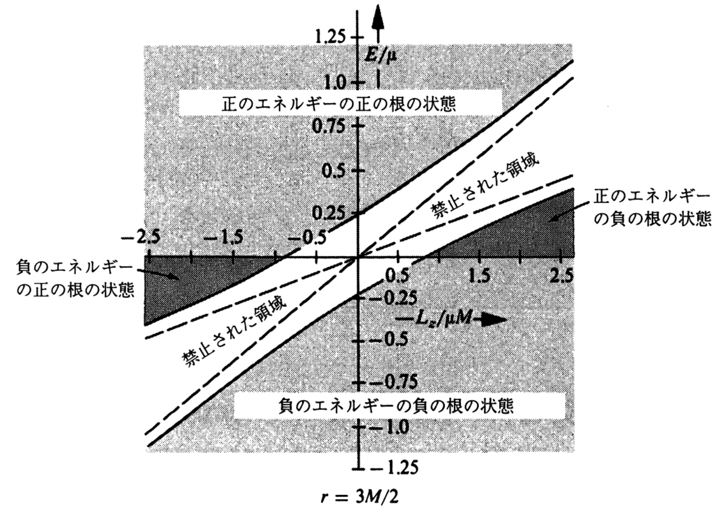


図 33.3 (1) 電荷をもたない ($Q=0$) 極端な Kerr($S=M^2$) ブラックホールの，(2) 半径 $r=3M/2$ における，(3) "赤道平面"$\theta=\pi/2$ 内にある，角運動量 L_z および静止質量 μ の粒子に対して許される無限遠でのエネルギー E. E はここでは L_z に対して描かれている．"正の根および負の根" の状態の "海" が示されている．正の根の状態は式 (33.54) によって与えられる無限遠でのエネルギー

$$E=\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha}$$

をもつ．そして未来の光円錐を指す 4–運動量ベクトルをもつ．負の根の状態（Dirac の "負のエネルギーの海" の状態）は

$$E=\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha}$$

によって与えられる無限遠でのエネルギーをもつ．そして過去の光円錐を指す 4–運動量ベクトルをもつ．正の根の状態の "海" と負の根の状態の "海" との間の間隙には軌道は存在しない（禁止された領域）．間隙は地平線 $r=M$ でなくなる（局所エネルギー間隙 2μ の無限大の赤方偏移は無限遠でのエネルギーにゼロ間隙を与える）［図は Christodoulou (1971) から採用されている］.

（負の 2 乗根よりもむしろ，正の 2 乗根，$+\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}$ をとらなければならない．正の 2 乗根は未来を指し示す 4–運動量に対応している．他方，負の 2 乗根は過去を指し示す 4–運動量に対応している．図 33.3 をみよ．）

*37 エネルギー方程式 (33.54) の若干の特徴は注目に値する．(1) 赤道 "平面" $\theta=\pi/2$ および $p^\theta\equiv 0$ における軌道に対しては，エネルギー方程式は半径方向の運動に対する有効
*38 ポテンシャルを与える（コラム 33.5)．(2) 負の E の軌道は $\beta<0$ および $\gamma>0$ をもたなければならない．それは $L_z a<0$ およびあるいは $eQ<0$ である場合に限り達成されうる．こうして，**電荷の大きさ，角運動量の大きさ，あるいは両方を同時に減少させることなしにブラックホールの質量を減少させることはできない**．(3) 与えられた e および L_z をもち，与えられた (r,θ) での軌道に対しては，もし $p^r=p^\theta=\mu=0$ ならば E は最小である．**別な表現をすれば，静止質量および運動量の r 成分および θ 成分はつねに E に正の寄与をする．**

物体をブラックホールに注入することによって，ブラックホールの質量，電荷，および

---

*37 (2) 有効ポテンシャル

*38 (3) 負の E は $L_z a<0$ および，あるいは $eQ<0$ を要求する

角運動量に小さい変化

$$\delta M = E, \qquad \delta Q = e, \qquad \delta S = L_z$$

*39 が生み出される．Q および S についての与えられた変化に対して，M についての変化のどのような領域が可能であるか？ 明らかに δM は静止質量 μ を十分大きくすることによって望むだけ大きくされうる．しかし δM について下限が存在するだろう．その限界は与えられた e および L_z に対して E の最小値に対応する．最小の E の軌道は地平線を横切る（さもないと M, Q, S についての変化は起こらないだろう!）．したがってそこで E を求めることができる．地平線では，任意の地点同様に，E に対する最小は，もし $\mu = p^r = p^\theta = 0$ ならば達成される．これらの値および $r = r_+$(したがって$\Delta = 0$) を式 (33.54) に挿入して，

$$E_{最小} = \frac{L_z a + eQr_+}{{r_+}^2 + a^2} \tag{33.55}$$

を見出す．それは

*40

$$\delta M \geq \frac{a\,\delta S + r_+ Q\,\delta Q}{{r_+}^2 + a^2} \qquad \begin{pmatrix}\text{与えられた } \delta S \text{ および } \delta Q \text{ に} \\ \text{対して } \delta M \text{ の絶対的な最小値}\end{pmatrix} \tag{33.56}$$

のブラックホールの性質における変化に対応する．

重要な結果に注意せよ [Bardeen (1970a)]．もしブラックホールが最初 $M^2 = a^2 + Q^2$ をもつ “極端な Kerr–Newman” 型であり，$M^2 < a^2 + Q^2$ となり，それによって地平線を破る変化を恐れるならば，その恐れは根拠がない．式 (33.56) はそうすると（$r_+ = M$ および $S = Ma$ であるから）

$$M\,\delta M \geq a\,\delta a + Q\,\delta Q$$

*41 を要求する．したがって M^2 は $a^2 + Q^2$ よりも大きいかあるいは等しくとどまり，そして地平線は保存される．

コラム 33.5　Kerr–Newman ブラックホールの “赤道面” における試験粒子の軌道

半径方向の運動は $\theta = p^\theta = 0$ をもつエネルギー方程式 (33.54) によって支配される．

$$\alpha E^2 - 2\beta E + \gamma_0 - r^4(p^r)^2 = 0, \qquad E = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma_0 + \alpha r^4 (p^r)^2}}{\alpha} \tag{1}$$

α, β, γ_0 は r および運動の定数の関数である．

---

*39　粒子の注入によるブラックホールの性質における変化

*40　(1) 与えられた δQ および δS に対するδM についての極限

*41　(2) 地平線の保存

$$\alpha = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 > 0 \tag{2a}$$

$$\beta = (L_z a + eQr)(r^2 + a^2) - L_z a\Delta \tag{2b}$$

$$\gamma_0 = (L_z a + eQr)^2 - \Delta L_z{}^2 - \mu^2 r^2 \Delta \tag{2c}$$

p^r=(半径方向の運動量) は

$$p^r = dr/d\lambda \tag{3}$$

である．こうして，式 (1) は $dr/d\lambda$ に対する常微分方程式である．

半径方向の運動の定性的な特徴は有効ポテンシャル図から読むことができる．有効ポテンシャル $V(r)$ は半径 r で E の最小の許される値である．

$$V(r) = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma_0}}{\alpha}$$

Schwarzschild の場合 (図 25.2) におけるように，無限遠でのエネルギー E の粒子に対する許される領域は $V(r) \le E$ をもつ領域である．そして転換点 ($p^r = dr/d\lambda = 0$) は $V(r) = E$ のところで起こる．

安定な円軌道は $V(r)$ の最小で起こる．$V(r)$ を詳しく吟味することによって，電荷をもたないブラックホールに対しては，もっとも内部の安定な円軌道（もっとも堅く束縛された軌道）はここで表にされた特徴をもつ［Ruffini and Wheeler (1971b) から採用された表］．

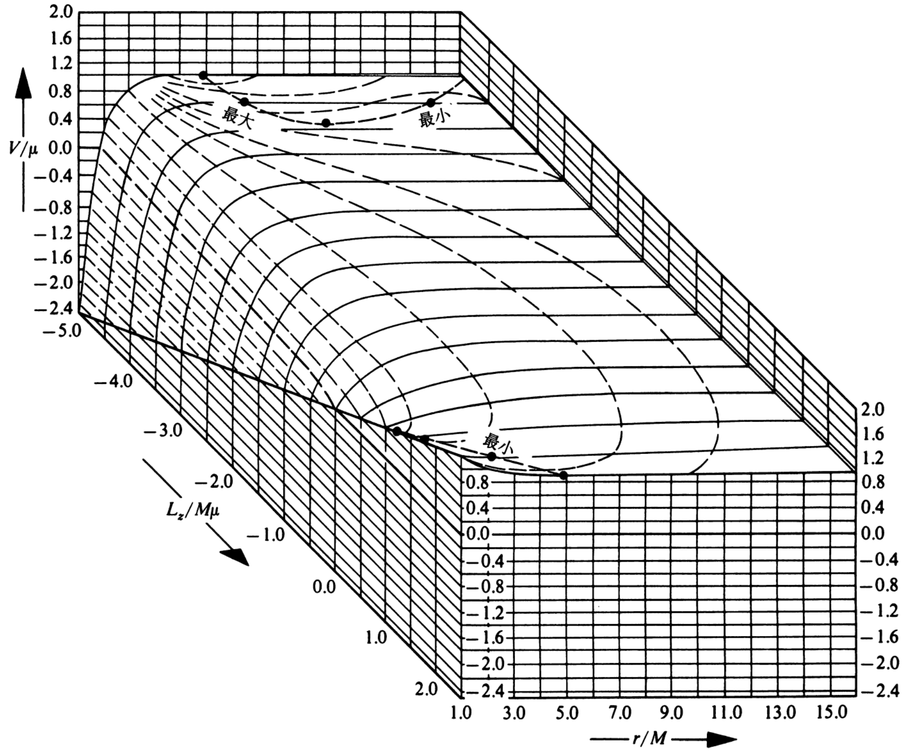
特　徴	**Newton** (図 **25.2**)	**Schwarzschild** ($a = Q = 0$) (図 **25.2**)	極端な **Kerr** ($a^2 = M^2$, $Q = 0$) (図をみよ) [**Bardeen** (**1970a**)] もし $L_z a > 0$ ならば	もし $L_z a < 0$ ならば
r/M	0	6	1	9
E/μ	$-\infty$	$2\sqrt{2}/3$	$1/\sqrt{3}$	$5/(3\sqrt{3})$
$(\mu - E)/\mu =$ "微小な束縛"	$+\infty$	0.0572	0.4226	0.0377
$\|L_z\|/\mu M$	0	$2\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	$22/(3\sqrt{3})$

電荷を帯びた極端な Kerr–Newman ブラックホールに対して ($M^2 = Q^2 + a^2, Q \neq 0$ および $a \neq 0$)，100%の束縛 ($E = 0$) をもつ安定な円軌道は極限

$$\frac{e}{\mu} \to -\infty, \quad \frac{Q}{M} \to 0 \ \text{(したがって } a \to M\text{)}, \quad \text{および} \quad \left(\frac{e}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{Q}{M}\right) \to -\infty$$

において達成される［Christodoulou and Ruffini (1971)］．

電荷を帯びない，極端な Kerr ブラックホール ($a = M$) に対する有効ポテンシャルは図に示されている［Ruffini and Wheeler (1971b) から採用された図］．赤道面



における軌道の詳細な図に対しては．de Felice (1968) をみよ．赤道面に制限されない軌道の多くの興味ある性質に対しては，Wilkins (1972) をみよ．

質量の変化についての一般的な制限 (33.56) は別な形に書き直されうる [Christdoulou and Ruffini (1971)].

*42

$$\delta M_{既約} \geq 0 \tag{33.57}$$

ここに

$$M_{既約} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{{r_+}^2 + a^2} = \frac{1}{2}[(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2})^2 + a^2]^{1/2} \tag{33.58}$$

はブラックホールの “既約質量” である．**式 (33.57) は，物質の小さい塊の注入によって生み出されるブラックホールの変換は，ブラックホールの既約質量を減少させることができないことを述べている．**この結果は実際ブラックホール力学の第 2 法則の特別な場合である．なぜならブラックホールの表面積は

$$A = 16\pi {M_{既約}}^2 \tag{33.59}$$

である（練習問題 33.12）からである．

式 (33.58) は $a = S/M$ と結合され，

*42 (3) 既約質量

$$M^2 = \left(M_{\text{既約}} + \frac{Q^2}{4M_{\text{既約}}}\right)^2 + \frac{S^2}{4{M_{\text{既約}}}^2} \tag{33.60}$$

［質量への既約な寄与］（$M_{\text{既約}}$）　［質量への電磁気的な寄与］（$\frac{Q^2}{4M_{\text{既約}}}$）　［質量への回転の寄与］（$\frac{S^2}{4{M_{\text{既約}}}^2}$）

を与えるよう転化されうる．

*43 既約質量を固定して保持するブラックホール変換は**可逆である**．既約質量を増大するブラックホール変換は**不可逆である**．式 (33.56) の導出は，δM に対する最小の可能な値を実際に達成する（こうして $\delta M_{\text{既約}} = 0$ にする）唯一の注入過程は地平線，$r = r_+$ で $\mu = p^r = p^\theta = 0$ をもつ注入過程であることを明らかにした．言い換えると，物体をブラックホールに注入することによって可逆変換を生み出すには，(1) 物体に電荷 ϵ あるいは角運動量の軸成分 L_z に比べて極端に小さい静止質量 μ を与えなければならない．

$$\mu/e \ll 1 \qquad \text{および/あるいは} \qquad \mu^2/{L_z}^2 \ll 1$$

そして (2) 物体を "極端に静かに"($p^r = p^\theta = 0$)，極端に地平線に近く ($r = r_+$) 置かなければならない．これは，地平線で $p^r = p^\theta = 0$ をもつ物体は光の速さで外部へ動いていなければならないこと，および物体を置くときに地平線に近づくほど，"滑ったり" 飲み込まれる危険が大きくなることを思い出すまでは，あまり困難であるように思えない！

明らかに，任意の実際の注入過程は不可逆性から少し離れるだろう．可逆性は理想化された極限であり，近づけることはできるが達成できない．

［練習問題］

33.11　既約質量は既約である

条件 (33.56) は $\delta M_{\text{既約}} \geq 0$ に同等であることを示せ．

33.12　ブラックホールの表面積

Kerr–Newman 幾何学の地平線の表面積［表面積 $r = r_+$ および $t =$ 一定（Boyer–Lindquist 座標）あるいは $\tilde{V} =$ 一定（Kerr 座標）］は $16\pi {M_{\text{既約}}}^2$ であることを示せ．

33.13　ブラックホールの角速度

一般的な定理［相対論的な場合に対しては Hartle (1970)，非相対論的な場合に対しては Ostriker and Gunn (1969)］は，もし角運動量を回転している星に注入し，他方ブラックホールの全質量–エネルギーへのすべての他の寄与（エントロピーからの寄与およびバリオンの静止質量からの寄与）を固定して保持すると，注入は

$$\delta(\text{質量–エネルギー}) = (\text{注入点での星の角速度})\,\delta(\text{角運動量}) \tag{33.61}$$

によって与えられる全質量–エネルギーにおける変化を生み出す．類推によって，もし角運動量 δS をブラックホールに注入し，他方全質量–エネルギーへのすべての他の寄与（既約

*43　(4) 可逆変化と不可逆変化

質量からの寄与および電荷からの寄与）を固定して保持すると，式

$$\delta M = \Omega_h \delta S$$

における係数 Ω_h をホールの角速度と同定する．

$$\Omega_h = (\partial M/\partial S)_{Q, M_{既約}} \tag{33.62}$$

(a) ブラックホールの角速度は

$$\Omega_h = \frac{a}{{r_+}^2 + a^2} \tag{33.63}$$

に等しいことを示せ．これは正確に地平線上で永久に存続する光子の角速度であることに注意せよ［式 (33.42b)，地平線のヌル生成子の “理髪店の看板柱のねじれ”］．

(b) ブラックホールに落下する**任意の**物体は，地平線に近づくとき，遅い段階で $\Omega = d\phi/dt = \Omega_h$ の角速度（Boyer–Lindquist 座標に対して）をうることを示せ（地平線は Boyer–Lindquist 座標の特異点であることを思い出せ．これは，すべての物体はその L_z, E, e, μ, Q に関係なく，$\Omega = \Omega_h$ に近づきうるし，そして近づく理由である）．

33.14 波動方程式に対する変数分離

本章はブラックホールの外部場内での小さい物体の運動を幅広く調べた．Kerr–Newman 幾何学における弱い電磁気的な摂動および重力的な摂動（“波”）の展開は，ほとんど等しく重要であるが，複雑さのゆえにいまだあまりよく理解されていない．ちょうど Kerr–Newman 幾何学内での試験粒子の運動に対する “4 番目の定数” を予期する**先験的な**理由をもたなかったように，Maxwell の方程式に対する，あるいは重力的な摂動を記述する波動方程式に対する，あるいはさらにスカラー波動方程式 $\Box\psi \equiv -{\psi_\alpha}^\alpha = 0$ に対する分離可能性を予期する理由をもたなかった．こうして Carter（1968c）がスカラー波動方程式に対する分離可能性を証明したときに，そして後に Teukolsky（1972,1973）が Maxwell の方程式および重力的な摂動に対する波動方程式の両方を分離したときに，それは大きい驚きとして現れた．

（電荷をもたない）Kerr 幾何学におけるスカラー波動方程式に対する変数分離は形

$$\psi = (r^2 + a^2)^{-1/2} u_{lm}(r) S_{ml}(-i\omega a, \cos\theta) e^{i(m\phi - \omega t)} \tag{33.64a}$$

の解を与える．ここに m および l は $0 \le |m| \le l$ をもつ整数である．S_{ml} は楕円体調和関数である［Meixner and Schärfke（1954）をみよ］．そして u_{lm} は微分方程式

$$-d^2u/dr^{*2} + Vu = 0 \tag{33.64b}$$

を満たす．式をこの形に表現するために，Regge–Wheeler（1957）“カメ” 型の半径方向の座標 r^* を

$$dr^* = \Delta^{-1}(r^2 + a^2)dr \tag{33.64c}$$

によって定義し，そして

$$V = -\left(\omega - \frac{ma}{r^2+a^2}\right)^2 + [(m-\omega a)^2 + Q](r^2+a^2)^{-2}\Delta + 2(Mr-a^2)(r^2+a^2)^{-3}\Delta + 3a^2(r^2+a^2)^{-4}\Delta^2 \tag{33.64d}$$

によって与えられる有効ポテンシャル $V(r^*)$ を見出せ．この半径方向の式で Q は

$$Q \equiv \lambda_{ml} - m^2,\ \lambda_{ml} = \begin{bmatrix} \text{楕円体調和関数の固有関数，Meixner} \\ \text{and Schärfke (1954) をみよ} \end{bmatrix} \tag{33.64e}$$

によって m および l によって与えられる定数である（粒子の運動に対する Carter の定数の類似）［分離された解のこれらの詳細は Brill 等によって導かれた（1972）．場と Kerr ブラックホール間の相互作用の研究—上の解を用いて遂行された研究，および電磁気的な波動方程式および重力的な波動方程式への類似の解を用いて遂行された研究—については Bardeen, Press, and Teukolsky（1972），Misner（1972b），Teukolsky（1972），Ipser（1971），Press and Teukolsky（1973），および Chrzanowski and Misner（1973）をみよ］.

34章
大域的な技術，地平線，および特異点定理

[本章は完全にトラック–2である．22.5節（幾何光学）および32章および33章のトラック–2部分（崩壊とブラックホール）は本章に対する必要な準備である．本章は任意の後の章に対する準備として必要とされない.]

34.1 大域的な技術対局所的な技術

*1 1960年代までは，重力理論についての計算はほとんどもっぱら**局所的**な技術を用いた. Einsteinの場の方程式は与えられた事象でのストレス–エネルギーテンソル $\boldsymbol{T}$ がその同じ事象での曲率 $\boldsymbol{G}$ をいかに生成するかを記述する（**局所的**な物理学）．計量係数に対する微分方程式に帰着されるときには，$\boldsymbol{G} = 8\pi \boldsymbol{T}$ は，おのおのの与えられた事象での $g_{\alpha\beta}, \partial g_{\alpha\beta}/\partial x^{\mu}$ および $\partial^2 g_{\alpha\beta}/\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}$ を，その同じ事象での $T_{\gamma\delta}$ に関係づける（**局所的**な方程式）．これらの微分方程式の解は，コンピュータに基づいてあるいは任意の初期値型解析において，事象から事象へ時間について前方へ積分することによって，もたらされる（**局所的**な積分）. 物理学の非重力的な法則は，時空におけるおのおの個々の事象での**局所的**な Lorentz 系において等価原理を発動することによって得られる．時空の大域的な構造の理解を確立するには，各事象近くの**局所的**な計算を遂行し，それから局所的な結果を継ぎ合わせて大域的な状況を形成する．局所的な解析へのこの大きな信頼はなぜか？ なぜなら重力の物理学の法則は局所的に述べられるときにとくに単純な形をとるからである.

重力の物理学はまた強力で単純な**大域的**な法則にも支配されていることを，物理学者は1960年の中頃まで理解しなかった．しかし1963年以来，ブラックホールの研究および特異点の研究は，単純性と優雅さにおいて（局所的な）等価原理とさえ競争する，時空の大域的な法則および大域的な性質を明らかにした．一例はブラックホール力学の第2法則である“孤立系で，すべてのブラックホールの表面積の和はけっして減少しない”．結果として，時空の大域的な性質を**直接**解析するための知識と技術の強力な体系が展開された.

大域的な技術の完全な取り扱いを与えるためには多くの章が必要だろう．幸いに，完全な取り扱いを記したものが本書とほぼ同時に，Hawking and Ellis (1973) によって出版されつつある．Hawking and Ellis はこの題目についての著述に対して，われわれ（Misner, Thorne, and Wheeler）よりもはるかに適任であるから，本書では“競合する内容”は書かないことにした．代わりに，本章で含まれている技術の型およびもっとも重要な結果のい

*1 時空幾何学を解析する局所的な技術が大域的な技術と対照される

くつかを読者に心得させる程度に，しかし題目について仕事できるほどの知識を与えるには十分でない，題目の簡単な概観のみを与える．われわれが取り扱うべく選んだ題目は本書の残りともっとも密接に接触する題目であり，以下のとおりである．漸近的に平坦な時空における "無限遠" の性質（34.2 節），因果律と地平線（34.3 および 34.4 節），ブラックホール力学の第 2 法則の証明（34.5 節），および時空における特異点の発展についての
*2 定理（34.6 節）．大域的な技術についてより重要な詳細に対しては，Hawking and Ellis (1973) の本のみならず，また Geroch (1971)，Penrose (1968a,1972)，および Hawking (1973) によるレビュー論文，Godfrey (1970b) の学位論文，および本章の本文に引用されてあるより専門的な論文を調べるのがよい．

34.2 漸近的に平坦な時空における "無限遠"

*3 漸近的に平坦な時空における計算を遂行するとき，しばしば "無限遠での" 場（たとえば，計量，あるいは曲率テンソル，あるいは電磁場）の漸近的な形を吟味しなければならない．たとえば，孤立系の質量および角運動量は計量の漸近形によって定まる（19 章）．"空間の無限遠" 近くの漸近形を吟味することはまれにしか十分でない．たとえば，もしどれだけの質量が超新星爆発の間重力波および電磁波によって運び去られたかを学ぶことを望むならば，まさに "空間の無限遠" でなくて "未来のヌル無限遠" での計量の漸近形を吟味しなければならない（図 34.1 をみよ）．

Penrose（1964,1965a）は "無限遠" 近くの時空の漸近的な性質を研究するための数学的な技術の強力な体系を展開した．彼の技術の鍵は "無限遠" を有限の半径へもたらし，それによって漸近的な計算を "有限点" での計算に転換する，時空の "共形変換" である．Penrose の技術はまた，漸近的に平坦な時空内で遭遇する "無限遠" の種々の型の厳密な定義を与える．

*4 Penrose の技術の詳細は本章の残りに重要でない．しかし，本章はしばしば Penrose によって定義された "無限遠" の種々な型に関係するだろう．発見法的な言葉で，それらは以下のようである［図 34.2(a) をみよ］．

$I^+ \equiv$ "未来の時間的な無限遠"

有限の半径 r で領域 $t \to +\infty$（時間的な線が延びる領域）

$I^- \equiv$ "過去の時間的な無限遠"

有限の半径 r で領域 $t \to -\infty$（時間的な線が遡る領域）

$I^0 \equiv$ "空間的な無限遠"

有限の時間 t で領域 $r \to \infty$（空間的な薄片が延びる領域）

*2 大域的な技術についての文献
*3 無限遠近くの時空の性質を研究するための動機
*4 無限遠の特別な領域：I^+, I^0, I^-, $\mathcal{I}^+$, $\mathcal{I}^-$

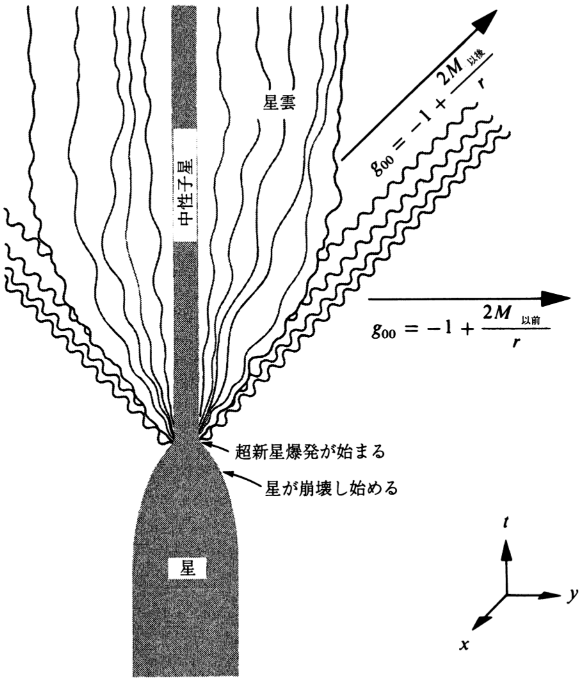


図 34.1 漸近的に平坦な時空において，超新星爆発によって重力波および電磁波として放射される質量–エネルギーの測定．放射される質量–エネルギーは，超新星の質量（$M_{以前}$）から爆発後の中性子星および星雲の質量（$M_{以後}$）を差し引いたものに等しい．

$$M_{放射される} = M_{以前} - M_{以後}$$

$M_{以前}$ を測定するには，空間の無限遠での g_{00} の漸近形（適当な座標における）

$$g_{00} = -1 + \frac{2M_{以前}}{r} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \qquad r\to\infty,\ \ t = 一定のとき$$

を吟味することができる．しかし $M_{以後}$ を同じ方法で測定するには，任意の固定された r で，放射が完全にその点を流れ過ぎてしまうまで待たなければならない．

$$g_{00} = -1 + \frac{2M_{以後}}{r} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$r\to\infty,\ \ t - r = (波の噴出の内部にあるべく十分に大きい一定の値)のとき$$

別な言葉で述べれば，$M_{以後}$ を測定するには，g_{00} の漸近形を“空間の無限遠”でなくて，むしろ“未来のヌル無限遠”で吟味しなければならない．

$\mathcal{I}^+ \equiv$ “未来のヌル無限遠”

有限の $t-r$ で領域 $t+r\to\infty$（出ていくヌル線が延びる領域）

$\mathcal{I}^- \equiv$ “過去のヌル無限遠”

有限の $t+r$ で領域 $t-r\to-\infty$（入ってくるヌル線が遡る領域）

注意：$\mathcal{I}$ は，原文で用いられ，ときどき名前“scri”を与えられている筆記体（script）の I の代わりに，本書で用いられている記号である．

*5 時空の漸近的な構造を視覚化するときに，無限遠を有限の座標値に帰する座標を導入す

*5 無限遠の構造を示すための座標図

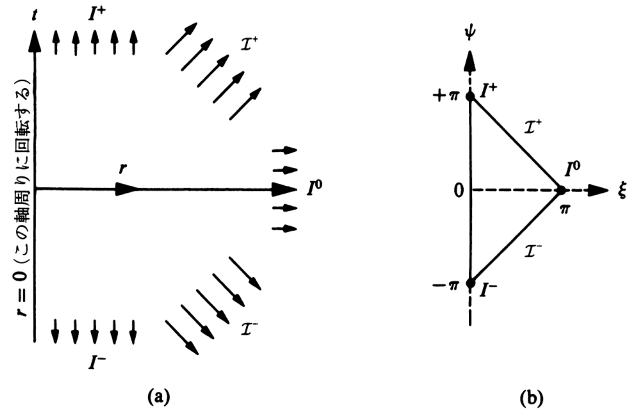


図 34.2（a）大域的な Lorentz 系の通常の球座標 t, r, θ, ϕ，および（b）式 (34.2) の球座標で描かれたときの平坦な "Minkowski" 時空．無限遠の 5 個の領域—I^+，I^-，I^0，$\mathcal{I}^+$，$\mathcal{I}^-$—がおのおのの座標図に示されている．両方の座標系で，半径方向のヌル線は鉛直軸と 45 度の角度をなし，そして非半径方向のヌル線は 45 度よりも小さい角度をなす［式 (34.1) および (34.2c) をみよ］．さらなる詳細に対しては練習問題 34.1 をみよ．

ることはしばしば有用である．たとえば，平坦な時空で

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{34.1}$$

をもつ通常の球座標 t, r, θ, ϕ から，

$$t + r = \tan\frac{1}{2}(\psi + \xi) \tag{34.2a}$$

$$t - r = \tan\frac{1}{2}(\psi - \xi) \tag{34.2b}$$

$$ds^2 = \frac{-d\psi^2 + d\xi^2}{4\cos^2\frac{1}{2}(\psi+\xi)\cos^2\frac{1}{2}(\psi-\xi)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{34.2c}$$

をもつ新しい球座標 ψ, ξ, θ, ϕ へ変換できる．生ずる ψ, ξ 座標図［図 34.2(b)］は通常の t, r, 座標図よりもより明らかに $I^+, I^-, I^0, \mathcal{I}^+, \mathcal{I}^-$ を表現する．

別な例として，Schwarzschild 時空に対する Kruskal–Szekeres 座標 v, u, θ, ϕ を新しい座標 ψ, ξ, θ, ϕ によって置き換えよ．

$$v + u = \tan\frac{1}{2}(\psi + \xi) \tag{34.3a}$$

$$v - u = \tan\frac{1}{2}(\psi - \xi) \tag{34.3b}$$

$$(1 - r/2M)e^{r/2M} = v^2 - u^2 = \tan\frac{1}{2}(\psi + \xi)\tan\frac{1}{2}(\psi - \xi) \tag{34.3c}$$

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r}\frac{e^{-r/2M}(-d\psi^2 + d\xi^2)}{4\cos^2\frac{1}{2}(\psi+\xi)\cos^2\frac{1}{2}(\psi-\xi)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{34.3d}$$

生ずる座標図（図 34.3）は，地平線，特異点，および無限遠の種々の領域間の因果的な関係を明白に表現する．

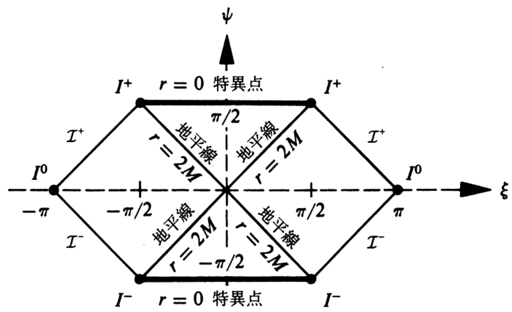


図 34.3 式 (34.3) の ψ, ξ, θ, ϕ 座標で描かれているときの Schwarzschild 時空．この座標図は Kruskal–Szekeres 座標図（図 31.3）と比較されるべきである．両方の図で，半径方向のヌル測地線は 45 度線である．漸近的に平坦な領域のおのおの［図 31.5(a) の “ワームホール” の各側に 1 つ］は，それ自身の無限遠の組 I^+，I^-，I^0，$\mathcal{I}^+$，および $\mathcal{I}^-$ をもつ．この図の正当化に対しては練習問題 34.2 をみよ．

［練習問題］

34.1　ψ, ξ, θ, ϕ 座標における平坦な時空

(a) 式 (34.1) および (34.2a)，(34.2b) から式 (34.2c) を導け．

(b) 平坦な時空の領域 I^+，I^-，I^0，$\mathcal{I}^+$，および $\mathcal{I}^-$ は

$$\begin{aligned}
&I^+ : \psi = \pi,\ \xi = 0,\\
&I^- : \psi = -\pi,\ \xi = 0,\\
&I^0 : \psi = 0,\ \xi = \pi,\\
&\mathcal{I}^+ : \psi + \xi = \pi,\ -\pi < \psi - \xi < \pi,\\
&\mathcal{I}^- : \psi - \xi = -\pi,\ -\pi < \psi + \xi < \pi
\end{aligned} \tag{34.4}$$

に位置していることを示せ［式 (34.2) をみよ］．これらは図 34.2 に表現されている領域である．

(c) 平坦な時空では ψ, ξ 座標図（図 34.2）で，半径方向のヌル線は鉛直軸と 45 度の角度をつくる．そして非半径方向のヌル線は 45 度よりも小さい角度をつくることを示せ．

34.2　ψ, ξ, θ, ϕ 座標における Schwarzschild 時空

(a) 式 (34.3c), (34.3d) を (34.3a), (34.3b) および Kruskal–Szekeres 式 (31.14) から導け．

(b) 式 (34.3) を用いて図 34.3 における座標図の正確な形を正当化せよ．

34.3　Reissner–Nordstrøm 時空

(a) $0 < |Q| < M$ をもつ Reissner–Nordstrøm 幾何学（練習問題 31.8 および 32.1）が形式

$$ds^2 = F^2(-d\psi^2 + d\xi^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2),$$

$$F = F(\psi, \xi), \qquad r = r(\psi, \xi) \tag{34.5}$$

をもち，そして地平線と無限遠が図 34.4 に示されているような座標系が存在することを示せ［注意：これは練習問題 31.8（d）の解を手元にもたなければ，非常に難しい練習問題である．解に対しては，Carter（1966b）をみよ］．

（b）図 34.4 を用いて Reissner–Nordstrøm 幾何学は，以下の性質をもち，2 つの漸近的に平坦な時空をつないでいる“ワームホール”あるいは橋を記述することを導け．それは（i）最大の外周の状態まで膨張する．（ii）最小の外周の状態へ再収縮し，その過程において外部領域を 2 つの I^0（空間の無限遠）から引き離し，外部領域を一対の $r=0$ 特異点に再び結びつける．（iii）はね返る．（iv）再膨張し，その過程において“外部領域”を 2 つの特異点から引き離し，2 つの新しい漸近的に平坦な宇宙における一対の I^0 に再び結びつける．（v）膨張を遅らせて停止させる．（vi）最小の外周の状態を再び収縮させ，その過程において外部領域を 2 つの I^0 から離れさせ，新しい一対の $r=0$ 特異点に再び結びつける．そしてそれは終わりなく続く．

34.3　因果律と地平線

さてブラックホールを解析するための大域的な*技術に向かう．議論の目標は（1）地平線の概念を定義すること（本節），（2）地平線の大域的な幾何学的な性質を導き出すこと（次節），そして（3）ブラックホール力学の第 2 法則を証明すること（次節），であるだろう．全議論は（1）少なくとも 1 つの漸近的に平坦な領域（“外部の宇宙”，“ブラックホール外部の”領域）を含む，そして（2）“時系列的な”，時空多様体に制限されるだろう．“**時系列的**”ということは，時空内の各事象で，光円錐が未来の光円錐であるか，あるいは過去の光円錐であるかについての選択がなされて，さらにこの選択は時空を通して事象から事象へ連続であるということを意味する．

*6

議論は時空の事象と領域間の種々の因果関係の定義で始まる（図 34.5 をみよ）．

*7

定義：$\mathcal{P} \ll \mathcal{Q}$ あるいは同等に $\mathcal{Q} \gg \mathcal{P}$（“事象 $\mathcal{P}$ は事象 $\mathcal{Q}$ に**先行する**”，“事象 $\mathcal{Q}$ は事象 $\mathcal{P}$ に**続く**）は，$\mathcal{P}$ から $\mathcal{Q}$ に延びる少なくとも 1 つの滑らかな，未来を指し示す時間的な曲線が存在することを意味する．

定義：**因果関係の曲線** $\mathcal{C}(\lambda)$ は，どこも空間的でない．すなわち，時間的である，あるいはヌルである，あるいは“ゼロ”である［$\mathcal{C}(\lambda)=$ ある固定された $\mathcal{P}$，すべての λ に対して］，あるいはそれらの混合である，任意の滑らかな曲線である．

定義：$\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$ あるいは同等に $\mathcal{Q} \succ \mathcal{P}$（事象 $\mathcal{P}$ は事象 $\mathcal{Q}$ に**因果的に先行する**，事象 $\mathcal{Q}$

---

* 大域的な，しかし完全に大域的でない，34.3–34.5 節の“宇宙”は漸近的に平坦である，宇宙の可能な閉鎖あるいは崩壊あるいはそれらの結果についての説明は，ここではなされない．

*6 漸近的に平坦な，時系列的な多様体への議論の制限

*7 いくつかの因果律の概念の定義

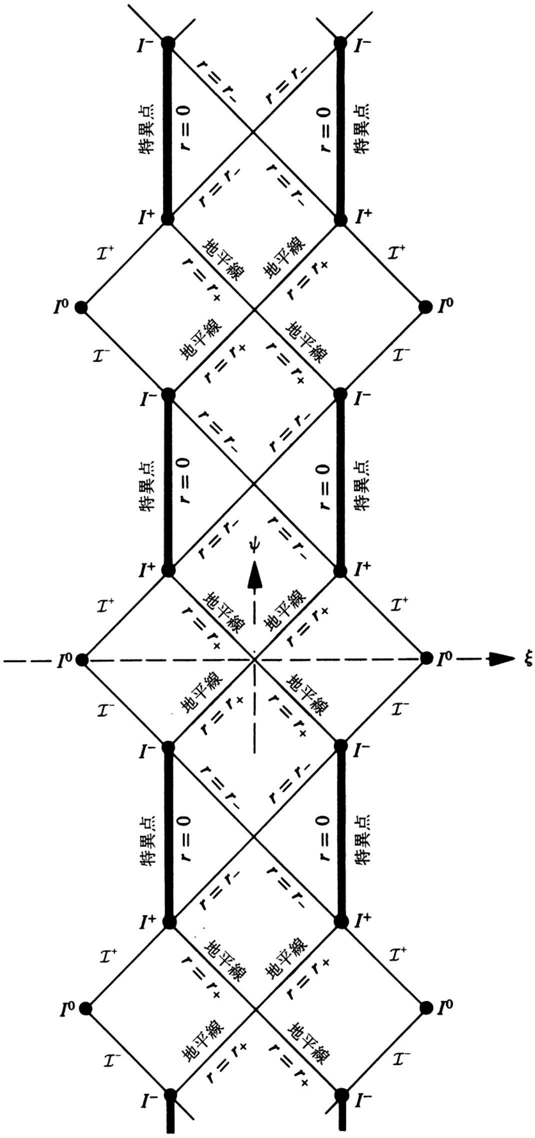


図 34.4 線要素が形

$$ds^2 = F^2(-d\psi^2 + d\xi^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

をもつ新しい $(\psi, \xi, \theta, \phi)$ 座標系で描かれるときの，$0 < |Q| < M$ をもつ Reissner–Nordstrøm 時空

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r + Q^2/r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

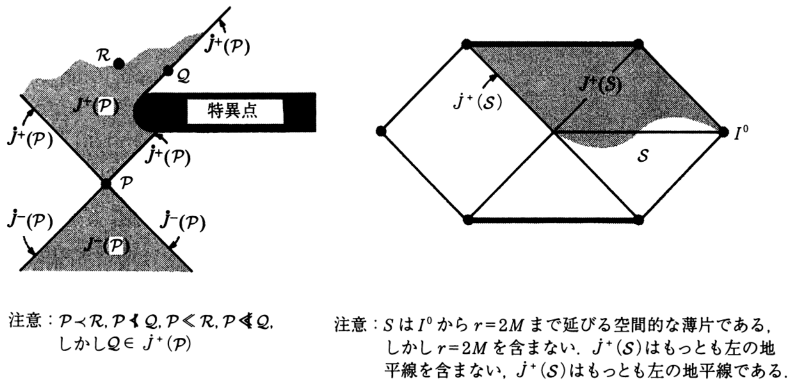
(練習問題 34.3 をみよ)．この座標図は幾何学の大域的な構造を明かす．それは $r = 0$ での特異点，

$$r = r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$$

での地平線（それは $\mathscr{I}^+$ および $\mathscr{I}^-$ との連絡を制限する)，

$$r = r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2}$$

でのヌル面（それは特異点との連絡を制限する)，および種々の漸近的に平坦な無限遠，I^+，I^-，I^0，$\mathscr{I}^+$，および $\mathscr{I}^-$ を含む．この図から幾何学の“因果構造”，すなわち，種々の領域が互いに連絡する能力を読み取ることができる．幾何学の詳細な議論に対しては，Graves and Brill (1960) および Carter (1966b) をみよ．この幾何学が外部の重力場となる，電荷をもった星の重力崩壊の議論に対しては，Novikov (1966a,b)，de la Cruz and Israel (1967)，および Bardeen (1968) をみよ．



(a)　　　　　　　　　　　　(b)

図 **34.5**　種々の因果関係を例示する時空図．(a) 仮想的な時空，(b) Schwarzschild 時空である（図 34.3 をみよ）．両方の図で，ヌル線は 45 度の傾斜をもつ．

は事象 $\mathcal{P}$ に**因果的に続く**）は，$\mathcal{P}$ から $\mathcal{Q}$ へ延びる少なくとも 1 つの，未来を指し示す因果関係の曲線が存在することを意味する．

定義：$J^{-}(\mathcal{P})$（$\mathcal{P}$ **の因果的な過去**とよばれる）は，因果的に $\mathcal{P}$ に先行するすべての事象の組である．すなわち，$J^{-}(\mathcal{P})=\{\mathcal{Q}|\mathcal{Q}\prec\mathcal{P}\}$．

定義：$J^{+}(\mathcal{P})$（$\mathcal{P}$ **の因果的な未来**とよばれる）は，因果的に $\mathcal{P}$ に続くすべての事象の組である．すなわち，$J^{+}(\mathcal{P})=\{\mathcal{Q}|\mathcal{Q}\succ\mathcal{P}\}$．

定義：もし $\mathcal{S}$ が時空の領域であるならば—たとえば，空間的な超曲面の部分であるならば—$J^{-}(\mathcal{S})$（$\mathcal{S}$ **の因果的な過去**）は $\mathcal{S}$ 内の少なくとも 1 つの事象に因果的に先行するすべての事象の組である．すなわち，

$$J^{-}(\mathcal{S})=\{\mathcal{Q}|\mathcal{Q}\prec\mathcal{P},\ \text{少なくとも 1 つの } \mathcal{P}\in\mathcal{S} \text{ に対して}\}$$

定義：同様に，$J^{+}(\mathcal{S})$（$\mathcal{S}$ **の因果的な未来**）は，$\mathcal{S}$ 内の少なくとも 1 つの事象に因果的に続くすべての事象の組である．すなわち，

$$J^{+}(\mathcal{S})=\{\mathcal{Q}|\mathcal{Q}\succ\mathcal{P},\ \text{少なくとも 1 つの } \mathcal{P}\in\mathcal{S} \text{ に対して}\}$$

定義：$\dot{J}^{+}(\mathcal{S})$ は，$J^{+}(\mathcal{S})$ の**境界**である．
　　$\dot{J}^{-}(\mathcal{S})$ は，$J^{-}(\mathcal{S})$ の**境界**である．

定義：$\mathcal{P}$ の**未来**を $I^{+}(\mathcal{P})$，$\mathcal{P}$ の**過去**を $I^{-}(\mathcal{P})$，$\mathcal{S}$ の**未来**を $I^{+}(\mathcal{S})$，$\mathcal{S}$ の**過去**を $I^{-}(\mathcal{S})$，$\mathcal{S}$ の**未来の境界**を $\dot{I}^{+}(\mathcal{S})$，そして $\mathcal{S}$ の**過去の境界**を $\dot{I}^{-}(\mathcal{S})$ と，上と正確に同じ方法で定義する．ただ，熟語 “因果的に先行する” は “先行する” によって置き換えられ，そして “因果的に続く” は “続く” によって置き換えられる．たとえば

$$I^{+}(\mathcal{S})=\{\mathcal{Q}|\mathcal{Q}\gg\mathcal{P},\ \text{少なくとも 1 つの } \mathcal{P}\in\mathcal{S} \text{ に対して}\}$$

すべてのこれらの定義は以下の議論において必要とされるとは限らない．しかし大域的な方法についての文献はこれらの概念を非常に幅広く用いるので読者はそれらに精通しているべきである．

注意を特別な時空多様体に集中せよ．そしてその多様体である漸近的に平坦な領域を選べ［星の外部場には，ただ 1 個の漸近的に平坦な領域が存在する．源をもたない真空の Schwarzschild 幾何学には（図 34.3）2 個存在する．源をもたない真空の Reissner–Nordstrøm 幾何学には（図 34.4），無限に多くの異なる漸近的に平坦な領域が存在する］．選ばれた漸近的に平坦な領域（"外部宇宙"）は 1 個の未来の時間的な無限遠 I^+，1 個の過去の時間的な無限遠 I^-，1 個の空間的な無限遠 I^0，1 個の未来のヌル無限遠 $\mathcal{I}^+$，および 1 個の過去のヌル無限遠 $\mathcal{I}^-$ をもつ．選ばれた漸近的に平坦な領域はまたブラックホールを有するだろう．それは星の崩壊によって形成され，そして衝突し，合体し，物質を降着増大し，そして一般にブラックホールの近傍に大破壊を与える．すべてのブラックホールの表面（"未来の地平線"）は，$\mathcal{I}^+$ へ信号を送り出すことができる外部宇宙を，送り出すことができないブラックホール内部から分離する．こうして以下の定義がもたれる．

*8 定義：**すべての未来の地平線の全体（あるいは "連合"）**（すべてのブラックホールの表面）は領域 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ である．すなわち，それは領域 $J^-(\mathcal{I}^+)$ の境界であり，未来のヌル無限遠へ未来を指し示す因果的な曲線を送ることができる．

［同様に，すべての過去の地平線の全体を $\dot{J}^+(\mathcal{I}^-)$ であると定義できる．しかし過去の地平線は天体物理学にとって小さな興味である．重力崩壊はまったく自然な方法で未来の地平線を生み出すのに反して，過去の地平線は原点において根源的でなければならない．す

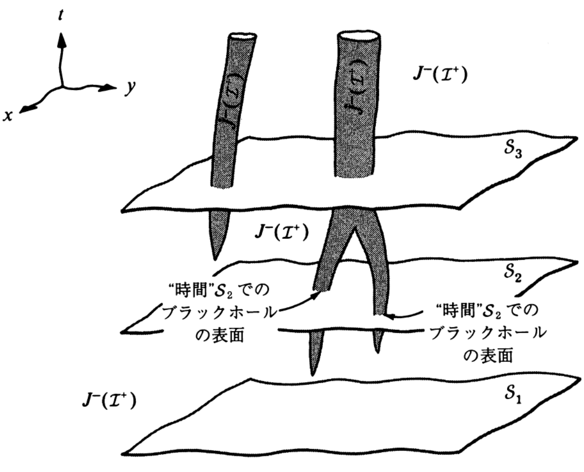


図 34.6 漸近的に平坦な時空におけるブラックホール（概要の時空図）．$J^-(\mathcal{I}^+)$ は "外部宇宙" —すなわち，未来のヌル無限遠へ因果的な曲線を送りうる領域である．$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$，灰色がかった領域は "外部宇宙" の境界である．すなわち，それはすべての未来の地平線の結合である．空間的な薄片 $\mathcal{S}_1$ の "時間" には，宇宙内にブラックホールは存在しない．$\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ の間で 2 個の星が崩壊してブラックホールをつくる．$\mathcal{S}_2$ が $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ と交差する，2 個の閉じた 2–面は "時間"$\mathcal{S}_2$ でのそれらのブラックホールの地平線である．$\mathcal{S}_2$ と $\mathcal{S}_3$ の間で 2 個の最初のブラックホールは衝突し合体する．一方 3 番目のブラックホールは星の崩壊によって形成されている．

*8 定義：ブラックホールの表面，未来の地平線 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$

なわち，過去の地平線は宇宙の原点における最初の構造として主張されなければならない [Novikov (1964)，Ne'eman (1965)]．宇宙は，このような奇妙な最初の構造で始まったあるいは始まったはずである，と信じるべき理由は存在しない.]

時空を通る任意の与えられた空間的な薄片 $\mathcal{S}$ は，かなり多くの互いに素な，閉じた 2 次元の表面で $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ と交差するだろう．おのおののこのような 2–面は "時間の瞬間"$\mathcal{S}$ での 1 個のブラックホールの地平線である．図 34.6 をみよ．

34.4　地平線の大域的な構造

すべての未来の地平線，$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ の連合は，以下のように，とくに単純な大域的な幾何学的構造をもつ．

*9　**定理** [Penrose (1968a)]：**$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ は未来の終点をもたないヌル測地線によって生成される**．より正確に述べれば（図 34.7 をみよ），

(1) 定義：$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ の "**生成子**" は $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 内に（少なくともアフィンパラメータのある有限の経過に対して）存在するヌル測地線である．

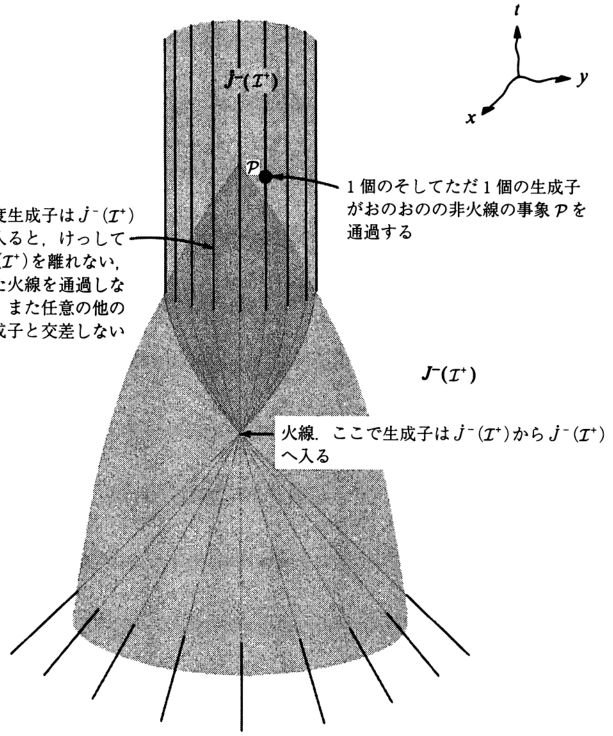


図 34.7　星の球状的な重力崩壊によって生み出される未来の地平線 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$．この地平線は Penrose の定理（本文の 34.4 節）で詳しく説明されているように，$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ の大域的な幾何学的な構造を例示する．この特別な場合には，ただ 1 個の火線が存在する．一般的には多くの火線が存在するだろう．

*9　$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ の構造についての Penrose の定理（未来の地平線）

(2) 定理：過去に遡るとき，生成子は $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ を離れるだろう（しかし離れなければならないというわけではない!）．生成子が離れる点での各事象は $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ の **"火線 (caustic)"** とよばれる．生成子が離れるとき，生成子は $J^-(\mathcal{I}^+)$ に入っていく．

(3) 一度生成子が未来に進んでいる火線で，$J^-(\mathcal{I}^+)$ から $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ へ入るとけっして $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ を離れることができないし，また別な生成子と交差することができない［生成子は $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ に入った点，"火線" でのみ別な生成子と交差できる］．

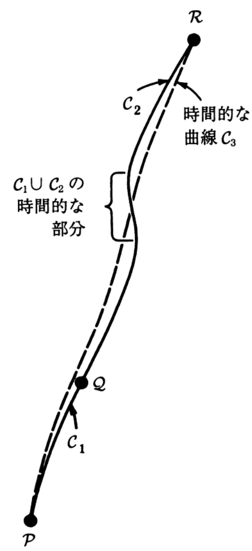
(4) $\dot{I}^-(\mathcal{I}^+)$ のおのおのの非火線事象を通して 1 個のそしてただ 1 個の生成子が通過する（アフィンパラメータの規格化を除いて）．

この定理はコラム 34.1 で証明される．

Schwarzschild ブラックホールに対しては，$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ の生成子は重力半径［$r = 2M$, θ および ϕ は一定 $u = +v$，図 32.1 (c) における地平線上の点線］で半径方向に出ていく光子の世界線である．Kerr–Newman ブラックホールに対しては，$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ の生成子はコラム 33.2 (F) の "理髪店の看板柱のねじれ" のヌル測地線である．すなわち，生成子は出ていく主要なヌル合同の，地平線 $r = r_+$ 上に存在する（33.6 節，練習問題 33.9）会員である．しかし定理はより一般的である．それは任意の時系列的な，漸近的に平坦な時空における任意のブラックホール—力学的なあるいは静的な，付着増大する物質，あるいは近くのブラックホールと合体する，あるいは孤立して独り存在する—に関係する．

コラム 34.1　地平線は終点をもたない測地線によって生成される［Penrose (1968a)］

A. 補助定理：もし (1) $\mathcal{C}_1(\lambda)$ が事象 $\mathcal{P}$ から事象 $\mathcal{Q}$ への因果的な，未来に向かう曲線である，(2) $\mathcal{C}_2(\lambda)$ が事象 $\mathcal{Q}$ から事象 $\mathcal{R}$ への因果的な，未来に向かう曲線である，そして (3) $\mathcal{P} \not\ll \mathcal{R}$（$\mathcal{P}$ は $\mathcal{R}$ の過去内にない），ならば，$\mathcal{C}_1$ および $\mathcal{C}_2$ はヌル測地線であり，それらの接線ベクトルは事象 $\mathcal{Q}$ で一致する（規格化を除いて）．



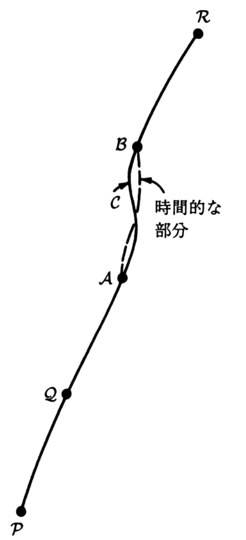
証明*

1. $\mathcal{C}_1$ がヌル測地線でなかった，あるいは $\mathcal{C}_2$ がヌル測地線でなかった，あるいは両方であったとする．そうすると $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ に沿うどこかで時間的な部分，あるいは測地線でないヌル部分，あるいは両方が存在するだろう．

a. もし $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ が時間的な部分を含むならば，$\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ のわずかな変形† が $\mathcal{P}$ から $\mathcal{R}$ へのいたるところで時間的な‡ 滑らかな曲線を生むだろう．これは，仮

定 $\mathcal{P} \not\ll \mathcal{R}$ に矛盾する．

b. もし $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ が事象 $\mathcal{A}$ から事象 $\mathcal{B}$ にいたる非測地線のヌル部分 $\mathcal{C}$ を含んでいたならば，$\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ 間の近傍の曲線に比較したときに，$\mathcal{C}$ は定常的な長さをもたないだろう．これは $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ へのある曲線がより大きい長さの 2 乗をもつだろうことを意味する．すなわち，空間的であるだろう．他方別な曲線はより小さい長さの 2 乗をもつ，すなわち時間的であるだろう．こうして $\mathcal{C}$ のわずかな変形は $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への時間的な部分を生むだろう．そうすると $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ のさらなる変形は，上述の (a) に記述されているように，$\mathcal{P} \not\ll \mathcal{R}$ と矛盾して，$\mathcal{P}$ から $\mathcal{R}$ への滑らかな時間的な曲線を生むだろう．



すなわち，仮定は間違っており，$\mathcal{C}_1$ および $\mathcal{C}_2$ はともにヌル測地線でなければならない．

2. $\mathcal{C}_1$ および $\mathcal{C}_2$ の接線ベクトルがそれらの接合点，$\mathcal{Q}$ で一致しなかったと仮定する．そうすると $\mathcal{Q}$ で“角をまわって”，そこに時間的な部分を生み出すことができるだろう．さらに，上述の（1a）におけるように $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ をさらに変形して，$\mathcal{P}$ から $\mathcal{R}$ への滑らかな時間的な曲線を生み出すことができるだろう—$\mathcal{P} \not\ll \mathcal{R}$ と矛盾して．こうして，仮定は間違っている．すなわち，接線ベクトルは $\mathcal{Q}$ で一致しなければならない．Q.E.D.

B. 補助定理：もし $\mathcal{A} \in \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ そして $\mathcal{B} \in \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ ならば，$\mathcal{A} \not\ll \mathcal{B}$.

証明：$\mathcal{A} \ll \mathcal{B}$ を仮定せよ．

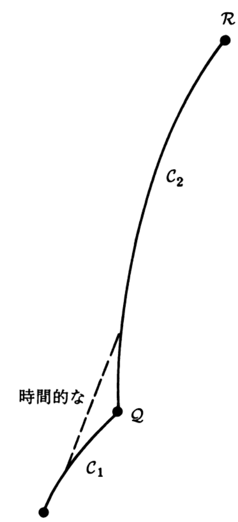
1. そうすると $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への時間的な曲線が存在する．

2. その曲線を依然時間的に保つわずかな変形は，ある十分小さい近傍 $\mathcal{N}[\mathcal{A}]$ 内の任意の事象 $\mathcal{Q}$ をある小さい $\mathcal{N}[\mathcal{B}]$ 内の任意の事象 $\mathcal{R}$ につなぐだろう．

3. $J^-(\mathcal{I}^+)$ 内に存在する $\mathcal{R}$ をとる．それから $\mathcal{Q}$ から $\mathcal{R}$ への時間的な曲線を $\mathcal{R}$ から $\mathcal{I}^+$ への因果的な曲線につなげる．生ずる曲線は，連係の近傍で滑らかにされるとき，任意の $\mathcal{Q} \in \mathcal{N}[\mathcal{A}]$ から $\mathcal{I}^+$ への因果的な曲線になる．

4.　このような曲線の存在は元の仮定に矛盾して，$\mathcal{N}[\mathcal{A}] \subset J^-(\mathcal{I}^+)$，したがって $\mathcal{A} \notin \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ を意味する．

結論：$\mathcal{A} \not\ll \mathcal{B}$. Q.E.D.



C. 補助定理：$\mathcal{C}(\lambda)$ はある事象 $\mathcal{B}$ で $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ と交差す

る因果的な曲線であるとする．そうすると $\mathcal{B}$ から過去に遡るとき，$\mathcal{C}(\lambda)$ は永久に $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+) \cup J^-(\mathcal{I}^+)$ 内に存在する．

証明

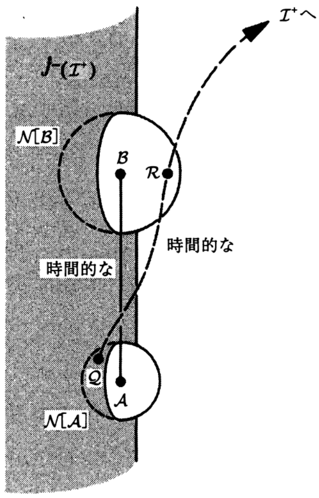
1. $\mathcal{C}(\lambda)$ 上に任意の事象 $\mathcal{A}$ をとり，$\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ とする．

2. 任意に小さい近傍 $\mathcal{N}[\mathcal{A}]$ を構成する．

3. $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ 間で，$\mathcal{C}$ のわずかな変形はある事象 $\mathcal{P} \in \mathcal{N}[\mathcal{A}]$ から $\mathcal{B}$ へ時間的な曲線 $\mathcal{D}$ を生み出す．

4. $\mathcal{B} \in \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ であるから，$\mathcal{D}$ のわずかな変形は，$\mathcal{B}$ を時間的に保ちながら，$\mathcal{P}$ からある事象 $\mathcal{Q} \in J^-(\mathcal{I}^+)$ への曲線 $\mathcal{E}$ を生み出す．$\mathcal{E}$ はそれから因果的であり続けて，$\mathcal{I}^+$ に達するまで延長されうる．結果は $\mathcal{P}$ から $\mathcal{I}^+$ への因果的な曲線である．したがって，$\mathcal{P} \in J^-(\mathcal{I}^+)$ である．

5. しかし $\mathcal{P}$ は任意に小さい近傍 $\mathcal{N}[\mathcal{A}]$ 内にあった．したがって，$\mathcal{A}$ はまた $J^-(\mathcal{I}^+)$ 内にさもなくば，その境界 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 内になければならない．Q.E.D.



D. 定理［Penrose（1968a）］：$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ は未来の終点をもたないヌル測地線によって生成される［定理のより詳細な陳述に対しては 34.4 節の本文をみよ］．

証明

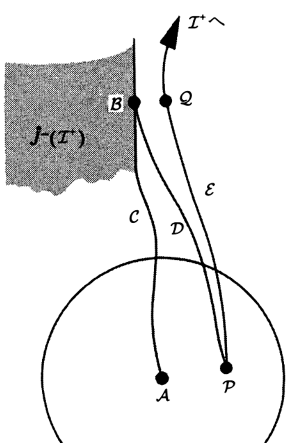
1. $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 内に任意の事象 $\mathcal{P}$ をとる．そこでは $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 内に存在する未来に向けたヌル測地線が，$\mathcal{P}$ を通過することを以下のように証明する．

   a. 任意の近傍 $\mathcal{N}[\mathcal{P}]$ を構成する．［もし $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ が時空の特異点に遭遇するようなことがどこかで起これば，$\mathcal{N}[\mathcal{P}]$ は特異点をその外部に保持するだけ十分小さく選ばれなければならない．］

   b. $\mathcal{N}[\mathcal{P}] \cap J^-(\mathcal{I}^+)$ 内で，事象 $\mathcal{P}$ に収束する事象の系列 $\{\mathcal{P}_i\}$ を構成する．

   c. おのおのの i に対して，$\mathcal{P}_i$ から $\mathcal{I}^+$ に延びる因果的な曲線 $\mathcal{C}_i$ を構成する．

   d. $\mathcal{Q}_i$ を，$\mathcal{C}_i$ と $\mathcal{N}[\mathcal{P}]$ の境界，$\dot{\mathcal{N}}[\mathcal{P}]$ との交点とする．$\dot{\mathcal{N}}[\mathcal{P}]$ はコンパクト（compact）な集合であるから，系列 $\mathcal{Q}_i$ は限界点 $\mathcal{Q}$ をもたなければならない．



e. $\mathcal{P}$ に任意に近い事象 $\mathcal{P}_i$ から $\mathcal{Q}$ に任意に近い事象 $\mathcal{Q}_i$ への因果的な曲線が存在するから，$\mathcal{P}$ から $\mathcal{Q}$ への因果的な曲線が存在しなければならない．その曲線を $\mathcal{C}$ とよぶ．

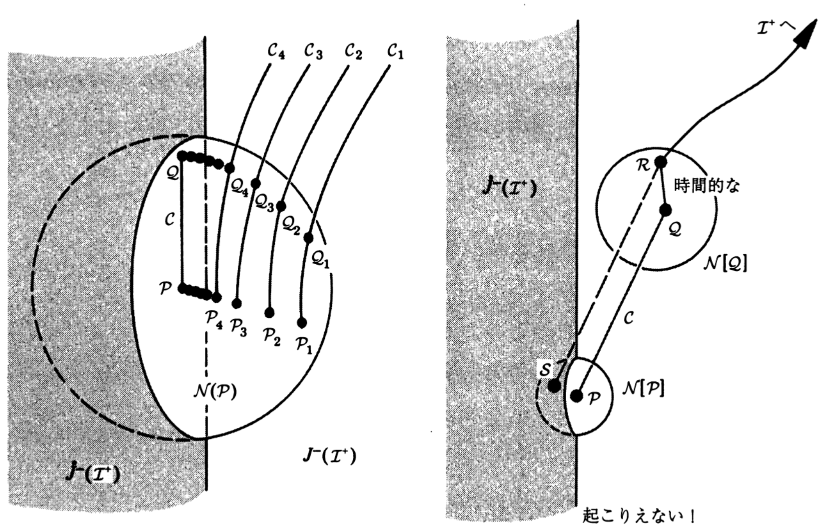
f. $\mathcal{Q}$ は $J^-(\mathcal{I}^+)$ 内の事象の系列の極限点であるから，$\mathcal{Q}$ は $J^-(\mathcal{I}^+)$ 内に存在するか，さもなくばその境界 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 上に存在するか，あるいは両方である．$\mathcal{Q} \notin \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ を仮定せよ．

i. そうするとある小さい近傍 $\mathcal{N}[\mathcal{Q}]$ は $J^-(\mathcal{I}^+)$ 内に完全に含まれる．

ii. $\mathcal{P}$ から因果的な曲線 $\mathcal{C}$ に沿って $\mathcal{Q}$ に行き，その後 $\mathcal{Q}$ から時間的な曲線に沿ってある事象 $\mathcal{R} \in \mathcal{N}[\mathcal{Q}]$ に行き，その後 $\mathcal{R}$ から因果的な曲線に沿って $\mathcal{I}^+$ にいく．そして接合点 $\mathcal{Q}$ および $\mathcal{R}$ で滑らかにすることによって，$\mathcal{P}$ から $\mathcal{I}^+$ への因果的な曲線を構成する．

iii. $\mathcal{P}$ から $\mathcal{I}^+$ へのこの曲線は時間的な部分をもつから，この曲線は因果性を保ちつつ，滑らかに変形されうる．したがってこの曲線はある小さい近傍 $\mathcal{N}'[\mathcal{P}]$ 内の任意の望むべき事象 $\mathcal{S}$ に達する．しかしこれは $\mathcal{N}'[\mathcal{P}] \subset J^-(\mathcal{I}^+)$ を意味する．したがって $\mathcal{P} \notin \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ となり，$\mathcal{P}$ の元の定義に矛盾する．

結論：$\mathcal{Q} \in \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$.

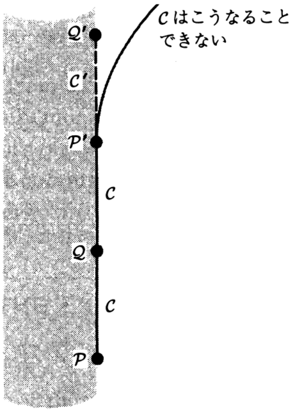


g. 補助定理 B によって，$\mathcal{P} \in \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ および $\mathcal{Q} \in \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ であるから，$\mathcal{P} \not\ll \mathcal{Q}$. しかし $\mathcal{C}$ は $\mathcal{P}$ から $\mathcal{Q}$ への未来を向く因果曲線である．したがって，補助定理 A によって，$\mathcal{C}$ はヌル測地線である．

h. 曲線 $\mathcal{C}$ は $\mathcal{Q}$ で $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ と交差するから，$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の間で曲線 $\mathcal{C}$ はいたるところ $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+) \cup J^-(\mathcal{I}^+)$ 内に存在しなければならない［補助定理 C］．上述 (f) の推論を適用せよ．ただし $\mathcal{Q}$ は $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ との間の $\mathcal{C}$ 上の任意の点に置き換えられる．それによって $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ との間のいたるところで，$\mathcal{C}$ は $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 内に存在する．

要約：すべての事象 $\mathcal{P} \in \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ を通るヌル測地線 $\mathcal{C}$ は，$\mathcal{P}$ から未来へ続くとき $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 内に存在する．このヌル測地線は $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ の"生成子"とよばれる．

2. $\mathcal{P}$ から $\mathcal{Q}$ へそしてさらに先へ 生成子 $\mathcal{C}$ に従え．それは**永遠に** $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ を離れることができるか？ イイエ！ ある事象 $\mathcal{P}' \in \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ で離れたと仮定せよ．



a. $\mathcal{P}'$ を $\mathcal{P}$ に置き換えて，段階 1 の全構成を繰り返し，$\mathcal{P}'$ からある事象 $\mathcal{Q}'$ への因果的な未来に延びる，ヌル測地線 $\mathcal{C}' \subset \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ が存在することを結論する．

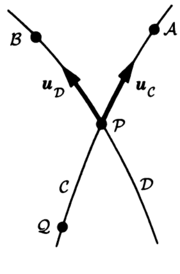
b. 補助定理 B によって，$\mathcal{P} \in \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ および $\mathcal{Q}' \in \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ であるから，$\mathcal{P} \not\ll \mathcal{Q}'$．

c. そうすると補助定理 A によって，$\mathcal{P}$ から $\mathcal{P}'$ へのヌル測地線 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{P}'$ から $\mathcal{Q}'$ へのヌル測地線 $\mathcal{C}'$ とは $\mathcal{P}'$ で一致する接線をもつ（規格化を除いて）．こうして，アフィンパラメータの規格化とともに，$\mathcal{C}'$ は $\mathcal{C}$ の延長になる．それは $\mathcal{C}$ は $\mathcal{P}'$ で $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ を離れないことを意味する．

結論：未来に向かう生成子が，一度 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ に入ると，その後けっして $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ を離れることができない．

3. 図 34.7 は未来に向かうヌル測地線がいかにして，$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ に入り生成子になりうるかの一例を与える．補助定理 C は，**ヌル測地線が $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ に入るとき，それは $J^-(\mathcal{I}^+)$ から入ることを保証する．**

4. 図 34.7 の例によって指摘されるように，"火線"［生成子の $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ への入り口点］で生成子は互いに交差できる．$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ への入り口点から因果的な未来への生成子 $\mathcal{C}$ に従う．生成子 $\mathcal{C}$ は再び別な生成子 $\mathcal{D}$ と交差できるか？ イイエ．事象 $\mathcal{P}$ で生成子 $\mathcal{C}$ が別な生成子 $\mathcal{D}$ と交差すると仮定せよ．



a. $\mathcal{P}$ の因果的な未来へ，両方の生成子はつねに $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 内に存在する．こうして，図の事象 $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ は $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 内にある．

b. $\mathcal{P}$ は，$\mathcal{C}$ が $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ に入る火線の因果的な未来にあるから，$\mathcal{P}$ の因果的な過去に事象 $\mathcal{Q} \in \dot{J}^-(\mathcal{I}^+) \cap \mathcal{C}$ が存在する．

c. $\mathcal{Q} \in \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ および $\mathcal{B} \in \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ であるから，$\mathcal{Q} \not\ll \mathcal{B}$［補助定理 B］．

d. 補助定理 A は，$\mathcal{Q}$ から $\mathcal{P}$ への曲線 $\mathcal{C}$，および $\mathcal{P}$ から $\mathcal{B}$ への曲線 $\mathcal{D}$ に適用されると，接線ベクトル $\boldsymbol{u}_{\mathcal{C}}$ および $\boldsymbol{u}_{\mathcal{D}}$ が $\mathcal{P}$ で一致する（規格化を除いて）こと，したがって（規格化を除いて）測地線 $\mathcal{C}$ および $\mathcal{D}$ は同等であることを保証する．これは $\mathcal{C}$ および $\mathcal{D}$ は，$\mathcal{P}$ で交差する異なる生成子であるという仮定と矛盾する．

結論：一度生成子が $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ に入ったならば，それはけっしてその後任意の別な生成子と交差できない.

*　証明は点集合トポロジーのある基本的な概念を用いる．たとえば，Wallace (1963) あるいは Kelley (1955) をみよ．

†　任意の時空多様体の中で任意の曲線を，望む任意の方向にわずかな量だけ，特異点に入り込まずに，あるいは多様体の他の境界に入り込まずに，つねに変形することができる．これは可能である．なぜなら多様体は定義によって開いているからである．物理学的な言葉で言えば，時空は開いている．なぜなら時空内の各事象は時空内にまた存在する局所的な Lorentz 近傍をもたなければならないからである．

‡　このこと，および証明において後でなされる同様の要求については，局所的な Lorentz 系を用いる議論によって確信できる．大域的な幾何学についての文献で，このような要求は滅多に実証されえない．おのおのの著者は懐疑論者によって強制されたならば，証明できるだろうとつねに確信しているけれども．不幸にも，このような要求を厳密な議論で実証することは議論を途方もなく長くし複雑化するだろう．そして基礎になっているアイデアの単純さを不明瞭にしがちであるだろう．

34.5　ブラックホール力学の第2法則の証明 [Hawking (1971b, 1972a, 1973)]

ブラックホール力学の第2法則の証明に対して，すべての道具は今や手元にある．

*10　図34.8に示されているように，漸近的に平坦な時空で，すべての未来の地平線，$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ の連合を考える．$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ のヌル測地線の生成子を多数の無限小の束に分割し，おのおのの束に同定すべき数，K を与える．$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ に沿って過去から未来へ動くとき，3–曲面 $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ の "火線" においてつくられた生成子の新しい束をみる．新しい生成子の火線源は地平線を通過する物質の落下（例：図34.8における束#42)，および2つのブラックホールの衝突および合体（例：束#29）のような過程によってつくられる．しかしおのおのの束は，一度つくられるとけっして破壊されえない（過去から未来へ動くときヌル生成子の終点はない)．

生成子の特別な束–束#K に注意を集中する．その束に沿う特別な事象 $\mathcal{P}$ で，多くの観測者がいろいろな速度で動き，その束の（2次元の）断面の領域 $\mathcal{A}_K(\mathcal{P})$ を測定する．図22.1，練習問題22.13，および練習問題22.14に示されているように，(1) 断面の領域 $\mathcal{A}_K(\mathcal{P})$ はそれを測定する測定者の速度によらない．すなわち，$\mathcal{A}_K(\mathcal{P})$ は束に沿う位置 $\mathcal{P}$ のみに依存する．(2) $\mathcal{A}_K$ は "焦点定理 (focussing theorem)" によって支配されるように，束に沿って事象から事象へ変化する

$$\frac{d^2{\mathcal{A}_K}^{1/2}}{d{\lambda_K}^2} \leq 0 \tag{34.6}$$

（もしエネルギー密度 $T_{\hat{0}\hat{0}}$ が，束に沿うすべての観測者によって測定されるときに負でないならば)

ここに λ_K は束に沿うアフィンパラメータである．すべての物理学的な経験と現代物理学

*10　ブラックホール力学の第2法則の証明

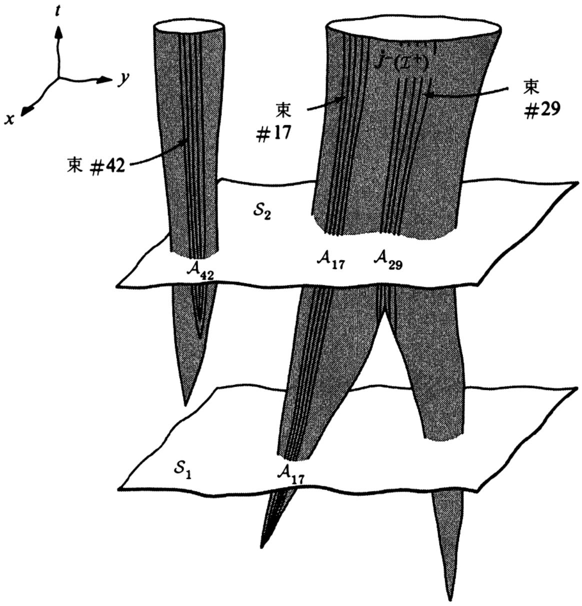


図 34.8　ブラックホール力学の第 2 法則を証明するのに用いられる概要の時空図．証明の詳細に対しては本文をみよ．そして図の物理学的な解釈については図 34.6 をみよ．

*11　の最善の評価と一致して—**エネルギー密度** $T_{\hat{0}\hat{0}}$ **はけっして負でありえないと仮定せよ（この仮定はブラックホール力学の第 2 法則の基礎となる．もしこの仮定が成り立たないことが見出されたならば，第 2 法則を放棄しなければならないだろう）．**

$d\mathcal{A}_K{}^{1/2}/d\lambda_K$ が，束に沿うある事象 $\mathcal{P}$ で負であったと仮定せよ．そうすると焦点定理によって，$d\mathcal{A}_K{}^{1/2}/d\lambda_K$ はつねに少なくとも $\mathcal{P}$ での値と同じく，負にとどまるだろう．したがって

$$\Delta\lambda_K \leq \left(\frac{\mathcal{A}_K{}^{1/2}}{-d\mathcal{A}_K{}^{1/2}/d\lambda_K}\right)_{\mathcal{P}\text{ で}} \tag{34.7}$$

によって与えられるアフィンパラメータの経過後，$\mathcal{A}_K{}^{1/2}$ はゼロになるだろう．$\mathcal{A}_K{}^{1/2}$ がゼロに達する点で，束内の隣接するヌル測地線は互いに交差し，$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ 内に 1 個以上のヌル測地線の生成子が通過する事象を生ずる．しかしこれは地平線の大域的な構造についての Penrose の定理を破る（34.4 節）．

こうして負の $d\mathcal{A}_K{}^{1/2}/d\lambda_K$ の仮定が間違っている．さもなくば $d\mathcal{A}_K{}^{1/2}/d\lambda_K$ が負になる．しかしそのときには，生成子が交差する機会を得る前に［アフィンパラメータの有限
*12　の経過 (34.7) 前に］，生成子が特異点に衝突し存在しなくなる．**ブラックホール力学の第 2 法則を証明するには，特異点は地平線によって衝突されない．それによって** $d\mathcal{A}_K{}^{1/2}/d\lambda_K$ **はけっして負にならないと結論しなければならない．Hawking（1971b, 1972a）は** $d\mathcal{A}_K{}^{1/2}/d\lambda_K \geq 0$ **を意味する別な仮定をする．Hawking は"時空の未来は漸近的に予**

*11　証明は負でないエネルギー密度を仮定する

*12　証明は，地平線はけっして特異点に衝突しないことを仮定する（裸の特異点は存在しない）

言できる" と仮定する．本質的にこれは時空は "裸の特異点" を有しない．すなわち特異点は $\mathcal{I}^+$ からみえない（裸の特異点は外部の宇宙の進化に影響するだろう．したがって特異点を支配する物理学の法則を知らなければ—それは知られていない—その物理学は外部の宇宙において未来を予言することを妨げるだろう）．

いずれの仮定のもとでも（裸の特異点は存在しない，あるいは地平線はけっして特異点に衝突しない），

$$d\mathcal{A}_K{}^{1/2}/d\lambda_k \text{は束 } K \text{ に沿ういたるところで負でない} \tag{34.8}$$

と結論される．

この結果は，おのおのの束の断面積 $\mathcal{A}_K$ は，$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ に沿う未来に向かって動くときけっして減少しえない，と告げる．新しい束はつくられうるが，しかし古い束は未来に向
*13 かって動くときけっして破壊されえないので，$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ **の全断面積は未来に向かって減少しえない**．同等に（図 34.8 をみよ），もし $\mathcal{S}_1$ および $\mathcal{S}_2$ が $\mathcal{S}_1$ の未来に向かういたるところで $\mathcal{S}_2$ とともに空間的な超曲面であるならば，$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ の $\mathcal{S}_2$ との交差点での断面積 $\mathcal{A}(\mathcal{S}_2)$ は，$\mathcal{S}_1$ での断面積 $\mathcal{A}(\mathcal{S}_1)$ よりも小さくありえない．これは，33 章の言葉よりもさらに明確な言葉で再定式化され，そして最後に証明されたブラックホール力学の第 2 法則である．

[練習問題]

34.4　ブラックホールはけっして 2 つに分岐されえない［Hawking（1972a）］

どんなに強くブラックホールを "うち倒そう" と，そしてどのような物でブラックホールを "うち倒そう" とも，ブラックホールを 2 つのブラックホールに分岐することはけっしてできない［**ヒント**：図を描くことによって，分岐をもっともらしくせよ．そうすると任意の分岐点で，$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ のあるヌル測地線の生成子が**未来**に向かっているときに，$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ を離れなければならない．Penrose の定理（34.4 節）を破って．おのおののホールの表面はトポロジカルに 2–球であると仮定せよ．**注意**：同じ議論は，時間反転すると，2 つのブラックホールが合体するならば，生成子は合体点で $J^-(\mathcal{I}^+)$ から $\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ に入ることを示す．そして地平線の表面積は増大する］．

34.6　特異点定理と "最終状態の問題"

*14 ちょうど大域的な技術が地平線の解析に有力な道具であるように，それらはまた時空の特異点の解析に有力である．実際，時空を研究するための大域的な技術を与えたのは特異

*13　第 2 法則の明確な定式化
*14　特異点定理の概観

点についての Penrose (1965b) の先駆的な定理の証明であった.

特異点の大域的な解析への詳細な入門に対しては, Hawking and Ellis (1973) の本を読むのがよい. 今や読者は大域的な技術の経験をもったから, 注意を結果の定性的な記述に集中させる.

重力崩壊はいかに終わるか? 球状崩壊の終点での特異点は代表的であるか, あるいは非対称性は特異点を取り除くことができるか? Penrose, Hawking, and Geroch によって証明された特異点定理のお陰で, 特異点は非常に一般的な現象であって, 望んでなくなりえないことは, 1965 年以来知られていた [文献の完全なリストに対しては, Hawking and Penrose (1969) あるいは Hawking and Ellis (1973) をみよ].

*15 特異点定理を吟味する前に, **特異点**の概念を明確にしなければならない. Geroch (1968) が時空多様体内で起こりうる広範囲の病態についての長い論文で強調したように, これは容易でない. しかし, 多くの人々による精力的な努力の後に, Schmidt (1970) は最後に満足に思える定義を生み出した. 発見法的な言葉で述べれば, Schmidt の高度に技巧的な定義は次のようなものになる. 時空多様体内で, すべての空間的な測地線 (“タキオン (tachyon)” の経路), すべてのヌル測地線 (光子の経路), すべての時間的な測地線 (自由落下する観測者の経路), そして制限された加速度をもつすべての時間的な曲線 (観測者が原理的に動きうる経路) を考えよ. これらの曲線の 1 つは有限の固有距離 (あるいはヌル測地線の場合における有限のアフィンパラメータ) の経過後に終わると仮定せよ. さらに, たとえばそこでの無限大の曲率のために, その終点を越えて時空多様体を延長することは不可能であると仮定せよ. そうするとその終点は, すべての隣接する終点とともに, “特異点” とよばれる (あわれなタキオン, 光子, あるいは終点をもつ曲線に沿って動く観測者が存在しなくなる以上に何が特異であるだろうか?)

*16 特異点定理で必要とされる別な概念は**捕捉面**の概念である. この概念は, Penrose (1965b) によって案出され, Schwarzschild 幾何学の地平線内で, 2 次元の球面, $(r, t) =$ 一定の綿密な吟味によって動機づけられている. これらの曲面は次の性質によって, 特異点 $(r = 0)$ が近いことを伝達する. これらの曲面の 1 つから直交する外部方向へ放出される光線 (すなわち, 外部へ進む, 直交する, ヌル測地線) は, 伝播するとき互いに他へ収束する. そして 2–曲面へ垂直に内向きの光線もまた収束する. Penrose は, 球面であろうと, あるいはなかろうと, この性質をもつ任意の閉じた 2–曲面に “捕捉面” という名前を与える. Schwarzschild 時空内で, 光線の収束は, 外向きに向かおうと内向きに向かおうと, “重力の激しい引っ張り” に帰着されうる. それは光子を特異点へ吸収する. これは非対称な時空においても真実であるだろうということは Hawking–Penrose (1969) 定理 [広いクラスの中でもっとも強力である. 他のものへの文献に対しては Hawking and Penrose (1969) をみよ. そして Hawking and Penrose への入門についてはコラム 34.2 および 34.3 をみよ] によって提案される.

---

*15 特異点が定義される

*16 捕捉面が定義される

*17　**時空 M は，もし Einstein の方程式の他に，以下の 4 個の条件が成り立つならば，必然的に不完全な，延長できない，時間的なあるいはヌル測地線を含む（そしてこうして Schmidt の意味において特異である）．**(1) M は閉じた時間的な曲線を含まない（理にかなった因果律の条件），(2) M 内での各事象でおよびおのおのの単位の時間的なベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して，ストレス–エネルギーテンソルは

$$\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right)u^{\alpha}u^{\beta} \geq 0$$

を満たす（理にかなったエネルギー条件），(3) 多様体は "一般的である"（すなわち，あまり高度に対称的でない）．単位接線 $\boldsymbol{u}$ をもつすべての時間的なあるいはヌル測地線は，少なくとも 1 つの事象を通過するという意味で，曲率が $\boldsymbol{u}$ と特別な方法で結びついていない．

$$u_{[\alpha}R_{\beta]\gamma\delta[\epsilon}u_{\rho]}u^{\gamma}u^{\delta} \neq 0 \qquad (\text{測地線上のある点で})$$

(4) 多様体は捕捉面を含む．

すべてのこれらの条件は，捕捉面を除いて，任意の物理学的に現実的な時空に対して顕著に理にかなっているようにみえる！ とくに，エネルギー条件は，ある局所的な観測者の固有系で測定されたときに，全エネルギー密度 E は負であるかあるいは主要な圧力（ストレステンソルの固有値）P_i は負であって

$$\sum_i P_i < -E$$

である場合に限り破られうることに注意せよ．

*18　崩壊に対する Hawing–Penrose 定理の適切さは，現実の宇宙内で，捕捉面はつねにすべての未来の地平線，$\dot{J}^{-}(\mathcal{I}^{+})$ のすぐ下に存在するだろうという一般的な予想から出る．$a = M$ をもつ Kerr 計量のような例外は，おそらく "測度ゼロの組" である．地平線および付随する捕捉面は必然的にわずかに球状でない崩壊によって生み出される（コラム 32.2），およびそれらはおそらくまた適当に変形した崩壊から生ずる（32.7 節）から，このような崩壊はおそらく特異点，あるいは因果律の破れを生み出す，それはまたむしろ特異な出来事である！

もし特異点が実際に崩壊のこのような一般的な特徴であるならば，特異点の厳密な性質は，地平線を落下するいかなるものにとっても生死の重要性をもつ！ ここでわれわれは非常に不安定な基礎の上にある．本節で今までに記述されてきたおもな結果および推測はおそらくすべての未来の研究の後まで生き残るだろう．特異点の性質についての見解は，全
*19　体の説明がなされるまでに何回も変化するであろう．したがって，それらの見解を判断しようと試みることなく，ただ可能性を記述するのが安全である．

---

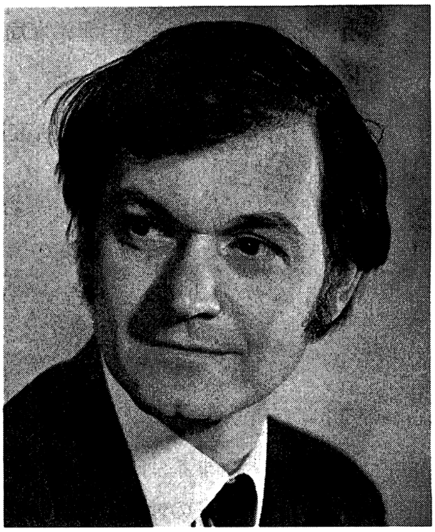
*17　特異点についての Hawking–Penrose の定理
*18　重力崩壊に対する Hawking–Penrose 定理の適切さ
*19　実際の崩壊の終点での特異点の性質：4 つの可能性

可能性 1

実際の崩壊の終点での特異点は，無限大の潮汐重力（無限大の曲率）の領域であり，崩壊する物質を無限大の密度に押しつぶす．例：Oppenheimer–Snyder（1939）の球状崩壊（32.4 節）の非常に特別な，均質な圧縮．また Podurets（1966）によって記述される非常に特別な，均質でないが球状の圧縮．また Lifschitz and Khalatnikov（1963a,b）の特別な，均質でない，“Kasner 型” の圧縮．また，もっとも重要であるが，Misner（1969b）および Belinsky and Khalatnikov（1969a）によって，均質な場合に発見され，そして Belinsky and Khalatnikov（1969b,1970）および Khalatnikov and Lifschitz（1970）によって均質でない場合に解析された，非常に一般的な “ミックスマスター”（mixmaster）圧縮（30 章）．ミックスマスター特異点—そしてすべての明確に知られている特異点の中でこの特異点のみが—次の意味で一般的であるようにみえる．もしミックスマスター特異点に進化する時空の初期条件を，わずかにしかし任意に摂動するならば，結果として摂動された時空はまたミックスマスター特異点を展開するだろう．これゆえに，今日（1973 年）もっとも一般的な見解は，実際の崩壊はおそらく地平線の内部に，ミックスマスター特異点を生み出すということである．しかしこの見解は明日には変わるかもしれない．

コラム 34.2　Roger Penrose

1931 年 8 月 8 日，英国，Essex, Colchester に生まれる



Roger Penrose は代数幾何学者として出発した．しかし，Cambridge での 1952–55 年，そして再び 1957–60 年に，彼の一般相対論についての関心が Hermann Bondi および Dennis Sciama によってよび起こされた．彼の純粋に数学的な背景から，彼の問題に取り組む方法はこれまで採用されてきたものとは異なっていた．彼はとくに時空

の大域的な光円錐構造とゼロ静止質量場の方程式（その両方は共形変換のもとで保存される）に興味をもった．彼はこの共形不変を利用して，無限遠でのヌル曲面 $\mathcal{I}^+$ を用いて重力放射の優美で強力な取り扱いを与えた．より最近にこの興味は，Minkowski 空間の共形群に対応するスピノールである，ツイスター（twistor）理論の展開に彼を導いた．これらは時空の量子化に対して新しく非常に有望な方法を提案する．

共形幾何学についての彼の関心はまた，時空点の間の因果関係の性質の研究に彼を導いた．これらは今度は時空における特異点の出現に関する定理に彼を導いた．それはおそらく一般相対論のもっとも重要な予言である．なぜならそれらは時空が初めあるいは終わりをもつことを意味するようにみえるからである．

“もし時空がその共形構造のみの観点から考慮されるならば，無限遠の点は有限の点と同じ基礎に基づいて取り扱われうる”

[PENROSE, IN INFELD（1964）]

“議論は，捕捉面の存在は対称性にかかわらず，特異点は必ず現れることを意味する，ことを示すことであるだろう”

[PENROSE（1965b）]

“重力の量子効果は，曲率が 10^{33} cm^{-1} に近づくときにのみ重要であると通常考えられているのに反して，すべてのわれわれの局所的な物理学は，Poincare 群は 10^{-13} cm よりも大きい場合の局所的な対称群の良い近似であることに基づいている．こうして，もし曲率が 10^{13} cm^{-1} に近づくならば，異常な局所的効果が起こりそうであることに疑う余地はほとんどない”

[HAWKING AND PENROSE（1969）]

“われわれはこうして，一般相対論的な崩壊理論のおそらくもっとも基本的な答えられていない質問を提示されている．すなわち，裸の特異点の出現を禁止して，おのおのの特異点を絶対的な事象の地平線内につつむ“宇宙の検閲官”は存在するか？”

[PENROSE（1969）]

“正常な状況のもとで，一般相対論は実際の問題に対して物理学の残りから驚くほど離れて，ほとんど超然としてとどまる．時空特異点では，その逆こそたしかに真実でなければならない！” 私は，素粒子の性質の本当の理解が，時空そのものの性質と同時に，より深い理解なしに達成されうると信じない．しかしもしわれわれが，このような理解が必要でない――そしてこれが現在の物理学のほとんどすべてを覆うだろう――現象のレベルに関連しているならば，滑らかな多様体の状況は現象の議論に対する（不合理に！）すぐれた枠組みを提供する．“相対性理論のもっとも重要な 1 つの教訓は，おそらく，空間と時間は互いに独立に考慮されうるという概念でなく，現象の 4 次元

的な状況，時空による記述を与えるために互いに結合されなければならないということである”

[PENROSE (1968a)]

“もし形式が無数の存在しない型の宇宙を取り扱うことを可能にするならば，(効果的に) その形式は‘任意のパラメータ’を含んでいる．それらの特別な値のみが実際に存在する世界に対応するだろう．擬 **Riemann** 的な微分可能な多様体としての時空への通常の取り組み方においては，多様体の次元と計量の符号が **2** つのこのような任意のパラメータである．” “われわれが粒子の位置を局所化するとき，粒子は本質的にヌル円錐 (**null cone**) に沿って飛躍する．別な粒子が生み出される．それらは見かけの連続性にかまわずに，ヌル円錐自身の位置および‘トポロジー’，グラフの構造に適用される表現のみに気をつけて，本質的にヌル方向に沿って後方および前方に跳躍する”

[PENROSE (1966)]

“私自身の観点は，究極的に物理法則は，本質的に結合的な原理を用いて，すなわち，勘定することのような有限の過程あるいは別な基礎的に単純な操作の方法を用いて，物理法則のもっとも自然な表現を見出すべきであるということである．こうして，このような観点と一致して，個々のあるいは結合的な時空のある形が現れるはずである”

[PENROSE, IN KLAUDER (1972)]

“複素数は…物理法則の構造の非常に重要な要素である．ツイスター (**twistor**) 理論はこれをさらに保持して，複素数はまた時空そのものの性質を定義するのに非常に基礎的であるだろうと提案する”

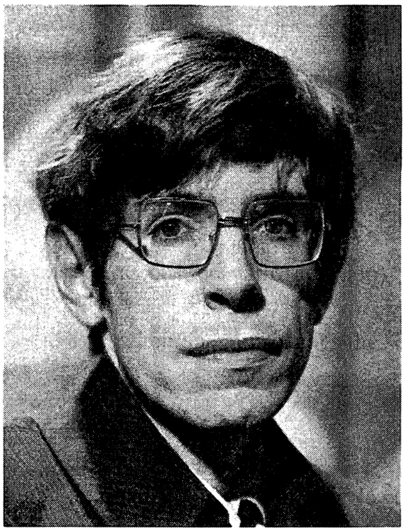
[PENROSE AND MACCALLUM (1973)]

“時空曲率と量子過程との間の連係はツイスターの使用によって与えられるだろうということを信じることは，こうして非常に魅力的である．それから，大ざっぱに言えば，それは時空の曲率を生ずる量子 (ツイスター) 演算子の解釈の絶え間のないわずかな‘変換’である”

[PENROSE (1968b)]

コラム 34.3　Stephen W. Hawking

1942年1月8日，英国，Oxfordに生まれる



Cambridgeにおいて Dennis Sciamaの研究学生として，Stephen Hawkingの相対論における初期の関心は，おもに時空特異点の問題に集中した．Ellisとともに，彼は大きいクラスの均質な宇宙模型は特異なものでなければならないことを示した．その後，重力崩壊において生ずる特異点についての Penroseの仕事に触発されて，彼は新しい技術を展開して，1966–67年の間に Royal Society of Londonにおける一連の論文で，どのようなもっともらしい一般相対論的な宇宙論も特異なものでなければならないという重要な結果を確立した．

彼の後の研究のおもな部分はブラックホールに関係していた．彼は偉大な独創性をもつ一連の議論を案出した．それは Israel and Carterの仕事とともに，事実上一般相対論における（真空の）ブラックホールは Kerr計量によって記述されること，球状以外のトポロジーは起こりえないこと，および2つのブラックホールが1つのブラックホールに凝結するときに放出されるエネルギーについてある限界が満たされなければならないことを確立した．

この仕事のあるものは現実に純粋な数学的な興味（たとえば，特異点定理）をもっていた．またあるものは天体物理学と関係している（たとえば，ビッグバンにおけるヘリウムの産出についての Taylorとの仕事）．またあるものは観測と関係している（連星系におけるブラックホールの可能性についての Gibbonsとの仕事）．またあるものは実験的な展開とさえ関係している（重力波の探知器についての Gibbonsとの仕事）．このような領域において，真実を求めそして理解するために，相当な洞察，深さ，および多才が示されているばかりでなく，深刻な肉体の障害を克服するたぐいまれな決

心と心の強さもまた示されている.

"背景マイクロ波の観測された等方性は宇宙が回転しているとしても非常にわずかであることを示している. これはおそらく Mach の原理の実験的な確認とみなされるだろう"

[HAWKING (1969)]

"疑いもなくもっとも重要な結果は特異点の出現についての定理である. これらの定理は一般相対性理論が破れるかあるいは, ある時刻以前に (あるいは以後に) 履歴が存在しなかった粒子が存在するだろうということのいずれかを意味するようにみえる. 著者自身の意見は理論はおそらく破れるが, しかし理論は量子重力効果が重要になるときに初めて破れるということである"

"われわれは特異点を時空の定義から省いたけれども, われわれは依然, 特異点が不完全な測地線の存在によって省かれてしまっている部分に残された'穴'を認めることができる"

"よい物理学理論は現在の実験の知識を正しく記述するだけでなく, また実験によって試されうる新しい結果を予言すべきである. 予言が通常の実験から離れれば離れるほど, もし予言の正しいことが発見されるならば理論への信頼はより偉大になる. こうして, 特異点が実際に起こったかあるいは起こらなかったかの観測は, 強い場における一般相対性理論の強力なテストを与えるだろう"

[HAWKING (1966a)]

"重力放射の探知器の構成は, 電波天文学が過去 20 年間そうであったように, 実り豊かな'重力天文学'の完全な新しい分野を開くだろう…ブラックホールの衝突は, 静止質量エネルギーの約 1% しか解放できない核反応よりも静止質量エネルギーを放射に転換するのにはるかに有効であるだろう. さらに, より小さいブラックホールの衝突によってつくられるブラックホールはさらなる衝突を受けより多くのエネルギーを解放しうる. 他方, 核反応によって完全に操作されている物質は同じ手段によってもはやエネルギーを与えることができない…. われわれはわれわれの銀河の中心で実際に激変の何かを目撃しつつある"

[HAWKING (1972b)]

"現在の膨張以前に崩壊する段階があったと提案するかもしれない. この段階で, 局所的な不均質性が大きくなり, そして孤立した特異点が起こった. 物質の多くは特異点を避けて再膨張し, 現在の観測される宇宙を与えた"

"われわれは曲率半径が, たとえば 10^{-16} cm より小さい領域の周りに, 曲面を描くべきであるようにみえる. この曲面のわれわれの側には, 時空の多様体の描像が適切

であるだろう．しかしわれわれは，別な側の時空はどのような構造をもつかを知らない”

[HAWKING AND ELLIS (1968)]

“おそらく非常に強い場の中では量子効果を考慮することが必要であるだろう．しかし，これらの量子効果は曲率半径が 10^{-14} cm の程度（それは実用的な目的に対してはかなり特異である）になるまでは重要にならないだろう”

“特異点は非常に異論の余地のあるものであるから，もし Einstein の方程式が特異点の出現を予言すべきものであったならば，このことは Einstein の方程式を修正するための強制的な理由であるだろうという見解が述べられている．しかし，物理学の理論の実際のテストはその予言された結果が審美的に魅力的であるかどうかでなくて，予言された結果が観測と一致するかどうかである．今までに特異点が起こらないことを示す観測は存在しない”

[HAWKING (1966b)]

“定常的なブラックホールはトポロジカルに球状の境界をもたなければならない．そしてもし回転しているならば軸対称でなければならないことが示されている．これらの結果は，Israel and Carter の結果とともに，任意の定常的なブラックホールは Kerr 解であるという推論を確立する方向にたいてい進む”

[HAWKING (1972a)]

“われわれが宇宙は等方的であると観測した事実はわれわれの存在の結果に過ぎない”

[COLLINS AND HAWKING (1973)]

可能性 2

特異点は，時間的なあるいはヌル測地線が，無限大の潮汐重力あるいは無限大の圧縮のゆえでなく，別なより微妙な病態のゆえに終わる時空の領域である．たとえば，“Taub–NUT 空間” がある [Misner and Taub (1968) をみよ]．種々の病態を示すべく特別に生み出される他の例については，Geroch (1968) をみよ．

可能性 3

特異点は “大きさ” について十分制限されるだろう．そして崩壊する物質のすべてあるいは多くはうまく特異点を避けるように作用するだろう．物質は，通過して落下した地平線を通って，外部へ逆に爆発できない．地平線は 1 方向性の膜であり，何ものも逆に外へ出させないだろう．代わりに，物質は最大であるが有限の収縮に達するだろう．それから時空のある他の領域に再爆発するだろう（多重連結時空のトポロジー，“ワームホール”）．崩壊する，電荷を帯びた球に対する解析的な解はこのような方法で再爆発する [Novikov

(1966), de la Cruz and Israel (1967), Bardeen (1968), 図 34.4 をみよ]. このような過程は，ワームホールの“爆発の”終点が，ブラックホールの終点をもたらす質量と角運動量（Kepler 的な軌道および系の引きずりによって測定されるとき）に正確に等しい値をもつ，宇宙の初期条件に形成されることを要求する．これは物理学的に真実とは思えないし，“爆発”も同じく本当とは思えないだろう．

別な可能性

以上の種々の組合せを考える．

*20 もし，今日想像するように，特異点は非常に物理学的な，無限大の曲率型であるならば，John Wheeler (1964a) のもっとも生々しくて悩ましい形での“最終状態の問題”に直面しなければならない．Wheeler は，問題に直面したとき，無限大の曲率の特異点は古典的な一般相対論の挫折，量子重力現象のはじまりによって余儀なくされる挫折の信号を送っていると議論する（44 章をみよ）．重力の量子化が実際時空をこのような特異点から救うかどうかは，“一般相対論の量子物理学との燃えるような結婚が完成されてしまう”まで知ることができない [Wheeler (1964a), また Misner (1969c), およびコラム 30.1 の最後の節をみよ].

---

*20 時空の量子化は宇宙を特異点から救うだろうか？

パート VIII

重力波

ここで読者は，曲率がさざなむ嵐の海に，さざ波を生み出す嵐の神を求めて航海し，海上に予測できない視界のみを与える電磁気的で熱的な霧と戦う．

35章
重力波の伝播

Born：“私は Einstein 君に質問したい．あなたの理論では重力の作用はいかに速く伝わるのか？伝播が光の速さで起こるということは，私には明らかなことでない．これらの概念の間には非常に複雑な関連が存在するに違いない．”

Einstein：“場の中に導入する摂動が無限に小さい場合に対して式を書き下ろすことは，極端に単純である．そうすると g は摂動がないときに存在するであろうものと無限小しか異ならない．摂動はそうすると光と同じ速さで伝播する．”

Born：“しかし強い摂動に対して，物事はたしかに非常に複雑な問題ではないか？”

Einstein：“ハイ．それは数学的に複雑な問題である．式が非線形であるから，式の厳密解を見出すことはとくに困難である．”

“重力の問題の現在の位置” についての Vienna における Einstein の 1913 年の秋の講義後の議論から抜粋する．Einstein が最終的な場の方程式を得る 2 年前のことである [EINSTEIN, 1913a]

35.1 観　　点

別な理想化の後にもう 1 つの理想化を研究する．理想化の性質について，理想化を解析するための技術について，理想化の目録をつくる．これが一般相対論のような複雑な題目に取り組むのに用いる唯一の方法である！

球対称は先の 12 章で多く用いられた理想化である．完全流体としての物質の理想化，および均質という宇宙の理想化とともに，球対称は星へ，宇宙論へ，そして重力崩壊への洞察を与えた．

注意を今や完全に異なる型の理想化，そもそも任意の対称性の考察とは独立な 1 つの理想化，“重力波” の理想化に向ける．

*1 ちょうど大洋を横切って転がる小さいさざ波を “水波” と同定するように，時空を横切って転がる小さいさざ波に “重力波” という名前を与える．何のさざ波か？ それは大洋の表
*2 面の形をしているさざ波，もしくは時空の形（すなわち，曲率）をしているさざ波である．両方の型のさざ波とも理想化である．任意の瞬間にどのさざ波が波の中にあり，どのさざ

---

* われわれは，本章の式における多くの誤りおよび本書を通しての多数の誤りを見出し訂正した，James M. Nester に深く負うところがある．

*1 重力波が大洋上の水波に比較される

*2 (1) 波の近似的な性質

波が下に横たわる大洋の中にあるかを，無限大の正確さで描写することはできない．同様に，時空曲率のどの部分がさざ波の中にあり，どの部分が宇宙論的な背景にあるかを正確に描写することができない．しかしほとんどそうすることができる．さもないと “波” について語れないだろう！

*3 櫂で進むボートから大洋を眺める．波は海景を支配する．表面の角度および高さにおける変化は絶えず 30 フィートを越えたり沈んだりする．これらの変化は伝播する．変化は単純な波動方程式に従う．

$$\left(\frac{1}{g^2}\frac{\partial^4}{\partial t^4}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\text{表面の高さ})=0$$

さてここからより複雑になる．宇宙船から，大洋の表面の大きいスケールの曲率に注意を向けよう—地球が丸いがゆえの曲率，太陽および月が水を引っ張るがゆえの曲率である．波が長い距離を伝播するときに，この曲率は波の前面を曲げ，波の単純な波動方程式をわずかに変える．波と波の間の非線形の相互作用，風との相互作用，地球の回転による Coriolis の力等は，長い距離にわたってまた重要である．

時空は同じである．Einstein の理論によって，宇宙を通って伝播することは，時空の曲率における小さいスケールのさざ波，連星，超新星，重力崩壊，銀河の中核における爆発によって生み出されるさざ波の，複雑なパターンでなければならない．局所的には（“櫂で進む船の観点”），これらのさざ波と時空の大きいスケールの曲率との相互作用およびさざ波の互いの非線形相互作用を無視できる．波は平坦な時空内を伝播すると偽り，波に対する単純な波動方程式を書き下ろすことができる．しかし大域的にはそれはできない．静止している星や銀河による大きいスケールの曲率は，赤方偏移を生み出し，波頭を変形するだろう．そして波自身によって運ばれるエネルギーは，大きいスケールの曲率を生み出すのを助けるだろう．本章は局所的な観点（35.2–35.6 節），および大域的な観点（35.7–35.15 節）の両方の観点を取り扱う．

35.2 真空内での “線形化された理論” のレビュー

*4 しばらく，われわれの宇宙の重力波を，平坦な空の時空を伝播すると理想化する（局所的な観点）．そうすると重力波は，18 章に導入された “重力の線形化された理論” を用いて解析することができる．

線形化された理論は一般相対論への弱い場の近似であることを思いだそう．線形化された理論の方程式は，時空が平坦であるかのように書かれ，解くことができる（特殊相対論の観点）．しかし実験と関連づけることは一般相対論の曲がった空間の形式を通してなされる．

より明確に，線形化された理論は対称な，2 階のテンソル場 $\bar{h}_{\mu\nu}$ によって重力を記述する．標準的な（“Lorentz” あるいは Hilbert）ゲージで，この場は “ゲージ” あるいは “補

*3 (2) 局所的な観点対大きいスケールの観点

*4 重力波の線形化された理論

足的な" 条件（座標条件）

*5

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \tag{35.1a}$$

を満たす（ここで，線形化された理論を通して，$\bar{h}_{\mu\nu}$ の添字は Minkowski 計量 $\eta_{\alpha\beta}$ で上げ下げされる）．このゲージで真空の重力場に対する**伝播方程式**はよく知られた波動方程式

*6

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} \equiv \bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = 0 \tag{35.1b}$$

である．

方程式 (35.1) では，時空は曲がっていないかのように書かれ，そして解かれているけれども，実際はそうでない．方程式 (35.1) の大域的な慣性系はほとんど慣性的であるに過ぎない．実際，大域的な慣性系で計量成分は

*7

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \mathrm{O}([h_{\mu\nu}]^2) \qquad (35.2\mathrm{a})^*$$

である．そして "計量の摂動"$h_{\mu\nu}$ は "重力場"$\bar{h}_{\mu\nu}$ に

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta_{\mu\nu}, \qquad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu},$$
$$h \equiv h_\alpha{}^\alpha = -\bar{h} = -\bar{h}_\alpha{}^\alpha \tag{35.2b}$$

によって関連している．計量 (35.2a) は試験粒子の運動，光の伝播等を，通常の一般相対論的な方法で支配する．

$\bar{h}_{\mu\nu}$ を支配する方程式 (35.1) の原点を思い出せ．補助条件 $\bar{h}_\mu{}^\alpha{}_{,\alpha} = 0$ は座標系を特殊化することによって課された．そして真空における Einstein の場の方程式は，それによって $\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 0$ に帰着した．

実際，コラム 18.2 で示されたように，線形化された理論の座標は条件 $\bar{h}_\mu{}^\alpha{}_{,\alpha} = 0$ によって完全には固定されない．さらなる "ゲージ変換"（無限小の座標変換）ξ_μ に含まれるあ
*8 いまいさが残る．それは，条件式 (35.1a) を保存するために，制限的な条件

$$\xi_{\mu,\alpha}{}^{\alpha} = 0 \tag{35.3a}$$

を満たす．そうすると

$$x^\mu{}_{新しい} = x^\mu{}_{古い} + \xi^\mu \tag{35.3b}$$

は座標変換であり，

$$\bar{h}_{\mu\nu\ 新しい} = \bar{h}_{\mu\nu\ 古い} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^\alpha{}_{,\alpha} \tag{35.3c}$$

はゲージ変換である．このことはすべて 18 章で導かれ議論された．

---

* より厳密な取り扱いは $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ を定義する．そして小さい補正 $\mathrm{O}([h_{\mu\nu}]^2)$ を場の方程式につけ加える．

$$\bar{h}_\mu{}^\alpha{}_{,\alpha} = \mathrm{O}([h_{\mu\nu}]^2{}_{,\alpha}), \qquad \bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha = \mathrm{O}([h_{\mu\nu}]^2{}_{,\alpha\beta})$$

*5 (1) Lorentz ゲージ条件
*6 (2) 伝播方程式
*7 (3) 計量
*8 (4) 残りのゲージ自由度

35.3 線形化された理論における平面波の解

線形化された方程式 $\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = \bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ へのすべての解の中でもっとも単純なもの
*9 は，単色の平面波解

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \boldsymbol{\mathcal{R}}[A_{\mu\nu}\exp(ik_\alpha x^\alpha)] \tag{35.4a}$$

である．

ここに $\boldsymbol{\mathcal{R}}[\cdots]$ は括弧内の表現の実数部分をとらなければならないことを意味する．他方 $A_{\mu\nu}$（**振幅**）および k_μ（**波動ベクトル**）は

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \qquad (\boldsymbol{k}\text{ はヌルベクトルである}) \tag{35.4b}$$

$$A_{\mu\nu}k^\alpha = 0 \qquad (\boldsymbol{A}\text{ は }\boldsymbol{k}\text{ に直交する}) \tag{35.4c}$$

を満たす定数である［それぞれ，$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = 0$ および $\bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ の結果．この波と関係した正確な物理学，曲率テンソルに対しては以下の式 (35.10) をみよ］．明らかに，この解は振動数

$$\omega \equiv k^0 = ({k_x}^2 + {k_y}^2 + {k_z}^2)^{1/2} \tag{35.5}$$

をもつ波を記述し，波は方向 $(1/k^0)(k_x, k_y, k_z)$ に光の速さで伝播する．

一見してこの平面波の振幅 $A_{\mu\nu}$ は 6 個の独立な成分をもつように思われる（10 から，直交制限 $A_{\mu\alpha}k^\alpha = 0$ で 4 少なくなる）．しかしこれは正しいとは思えない！ トラック–2
*10 の読者は 21 章で学んだように，一般相対論における重力場は 2 個の力学的な自由度をもつ．6 個でない．解析はどこで道に迷ってしまったのか？

ゲージ自由度 (35.3) において，拘束されている任意性を忘れたために，道に迷ってしまった．4 個の任意の定数 C^μ をもつ平面波ベクトル

$$\xi^\mu \equiv -iC^\mu \exp(ik_\alpha x^\alpha) \tag{35.6}$$

は，$A_{\mu\nu}$ の 6 個の独立な成分の 4 個を自由に変えうるゲージ変換を生成する．特別なゲージを選ぶことによってこの任意性を除去する．

35.4 横のトレースゼロ（TT）ゲージ

*11 4–速度 $\boldsymbol{u}$ を，—ただ 1 つの事象においてでなく，時空のすべての事象を通して同じ $\boldsymbol{u}$
*12 (特殊相対論的な観点！) を，選ぶ．特別なゲージ変換（練習問題 35.1）によって，条件

*9　単色の平面波
*10　平面波は振幅について 2 個の自由度をもつ（2 個の偏り）
*11　横のトレースゼロ（TT）ゲージ
*12　(1) 平面波に対して

$$A_{\mu\nu}u^{\nu}=0 \tag{35.7a}$$

を課す．これらは $A_{\mu\nu}$ についての 3 個の制限のみであり，4 個でない．なぜならそのうちの 1 個，すなわち $k^{\mu}(A_{\mu\nu}u^{\nu})=0$ は，すでに満たされている［式 (35.4c)］からである．4 番目の制限として，ゲージ変換（練習問題 35.1）を用いて

$$A^{\mu}{}_{\mu}=0 \tag{35.7b}$$

を置け．

振幅の 10 個の成分について，全部で 8 個の制限，$A_{\mu\alpha}u^{\alpha}=A_{\mu\alpha}k^{\alpha}=A_{\alpha}{}^{\alpha}=0$ をもつ．そして座標系（ゲージ）は堅く固定されている．こうして，$A_{\mu\nu}$ の 2 個の残りの自由な成分は平面重力波における 2 個の自由度（2 個の偏り）を表す．

8 個の制限 $A_{\mu\alpha}u^{\alpha}=A_{\mu\alpha}k^{\alpha}=A^{\mu}{}_{\mu}=0$ を $u^0=1$，$u^j=0$ の Lorentz 系で，そして k^{α} が明確に現れない形で述べ直すことは有用である．

$h_{\mu 0}=0$,　　すなわち，空間成分 h_{jk} のみがゼロでない　　(35.8a)

$h_{kj,j}=0$,　　すなわち，空間成分はゼロ発散である　　(35.8b)

$h_{kk}=0$,　　すなわち，空間成分はゼロトレースである　　(35.8c)

（ここでそしてこれからは，繰り返される空間の添字は，たとえ両方が下つきであっても和をとるべきである．たとえば，$h_{kk}\equiv\sum_{k=1}^{3}h_{kk}$.）$h=h_{\mu}{}^{\mu}=h_{kk}=0$ であるから，**このゲージでは $h_{\mu\nu}$ と $\bar{h}_{\mu\nu}$ との間に区別は存在しないことに注意せよ．**

*13 さて注意を平面波から線形化された理論における任意の重力波に向ける．任意の電磁波は平面波の重ね合わせに分解することができ，そして任意の重力波も同様である．重ね合わせにおけるおのおのの平面波に対して，特別なゲージ (35.8) を導入する．ゲージ条件は $h_{\mu\nu}$ についてすべて線形であることに注意せよ．したがって任意の波もまた条件 (35.8) を満足するだろう．こうして定理が出てくる．**線形化された理論の特別な大域的な Lorentz 系をとる（すなわち，特別な 4–速度 $\boldsymbol{u}$ をとる）．その系で（そこでは $u^{\alpha}=\delta^{\alpha}{}_{0}$），任意の形の特別な重力波を吟味する．$h_{\mu\nu}$ が制限 (35.8) を満たすゲージをつねに見出すことができる．** さらに，このゲージでのみ $h_{\mu\nu}$ はゼロでない．したがって，6 個の波動方程式を課すことのみを必要とする．

$$\Box h_{jk}=h_{jk.\alpha}{}^{,\alpha}=0 \tag{35.9}$$

制限 (35.8)［しかし必ずしも波動方程式 (35.9) でない］を満たす任意の対称テンソルは**横のトレースゼロ（TT）テンソル**とよばれる．なぜ横かというと，純粋に空間の $(h_{0\mu}=0)$ 部分であるからである．そして，もし波として考えるならば，その伝播方向に横である
*14 $(h_{ij,j}=h_{ij}k_j=0)$．トレースゼロであるのは，$h_{kk}=0$ であるからである．もっとも一

*13　(2) 任意の波に対して

*14　空間テンソルの分解

般的に純粋な空間テンソル S_{ij} は，“横でトレースゼロ” である部分 S_{ij}^{TT}，“横”（$S_{ij,j}^{T}=0$）であるが S のトレースを与える 1 個の関数 $f(S_{kk}^{T}=\nabla^2 f)$ によって完全に定まる部分 $S_{ij}^{T}=\frac{1}{2}(\delta_{ij}f_{,kk}-f_{,ij})$，そして “縦” であり，ベクトル場 S_i^L によって定まる部分 $S_{ij}^{L}=S_{i,j}^{L}+S_{j,i}^{L}$ に分解することができる［Arnowitt, Deser, and Misner（1962），あるいはコラム 35.1 をみよ］．線形化された理論では h_{ij}^{L} は $h_{\mu\nu}$ の純粋にゲージに依存する部分であり，他方 h_{ij}^{T} および h_{ij}^{TT} は $h_{\mu\nu}$ のゲージ不変な部分である．$h_{\mu\nu}$ が横でトレースゼロの部分に帰着する特別なゲージは，TT あるいは横でトレースゼロのゲージとよばれる．このゲージを定義する条件 (35.8) は

$$h_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}^{TT} \tag{35.8d}$$

と要約することができる．練習問題 35.2 が例示するように，純粋な波のみが（そして源をもつ線形化された場の方程式，$\Box h_{\mu\nu}=-16\pi T_{\mu\nu}$ のより一般的でない解）TT ゲージに帰着されうる．

*15 TT ゲージにおいて，Riemann 曲率テンソルの時空成分

$$R_{j0k0}=R_{0j0k}=-R_{j00k}=-R_{0jk0}$$

は，とくに単純な形をもつ［式 (18.9) および練習問題 18.4 をみよ］．

$$R_{j0k0}=-\frac{1}{2}h_{jk,00}^{TT} \tag{35.10}$$

曲率テンソルはゲージ不変であることを思い出せ（練習問題 18.1）．$h_{\mu\nu}$ は TT ゲージでもつよりも，さらに少ない成分に帰着することができないということが出てくる．

コラム 35.1 はある別なゲージにおける $h_{\mu\nu}$ の知識から，$h_{\mu\nu}^{TT}$ を計算する方法を記述する．

コラム 35.1　波の “横のトレースゼロ部分” を計算する方法

問題：線形化された理論の任意のゲージにおける重力波 $h_{\mu\nu}(t,x^j)$ がわかっているとする．横のトレースゼロのゲージで，この波に対する計量摂動 $h_{\mu\nu}^{TT}(t,x^j)$ をいかに計算できるか？

解 1（波に対してのみ成り立つ．すなわち，$\Box\bar{h}_{\mu\nu}=0$ であるとき）：最初のゲージで ***Riemann*** の成分 R_{j0k0} を計算せよ．それから式 (35.10)

$$h_{jk,00}^{TT}=-2R_{j0k0} \tag{1}$$

を積分して h_{jk}^{TT} を得る．波が単色であるとき，$h_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}(x^l)e^{-i\omega t}$．そうすると式 (1) の解は単純な形

*15　TT ゲージにおける曲率テンソル

$$h_{jk}^{TT} = 2\omega^{-2} R_{j0k0} \tag{2}$$

をもつ.

解 2（平面波に対してのみ成り立つ）：演算子

$$P_{jk} = \delta_{jk} - n_j n_k \tag{3}$$

を用いて代数的な方法で TT 成分を“見積もる”. ここに

$$n_k = k_k/|\boldsymbol{k}|$$

は伝播方向の単位ベクトルである. P_{jk} は横平面への射影演算子であることを確かめよ.

$$P_{jl}P_{lk} = P_{jk}, \qquad P_{jk}n_k = 0, \qquad P_{kk} = 2$$

そうすると h_{jk} の横部分は $P_{jl}h_{lm}P_{mk}$（あるいは行列記号で, PhP）, そして TT 部分はそのトレースだけ減少させられた次の量である.

$$h_{jk}^{TT} = P_{jl}P_{mk}h_{lm} - \frac{1}{2}P_{jk}(P_{ml}h_{lm}) \quad \text{（添字記号）} \tag{4}$$

$$h^{TT} = PhP - \frac{1}{2}P\,\mathrm{Tr}(Ph) \quad \text{（行列記号）} \tag{4$'$}$$

h_{ij}^{TT} を与える操作の列は $h_{\mu\nu}^{TT}$ から 2 つの部分を切り離す. 切り離される最初の部分は

$$h_{jk}^{T} = \frac{1}{2}P_{jk}(P_{lm}h_{lm}) \tag{5}$$

である. それは横であるがしかし h_{ij} 自身のトレースからつくられる.

$$h^T \equiv \mathrm{Tr}(PhP) = \mathrm{Tr}(Ph) = P_{lm}h_{ml}$$

h_{ij} から切り離される 2 番目の部分は縦の部分である.

$$\begin{aligned} h^L{}_{jk} &= h_{jk} - P_{jl}P_{mk}h_{lm} \\ &= n_l n_k h_{jl} + n_j n_l h_{lk} - n_j n_k (n_l n_m h_{lm}) \end{aligned} \tag{6}$$

あるいは

$$h^L = h - PPh \tag{6$'$}$$

解 3（一般的な場合）：Fourier は任意の対称的な列 $h_{ij} = \int h_{ij}(k,t)\exp(ik_m x^m)\,d^3k$ を解析し, そしておのおのの Fourier 成分にそれぞれ解 2 からの公式 (4) を適用する. しかしこの場合に射影演算子を方向によらない形

$$P_{jk} = \delta_{jk} - \frac{1}{\nabla^2}\partial_j\partial_k \tag{7}$$

あるいは

$$n_l n_m = \frac{1}{\nabla^2}\partial_l \partial_m \tag{8}$$

で書きうることに注意せよ（もし公式が右辺にあるすべての h で書かれているとすれば）．なぜなら Fourier 積分のもとでは $\partial_l = ik_l$ であるからである．もちろん演算子 $1/\nabla^2$ は別な方法によって求めることができる．たとえば，Green 関数によって，同様に Fourier 解析によってである［量 $\psi \equiv \nabla^{-2} f$ は Poisson 方程式 $\nabla^2\psi = f$ の解 ψ を表す］．この方法が優位なのは，ある解析的な計算において力を発揮することである（たとえば，以下をみよ）．

ゲージ変換：ゲージ変換による $h_{\mu\nu}$ における変化は

$$\delta h_{\mu\nu} = -(\partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu) \tag{9}$$

である．この変化の横の部分は

$$P_{jl}P_{km}(\delta h_{lm}) = -P_{jl}P_{km}(\partial_l \xi_m + \partial_m \xi_l) = 0 \tag{10}$$

である．平面波に対するこの公式（解 2）を確かめるには，$\partial_l = i|\boldsymbol{k}|n_l$ および $P_{jl}n_l = 0$ に注意せよ．同じ結果を一般的に確かめるには，式 (7) を用いて結果

$$P_{jl}\,\partial_l = 0 \tag{11}$$

を与えよ．こうして式 (4) の h_{ij}^{TT}，および式 (5) の h_{ij}^{T} は両方ともゲージ不変である．

$$\delta h_{ij}^{TT} = \delta h_{ij}^{T} = 0 \tag{12}$$

空の空間（$T_{\mu\nu} = 0$）で，h_{ij}^{T} および別なゲージ不変な量 $\tilde{h}_{0k}$（練習問題 35.4 で議論されている）は両方とも場の方程式のおかげで，ゼロになる．

［練習問題］

35.1　平面波の TT ゲージへの変換

形 (35.4) の平面波が，線形化された理論のある任意のゲージで与えられているとする．それを TT ゲージに翻訳する変換を明確に示せ．［**ヒント**：TT ゲージの 4–速度 u^μ が $u^0 = 1$，$u^j = 0$ である Lorentz 系で行え．$\bar{h}_{\mu\nu}$ が TT 制限 (35.7) を満たすことを要求することによって生成関数 (35.6) の 4 個の定数 C^μ に対して解け．］

35.2　TT ゲージの存在についての制限

線形化された理論における任意の**重力波**に対する計量摂動 $h_{\mu\nu}$ は TT 形式 (35.8) に翻訳されうるが，非放射 $h_{\mu\nu}$ 等はできない．たとえば，平面波の重ね合わせとして書くことができない，回転している球状の星の外場を考えよ．

$$h_{00} = \frac{2M}{r}, \qquad h_{jk} = \frac{2M}{r}\delta_{jk}, \qquad h_{0k} = -2\epsilon_{klm}\frac{S^l x^m}{r^3},$$
$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

[式 (19.5) をみよ]．ここに M は星の質量であり，$\boldsymbol{S}$ は星の角運動量である．これは TT ゲージに翻訳できないことを示せ．[ヒント：R_{j0k0} を計算し，それから式 (35.10) によって，h^{TT}_{jk} を推論せよ．さらに R_{0xyz} を元のゲージと新しいゲージの両方で計算し，それらが一致しないことを見出せ—質量項によってだけでなく，角運動量項によっても．]

35.3　円柱状の重力波

練習問題 35.2 によって動揺したかもしれないが信念を取り戻すために，唯一のゼロでない成分 $h_{\mu\nu}$ が

$$\bar{h}_{zz} = 4A\cos(\omega t)J_0(\omega\sqrt{x^2+y^2})$$

であるような放射解を考えることができる．ここに J_0 は Bessel 関数である．この解は入射するおよび出ていく円柱状の重力波の重ね合わせを表す．この重力場に対して R_{j0k0} を計算し，それから h^{TT}_{jk} を推論せよ．それから $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ のいくつかの他の成分（たとえば，R_{xyxy}）を元のゲージと TT ゲージで計算し，答えは同じであることを確かめよ．

35.4　計量摂動の TT でない部分［トラック–2］

コラム 35.1 から公式 $h^T = \nabla^{-2}(h_{kk,ll} - h_{kl,kl})$ を確立せよ．それから $h_{kk,ll} - h_{kl,kl}$ がゲージ不変であることを示すことによって，h^T のゲージ不変性を直接確かめよ．$\delta h_{ij} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i}$ を用いよ．同様に

$$\tilde{h}_{0k} = \bar{h}_{0k} - \nabla^{-2}(\bar{h}^{\mu}_{0,\mu k} + \bar{h}_{kl,l0})$$

によって定義された量 $\tilde{h}_{0k}$ はゲージ不変であることを示せ．ゲージ不変な線形化された場の方程式 (18.5) から

$$\nabla^2 h^T = -16\pi T^{00},$$
$$\nabla^2 \tilde{h}_{0k} = -16\pi T_{0k}$$

したがって h^T および $\tilde{h}_{0k}$ は空の空間内での波に対してゼロでなければならないことを示せ．

35.5　線形化された重力波における測地線のずれ

*16　　重力波の振動する曲率テンソルは 2 個の近傍の試験粒子，A および B 間の分離に振動を生み出す．振動を A の観点から考える．A の世界線（共運動座標）に結びつけられて

*16　2 個の試験粒子の分離に対する重力波の作用

いる，空間の原点 $x^{\hat{j}} = 0$ をもち，そして A の固有時間に等しい座標時間をもち（世界線 $x^{\hat{j}} = 0$ 上で $x^{\hat{0}} = \tau$），そして A によって運ばれるジャイロスコープに結びつけられた直交空間軸（“非回転系”）をもつ座標系（“**A の固有基準系**”）を用いよ．この座標系は，適切に特殊化されると，A の測地線的な世界線上で 1 つの事象 $\mathcal{P}_0$ でだけではなく，A の世界線に沿うすべてで，局所 Lorentz 系である．

$$ds^2 = -dx^{\hat{0}^2} + \delta_{\hat{j}\hat{k}} dx^{\hat{j}} dx^{\hat{k}} + O(|x^{\hat{j}}|^2) dx^{\hat{\alpha}} dx^{\hat{\beta}} \tag{35.11}$$

[**証明**：このような “固有基準系” はトラック–2 の 13.6 節において，加速された粒子に対して設置された．そこで導かれた線要素 (13.71) は，粒子 A に特定されるとき（$a_{\hat{j}} = 0$，なぜなら A は自由に落下するから．$\omega^{\hat{l}} = 0$，なぜなら空間軸がジャイロスコープに結びつけられているから)，式 (13.73) におけるように，式 (35.11) に帰着する．]

重力波が通過するとき，重力波は振動する曲率テンソルを生み出し，それは粒子 A から粒子 B に達する分離ベクトル $\boldsymbol{n}$ を揺り動かす．

$$D^2 n^{\hat{j}} / d\tau^2 = -R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}} n^{\hat{k}} = -R_{\hat{j}\hat{0}\hat{k}\hat{0}} n^{\hat{k}} \tag{35.12}$$

分離ベクトルの成分は粒子 B の座標に他ならない．なぜなら粒子 A は A 固有の基準系の原点にあるからである．こうして

$$n^{\hat{j}} = x_B{}^{\hat{j}} - x_A{}^{\hat{j}} = x_B{}^{\hat{j}}$$

さらに，$x^{\hat{j}} = 0$ で [そこで計算 (35.12) が行われている]，$\Gamma^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ はすべての $x^{\hat{0}}$ に対してゼロである．したがって $d\Gamma^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}/d\tau$ もまたゼロである．これは $D^2 n^{\hat{j}} / D\tau^2$ におけるすべての Christoffel 記号をもつ補正を消去する．したがって，式 (35.12) は

$$d^2 x_B{}^{\hat{j}} / d\tau^2 = -R_{\hat{j}\hat{0}\hat{k}\hat{0}} x_B{}^{\hat{k}} \tag{35.13}$$

に帰着する．計量摂動 h_{jk}^{TT} について最初の次数の程度まで，粒子 A およびその固有基準系とともに動く TT 座標系が存在する．h_{jk}^{TT} について最初の次数の程度まで，TT 座標時間 t は固有時間 τ と同じである．そして $R_{j0k0}^{TT} = R_{\hat{j}\hat{0}\hat{k}\hat{0}}$．したがって，式 (35.13) は

$$d^2 x^{\hat{j}} / dt^2 = -R_{j0k0}^{TT} x_B{}^{\hat{k}} = \frac{1}{2} (\partial^2 h_{jk}^{TT} / \partial t^2) x_B{}^{\hat{k}} \tag{35.14}$$

と書くことができる．具体性のために，波が達する前には粒子は互いに相対的に静止している（$h_{jk}^{TT} = 0$ のとき，$x_B{}^{\hat{j}} = x_{B(0)}{}^{\hat{j}}$ である）と仮定する．したがって運動方程式 (35.14) は積分すると

$$x_B{}^{\hat{j}}(\tau) = x_{B(0)}{}^{\hat{k}} \left[\delta_{jk} + \frac{1}{2} h_{jk}^{TT} \right]_{A\ \text{の位置}} \tag{35.15}$$

を与える．この式は，A の固有基準系で測定されたとき，波によって引き起こされる B の位置の振動を記述する．

*17　平面波の特別な例を考えよう．波の伝播方向に試験粒子が離れていくと仮定する．そうすると波は分離に影響を及ぼすことができない．振動は存在しない．

$$h_{jk}^{TT} {x_{B(0)}}^{\hat{k}} \propto h_{jk}^{TT} k_k = 0$$

横方向の分離のみが振動する．**波は数学的な記述（h_{jk}^{TT}）においてばかりでなく，物理学的な効果（測地線のずれ）においてもまた横方向である!**

[練習問題]

35.5　相対的な振動の別な計算

時間 $t = 0$ で，2 個の粒子がともに静止している TT 座標系を導入する．測地線の式を用いて，両方の粒子は波の作用にかかわらず，TT 座標で引き続いてつねに静止したままであることを示せ．このことは，分離ベクトルの反変成分は TT 座標系でつねに一定であることを意味する．

$$n^j = {x_B}^j - {x_A}^j = 一定$$

この定数を ${x_{B(0)}}^j$ とよぶ．これらの成分を共運動する直交規準系に**変換せよ**．答えは式 (35.15) であるはずである．

35.6　平面波の偏り

*18　横方向における測地線のずれは，平面波の偏りを研究し特徴づけるための手段を与える．

*19　z 方向に伝播する平面の単色波を考える．TT ゲージで制限 $h_{0\mu}^{TT} = 0$, $h_{ij,j}^{TT} \equiv ik_j h_{ij}^{TT} = 0$，および $h_{kk}^{TT} = 0$ は，$h_{\mu\nu}^{TT}$ の唯一のゼロでない成分は

$$\begin{aligned} h_{xx}^{TT} &= -h_{yy}^{TT} = \mathcal{R}\left\{A_+ e^{-i\omega(t-z)}\right\}, \\ h_{xy}^{TT} &= h_{yx}^{TT} = \mathcal{R}\left\{A_\times e^{-i\omega(t-z)}\right\} \end{aligned} \tag{35.16}$$

であることを明らかにする．振幅 A_+ および $A_\times$ は 2 つの独立な偏りの型を表している．

電磁気的な平面波に対するのと同じように（図 35.1），重力的な平面波に対してもまた（図 35.2），与えられた波を 2 つの直線的に偏った成分に，あるいは，代わりに，2 つの円形に偏った成分に分解することができる．

直線的に偏った波に対しては，電磁気論の単位の偏りベクトルは $\boldsymbol{e}_x$ および $\boldsymbol{e}_y$ である．偏りベクトル $\boldsymbol{e}_x$ をもつ平面波によって衝突される試験電荷は，慣性系に相対的な x 方向

---

*17　相対的な加速度の横方向の特徴

*18　重力波の偏り

*19　(1) 直線的な偏りの状態，“+” および “×”

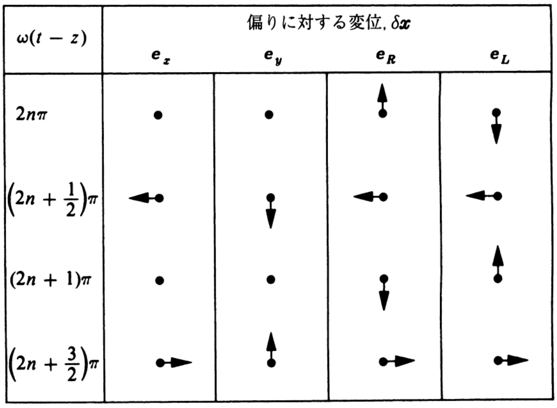


図 35.1　平面電磁波．偏りのベクトル：$\boldsymbol{e}_P$
ベクトルポテンシャル：

$$\boldsymbol{A} = \mathcal{R}[A_0 e^{-i\omega(t-z)}\boldsymbol{e}_P]$$

試験電荷の加速度：

$$\boldsymbol{a} = (q/m)\boldsymbol{E} = (q/m)(-\partial \boldsymbol{A}/\partial t) = \mathcal{R}[i\omega(q/m)A_0 e^{-i\omega(t-z)}\boldsymbol{e}_P]$$

慣性系に相対的な電荷の変位：

$$\delta\boldsymbol{x} = \mathcal{R}\left[\frac{q/m}{i\omega}A_0 e^{-i\omega(t-z)}\boldsymbol{e}_P\right]$$

に振動する．そして $\boldsymbol{e}_y$ に対しても同様である．類似によって，重力波に対する**単位の直線的な偏りのテンソル**は

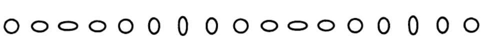
$$\boldsymbol{e}_+ \equiv \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y \tag{35.17a}$$

$$\boldsymbol{e}_\times \equiv \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_x \tag{35.17b}$$

である．平面波 (35.16) は，$A_\times = 0$ であるときには，偏り $\boldsymbol{e}_+$ をもち

$$h_{jk} = \mathcal{R}\left\{A_+ e^{-i\omega(t-z)} e_{+jk}\right\} \tag{35.18}$$

と書き直すことができる．2 個の試験粒子間の測地線の分離を変えるときには，その効果は粒子間の分離の方向に依存する．すべての方向における効果を一度にみるために，中心の粒子を取り囲む，横方向の (x, y) 平面内での試験粒子の円形の環を考える（図 35.2）．平面波 (35.18)（偏り $\boldsymbol{e}_+$）が通過するとき，平面波は中心の粒子の固有基準系で測定されたとき環であったものを x および y 方向に軸をもち，その軸が内にそして外に脈動する楕円に変形する，



等．対照的に（図 35.2），偏り $\boldsymbol{e}_\times$ の波は環を x および y 方向に対して 45 度の角度に変形する， 等．

*20　**円形に偏った波に対して，**電磁気論の単位の偏りベクトルは

---

*20　(2) 円形の偏りの状態

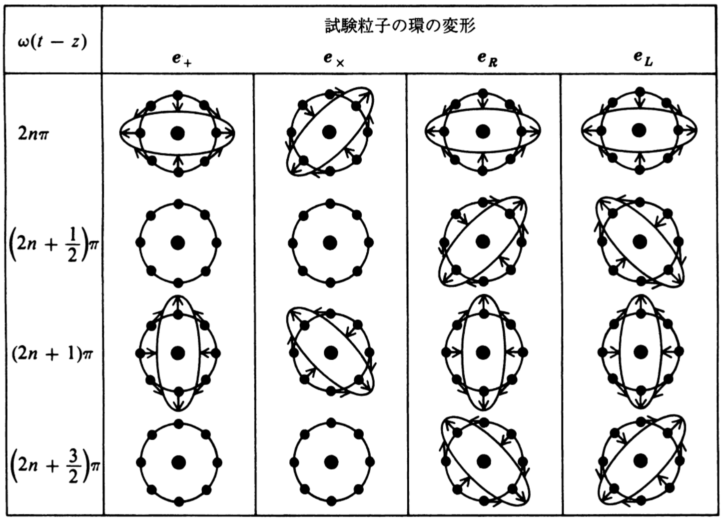


図 35.2　平面重力波．偏りのテンソル：e_P
計量摂動：

$$h_{jk} = \mathcal{R}[A_0 e^{-i\omega(t-z)} e_{Pjk}]$$

2 個の試験粒子間の潮汐加速度：

$$\frac{D^2 n_{\hat{j}}}{D\tau^2} = -R_{\hat{j}0\hat{k}0} n_{\hat{k}} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial t^2} n_k = \mathcal{R}\left[-\frac{1}{2}\omega^2 A_0 e^{-i\omega(t-z)} e_{Pjk} n_{\hat{k}}\right]$$

2 個の試験粒子間の分離：

$$n_{\hat{j}} = n_{\hat{j}}{}^{(0)} + \mathcal{R}\left[\frac{1}{2} A_0 e^{-i\omega(t-z)} e_{Pjk} n_{\hat{k}}{}^{(0)}\right]$$

試験粒子の A の固有基準系における試験粒子 B の位置（図では，A は中心粒子であり B は任意の周辺にある粒子である）：

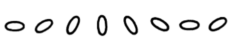
$$x_B{}^{\hat{j}} = x_{B(0)}{}^{\hat{j}} + \mathcal{R}\left[\frac{1}{2} A_0 e^{-i\omega(t-z)} e_{Pjk} x_{B(0)}{}^{\hat{k}}\right]$$

$$\boldsymbol{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y), \qquad \boldsymbol{e}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x - i\boldsymbol{e}_y) \tag{35.19}$$

である．同様に，重力理論の**単位の円形の偏りテンソル**は

$$\boldsymbol{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_+ + i\boldsymbol{e}_\times), \qquad \boldsymbol{e}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_+ - i\boldsymbol{e}_\times) \tag{35.20}$$

である．偏り $\boldsymbol{e}_R$ の電磁波によって衝突された試験電荷は，円内で右手系の方向に（読者に向かって伝播する波に対して反時計回りに）ぐるぐる動く．$\boldsymbol{e}_L$ に対しては試験電荷は左手系の方向に（時計回りに）円を描く（図 35.1 をみよ）．同様に（図 35.2），偏り $\boldsymbol{e}_R$ の重力波は右手系の方向に試験粒子の環の変形を回転させる．



他方 $\boldsymbol{e}_L$ の波は試験粒子を左手系の方向に回転させる．環の中の個々の試験粒子は中心の粒子に相対的に小さい円内で回転する．しかし，ちょうど大洋の波内の水滴は波に沿ってともに動かないように，環の上の粒子は回転する楕円とともに中心の粒子の**周り**を動かない．

*21 図 35.2 から，重力波は，任意の時刻に伝播方向の周りの 180 度の回転のもとで，不変であることに注意せよ．電磁波に対する類似の角度（図 35.1）は 360 度であり，ニュートリノ波に対しては 720 度である．この振る舞いはこれらの波の量子力学的なバージョンと関係したゼロ質量の粒子のスピンに密接に関連している．重力子はスピン 2 をもち，光子はスピン 1 をもち，そしてニュートリノはスピン 1/2 をもつ．スピン S の粒子の古典的な放射場はその伝播方向の周りに $360°/S$ の回転のもとでつねに不変である．

任意のスピン S の放射場は直線的な偏りの，2 つの直交状態を正確にもつ．それらは互いに $90°/S$ の角度で傾いている．こうして，$S=\frac{1}{2}$ をもつ，ニュートリノの場に対しては，2 つの状態は $|\uparrow\rangle$ および $|\downarrow\rangle$（スピン上向きおよびスピン下向き，180 度）として区別される．$S=1$ をもつ電磁波に対しては，2 つの偏りの直交状態は $\boldsymbol{e}_x$ および $\boldsymbol{e}_y$（90 度の角度）である．$S=2$ の重力波に対しては，2 つの直交状態は $\boldsymbol{e}_+$ および $\boldsymbol{e}_\times$（45 度の角度）である．

［練習問題］

35.6 偏りの状態に対する回転変換

2 つの Lorentz 座標系を考え，1 つは z 方向の周りに他の座標系に相対的に角度 θ だけ回転しているとする．

$$t'=t,\qquad x'=x\cos\theta+y\sin\theta,\qquad y'=y\cos\theta-x\sin\theta,\qquad z'=z \tag{35.21}$$

$|\uparrow\rangle$ および $|\downarrow\rangle$ を x 方向にスピン上向き，およびスピン下向きをもつニュートリノの量子力学的な状態であるとする．そして $|\uparrow'\rangle$ および $|\downarrow'\rangle$ に対しても同様であるとする．$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_{x'}$，$\boldsymbol{e}_{y'}$ は z 方向に伝播する電磁波に対する，2 つの座標系における単位の偏りベクトルであるとする．そして同様に $\boldsymbol{e}_+$，$\boldsymbol{e}_\times$，$\boldsymbol{e}_{+'}$，$\boldsymbol{e}_{\times'}$ は線形化された理論における，重力波に対する単位の偏りベクトルであるとする．

$$\begin{aligned}
&|\uparrow'\rangle=|\uparrow\rangle\cos\frac{1}{2}\theta+|\downarrow\rangle\sin\frac{1}{2}\theta, && |\downarrow'\rangle=-|\uparrow\rangle\sin\frac{1}{2}\theta+|\downarrow\rangle\cos\frac{1}{2}\theta,\\
&\boldsymbol{e}_{x'}=\boldsymbol{e}_x\cos\theta+\boldsymbol{e}_y\sin\theta, && \boldsymbol{e}_{y'}=-\boldsymbol{e}_x\sin\theta+\boldsymbol{e}_y\cos\theta,\\
&\boldsymbol{e}_{+'}=\boldsymbol{e}_+\cos 2\theta+\boldsymbol{e}_\times\sin 2\theta, && \boldsymbol{e}_{\times'}=-\boldsymbol{e}_+\sin 2\theta+\boldsymbol{e}_\times\cos 2\theta
\end{aligned} \tag{35.22}$$

任意のスピン S の放射場に対する直線的な偏りの基底状態への一般化は何か？

35.7 楕円状の偏り

図 35.2 における直線的におよび円状に偏った波の議論に類似な仕方で，楕円状に偏った重力波を議論せよ．

---

*21 重力場のスピン 2 の特徴および波の対称性との関係

35.7　重力波によって運ばれるストレス–エネルギー

練習問題 18.5 は，原理的に重力波からエネルギーを抽出する探知器を建設できることを示した．したがって，波はエネルギーを運ばなければならないことは明白である．

不幸にも，重力波のエネルギーに対する表現を導き正当化することは，線形化された理論よりもいくらか複雑な観点を要する．このような観点は，本章において後に展開されるだろう（35.13 および 35.15 節）．しかしトラック–1 読者のために，主要な結果をここで述べておく．

*22 19.4 および 20.4 節における議論と一致して，重力波によって運ばれるストレス–エネルギーは波長内に局在化することはできない．エネルギーは，波の波頭によって，あるいは波のいたるところによって，あるいは波の“両壁”によって運ばれるかどうかを述べることはできない．しかし，ストレス–エネルギーのある量は，与えられた“巨視的な”領域（数波長の大きさの領域）に含まれていると言うことができる．こうしてぼんやり広がった

*23 (smeared-out）重力波の**有効な**ストレス–エネルギーに対するテンソル，$T_{\mu\nu}^{(\mathrm{GW})}$ について論ずることができる．線形化された理論の（ほとんど）慣性系で，$T_{\mu\nu}^{(\mathrm{GW})}$ は

*24
$$T_{\mu\nu}^{(\mathrm{GW})} = \frac{1}{32\pi}\langle h_{jk,\mu}^{TT} h_{jk,\nu}^{TT}\rangle \tag{35.23}$$

によって与えられる．ここに $\langle\ \ \rangle$ は若干の波長にわたる平均を表し，h_{jk}^{TT} は $h_{\mu\nu}$ の（ゲージ不変な）横のゼロトレースの部分を意味し，それは単純に TT ゲージで h_{jk} である．$T_{\mu\nu}^{(\mathrm{GW})}$ に対する別な公式，任意のゲージで成り立ち，$\bar{h}\neq 0$，$\bar{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha}\neq 0$ であり，そして $\bar{h}_{0\mu}\neq 0$ である，は

$$T_{\mu\nu}^{(\mathrm{GW})} = \frac{1}{32\pi}\left\langle \bar{h}_{\alpha\beta,\mu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}_{,\mu}\bar{h}_{,\nu} - \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\bar{h}_{\alpha\mu,\nu} - \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\bar{h}_{\alpha\nu,\mu}\right\rangle \tag{35.23$'$}$$

である．このストレス–エネルギーテンソルは，任意の他のテンソルと同じく，真空中でゼロ発散であり

*25
$$T^{(\mathrm{GW})}{}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{35.24}$$

そして任意の他のストレス–エネルギーとちょうど同じく，大きいスケールの背景曲率（線形化された理論はそれを無視する）に寄与する．

*26
$$G_{\mu\nu}^{(\mathrm{B})} = 8\pi(T_{\mu\nu}^{(\mathrm{GW})} + T_{\mu\nu}^{(\text{物質})} + T_{\mu\nu}^{(\text{他の場})}) \tag{35.25}$$

ぼんやり広がった重力波の有効なエネルギー密度に対する項 $T_{\mu\nu}^{(\mathrm{GW})}$ をここで書くときには，Einstein の方程式に重力波の何らかのさらなる挿入をしなくてもすむ．さもなければ，

*22　重力波における近似的なエネルギーの局在
*23　重力波に対する有効なストレス–エネルギーテンソル
*24　(1) 計量摂動によって表される
*25　(2) 保存則に従う
*26　(3) 背景曲率の源としての役割

たとえ非常に異なる形式で表されているとしても，空間の背景曲率への同じ波の寄与を 2 度勘定することになるだろう．

式 (35.23) によれば，平面波に対するストレス–エネルギーテンソル

*27

$$h_{\mu\nu} = \boldsymbol{\mathcal{R}}\left\{(A_+ e_{+\mu\nu} + A_\times e_{\times\mu\nu})e^{-i\omega(t-z)}\right\} \tag{35.26}$$

は，

$$T^{(\mathrm{GW})}_{tt} = T^{(\mathrm{GW})}_{zz} = -T^{(\mathrm{GW})}_{tz} = \frac{1}{32\pi}\omega^2(|A_+|^2 + |A_\times|^2) \tag{35.27}$$

である．

背景曲率半径 $\mathcal{R}$ (線形化された理論では無視される)，そして重力波の平均の既約 (reduced) 波長 $\lambdabar(=\lambda/2\pi)$ および振幅 $\mathcal{A}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{-2} \sim\ & R^{(\mathrm{B})}_{\alpha\beta\gamma\delta}\ \text{の成分の代表的な大きさ}\\ &\sim T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu} \sim \mathcal{A}^2/\lambdabar^2 \qquad (\text{もし } T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu}\ \text{が背景曲率のおもな源であるならば})\\ &\gg T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu} \sim \mathcal{A}^2/\lambdabar^2 \qquad (\text{もし } T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu}\ \text{がおもな源でないならば})\end{aligned}$$

したがって，次元をもたない数 $\mathcal{A}$ および $\lambdabar/\mathcal{R}$ は

$$\mathcal{A} \lesssim \lambdabar/\mathcal{R} \tag{35.28}$$

*28 によって関係づけられている．こうして，**大きいスケールの曲率の背景の中で伝播する小さいスケールの泡という全概念は壊れる．そしてもし波の次元をもたない振幅が 1 に近づくならば，本章の全形式は無意味になる．もし重力波の概念が何らかの意味をもつべきであるとするならば，つねに $\mathcal{A} \ll 1$ および $\lambdabar \ll \mathcal{R}$ でなければならない！**

35.8 一般相対論の完全な理論における重力波

*29 波のエネルギーによって背景時空が曲がることは，線形化された理論から，完全な非線形の一般相対性理論へ移行するときに入る，多くの新しい効果の 1 つに他ならない．

線形化された理論では，厳密に周期的な波を放射して，定常的に振動している，重力波

*30 の局在化した源（たとえば，振動している棒）を考えることができる．しかし厳密な理論は，源のエネルギーは，放射によって運び去られるエネルギーと釣り合うだけ永続的に減少する（エネルギー保存，重力放射減衰，36.8 および 36.11 節をみよ）ことを主張する．これは，まさにほとんど周期的というような波はたしかに放出されるけれども，厳密に周期的な波を不可能にする [Papapetrou (1958)，Misner (1964b) によって報告されている Arnowitt, Deser, and Misner]．

現実の宇宙では，重力波のエネルギーによるだけでなく，より重要に，宇宙の物質内容

*27 (4) 平面の，単色波に対して
*28 重力波の形式の妥当性に対する条件
*29 重力波における非線形効果
*30 (1) 放射減衰

*31 (惑星，星，ガス，銀河）による時空曲率が存在する．重力波がこれらの曲率を通して伝
*32 播するとき，その波頭は形を変え（“屈折”），その波長は変化し（重力による赤方偏移），
*33 そしてある程度まで背景曲率を離れて逆散乱する．もし波がパルスであるならば，逆散乱は波の形および偏りを変え続け，動いているパルスの背後に広がる “しっぽ” を生み出し，
*34 光よりも遅く進むことを生じさせるだろう［練習問題 32.10 をみよ．また Riesz (1949), DeWitt and Brehme (1960), DeWitt and DeWitt (1964a), Kundt and Newman (1968), Couch *et al.* (1968) をみよ］．しかし，$\mathcal{A} \ll 1$ および $\bar{\lambda}/\mathcal{R} \ll 1$ である限り，これらの効果は局所的にきわめて小さいだろう．これらの効果は $\mathcal{R}$ の程度の距離にわたって確立されるに過ぎない．そしてときにはそれすら起こらない．こうして，局所的に，線形化された理論は高度に正確なままにとどまるだろう．

重力波以外に何も含まない理想化された宇宙においてさえ，逆散乱およびしっぽは，波と波自身が生み出す，背景曲率との相互作用によって生み出される．

*35 もし波の既約波長 $\bar{\lambda} = \lambda/2\pi$ および波のパルスの質量–エネルギー m が $\bar{\lambda} \ll m$ を満たすならば，パルスを大きさ $r < m$ の領域に集中することは（原理的に）可能である．他方，パルスのエネルギーの一部分は特異点への重力崩壊を受け，ブラックホールを後に残すだろう［Ruffini and Wheeler (1970), および Christodoulou (1971) の pp.7–24 をみよ］．ある臨界的な長さに満たないなら，パルスのどの部分もこのような崩壊を受けない．しかし崩壊は再膨張の前に時間の遅れを受ける．この時間の遅れは，エネルギーが崩壊のわずか前に，$\bar{\lambda}$ 程度の次元に，束の間，集約された領域から離れて，漸近的に平坦な空間で定義でき測定できる．

すべてのこれらの効果は，1 次の程度で，線形化された理論に似たあるいはそれと同等の近似的な方法を用いて，一般相対論において解析できる．後に本章で（35.13–35.15 節），このような近似的な方法が展開されるだろう．しかしまずこれらの効果のいくつかを示す厳密解を研究することが有用である．

[本章の残りはトラック–2 である．以前のトラック–2 の材料はそのための準備として必要とされない．しかし 20 章（保存則）および 22.5 節（幾何光学）は有用であることがわかるだろう．本章の残りの部分はどの後の章の準備としても必要でない]

35.9　厳密な平面波の解

閉じた数学的な形で与えることのできる任意の厳密な重力波の解は，高度に理想化されなければならない．さもないとそれは，上に要約された複雑さに対処し始めることができないだろう．したがって，数学的に厳密な解は教育的な目的に対してのみ有用である．しかし，教育学は強く非難されるべきでない．それは学生ばかりでなく，今日でさえ幾何力

---

*31 (2) 屈折
*32 (3) 赤方偏移
*33 (4) 逆散乱
*34 (5) しっぽ
*35 (6) 自身の重力的な引力

学の非線形領域への直感を展開し始めているにすぎない，相対論の分野における老練な研究者にもまた必要とされる！

*36 厳密解についての大量の文献から，われわれは現実主義と複雑さの間の妥協として，以下の平面波［Bondi *et al.* (1959)，Ehlers and Kundt (1962)］を選んだ．

*37

$$ds^2 = L^2(e^{2\beta}dx^2 + e^{-2\beta}dy^2) + dz^2 - dt^2 \\ = L^2(e^{2\beta}dx^2 + e^{-2\beta}dy^2) - du\,dv \tag{35.29a}$$

ここに

$$u = t - z, \qquad v = t + z, \qquad L = L(u), \qquad \beta = \beta(u) \tag{35.29b}$$

関数 $L(u)$（"背景因子"）および $\beta(u)$（"波因子"）がとりうる形は真空の場の方程式によって定まる．ヌル座標系 u，v，x，y で，恒等的にゼロでない Ricci テンソルの唯一の成分は（コラム 14.4 をみよ．座標における差を考慮に入れて，$2v_{そこで} = v_{ここで}$）

$$R_{uu} = -2L^{-1}[L'' + (\beta')^2 L] \tag{35.30}$$

である．ここにダッシュは d/du を示す．こうして，真空中における Einstein の方程式は

*38

$$L'' + (\beta')^2 L = 0 \tag{35.31}$$

となる（"背景因子に対する波因子の影響"）．

*39 $(\beta')^2$ は 2 次の量であるから，この方程式の線形化された形は $L'' = 0$ である．したがって線形化された理論に対応する解は

$$L = 1, \qquad \beta(u)\ \text{は任意であるが小さい}$$

対応する計量は

$$ds^2 = (1 + 2\beta)dx^2 + (1 - 2\beta)dy^2 + dz^2 - dt^2, \qquad \beta = \beta(t - z) \tag{35.32}$$

である．これは z 方向に伝播する，偏り $\boldsymbol{e}_+$ の平面波であることに注意せよ（両方の偏り $\boldsymbol{e}_+$ および $\boldsymbol{e}_\times$ を有する波への拡張については，35.12 節の終わりにある練習問題 35.10 をみよ）．

*40 注意を厳密な平面波に戻し，"波因子"$\beta(u)$ は継続期間 $2T$ のパルスであり，パルスを通して $|\beta'| \ll 1/T$ である場合に集中せよ．そうすると厳密解（図 35.3）は以下のようである．(1) $u < -T$ に対しては（平坦な時空，パルスはいまだ到達していない），

$$\beta = 0, \qquad L = 1 \tag{35.33a}$$

---

*36 真空の場の方程式の厳密な平面波の解
*37 (1) 計量の形
*38 (2) "背景因子" L の "波因子" β による生成
*39 (3) 線形化された極限
*40 (4) 特別な例：平面波のパルス

(2) $-T < u < +T$ に対して（パルスの内部），

$$\beta = \beta(u) \text{ は，} |\beta'| \ll 1/T \text{ を除いて，任意である，}$$

$$L(u) = 1 - \int_{-T}^{u} \left\{ \int_{-T}^{\bar{u}} [\beta(\bar{\bar{u}})]^2 d\bar{\bar{u}} \right\} d\bar{u} + \mathrm{O}(|\beta' T|^4) \tag{35.33b}$$

(3) $u > T$ に対して（パルスが通過した後），

$$\beta = 0, \qquad L = 1 - \frac{u}{a}, \qquad a \equiv \frac{1}{\int_{-T}^{T} (\beta')^2 du} + \frac{\mathrm{O}([\beta' T]^2)}{\int_{-T}^{T} (\beta')^2 du} \tag{35.33c}$$

この厳密解の物理学的な解釈を議論する前に，$u = a \gg T$ で計量計数における特異点と取り組まなければならない（そこでは $L = 0$，したがって $g_{xx} = g_{yy} = 0$）．これは Schwarzschild 幾何学の領域 $r = 0$ のような物理学的な特異点であるか，あるいはそれは Schwarzschild 座標における $r = 2M$ のように，たんに座標の特異点であるか（31，32，および 33 章）？　計量 (35.29) に対する Riemann テンソルの唯一のゼロでない成分は

$$\begin{aligned} R^{x}{}_{uxu} &= \frac{1}{2} R_{uu} - \beta'' - 2(L'/L)\beta', \\ R^{y}{}_{uyu} &= \frac{1}{2} R_{uu} + \beta'' + 2(L'/L)\beta' \end{aligned} \tag{35.34}$$

である（コラム 14.4 をみよ）．さらに，これらの成分は，ともに，$\beta = 0$ である任意の拡張

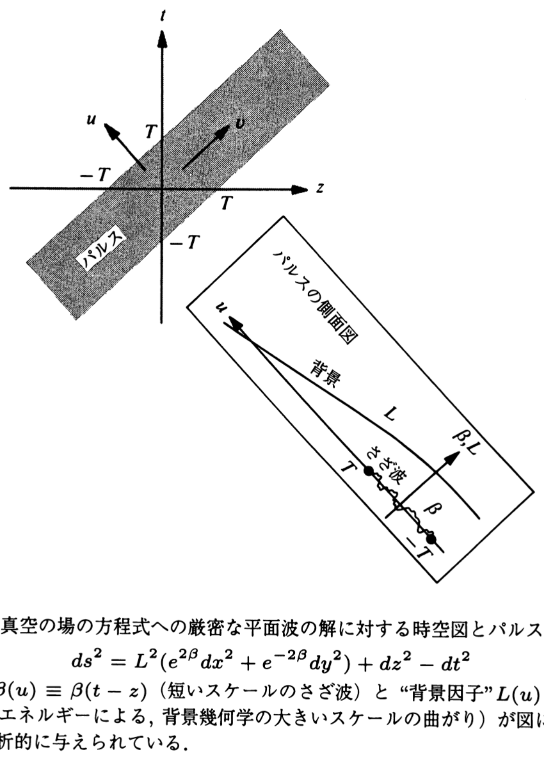


図 35.3　Einstein の真空の場の方程式への厳密な平面波の解に対する時空図とパルスの側面図．計量は

$$ds^2 = L^2(e^{2\beta}dx^2 + e^{-2\beta}dy^2) + dz^2 - dt^2$$

の形をもつ．"波因子"$\beta(u) \equiv \beta(t-z)$（短いスケールのさざ波）と "背景因子"$L(u) \equiv L(t-z)$（"さざ波の" 重力波の有効質量–エネルギーによる，背景幾何学の大きいスケールの曲がり）が図に示されている．そして式 (35.33) によって解析的に与えられている．

*41 された領域でゼロである．こうして，**時空は，"波因子" がゼロである領域において——それはパルスの外部いたるところである——完全に平坦である！** とくに，時空は $u=a$ の近くで平坦である．したがってそこでの特異点は座標の特異点でなければならず，物理学的な特異点でない．この特異点を除去するために，パルスの未来への領域を通して $(u>T)$ 座標変換を実行できる．

$$x=\frac{X}{1-U/a},\qquad y=\frac{Y}{1-U/a},\qquad u=U,\qquad v=V+\frac{X^2+Y^2}{u-U} \tag{35.35}$$

ここに

$$ds^2=(1-u/a)^2(dx^2+dy^2)-du\,dv \tag{35.36a}$$

新しい X，Y，U，V 座標では，計量は明確に平坦な形

$$ds^2=dX^2+dY^2-dUdV \qquad (U=u>T \text{ に対して}) \tag{35.36b}$$

をもつ．

［練習問題］

35.8 平面波に対して大域的によい振る舞いをする座標 [Ehlers and Kundt (1962) に基づく]

厳密な平面波の解 (35.29a)，(35.31) を

$$ds^2=dX^2+dY^2-dUdV+(X^2-Y^2)F\,dU^2 \tag{35.37}$$
$$F=F(U),\qquad \text{完全に任意である}$$

の形式に翻訳する，式 (35.35) に似た座標変換を見出せ．この座標系はどこにも座標の特異点をもたない便宜さを有する．他方元の座標系は線形化された理論への容易な変換，および試験粒子に対する波の作用の容易な解釈という便宜さを有する．

35.9 平面波の多様体に対する測地線の完全性 [Ehlers and Kundt (1962) に基づく]

練習問題 35.8 の座標系 (X,Y,U,V) はその時空多様体を完全に覆うことを証明せよ．さらに特別な場合として，すべての測地線は，任意に大きいアフィンパラメータの長さに対して，X，Y，U，V 座標系を離れずに両方の方向に拡張されうることを示せ（この性質は**測地線の完全性**とよばれる）．［ヒント：任意の事象と任意の接線ベクトル $d/d\lambda$ をそこで選ぶ．それらは任意の測地線を定める．計量の形を不変にとどめ，$d/d\lambda$ を，$(\tilde{U},\tilde{V})=$ 一定 の 2–面あるいは $(\tilde{X},\tilde{Y})=$ 一定 の 2–面のいずれかに用いる座標変換を実行せよ．2 つの座標系は時空の同じ領域を覆うことを確かめよ．それから $(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{U},\tilde{V})$ 座標で $d/d\lambda$ の測地線の完全性を解析せよ．］

---

*41 (5) 時空はパルスの外部で平坦である

35.10 厳密な平面波の物理学的な性質

平面波のパルスの到着前も（$u < -T$），そしてそれが通過した後も（$u > T$），ともに時空は完全に平坦である．これは前節の主旨である．

*42 パルス外部の完璧な平坦さは，完全な，非線形の一般相対性理論における重力波に対して非常に特殊な例である．それはこの例においてのみ起こる．なぜなら波頭（一定の u および v，すなわち，一定の z および t の表面）は，完全に平坦な 2–面であるからである．もし波頭が曲がっていたならば（たとえば，球状），パルスによって運ばれるエネルギーはパルス外部で時空の曲率を生み出すだろう．

*43 作用についての非線形効果をみるために，パルス外部の平坦な幾何学から離れて，自由落下する試験粒子に対するパルスの作用を見てみよう．パルスが到着する前には，元の t，x，y，z 座標系で，すべて静止している粒子の群れ（世界線 $[x, y, z] =$ 一定）を考える．そうするとパルスが通過する間でも，そしてパルスが過ぎ去った後でも，粒子は座標系で静止したままである（これは $g_{0\mu} = -\delta^0{}_\mu$ をもつ，式 (35.29a) のような，任意の計量に対して真実である．なぜなら $\Gamma^\mu{}_{00} = 0$，したがって $x^\mu = \delta^\mu{}_0\tau +$ 定数 は，測地線の方程式を満たすからである）．

*44 パルスの伝播方向（z 方向）に分離している 2 個の粒子は一定の座標分離 $\Delta x = \Delta y = 0$ および $\Delta z \neq 0$ をもつばかりでなく，2 個の粒子はまた一定の固有の分離 $\Delta s = g_{zz}{}^{1/2}\Delta z = \Delta z$ をもつ．したがって，厳密な平面波は，線形化された理論の平面波のように，完璧に横方向である．

伝播方向に横方向の近傍粒子は（$\Delta x \neq 0$，$\Delta y \neq 0$，$\Delta z = 0$），パルスが通過するとき揺らぐ固有の分離をもつ．

$$\begin{aligned}\Delta s &= L(t-z)[e^{2\beta(t-z)}(\Delta x)^2 + e^{-2\beta(t-z)}(\Delta y)^2]^{1/2} \\ &\approx L[(1+2\beta)(\Delta x)^2 + (1-2\beta)(\Delta y)^2]^{1/2}\end{aligned} \tag{35.38}$$

*45 “背景因子”L による，粒子の相方に対する非常に小さい正味の加速度は，“波因子”β による，通常の線形化された理論の揺らぎの型に重なる［図 35.3 における $L(u)$ の形に注意せよ］．これは，重力波が 2 個の粒子間を運ぶエネルギーの重力的な引力によって引き起こされる，ほとんど Newton 的な型の加速度である．通過するすべてのエネルギーの全効果は粒子を相対的な静止の初期状態から，速さ

$$v_{\text{最後}} = d\Delta s/dt = d(L\Delta s_i)/dt = -\Delta s_i/a \tag{35.39}$$

をもつ相対運動の最終状態へ転換することである．ここに

---

*42　重力波のパルスの外部の平坦さは異常でない
*43　試験粒子に対する正確な重力波のパルスの作用
*44　(1) 相対的な加速度の横の特徴
*45　(2) パルスにおけるエネルギーによる重力的な引力

$$\Delta s_i = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{1/2} = (\text{最初の粒子の分離})$$

$[L_{\text{最初}} = 1,\ L_{\text{最後}} = 1 - u/a = 1 - (t-z)/a$, 式 (35.33) を思い出せ].

正確に同じ効果は電磁波のパルスによって生み出されうる（35.11 節）.

35.11　厳密な電磁気的な平面波と重力的な平面波との比較

計量

$$ds^2 = L^2(u)(dx^2 + dy^2) - du\,dv \qquad (u = t - z,\ v = t + z) \tag{35.40}$$

を考える．もし計量が真空の Einstein の方程式を満たし（$R_{\mu\nu} = 0$ あるいは $L'' = 0$），

*46 したがって重力波を表すことができないならば，計量はつねに平坦である．この計量で電磁気的なポテンシャル

$$\boldsymbol{A} = A_\mu \boldsymbol{d}x^\mu = \mathcal{A}(u)\boldsymbol{d}x \tag{35.41}$$

は任意の $\mathcal{A}(u)$ に対して Maxwell の方程式を満たす．それはこの前の数節で述べた重力的な平面波に類似した電磁気的な平面波を表す．この波の唯一のゼロでない場の成分は

$$F_{ux} = \mathcal{A}', \qquad \text{すなわち} \quad F_{tx} = -F_{zx} = \mathcal{A}' \tag{35.42}$$

である．したがって電気的ベクトルは x 方向に前後に振動し，磁気ベクトルは y 方向に振動し，そして波は z 方向に伝播する．x，y，u，v 座標におけるストレス–エネルギーテンソルは，唯一のゼロでない成分

$$T_{uu} = (4\pi L^2)^{-1}(\mathcal{A}')^2 \tag{35.43}$$

をもつ．

Maxwell の方程式は，読者が確かめることができるように，すでに背景計量 (35.40) におけるポテンシャル (35.41) によって満たされている．計量自身が等しく受け入れられるようにするためには，Einstein の方程式，$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ を課しさえすればよい．それらは

$$L'' + (4\pi T_{uu})L = 0 \tag{35.44}$$

*47 となる［$\beta = 0$ をもつ式 (35.30) をみよ］．これは正確に重力的な平面波に対する式 $L'' + (\beta')^2 L = 0$ の形をもつ．したがって，“背景因子” $L(u)$ によって生み出される，電荷をもたない試験粒子の相対運動は，$L(u) \neq 1$ が電磁波のストレス–エネルギーによって生み出されようが，あるいは

$$[(\beta')^2/4\pi]_{\text{重力波}} = [T_{uu}]_{\text{電磁波}} = (\mathcal{A}')^2/4\pi L^2 \tag{35.45}$$

*46　電磁気的な平面波のパルス

*47　電磁気的な平面波と重力的な平面波は同じ重力的な引力を生み出す

をもつ対応する重力波によって生み出されようが同じである．

類似をさらに近づけることができる．$(\beta')^2/4\pi$ および $(\mathcal{A}')^2/4\pi L$ を固定したまま，波の波長を小さくする．

$$\langle(\beta')^2/4\pi\rangle = [(\mathcal{A}')^2/4\pi L^2] = \text{一定} \qquad (\lambda\!\!\!^{-}\to 0)$$

非常に小さい波長の極限では（すなわち，特徴的な波長が $\gg\lambda\!\!\!^{-}$ であるような観点から），2 つの解はまったく区別できない．それらの計量は同等である（$\lambda\!\!\!^{-}\to 0$ および $\langle(\beta')^2\rangle$ = 一定は，$\beta\to 0$ を意味する）．そして試験粒子の揺れは小さすぎてみることができない．時空の曲がり（$L\neq 1$）および，時空の曲がりに関連した重力による試験粒子のエネルギーの引っ張りのみが，観測可能である．

35.12　厳密な平面波についての新しい観点

*48　上述の比較は本章への導入および 35.8 節で簡単に描かれた観点を暗示する．厳密な重力平面波の解［図 35.3，式 (35.29) および (35.33)］を，$L(u)$ によって特徴づけ，ほんのわずか曲がった背景時空上を伝播し，$\beta(u)$ によって記述される，時空曲率におけるさざ波と

*49　して考える．背景とさざ波との間のもっとも著しい相違は，それらの時空曲率の大きさにあるのではなく，それらの特徴的な長さにある．さざ波は特徴的な長さ

$$\lambda\!\!\!^{-} \equiv (\text{波の特徴的な既約 [reduced] 波長},\ \lambda/2\pi) \tag{35.46}$$

をもち，背景は特徴的な長さ（“背景幾何学の曲率半径”）

$$\mathcal{R} \sim |L/L''|^{1/2}{}_{\text{波の内部}} \sim 1/|\beta'| \tag{35.47}$$

をもつ．$\lambda\!\!\!^{-}$ はパルスの長さ $2T$ よりもわずかに小さいことを思い出せ．また $|\beta' T| \ll 1$ を思い出せ．“波因子” と “背景因子” の特徴的な長さは非常に異なると結論せよ．

$$\lambda\!\!\!^{-} \ll \mathcal{R} \tag{35.48}$$

このスケールにおける相違により，背景をさざ波から分離することが可能になる．

さざ波は背景よりもスケールにおいてはるかに小さい（$\lambda\!\!\!^{-} \ll \mathcal{R}$）．それにもかかわらずさざ波における局所的な曲率は背景曲率よりも相応して大きい［式 (35.30)，(35.34)］．こうして，

$$\begin{aligned}(R^x{}_{uxu})_{\text{背景}} &= (R^y{}_{uyu})_{\text{背景}} = -L''/L \sim 1/\mathcal{R}^2,\\ (R^x{}_{uxu})_{\text{波}} &= -(R^y{}_{uyu})_{\text{波}} = -\beta'' \sim |\beta'|/\lambda\!\!\!^{-} \sim 1/(\lambda\!\!\!^{-}\mathcal{R})\\ &\sim (\mathcal{R}/\lambda\!\!\!^{-})(R^x{}_{uxu})_{\text{背景}}\end{aligned} \tag{35.49}$$

---

*48　厳密な重力平面波が “短波近似” のことばで再吟味される

*49　(1) さざ波対背景

オレンジのまだらな表面が思い出される！

重力平面波の背景に対する計量は，電磁平面波に対する計量と同じである［式 (35.40)］.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(\mathrm{B})} dx^\mu \, dx^\nu = L^2(dx^2 + dy^2) - du \, dv \tag{35.50}$$

式 (35.29a) との比較によって，完全な時空（背景プラスさざ波）に対する計量は

$$ds^2 = (g_{\mu\nu}^{(\mathrm{B})} + h_{\mu\nu}) dx^\mu \, dx^\nu \tag{35.51}$$

$$h_{xx} = -h_{yy} = 2\beta, \qquad \text{すべての他の } h_{\mu\nu} = 0 \tag{35.52}$$

*50 ($\beta \neq 0$ の領域内では，L はほとんど 1 であることを思い出せ)．さざ波を背景幾何学内を伝播する，電磁場 A_μ に類似な横の，ゼロトレースの，対称テンソル場 $h_{\mu\nu}$ として考えることができる．ちょうど電磁場が

$$G_{uu} = -2L''/L = 8\pi T_{uu}$$

によって背景曲率を生み出すように，重力波のさざ波 $h_{\mu\nu}$ は

$$G_{uu}^{(\mathrm{B})} = -2L''/L = 8\pi T_{uu}^{(\mathrm{EFF})} \tag{35.53}$$

と書き直すことができる式 (35.31) によって背景曲率を生み出す．ここに

*51
$$T_{uu}^{(\mathrm{EFF})} \equiv \frac{1}{4\pi}(\beta')^2 = \frac{1}{32\pi} h_{jk,u} h_{jk,u} \tag{35.54}$$

は重力波に対する "有効なストレス–エネルギーテンソル" である．それは，平均化を除けば，35.7 節で正当化なしに書き下ろされた表現 (35.23) と一致することに注意せよ．

［**練習問題**］

35.10　2 個の偏りが存在している平面波

厳密な平面波の解 (35.29) は偏り $\boldsymbol{e}_+$ をもつ．偏り $\boldsymbol{e}_+$ および $\boldsymbol{e}_\times$ に対して，2 つの任意の振幅 $\beta(u)$ および $\gamma(u)$ を含む，同様な解を構成せよ．35.9–35.12 節の議論をこの解に拡張せよ．

35.13 短波近似

本章の残りは，上述の観点を，厳密な方法で非常に一般的な重力波の解に拡張する．この拡張は "短波形式" とよばれる．それは Wheeler (1964a) によっておよび Brill and

*50 (2) 背景内でのさざ波の伝播
*51 (3) さざ波に対する有効なストレス–エネルギーテンソル

Hartle (1964) によって設定された基礎に基づいて形成されたけれども，おもに Isaacson (1968a,b) によって案出された．さらに厳密な改良型は W.K.B. あるいは幾何光学的な極限で Choquet-Bruhat (1969)，および MacCallum and Taub (1973) によって与えられている．

*52 **真空**の背景時空を通って伝播する重力波を考える．35.7 節におけるように，$\mathcal{R}$ は背景の
*53 代表的な曲率半径であるとする．λ および $\mathcal{A}$ は代表的な既約波長 ($\lambda/2\pi$) および波の振
*54 幅とする．そして $\mathcal{A} \ll 1$ および $\lambda/\mathcal{R} \ll 1$ の両方を要求する．背景曲率は，完全に波に依存するか，あるいは部分的に波にそして部分的に近くの物質および非重力場に依存するだろう．

*55 解析には，計量係数が "背景" 係数と摂動に分離されうる，

$$g_{\mu\nu} = g^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{35.55}$$

という意味で，密接に時空に "適合された" 座標系を用いる．背景係数と摂動は以下の性質をもつ．(1) 摂動の振幅は $\mathcal{A}$ である

$$h_{\mu\nu} \lesssim (g^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu}\text{の代表的な値})\cdot\mathcal{A} \tag{35.56a}$$

(2) $g^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu}$ が変化するスケールは $\gtrsim \mathcal{R}$ である

$$g^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu,\alpha} \lesssim (g^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu}\text{の代表的な値})/\mathcal{R} \tag{35.56b}$$

(3) $h_{\mu\nu}$ が変化するスケールは $\sim \lambda$ である

$$h_{\mu\nu,\alpha} \sim (h_{\mu\nu}\text{の代表的な値})/\lambda \tag{35.56c}$$

このような座標は **"定常"** とよばれる．

*56 幾分長い計算 (練習問題 35.11) をすると，式 (35.55) の拡張された計量に対する Ricci テンソルは

$$\begin{array}{ccccccc} R_{\mu\nu} = & R^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu} & + & R^{(1)}_{\mu\nu}(h) & + & R^{(2)}_{\mu\nu}(h) & + \text{誤差} \\ & ? & & \mathcal{A}/\lambda^2 & & \mathcal{A}^2/\lambda^2 & \mathcal{A}^3/\lambda^2 \end{array} \tag{35.57}$$

であることがわかる．ここに目印 ($\mathcal{A}/\lambda^2$ 等) はその代表的な大きさの程度を示すために各項の下に置かれている．$R^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu}$ は背景計量 $g^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu}$ に対する Ricci テンソルであり，そして $R^{(1)}_{\mu\nu}(h)$ および $R^{(2)}_{\mu\nu}(h)$ は

$$R^{(1)}_{\mu\nu}(h) \equiv \frac{1}{2}(-h_{|\mu\nu} - h_{\mu\nu|\alpha}{}^{\alpha} + h_{\alpha\mu|\nu}{}^{\alpha} + h_{\alpha\nu|\mu}{}^{\alpha}) \tag{35.58a}$$

---

*52 短波形式に対する基礎
*53 (1) $\mathcal{R}$，λ，$\mathcal{A}$ が定義される
*54 (2) $\mathcal{A} \ll 1$ および $\lambda/\mathcal{R} \ll 1$ を要求する
*55 (3) 計量を背景プラス摂動に分離する "定常座標"
*56 (4) Ricci 曲率テンソルの分離

$$R^{(2)}_{\mu\nu}(h) \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}h_{\alpha\beta|\mu}h^{\alpha\beta}{}_{|\nu} + h^{\alpha\beta}(h_{\alpha\beta|\mu\nu} + h_{\mu\nu|\alpha\beta} - h_{\alpha\mu|\nu\beta} - h_{\alpha\nu|\mu\beta}) \right.$$
$$\left. h_\nu{}^{\alpha|\beta}(h_{\alpha\mu|\beta} - h_{\beta\mu|\alpha}) - \left(h^{\alpha\beta}{}_{|\beta} - \frac{1}{2}h^{|\alpha}\right)(h_{\alpha\mu|\nu} + h_{\alpha\nu|\mu} - h_{\mu\nu|\alpha})\right] \tag{35.58b}$$

によって定義される表現である．これらの表現および以下のいたるところで，添字は $g^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu}$ で上げ下げされる．そして垂直線は $g^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu}$ についての共変微分を表す（一方 21 章ではそれは 3–幾何学についての共変微分を表した）．

*57 短波形式の中心部に，真空の場の方程式 $R_{\mu\nu} = 0$ を解くための方法が存在する．表現 (35.57) から波の振幅 $\mathcal{A}$ について 1 次の部分を選び出し，それをゼロに等しく置くことから始める．波が背景を曲げるという作用は非線形の現象である（線形化された理論はその証拠を示さない）．したがって $R^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu}$ は $\mathcal{A}$ について 1 次でありえない．ゆえに，表現 (35.57) で，$R^{(1)}_{\mu\nu}(h)$ は唯一の 1 次の項であり，それ自身ゼロでなければならない

$$R^{(1)}_{\mu\nu}(h) = 0 \tag{35.59a}$$

[もちろん $h_{\mu\nu}$ は，$\mathcal{A}^2$ 程度の非線形の項（それらを $j_{\mu\nu}$ とよぶ）を含むだろう．それらはこの線形方程式によって制限されてはならない．それらは以下の式 (35.59c) によって定まるだろう．]

次に $R_{\mu\nu}$ の残りをさざ波をもたない部分，すなわち，λ よりはるかに大きいスケールでのみ変化する部分（“きめの粗い観点”），および揺らぎを含む 2 番目の部分に分離する．この分離は，いくつかの波長にわたって平均することによって達成することができる［平均する過程の正確な取り扱いに対しては練習問題 35.14 をみよ．またこのような平均が要求されない種類の解に対しては Choque–Bruhat（1969）をみよ］．

$$\underset{?}{R^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu}} + \underset{\mathcal{A}^2/\lambda^2}{\langle R^{(2)}_{\mu\nu}(h)\rangle} + \underset{\mathcal{A}^3/\lambda^2}{誤差} = 0 \quad [滑らかな部分] \tag{35.59b}$$

$$\underset{\mathcal{A}^2/\lambda^2}{R^{(1)}_{\mu\nu}(h)} + \underset{\mathcal{A}^2/\lambda^2}{R^{(2)}_{\mu\nu}(h)} - \underset{\mathcal{A}^2/\lambda^2}{\langle R^{(2)}_{\mu\nu}(h)\rangle} + \underset{\mathcal{A}^3/\lambda^2}{誤差} = 0 \quad [揺らぎの部分] \tag{35.59c}$$

[h に対する非線形補正]

すなわち，すべては Ricci テンソルの分離のために存在する！—方程式を取り扱い可能な形および物理学の完全な解釈に帰着することを除いては．

*58 解釈から始める．

*59 式 (35.59a) は重力波 $h_{\mu\nu}$ の伝播に対する式である．

---

*57 真空の場の方程式を“波の部分”（$\propto \mathcal{A}$）と“きめの粗い部分”（$\propto \mathcal{A}^2$ そしてスケール λ 上で滑らか）と“揺らぎの補正”（$\propto \mathcal{A}^2$ そしてスケール λ 上でさざ波立った）に分離する

*58 場の方程式の 3 つの部分の物理学的な解釈

*59 (1) 波の伝播

*60　式 (35.59b) は，波のストレス–エネルギーがいかに背景曲率を生み出すかを示す．それは，より示唆に富む形に書き直すことができる．

$$G^{(B)}_{\mu\nu} \equiv R^{(B)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(B)}g^{(B)}_{\mu\nu} = 8\pi T^{(GW)}_{\mu\nu} \qquad \text{（真空において）} \tag{35.60}$$

ここに

$$T^{(GW)}_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{8\pi}\left\{\langle R^{(2)}_{\mu\nu}(h)\rangle - \frac{1}{2}g^{(B)}_{\mu\nu}\langle R^{(2)}(h)\rangle\right\} \tag{35.61}$$

は重力波に対するストレス–エネルギーテンソルである．ここで，重力波のストレス–エネルギーはぼんやりとした意味においてのみよく定義されるという，35.7 節での陳述の起源をみる．

*61　最後に，式 (35.59c) は，いかに重力波 h が自分自身に非線形の補正 j（波と波との散乱，基本振動数の調波，等）を生成するかを示す．これらの高次の効果は本章で調べられないだろう．

[練習問題]

35.11　摂動された計量に対する接続係数と曲率テンソル

任意の時空の特別な座標系で，共変表示での計量係数を

$$g_{\mu\nu} = g^{(B)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{35.62a}$$

の形式で書く（計算の終わりで，$h_{\mu\nu}$ を 2 つの部分に分離できる．$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + j_{\mu\nu}$．そしてこの分離によって本文で用いられる公式を得る）．$h_{\mu\nu}$ の代表的な成分は $g^{(B)}_{\mu\nu}$ の代表的な成分よりもはるかに小さいと仮定する．したがって Christoffel 記号および曲率テンソルを，$h_{\mu\nu}$ について展開できる．$h_{\mu\nu}$ の添字を $g^{(B)}_{\mu\nu}$ で上げ下げする．そして "|" によって $g^{(B)}_{\mu\nu}$ についての共変微分を表し，そして ";" によって $g_{\mu\nu}$ についての共変微分を表す．

(a) ここで $g_{\mu\nu}$ および $g^{(B)}_{\mu\nu}$ は時空多様体内で共存する 2 つの異なる計量と考えることができる．対応する共変微分間の相違 $\boldsymbol{\nabla} - \boldsymbol{\nabla}^{(B)} \equiv \boldsymbol{S}$—実際，任意の 2 つの共変微分間の相違！—は成分

$$S^{\mu}{}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma} - \Gamma^{(B)\mu}{}_{\beta\gamma} \tag{35.62b}$$

をもつテンソルであることを示せ［**ヒント**：コラム 10.3 の部分 B をみよ］．

(b)

$$g^{\mu\nu} = g^{(B)\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\alpha}h_{\alpha}{}^{\nu} - h^{\mu\alpha}h_{\alpha}{}^{\beta}h_{\beta}{}^{\nu} + \cdots \tag{35.62c}$$

を示せ．そしてまた

*60　(2) 波のエネルギーによる背景曲率の生成，$T^{(GW)}_{\mu\nu}$ が定義される
*61　(3) 波の非線形の自己相互作用

$$g^{\mu\nu} = g^{(\mathrm{B})\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\alpha}h_\alpha{}^\nu - h^{\mu\alpha}h_\alpha{}^\beta h_{\beta\gamma}g^{\gamma\nu} \tag{35.62c$'$}$$

を示せ.

(c) $g^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu}$ の局所 Lorentz 系で計算しそれから元の系に逆変換することによって,

$$S^\mu{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(h_{\alpha\beta|\gamma} + h_{\alpha\gamma|\beta} - h_{\beta\gamma|\alpha}) \tag{35.62d}$$

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} - R^{(\mathrm{B})\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = S^\alpha{}_{\beta\delta|\gamma} - S^\alpha{}_{\beta\gamma|\delta} + S^\alpha{}_{\mu\gamma}S^\mu{}_{\beta\delta} - S^\alpha{}_{\mu\delta}S^\mu{}_{\beta\gamma} \tag{35.62e}$$

$$R_{\beta\delta} - R^{(\mathrm{B})}{}_{\beta\delta} = S^\alpha{}_{\beta\delta|\alpha} - S^\alpha{}_{\beta\alpha|\delta} + S^\alpha{}_{\mu\alpha}S^\mu{}_{\beta\delta} - S^\alpha{}_{\mu\delta}S^\mu{}_{\beta\alpha} \tag{35.62f}$$

を示せ.

(d) 表現 (35.62f) は

$$R_{\beta\delta} = R^{(\mathrm{B})}{}_{\beta\delta} + R^{(1)}_{\beta\delta}(h) + R^{(2)}_{\beta\delta}(h) + \cdots \tag{35.62g}$$

に帰着することを示せ. ここに $R^{(1)}$ および $R^{(2)}$ は式 (35.58) によって定義される.

35.14 波の伝播に対する背景曲率の効果

注意を伝播方程式, $R^{(1)}_{\mu\nu}(h) = 0$ に集中せよ. 線形化された理論におけるように, ここでもまた, 伝播は $h_{\mu\nu}$ によるよりもより単純に

*62
$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}hg^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu} \tag{35.63}$$

によって調べられる. $\bar{h}_{\mu\nu}$ によって書き直すと, $R^{(1)}_{\mu\nu}(h) = 0$ は

*63
$$\bar{h}_{\mu\nu|\alpha}{}^\alpha + g^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{|\beta\alpha} - 2\bar{h}_{\alpha(\mu|}{}^\alpha{}_{\nu)} + 2R^{(\mathrm{B})}_{\alpha\mu\beta\nu}\bar{h}^{\alpha\beta} - 2R^{(\mathrm{B})}_{\alpha(\mu}\bar{h}_{\nu)}{}^\alpha = 0 \tag{35.64}$$

となる [これを得るには, 式 (35.63) を逆転させ $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu}\bar{h}$ を得る. これを式 (35.58a) に代入してゼロに等しく置け. それから恒等式 (16.6b) を用いて共変微分を交換せよ. 最後に縮約して $\bar{h}_{|\alpha}{}^\alpha$ に対する表現を得てそれを逆に代入せよ].

*64 伝播方程式 (35.64) はゲージの特別な選択によって単純化することができる. 無限小座標変換

$$x^\mu{}_{新しい}(\mathcal{P}) = x^\mu{}_{古い}(\mathcal{P}) + \xi^\mu(\mathcal{P}) \tag{35.65a}$$

は

$$h_{\mu\nu 新しい}(x^\alpha{}_{新しい}) = h_{\mu\nu 古い}(x^\alpha{}_{新しい}) - 2\xi_{(\mu|\nu)} \tag{35.65b}$$

---

*62 $\bar{h}_{\mu\nu}$ が定義される
*63 曲がった背景上の波に対する伝播方程式
*64 "Lorentz ゲージ" への特殊化

によって与えられる計量係数の，関数形式における 1 次の変化を引き起こす［線形化された理論のゲージ変換の類似 (35.3c)，練習問題 35.12 をみよ］．4 個の関数 ξ^μ の適当な選択によって，4 個の "Lorentz ゲージ条件"

$$\bar{h}_\mu{}^\alpha{}_{|\alpha} = 0 \tag{35.66}$$

を新しい座標系において強要できる（練習問題 35.13）．このゲージの選択は線形化された理論のゲージに類似している．それは伝播方程式における 2 項および 3 項をゼロにする（"TT" 型の付加的なゲージ条件に対しては，練習問題 35.13 をみよ）．

*65　伝播方程式の最後の項，$-2R^{(\mathrm{B})}_{\alpha(\mu}\bar{h}_{\nu)}{}^\alpha$ は次の理由のために，解析の精度内でゼロになる．注意は真空に制限されている．したがってゼロでない Ricci テンソルの唯一の源は重力波自身によって運ばれるストレス–エネルギーである［式 (35.60)］．したがって $R^{(\mathrm{B})}_{\alpha\beta} \sim \mathcal{A}^2/\lambda^2$．そして

$$R^{(\mathrm{B})}{}_{\alpha(\mu}\bar{h}_{\nu)}{}^\alpha \sim \mathcal{A}^3/\lambda^2 \tag{35.67}$$

これは $R^{(3)}_{\mu\nu}$ と同じ程度であり，Ricci テンソルへの 3 次の補正であって解析の精度のはるか下である．解析についての調和のために，それは無視されるだろう．

本節のこれまでの**要約**：$\bar{h}_\mu{}^\alpha{}_{|\alpha} = 0$ が成り立つゲージを選ぶことによって，そして解析の精度よりも高次の項を無視することによって，Lorentz ゲージ条件

$$\bar{h}_{\mu\alpha}{}^{|\alpha} = 0$$

を受ける真空中の伝播方程式

*66

$$\bar{h}_{\mu\nu|\alpha}{}^\alpha + 2R^{(\mathrm{B})}_{\alpha\mu\beta\nu}\bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \tag{35.68}$$

を得る．式 (35.68) は振幅について 1 次まで正確である［補正 $\propto \mathcal{A}^2$ は式 (35.59c) に含まれている］．そしてその精度は式 (35.59) からわかるように比 $\lambda/\mathcal{R}$ によらない．こうして，**式 (35.68) はたとえ波長が大きくても，波が弱いときにはつねに適用することができる！**

*67　波の，自らとのすべての非線形の相互作用は，この 1 次の伝播方程式において無視されている．波が互いに他と散乱する，あるいは波が自ら生み出す背景曲率と散乱する機構が欠けている．また波のパルスが伝播するとき，自己相互作用によるパルスの形の変化についても何のヒントもない．重力波の質量エネルギー m が大きさ $\lesssim m$ の領域に圧縮されるとき起こらなければならないことを知るような，重力崩壊の証拠は存在しない．すべてのこれらの効果を知るには，$\mathcal{A}$ における 2 次およびさらに高次の補正を考えなければならない［たとえば，式 (35.59c) および (35.60)］．

実際，伝播方程式には，伝播している波に対する背景曲率の，線形の作用によるすべての効果が含まれる．これらの効果は，短い波長（$\lambda/\mathcal{R} \ll 1$）に対して，また，ほとんど平坦な

---

*65　波の Ricci テンソルへの結合は無視できる

*66　Lorentz ゲージでの伝播方程式とその妥当性の領域

*67　伝播方程式から欠けている効果および含まれている効果のリスト

波頭に対して，本章の終わりの練習問題 35.15–35.17 で研究される．考慮される効果は重力放射の重力による赤方偏移，および光の伝播方向に対するのと同等な重力放射の伝播方向の重力による偏向，および偏りテンソルの回転を含む．波長が小さくないときには（$\lambda/\mathcal{R} \ll 1$ でない），伝播方程式は，背景曲率からの重力波の逆散乱，および練習問題 32.10 で研究されたことに似た波の“しっぽ”の合成的なパターンを含む［たとえば，Couch *et al.*（1968），Price（1971a），Bardeen and Press（1972），Unt and Keres（1972）をみよ］.

［練習問題］

35.12 曲がった背景におけるゲージ変換

(a) 無限小座標変換 (35.65a) は計量摂動の関数形に変化 (35.65b) を引き起こすことを示せ．

(b) ゲージ変換と Killing ベクトル（25.2 節）の概念との間の関係を議論せよ．

35.13 曲がった背景における重力波の伝播に対する，横方向のゼロトレースゲージ

(a) 曲がった背景時空の真空中で，ゲージ条件 $\bar{h}_\mu{}^\alpha{}_{|\alpha} = 0$ は，生成子が波動方程式，$\xi_\mu{}^{|\alpha}{}_\alpha = 0$ を満たす変換によって保存されることを示せ．

(b) 局所的に（$\mathcal{R}$ よりもはるかに小さい距離にわたって）線形化された理論が適用できる．したがって

$$\bar{h} = 0 + 誤差, \qquad \bar{h}_{\mu\alpha}u^\alpha = 0 + 誤差 \tag{35.69}$$

となるような変換［式 (35.7b) および (35.8a) をみよ］が存在する．ここに u^α は可能な限りほとんど共変一定なベクトル場である（$u^\alpha{}_{|\beta} = 0$）．すなわち，それは線形化された理論の慣性座標における一定のベクトルである．そして誤差は，$\mathcal{R}$ よりもはるかに小さい距離にわたって小さい．$\bar{h} = 0$ は，**大域的に** $\bar{h}_{\mu\alpha}{}^{|\alpha} = 0$ **とともに課すことができる**ことを示せ．すなわち，もし $\bar{h} = 0$ が最初の超曲面上で課されるならば，伝播方程式 (35.68) はそれを保持することを示せ．

(c) 一般に，背景曲率は任意のベクトル場が共変的に一定であることを妨げる（せいぜい $u^{\hat{\alpha}}{}_{|\hat{\beta}} \sim u^{\hat{\alpha}}/\mathcal{R}$）ことを示せ．そしてこれから $\bar{h}_{\mu\alpha}u^\alpha = 0$ **は大域的に** $\bar{h}_\mu{}^\alpha{}_{|\alpha} = 0$ **とともに課すことができないことを示せ．**

35.15 重力波に対するストレス–エネルギーテンソル

*68 ここで式 (35.61) の有効ストレス–エネルギーテンソル $T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu}$ の評価を考えよう．評価するには，若干の波長にわたって種々の量の平均化が必要である．平均化の括弧 $\langle\ \rangle$ 内の

*68 “きめの粗い” 観点に含まれる平均化の過程

量を取り扱うための有用な規則は以下である（正当化については練習問題 35.14 をみよ）．

(1) 共変微分は交換する．たとえば，$\langle h\, h_{\mu\nu|\alpha\beta}\rangle = \langle h\, h_{\mu\nu|\beta\alpha}\rangle$．自由に交換することによって生じるわずかな誤差は $\sim(\lambda/\mathcal{R})^2$ であり，計算の不正確さよりはるかに低い．

(2) 勾配はゼロに平均化される．たとえば，$\langle (h_{|\alpha}h_{\mu\nu})_{|\beta}\rangle = 0$．ここで生じるわずかな誤差は $\lesssim \lambda/\mathcal{R}$ である．

(3) 結果として，1 つの h から他の h へ微分を移して，たとえば $\langle h\, h_{\mu\nu|\alpha\beta}\rangle = \langle -h_{|\beta}h_{\mu\nu|\alpha}\rangle$ のようにして，自由に部分積分することができる．

*69 これらの規則，$R^{(2)}_{\mu\nu}(h)$ に対する式 (35.58b)，$\bar{h}_{\mu\nu}$ の定義 (35.63)，伝播方程式 (35.64)，および $T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu}$ の定義 (35.61) を用いた，率直なしかし長い計算は，$\langle R^{(2)}(h)\rangle = 0$，および

$$T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi}\langle \bar{h}_{\alpha\beta|\mu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{|\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}_{|\mu}\bar{h}_{|\nu} - 2\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{|\beta}\bar{h}_{\alpha(\mu|\nu)}\rangle \tag{35.70}$$

を与える．これは，式 (35.23′) で，共変微分と通常の微分が同じである線形化された理論の慣性座標系が用いられているということを除いて，式 (35.23′) で引用されている結果である．$\bar{h}_\mu{}^\alpha{}_{|\alpha} = 0$ のゲージでは，最後の項はゼロになる．さらに，$\bar{h}_{\mu\nu}$ がゼロトレースであるときは（練習問題 35.13 をみよ），2 番目の項はゼロになる．そして

$$T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi}\langle \bar{h}_{\alpha\beta|\mu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{|\nu}\rangle \qquad (\text{もし } \bar{h}_\mu{}^\alpha{}_{|\alpha} = \bar{h} = 0 \text{ ならば}) \tag{35.70′}$$

のみが残る．

*70 重力波の有効ストレス–エネルギーテンソルに対するこれらの表現は，$h_{\mu\nu}$ に対する 2 次の補正の無視による，$\mathcal{A}$ 程度のわずかな誤差をもつ．また平均化の過程による $\lambda/\mathcal{R}$ 程度のわずかな誤差をもつ．このような 2 次の補正の無視は，大きさにおいて λ が $\mathcal{R}$ に近づくときには意味を失う．$\mathcal{A} \lesssim \lambda/\mathcal{R}$ [式 (35.28)] であるから，$T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu}$ の主要な誤差は $\sim\lambda/\mathcal{R}$ である．

*71 この精度までは，重力波に対するストレス–エネルギーテンソルは，他の任意のストレス–エネルギーテンソルと対等の立場にある．それは背景曲率を生み出すことにおいて同じ役割を演ずる．そして同じように保存則に入る．たとえば，直接的な計算によって，あるいは恒等式 $G^{(\mathrm{B})\mu\nu}{}_{|\nu} = 0$ からのいずれによっても，

$$T^{(\mathrm{GW})\mu\nu}{}_{|\nu} = 0 + \text{誤差} \tag{35.71}$$

を示すことができる．ここに誤差 $\sim(\lambda/\mathcal{R})(T^{(\mathrm{GW})\mu\nu}/\mathcal{R})$ は短波近似で無視できる．

$T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu}$ の性質のあるものはすでに 35.7 節で調べられている．さらなる性質は練習問題 35.18 および 35.19 で検討されている．

---

*69　重力波に対する有効ストレス–エネルギーテンソル $T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu}$ の評価

*70　$T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu}$ に対する表現の精度

*71　$T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu}$ の性質

[練習問題]

35.14　Brill–Hartle 平均

Isaacson（1968b）は以下のような平均化の枠組みを導入し，彼はそれを “Brill–Hartle 平均化” とよぶ．

(a) 平均化を行う $\lambda\!\!\!\!-$ の若干倍の大きさの小さい領域では，任意の 2 点 $\mathcal{P}'$ および $\mathcal{P}$ を結ぶ $g_{\mu\nu}^{(\mathrm{B})}$ の一義的な測地線が存在するだろう．したがって $\mathcal{P}'$ でテンソル $\boldsymbol{E}(\mathcal{P}')$ が与えられれば，それをこの測地線に沿って $\mathcal{P}$ へ平行移動して，そこでテンソル $\boldsymbol{E}(\mathcal{P}')_{\to\mathcal{P}}$ を得ることができる．

(b) $\mathcal{P}'$ と $\mathcal{P}$ が多くの波長だけ離れているとき，$f(\mathcal{P}',\mathcal{P})$ を，滑らかにゼロに落ち，

$$\int f(\mathcal{P}',\mathcal{P})\sqrt{-g^{(\mathrm{B})}(\mathcal{P}')}d^4x' = 1 \tag{35.72}$$

となる加重関数とする．

(c) そうすると点 $\mathcal{P}$ の周りの若干の波長にわたる，テンソル場 $\boldsymbol{E}(\mathcal{P}')$ の平均は

$$\langle \boldsymbol{E}\rangle_{\mathcal{P}} \equiv \int \boldsymbol{E}(\mathcal{P}')_{\to\mathcal{P}} f(\mathcal{P}',\mathcal{P})\sqrt{-g^{(\mathrm{B})}(\mathcal{P}')}d^4x' \tag{35.73}$$

である．

(i) 実体 $g_{\mu}^{(\mathrm{B})\alpha'}(\mathcal{P},\mathcal{P}')$ が存在して，ダッシュつきの添字は $\mathcal{P}'$ でテンソルとして変換し，ダッシュのつかない添字は $\mathcal{P}$ でテンソルとして変換して，（2 階の $\boldsymbol{E}$ に対して）

$$E_{\alpha\beta}(\mathcal{P}')_{\to\mathcal{P}} = g_{\alpha}^{(\mathrm{B})\mu'} g_{\beta}^{(\mathrm{B})\nu'} E_{\mu'\nu'}(\mathcal{P}') \tag{35.74}$$

となることを示せ．この実体は “測地線の平行変位のバイベクトル” とよばれる．DeWitt and Brehme（1960）あるいは Synge（1960a）をみよ．

(ii) 表現 (35.73) を座標の言葉で

$$\langle E_{\alpha\beta}(x)\rangle = \int g_{\alpha}^{(\mathrm{B})\mu'}(x,x')g_{\beta}^{(\mathrm{B})\nu'}(x,x')E_{\mu'\nu'}(x')f(x,x')\sqrt{-g^{(\mathrm{B})}(x')}d^4x' \tag{35.73$'$}$$

と書き直して，35.15 節の初めに引用されている 3 つの平均化の規則を導け［解については，Isaacson（1968b）の付録をみよ］．

35.15　幾何光学

曲がった背景内を伝播する小さい振幅の重力波に対する幾何光学を展開せよ．電磁波に対する幾何光学（22.5 節）にならって解析を模造せよ．とくに，$\bar{h}_{\mu\nu}$ は（スケール $l \lesssim \mathcal{R}$ 上で）ゆるやかに変化する振幅をもち，速やかに変化する位相 θ（$\theta_{,\hat{\alpha}} \sim 1/\lambda\!\!\!\!-$）をもつとせよ．振幅を $\lambda\!\!\!\!-/l$ のべきで展開して，

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \boldsymbol{\mathcal{R}}\{A_{\mu\nu} + \epsilon B_{\mu\nu} + \epsilon^2 C_{\mu\nu} + \cdots\}e^{i\theta/\epsilon} \tag{35.75}$$

とせよ．ここに ϵ は形式的な展開パラメータであり，実際には 1 に等しい．それは ϵ^n に結びつけられている項が $(\lambda\!\!\!\!-/\mathcal{R})^n$ に比例することを思い出させる．以下の量を定義せよ（$A^*_{\nu\nu}$ は $A_{\mu\nu}$ の複素共役を表す）．

$$\text{“波動ベクトル”}:\ k_\alpha \equiv \theta_{,\alpha} \tag{35.76a}$$

$$\text{“スカラー振幅”}:\ \mathcal{A} \equiv \left(\frac{1}{2}A^*_{\mu\nu}A^{\mu\nu}\right)^{1/2} \tag{35.76b}$$

$$\text{“偏り”}:\ e_{\mu\nu} \equiv A_{\mu\nu}/\mathcal{A} \tag{35.76c}$$

表現 (35.75) をゲージ条件 (35.66) および伝播方程式 (35.68) に挿入することによって，幾何光学の基本方程式を以下のように導け．

（a）光線（一定の位相の曲面に垂直な曲線）はヌル測地線である．すなわち

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \tag{35.77a}$$

$$k_{\alpha|\beta}k^\beta = 0 \tag{35.77b}$$

（b）偏りは光線に直交し光線に沿って平行移動される．

$$e_{\mu\alpha}k^\alpha = 0 \tag{35.77c}$$

$$e_{\mu\nu|\alpha}k^\alpha = 0 \tag{35.77d}$$

（c）スカラー振幅は，光線が

$$\mathcal{A}_{,\alpha}k^\alpha = -\frac{1}{2}{k^\alpha}_{|\alpha}\mathcal{A} \tag{35.77e}$$

と一致して互いに他から発散し去るとき，減少する．すなわち，

$$(\mathcal{A}^2 k^\alpha)_{|\alpha} = 0 \qquad (\text{“重力子の保存”}) \tag{35.77f}$$

（d）振幅に対する補正 $B_{\mu\nu}$ は

$$B_{\mu\alpha}k^\alpha = i{A_{\mu\alpha}}^{|\alpha} \tag{35.77g}$$

$$B_{\mu\nu|\alpha}k^\alpha = -\frac{1}{2}{k^\alpha}_{|\alpha}B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}i{A_{\mu\nu|\alpha}}^{\alpha} + iR^{(\mathrm{B})}_{\alpha\mu\beta\nu}A^{\alpha\beta} \tag{35.77h}$$

に従う．練習問題 35.13 と一致して，ゲージを特殊化して $\bar{h} = 0$，すなわち，

$$e_\alpha{}^\alpha = 0 \tag{35.77i}$$

となるようにする．そうすると波に対するストレス–エネルギーテンソル (35.70′) は

$$T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi}\mathcal{A}^2 k_\mu k_\nu \tag{35.77j}$$

であることを示せ．これはゼロ静止質量をもつ粒子のビームに対するストレス–エネルギーテンソルと同じ形をもつ（5.4 節をみよ）．${T^{(\mathrm{GW})\mu\nu}}_{|\nu} = 0$ を明白に示せ．

35.16　重力子

幾何光学は，既述の練習問題で展開されているように，以下と同等であることを示せ．“重力子はゼロ静止質量と 4–運動量 $\boldsymbol{p}$ をもち，ヌル測地線（$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{p} = 0$）に沿って動く粒子

であると仮定されることを示せ．重力子は，横方向で（$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}=0$）ゼロトレース（$e_\alpha{}^\alpha=0$）の偏りテンソル $\boldsymbol{e}$ を，自らとともに平行移動する．幾何光学は時空を通って動くこのような重力子の流れの理論である．" さらに，幾何光学のこの形式における量と，既述の形式における量との間の関係を示せ［たとえば，$\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$，ここに $\hbar$ は Planck の既約（reduced）定数 $h/2\pi$ である］．

35.17　重力波の重力による偏向

太陽系を通過する短波長の重力波は，光と同じ赤方偏移と重力による偏向を経験することを示せ（練習問題 35.15 から直接このことを推論できるはずである）．

35.18　$T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu}$ のゲージ不変性

式 (35.70) のストレス–エネルギーテンソルは，形式 (35.65) のゲージ変換のもとで不変であることを示せ．

35.19　$T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu}$ はストレス–エネルギー偽テンソルの平均として表される

$\lambda\!\!\!{}^{-}/\mathcal{R}\ll 1$ をもつ重力波に対する Landau–Lifschitz のストレス–エネルギー偽テンソル (20.22) の若干の波長にわたる平均を計算せよ．結果は $T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu}$ に等しくなるはずである［ヒント：計算を単純化するために，$\bar{h}_\mu{}^\alpha{}_{|\alpha}=\bar{h}=0$ となるゲージで作業せよ］．

35.20　変分の観点からみた短波近似

21 章における重力理論への変分で扱う方法を研究した読者は，短波近似の基礎方程式の以下の導出を魅力的だと思うだろう．それは独立に，Sándor Kovács and Bernard Schutz によって，および Bryce DeWitt（出版されていない，1971）によって考え出された．MacCallum and Taub（1973）は "非–Palatini" 形式を与える．

(a)

$$g_{\mu\nu}\equiv g^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu}+h_{\mu\nu},\qquad \bar{h}\equiv h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu}h \tag{35.78a}$$

$$W^\mu{}_{\beta\gamma}\equiv\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}_{(\mathrm{B})}(h_{\alpha\beta|\gamma}+h_{\alpha\gamma|\beta}-h_{\beta\gamma|\alpha}) \tag{35.78b}$$

を定義せよ．$h_{\mu\nu}$ および $W^\mu{}_{\beta\gamma}$ についての添字を背景計量で上げ下げせよ．練習問題 35.11 の結果を用いて，重力場の Lagrangian に対する以下の表現を導け．

$$\mathcal{L}\equiv\frac{1}{16\pi}(-g)^{1/2}R=\mathcal{L}'+\begin{pmatrix}\text{形 }\partial\mathcal{Q}^\alpha/\partial x^\alpha\\ \text{の完全な発散}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathcal{A}^3/\lambda\!\!\!{}^{-2},\ R^{(\mathrm{B})}_{\mu\nu}\mathcal{A},\ \text{および}\\ \text{より小さい程度の補正}\end{pmatrix} \tag{35.78c}$$

ここに

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'\equiv\frac{1}{16\pi}(-g^{(\mathrm{B})})^{1/2}[&R^{(\mathrm{B})}-\bar{h}^{\mu\nu}(W^\alpha{}_{\mu\nu|\alpha}-W^\alpha{}_{\mu\alpha|\nu})\\ &+g^{(\mathrm{B})\mu\nu}(W^\alpha{}_{\beta\alpha}W^\beta{}_{\mu\nu}-W^\alpha{}_{\beta\nu}W^\beta{}_{\mu\alpha})]\end{aligned} \tag{35.78d}$$

［ヒント：任意の B^α に対して，

$$(-g^{(\mathrm{B})})^{1/2}B^\alpha{}_{|\alpha}=\partial[(-g^{(B)})^{1/2}B^\alpha]/\partial x^\alpha$$

を思い出せ.] $\mathcal{L}$ から $\mathcal{A}^3/\lambda^3$ 程度の補正を落とす．そして前もって，場の方程式は $R^{(B)}_{\mu\nu} \sim \mathcal{A}^2/\lambda^2$ を要求するだろうことを知り，$R^{(B)}_{\mu\nu}\mathcal{A}$ 程度の補正もまた落とす．完全な発散は極値化の計算に何も寄与しないことを知って，$\mathcal{L}$ から発散項を落とす．そうすると $\mathcal{L}'$ は $\mathcal{L}$ の唯一の残りの部分である.

(b) $I \equiv \int \mathcal{L}' d^4x$ を Palatini の方法 (21.2 節) によって極値化せよ．すなわち，$W^{\mu}{}_{\beta\gamma}$ の定義 (35.78b) を捨て（一時的に），そして I を $W^{\mu}{}_{\beta\gamma} = W^{\mu}{}_{\gamma\beta}$，$\bar{h}^{\mu\nu} = \bar{h}^{\nu\mu}$，および $g^{\mu\nu}_{(B)} = g^{\nu\mu}_{(B)}$ の独立な変分について極値化せよ．$W^{\mu}{}_{\beta\gamma}$ についての極値化は，$W^{\mu}{}_{\beta\gamma}$ に対する $h_{\mu\nu}$ による式 (35.78b) に逆戻りすることを示せ．$\bar{h}^{\mu\nu}$ についての極値化は，式 (35.78a)，(35.78b) と結合されるとき，重力波に対する伝播方程式 (35.64) になることを示せ．$g^{(B)\mu\nu}$ についての極値化は，式 (35.78a)，(35.78b) とそして伝播方程式 (35.64) と結合され，そしていくつかの波長にわたって平均されるとき，

$$G^{(B)}_{\mu\nu} = 8\pi T^{(GW)}_{\mu\nu}$$

になることを示せ．ここに $T^{(GW)}_{\mu\nu}$ は式 (35.70) によって与えられる．[**警告**：この練習問題における代数計算の量は，最初からゲージ条件 $\bar{h} = \bar{h}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta} = 0$ を課すことを選ばなければ，莫大である].

36章
重力波の生成

物質は曲率によって表される．しかしすべての曲率が物質を表すとは限らない．“真空”にも曲率は存在するだろう．

G. LEMAITRE in Schilpp (1949), p.440

36.1 重力波の四重極の性質

孤立した，ほとんどNewton的な系内にある質量は互いに向かって動く．それらはどれほどの重力放射を放出するか？

*1 大きさの程度を見積るには，静的なCoulombの法則をNewtonの引力の法則に転換する，置き換え $e^2 \to -m^2$ を行って，電磁気論のよく知られた放射の公式を適用できる．この手続きは重力がスピン2の（テンソル）場よりもむしろスピン1の（ベクトル）場であるかのように取り扱う．したがって，それはちょっとした誤りを数値的な因子に導入し，そして角分布を変える．しかしそれは放射される全勢力の適切な評価を与える．

電磁気論では電気双極子放射が支配的で，出力あるいは“光度” L は，加速度 $\boldsymbol{a}$ をもち双極子モーメントが $\ddot{\boldsymbol{d}} = e\ddot{\boldsymbol{x}} = e\boldsymbol{a}$ と変化するような，ただ1つの粒子に対しては

$$L_{\text{電気双極子}} = (2/3)e^2\boldsymbol{a}^2$$

によって与えられる（4.4節および図4.6をみよ）．双極子モーメント $\boldsymbol{d}$ をもつ一般的な系に対しては

$$L_{\text{電気双極子}} = (2/3)\ddot{\boldsymbol{d}}^2$$

によって与えられる．［幾何学的な単位では，光度はcmで表した質量–エネルギーをcmで表した光の通過時間で割ったもの，電荷はcmで表され，$e = (G^{1/2}/c^2)e_{\text{慣習}} = (2.87\times10^{-25}\,\text{cm/esu})\times(4.8\times10^{-10}\,\text{esu}) = 1.38\times10^{-34}\,\text{cm}$ であり，加速度は距離のcmを時間のcmで2回割ったものである．慣習的な単位では，e はesuあるいは $(\text{g cm}^3/\text{sec}^2)^{1/2}$ で表される．したがって慣習的な単位では，因子 c^{-3} を右辺に挿入して L をerg/secで得る］．
*2 電気双極子モーメントの重力的な類似は質量の双極子モーメント

$$\boldsymbol{d} = \sum_{\text{粒子 } A} m_A \boldsymbol{x}_A$$

*1 重力波の生成が電磁気的な類似によって解析される

*2 重力波は双極子でありえないわけ

である．その 1 階の時間変化率は系の全運動量である．

$$\dot{\boldsymbol{d}} = \sum_{\text{粒子 } A} m_A \dot{\boldsymbol{x}}_A = \boldsymbol{p}$$

質量双極子モーメントの 2 階の時間変化率は，運動量の保存則，$\ddot{\boldsymbol{d}} = \dot{\boldsymbol{p}} = 0$ のためにゼロにならなければならない．したがって**重力物理学においては質量双極子放射は存在しえない．**

電磁気的な放射の次のもっとも強力な型は磁気双極子および電気四重極である．磁気双極子放射は磁気モーメントの 2 次の時間微分，$\ddot{\boldsymbol{\mu}}$ によって生成される．ここで再び重力的な類似は，運動の定数である，角運動量である．

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_A (A \text{ の位置}) \times (A \text{ による流れ}) = \sum_A \boldsymbol{r}_A \times (m\boldsymbol{v}_A) = \boldsymbol{J}$$

したがってそれは放射できない．**こうして，いかなる種類の重力的な双極子放射も存在しえない．**

四重極放射を考えると，最終的にゼロでない結果を得る（図 36.1 をみよ）．電磁気論によって予言される出力は

$$L_{\text{電気四重極}} = \frac{1}{20}\dddot{\boldsymbol{Q}}^2 \equiv \frac{1}{20}\dddot{Q}_{jk}\dddot{Q}_{jk},$$
$$Q_{jk} \equiv \sum_A e_A \left(x_{Aj}x_{Ak} - \frac{1}{3}\delta_{jk}{r_A}^2 \right)$$

であり（$Q_{jk\ \text{ここ}} = Q_{jk\ \text{多くの他の文献において}}$），それに重力的に対応するのは

[*3]
$$L_{\text{質量四重極}} = \frac{1}{5}\langle \dddot{\not{\boldsymbol{I}}}^2 \rangle \equiv \frac{1}{5}\langle \dddot{\not{I}}_{jk}\dddot{\not{I}}_{jk} \rangle \tag{36.1}$$

$$\not{I}_{jk} \equiv \sum_A m_A \left(x_{Aj}x_{Ak} - \frac{1}{3}\delta_{jk}{r_A}^2 \right) = \int \rho \left(x_j x_k - \frac{1}{3}\delta_{jk}r^2 \right) d^3x \tag{36.2}$$

である．式 (36.1) は，電磁気的な類似によって提案される間違った因子 1/20 の代わりに，テンソル計算から出てくる 1/5 の正しい因子を含む（36.10 節をみよ）．そして式 (36.1) の右辺は，重力放射のエネルギーを 1 波長内に局在化できないことに伴って，源のいくつかの特徴的な周期にわたって平均されている（“⟨　⟩”）．

記号：“質量分布の 2 番目のモーメント” は物理学や数学の文献を通して現れるときに，その定義について曖昧さは存在しない．

$$I_{jk} \equiv \int \rho x_j x_k \, d^3x$$

慣性モーメントテンソル $\Im_{jk}$ を，質量分布のこの 2 番目のモーメントからいかに構成するかについてもまた，いかなるあいまいさも存在しない．

$$\Im_{jk} = \delta_{jk}\,\mathrm{Tr}(I_{ab}) - I_{jk} = \int \rho(r^2\delta_{jk} - x_j x_k) d^3x$$

[*3] 源の “既約（reduced）四重極モーメント” によって表された重力波の勢力放射

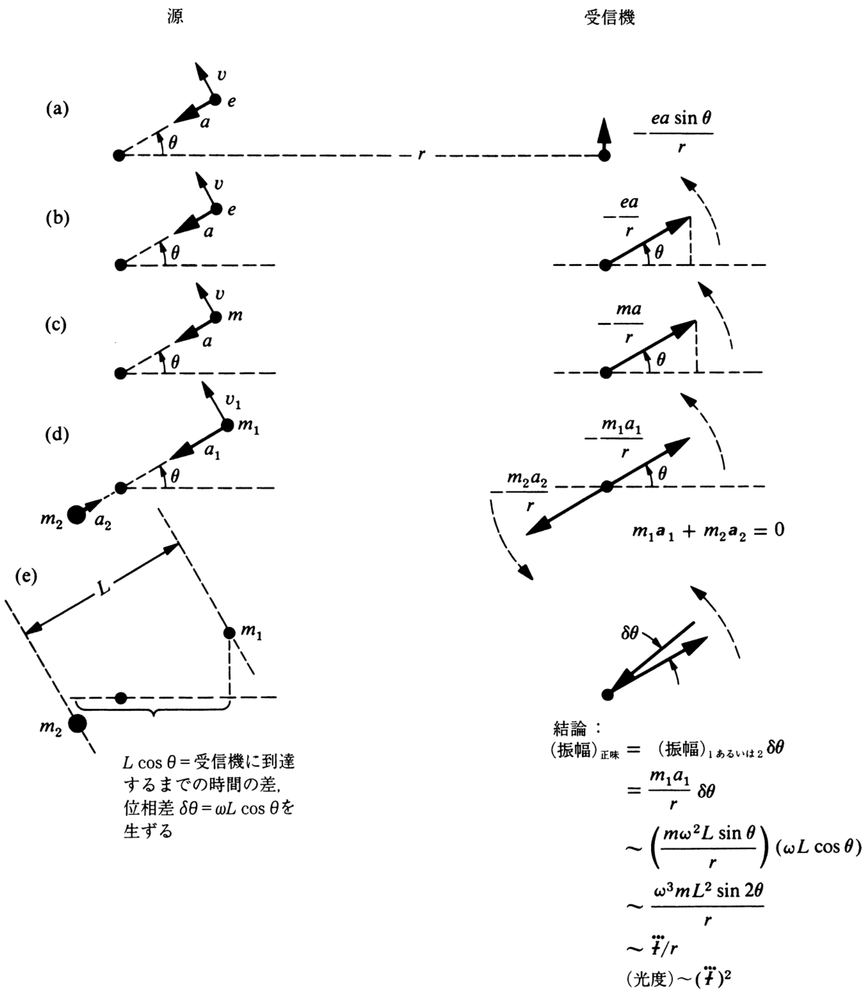


図 36.1 重力放射はふつうは弱い理由．要するに，離れた質量の質量双極子モーメントから出ていく波の振幅への寄与は相殺する，$(m_1\boldsymbol{a}_1+m_2\boldsymbol{a}_2)/r=0$（作用は反作用に等しいという原理）．

(a) 加速された電荷からの放射（4.4 節および図 4.6 をみよ）．

(b) 電気工学の代表的な回転しているベクトル図による，大きい距離 r での場の表示．しかし，ここでは，視覚化を容易にするために，回転しているベクトルの鉛直射影が観測される場を与える（円軌道をとる電荷によって生み出される通常の双極子放射の場）．

(c) スピン 1 の場あるいはベクトル場としての重力場の単純化された模型に基づく，重力放射に対応する回転しているベクトルの図（重力放射の真実なテンソル特徴と対照されるべきである．したがってこの単純な図によって与えられているときの角分布の詳細および全放射は正しくない．しかし光度の大きさの程度は正しい）．

(d) 軌道内に互いにとどまっている 2 個の質量 m_1および m_2 は，作用は反作用に等しいという原理のために出ていく波の振幅に，等しく反対の寄与を与える（水素原子からの電磁気的な放射では，対応する放射振幅は相殺しない．$e_{電子}\boldsymbol{a}_{電子}+e_{陽子}\boldsymbol{a}_{陽子}\sim e_{電子}\boldsymbol{a}_{電子}\neq 0$）．

(e) よりよい近似では，2 個の質量からの影響の，受信機での到着時間における差を考慮に入れなければならない．外形上厳密に互いに反対方向を指していた 2 個のベクトルは，位相角度 $\delta\theta$ で，今や傾斜して描かれている．生ずる場の振幅は $\dddot{I}$ のように動く．ここに I は既約された四重極モーメントである．そして光度は $\dddot{I}$ に比例する．

四重極重力放射を放出している源を特徴づけるモーメントは，ここでは同等に明確に，**“質量分布の 2 番目のモーメントのトレースに関係しない部分”** であるととられる．

$$\text{Ɨ}_{jk} = I_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{jk}\,\mathrm{Tr}(I_{ab}) = I_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{jk} I = \int \rho(x_j x_k - \frac{1}{3}\delta_{jk} r^2) d^3x \qquad (36.3)$$

この記号は，公式を単純化し，計算を単純化し，重力波の理論の文献の多くとよく調和する［たとえば，Peters（1964），Peres and Rosen（1964）］．そして記憶しやすいために採用される．量 Ɨ_{jk} に対する別名は**既約化（reduced）四重極モーメント**である．この術語は，ここで用いられている量と，Landau and Lifschitz（1962）の標準的な教科書および原子核の四重極モーメントについての文献において四重極モーメントとよばれる 3 倍大きい量，および調和関数の理論において用いられる，3/2 倍大きい量との間の区別を明白にする．

$$\mathcal{Q}_{zz} \quad \begin{pmatrix} \text{Landau and Lifschitz，また} \\ \text{原子核の四重極モーメント} \end{pmatrix} = \int \rho(3z^2 - r^2) d^3x,$$

$$\mathcal{Q}_{zz} \;(\text{調和関数の理論}) = \int \rho \left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}r^2\right) d^3x,$$

$$\text{Ɨ}_{zz} \quad \begin{pmatrix} \text{既約化四重極モーメント，} \\ \text{ここで採用されている源の強} \\ \text{さの明白な測度} \end{pmatrix} = \int \rho \left(z^2 - \frac{1}{3}r^2\right) d^3x$$

こうして Ɨ_{jk} 記号は文献に存在する曖昧さを回避する価値をもつ．

*4 電磁気的な放射は支配的に双極子（調和関数の添字 $l = 1$）であり，そして重力放射は四重極子（$l = 2$）であるということは，一般的な定理の結果である．古典的な放射場を考え，その関連した量子力学的な粒子は整数スピン S をもち静止質量がゼロであるとする．その放射場を調和関数に，すなわち，多重極モーメントに分解せよ．$l < S$ をもつすべての成分はゼロになるだろう．一般に $l \geq S$ をもつ成分はゼロにならないだろう．そしてこれは源の性質によらない！［たとえば，Couch and Newman（1972）をみよ］．最低のゼロでない多重極はゆっくり動く源（速さ $\ll c$）に対して一般に支配的であるから，電磁気的な放射（$S = 1$）は，ふつうは双極子（$l = S = 1$）である．他方重力的な放射（$S = 2$）は，ふつうは四重極子（$l = S = 2$）である．この定理と，スカラー場，ベクトル場，およびテンソル場との間を区別する，“トポロジー的な固定点定理”［たとえば，Lifshitz（1949）］が密接に結びついている．圧力波のようなスカラー摂動に対しては，球対称な源をもつことに問題はない．こうして，大きい半径 r の球にわたって，任意の 1 つの時間に，いたるところで同じ値 p をとる圧力場をもつことに問題はない．対照的に，2–球の表面上にゼロでなくいたるところで同じ大きさの連続なベクトル場を置く方法は存在しない（“ビリヤード球の表面上に髪を梳く方法はない”）．同様に，2–球の表面上に 1 点から別な点へせいぜい回転によって異なる，連続なゼロでない横方向のゼロ–トレース 2×2 行列場を置く方法は存在しない．トポロジーは，こうして，重力放射のいかなる球対称な源は何でも，その可能性を排除する．

*4　重力波はふつう四重極波である理由

36.2　内部勢力の流れによって放射される勢力

勢力の出力に対する表現 (36.1) は，大きさの程度の評価について，より容易に用いられる形に書き直すことができる．既約化四重極モーメントは

$$\dddot{I}_{jk} \sim \frac{(\text{動いている系の部分の質量}) \times (\text{系の大きさ})^2}{(\text{質量が系の 1 つの側から他の側へ動く時間})^3} = \frac{MR^2}{T^3}$$

$$\sim \frac{M(R/T)^2}{T} \sim \frac{(\text{運動エネルギーの球状でない部分})}{T},$$

$$\dddot{I}_{jk} \sim L_{\text{内部}} \equiv (\text{系の 1 つの側から他の側へ流れる勢力}) \tag{36.4}$$

*5 であることに注意せよ．したがって，式 (36.1) は，**重力波についての勢力の出力（“光度”）は大ざっぱに内部勢力の流れの 2 乗である**ことを述べている．

$$L_{\text{GW}} \sim (L_{\text{内部}})^2 \tag{36.5}$$

もしこの式が馬鹿げているようにみえるならば（馬鹿者以外の誰が勢力を勢力の 2 乗に等しいとおくだろうか?)，幾何学化された単位で勢力は次元をもたないことを思い出せ．通常の単位への変換因子は

$$L_0 \equiv c^5/G = 3.63 \times 10^{59}\,\text{erg/sec} = 2.03 \times 10^5 M_{\odot} c^2/\text{sec} \tag{36.6}$$

である．

式の外観をよりよくするために，希望する場合はいつでも $L_0 = 1$ というこの因子を自由に挿入してよいだろう．たとえば，式 (36.5) を

$$L_{\text{GW}}/L_{\text{内部}} \sim L_{\text{内部}}/L_0 \tag{36.7}$$

の形式に書き直すことができる．

式 $L_{\text{GW}} \sim (L_{\text{内部}})^2$ を適用するときには，まったく放射できない内部勢力の流れ，すなわち，時間的に変化する四重極モーメントに伴わないものを注意深く無視しなければならない．たとえば，星においては，球状の脈動および軸対称な回転と関連する内部勢力の流れは無視されなければならない．

エネルギーの保存は，重力波がエネルギーを運び去るのと同じ割合で，放射反応は系の

*6 内部エネルギーを引き下げる（コラム 19.1 をみよ）ことを保証する．放射反応が系を著しく変える特徴的な時間スケールは，

$$\begin{aligned}\tau_{\text{反作用}} &\sim [1/(\text{エネルギーが失われる割合})] \times [\text{放射する運動におけるエネルギー}] \\ &\sim [1/L_{\text{GW}}] \times [(L_{\text{内部}}) \times (\text{内部運動の特徴的な周期 } T] \\ &\sim (L_{\text{内部}}/L_{\text{GW}})T \sim (L_0/L_{\text{内部}})T\end{aligned} \tag{36.8}$$

*5　源の内部勢力の流れによる重力波の勢力の出力

*6　放射反応の効果に対する特徴的な時間スケール

である．したがって**放射反応は，系が巨大な内部勢力の流れを達する場合に限り，1 つの特徴的な周期において重要である．**

$$L_{\text{内部}} \gtrsim L_0 = 3.63\times 10^{59}\,\text{erg/sec} = 1\,!$$

36.3 重力波の実験室での生成

*7 重力波の実験室での生成として，半径 $r = 1\,\text{m}$，長さ $l = 20\,\text{m}$，密度 $\rho = 7.8\,\text{g/cm}^3$，質量 $M = 4.9\times 10^8\,\text{g}$ (490 ton)，および張力の強さ $t = 40{,}000$ ポンド/(インチ)^2 あるいは $3\times 10^9\,\text{dyne/cm}^2$ の重いはがね角材を考える．角材をその中央の周りに回転させる（したがって角材は端から端まで回転する）．角速度 ω は遠心力と張力の強さとの間の平衡によって制限される．

$$\omega = (8\text{t}/\rho l^2)^{1/2} = 28\,\text{rad/sec}$$

内部勢力の流れは

$$L_{\text{内部}} = \left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)\omega = \frac{1}{24}Ml^2\omega^3$$
$$\approx 2\times 10^{18}\,\text{erg/sec} \approx 10^{-41}L_0$$

である．放射される勢力の大きさの程度は

$$L_{\text{GW}} \sim (10^{-41})^2 L_0 \sim 10^{-23}\,\text{erg/sec} \tag{36.9}$$

である［式 (36.1) を用いる厳密な計算は $2.2\times 10^{-22}\,\text{erg/sec}$ を与える，練習問題 36.1 をみよ］．明らかに重力放射の実験室での生成の構成は，新しい技術あるいは新しいアイデアあるいは両方が存在しないときには魅力のない企てである．

天体物理学的な源に期待すること，および実験室での探知機あるいは太陽系での探知機を建設することは考慮すべき自然な方策である．探知は次章で議論されるだろう．ここでは天体物理学的な源に注目しよう．

［**練習問題**］

36.1　回転している角材からの重力波

長さ l および質量 M の長い鋼鉄の角材が角速度 ω で端から端まで回転する．この角材が重力波として放射する勢力は

$$L_{\text{GW}} = \frac{2}{45}M^2 l^4 \omega^6 \tag{36.10}$$

*7　回転しているはがね角材からの勢力の出力

であることを示せ．この公式を用いて本文中に記述されている棒は 2.2×10^{-22} erg/sec を放射することを確かめよ．

36.4 重力波の天体物理学的な源：一般的な議論

高度に力学的な天体物理学系（脈動し乱雑に回転している星，あるいは崩壊している星，あるいは爆発している星，あるいは多くの星の混沌とした系）を考える．もしその質量が M でその大きさが R であるならば，ビリアル定理（練習問題 39.6）によってその運動エネルギーは $\sim M^2/R$ である．質量が系の 1 端から他端まで動く特徴的な時間スケール，T は

$$T \sim \frac{R}{(\text{平均速度})} \sim \frac{R}{(M/R)^{1/2}} = \left(\frac{R^3}{M}\right)^{1/2} \tag{36.11a}$$

（$\sim$ 自由落下の時間，$\sim$Kepler の軌道において 1 rad 回転する時間，25 章をみよ）．したがって，内部勢力の流れは

$$L_{\text{内部}} \sim \frac{(\text{運動エネルギー})}{T} \sim \left(\frac{M^2}{R}\right)\left(\frac{M}{R^3}\right)^{1/2} \sim \left(\frac{M}{R}\right)^{5/2} \tag{36.11b}$$

*8 重力波の出力あるいは “光度” はこの量の 2 乗である，あるいは

$$L_{\text{GW}} \sim (M/R)^5 L_0 \tag{36.11c}$$

（もし系が幾分対称的であるならば，あるいは質量の小さい部分のみが運動している場合に限り，系の四重極モーメントはあまり変化しない．そして L_{GW} の評価はそれに応じて減少されなければならない．波の振幅は運動している質量の割合に比例して下落する．そして勢力はその割合の 2 乗に比例して減少する）．

明らかに，**系が重力半径の近くにあるとき，最大出力が生ずる**．そして何ものも，重力

*9 波さえも，重力半径の内部から逃れることができないから，**出力の最大値は系の性質にかかわらず，$\sim L_0 = 3.63\times10^{59}$ erg/sec である！**

実際，この極限および式 (36.11c) の上述の導出は，重力半径の近くで破れる一般相対論への近似を用いている［光に比べて小さい速度は，L_{GW} に対する標準的な公式 (36.1) を導くときに要求される（36.7 節をみよ）．ほとんど Newton 的な場は式 (36.11a) のビリアル定理の議論に対して，L_{GW} 公式に対するのと同様に要求される］．にもかかわらず，大ざっぱな大きさの程度について，式 (36.11c) は Schwarzschild 半径に非常に近いところ，たとえば，$R \sim 3M$ まで成り立つ．そしてその点の内部で重力は非常に強いので，系は $T \sim M$ よりもはるかに長い時間の有効距離に対して崩壊に抵抗することができない．

---

*8 質量と半径の観点からの，激しい天体物理学的な源からの出力

*9 出力に関する上限

*10　　放射反応の力が系に実質上影響するに要する時間 (36.8) は

$$\tau_{\text{反応}} \sim (L_0/L_{\text{内部}})T \sim (R/M)^{5/2}T \tag{36.11d}$$

の程度である．ここに T は回転あるいは自由落下の特徴的な時間である [式 (36.11a)]（いかにして因子 $L_0 = 1$ を，意のままに挿入したり取り除いたりするかに注意せよ!）．したがって，**放射反応の影響は，1 周期にわたって積分されると，系が重力半径の近くにあるときを除いて重要でない．**

脈動している星のような系が平衡状態に落ち着くときには，放射反応はその内部運動を減衰させるだろう．他方系が，連星系のように，任意の平衡状態から離れているときには，ある状況のもとでの放射によるエネルギー（および角運動量）の損失は角速度あるいは内部運動を速めそして放射を増加させるだろう．

36.5　重力崩壊，ブラックホール，超新星，および源としてのパルサー

*11　　$L_{\text{GW}} \sim (M/R)^5 L_0$ であるから，地球に到達するもっとも激しい重力波は，重力半径に近い力学的な，変形された系から来なければならない（L_{GW}は R が 10 倍増大するごとに因子 100,000 だけ落下する!）．図 24.3 のシナリオは，起こるかもしれないばかりでなくおそらく起こるに違いない力学的な過程の若干の印象を与える．そこでスケッチされている事象の連続は，徐々に増大する振動数の連続的な放射の間隔で遮断されている重力放射のパルスを含んでいる．パルス No.1 は，星が最初に崩壊して白色わい星の中核がパンケーキ型の中性子星になるときに来る．そのときに生ずることの詳細は，この“パンケーキ”の元の質量および角運動量に依存して並外れて大きく異なるだろう．たとえば，このパンケーキはばらばらになって中核が展開する中性子星の一団になり，それから 1 個ずつに“追跡と激突”を受ける．

この種のシナリオあるいは別なシナリオで，ひょっとすると重力放射のもっとも有望な源は，高度に球状でない仕方で重力半径を通って崩壊する星（元の非常に一時的な“パンケーキ”あるいはその破片の 1 つ）であるかどうか．このような星は最後に重力波を爆発させて，その重力波が星の静止質量のかなり大きい割合を奪い去って一生を終わるはずである．こうして大きさの程度の評価は

$$\begin{aligned}(\text{放射されるエネルギー}) &= \int L_{\text{GW}}\,dt \sim L_0 \cdot \begin{pmatrix}\text{ピークの光度が}\\ \text{生ずる間の時間}\end{pmatrix} \\ &\sim L_0 M = M\end{aligned} \tag{36.12}$$

を与える（放射されるエネルギーが $0.9M$ であるか，あるいは $0.1M$ であるか，あるいは $0.01M$ であるかどうかは今日確実には知られていない．しかしそれはこの程度の大きさの

*10　天体物理学的な源における放射反応
*11　重力波の源：(1) 星の崩壊とブラックホールの形成

領域に存在しなければならない)．放射は，低い振動数で弱いはずである．それは $1/M$ よりわずかに小さい振動数でピークになり，そして $\omega \sim 1/M$ 以上の円振動数に対して鋭くなくなるはずである．

*12 ブラックホールへ落下する物質（“岩屑”，図 24.3 をみよ）もまた重力波の重要な源でありうる．落下する物質は，重力半径から離れているときには弱々しく放射するに過ぎないだろう．しかし重力半径を通って落下するときには（$r \sim 4M$ と $r = 2M$ の間)，爆発的に放射するはずである．もし m が落下する物質の塊の質量であり，M がブラックホールの全質量であるならば，最終の爆発における全エネルギーは

$$E_{\text{放射された}} \sim m^2/M \tag{36.13}$$

である．そしてこの爆発は時間 $\sim M$ 内に $L_{\rm GW} \sim (m/M)^2 L_0$ の出力で起こる（練習問題 36.2 をみよ)．実際，これはエネルギー出力の極端に大ざっぱな評価である．落下する塊が大きさおよび質量ともに小さい極限では［(塊の大きさ）$\ll$（ブラックホールの重力半径)，$m \ll M$，“デルタ関数的な塊”]，塊および波をブラックホールの Schwarzschild 幾何学に対する小さい摂動として取り扱うことによって，放射されるスペクトルとエネルギーの厳密な計算を遂行できる．このような取り扱いに対する基礎は Zerilli（1970b）によって与えられた．Zerilli の公式は Davis, Ruffini, Press, and Price（1971）によって訂正され，そして正面衝突の場合に適用された．彼らは，$m \ll M$ および（塊の大きさ）$\ll M$ に対して図 36.2 のスペクトルおよび全エネルギーの出力

$$E_{\text{放射された}} = 0.0104\, m^2/M \tag{36.14}$$

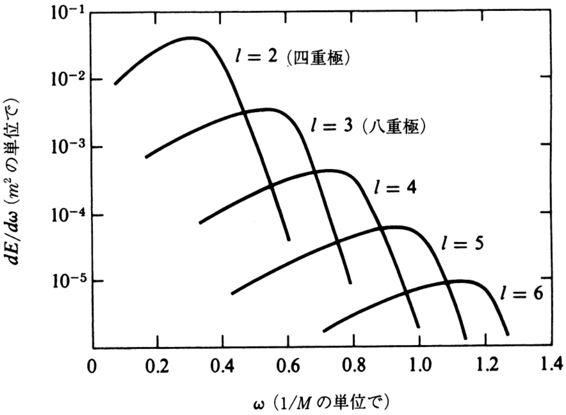


図 36.2 質量 $M \gg m$ の非回転の（Schwarzschild）ブラックホールに正面から落下する，質量 m の物質の“デルタ関数”的な塊によって放出される重力波のスペクトル．放射される全エネルギーは経験則

$$(l \text{ 極波のエネルギー}) \approx (0.44\, m^2/M)e^{-2l}$$

によって多重極内で分布する．そして全スペクトルは角振動数

$$\omega_{\text{最大}} = 0.32/M$$

で最高点に達する．これらの結果は落下してくる塊と重力波を，ブラックホールの Schwarzschild 幾何学についての小さい摂動として取り扱うことによって計算された．関連した摂動理論の方程式は Zerilli（1970）によって導かれた．そして Davis, Ruffini, Press, and Price（1971）によって数値的に解かれこれらの結果を与えた．

*12 (2) ブラックホールへの岩屑の落下

を予言する．

*13　ブラックホール間の衝突もまた重力波の強い爆発を生み出すはずである．このような衝突はおそらく非常にまれであるけれども！

*14　それほどまれではないが，依然としてふつうでないのは，超新星爆発である（100 年あたり，銀河あたり，約 1 個）．現在の理論によれば，パルサーの観測によって確認されているように，超新星は高度に進化した星の中核の崩壊によって始まる（24.3 節をみよ）．崩壊自身およびそれに続く，崩壊した中核（中性子星）の乱雑な回転は重力波の短い，力強い爆発を生み出すはずである．爆発の特徴は，公式 (36.11) で評価されているように，そして球状からの大きいずれを仮定して，

$$
\begin{aligned}
&(\text{放射されるエネルギー}) \sim (\text{中性子星の結合エネルギー})\\
&\qquad\qquad \sim M^2/R \sim 0.1M \sim 10^{53}\,\mathrm{erg},\\
&(\text{平均振動数}) \sim 1/T \sim (M/R^3)^{1/2} \sim 0.0.M^{-1} \sim 3{,}000\,\mathrm{Hz}, \qquad (36.15)\\
&(\text{勢力の出力}) \sim (M/R)^5 L_0 \sim 10^{-5} L_0 \sim 3\times 10^{54}\,\mathrm{erg/sec},\\
&\left(\begin{array}{l}\text{もし動乱, 熱伝導, および他の}\\ \text{効果が運動をあまり速く減衰}\\ \text{させないとしたとき, 重力放}\\ \text{射が運動を減衰させる時間}\end{array}\right) = \tau \sim M(M/R)^{-4} \sim 0.1\,\mathrm{sec} \sim 300\,\text{周期}
\end{aligned}
$$

星の脈動の最終段階で，振幅 $\xi = \delta r$ が $\delta r/r \ll 1$ に落下したとき，流体の運動および重力波を平衡状態の星の模型の小さい摂動として取り扱うことによって，脈動振動数および減衰時間を厳密に計算することができる．このような計算の結果は，上述の大ざっぱな評価とよく一致し，コラム 36.1 に示されている．

コラム 36.1　脈動している中性子星からの重力波

ここに与えられている表，Thorne (1969a) からとられている，は若干の代表的な中性子星の模型の四重極振動の種々の特徴を示している．もっとも重い模型によって放出される重力波は，(1) 振動数 $\nu = 1/T_n \sim 3{,}000$ Hz をもつ，(2) $\sim\frac{1}{3}$ 秒の時間続く，(3) ~1,000 振動だけの後に星の振動を減衰させる，(4) $\sim(10^{54}\,\mathrm{erg})\times(\delta R/R)^2$ の全エネルギーを運び去る．ここに $\delta R/R$ は星の表面の振動の振幅に対する最初の割合である．

これらの結果は，本章のほとんど Newton 的な遅い運動の形式に基づいていない [式 (36.1)，36.7 および 36.8 節]．なぜならその形式はここでは成り立たないからである．もっとも重い星からの波に対する放射の既約波長，$\lambda \sim 15$ km は，星の重力半径，$2M \sim 6$ km に比べて大きくない．そして星の内部重力場は弱くない（0.29 ほど大きい M/R）．したがって，これらの結果は別の方法を用いて導かれた．それは素早い運

*13　(3) ブラックホールの衝突
*14　(4) 超新星爆発

動と強い内部場に対して成り立つが，平衡状態の星の模型からの小さい摂動を仮定している．詳細に対しては Thorne (1969a) およびそこに引用されている文献をみよ．

中性子星の四重極脈動

状態方程式	ρ_c (g cm^{-3})	$M/M_\odot$	$2M/R$	n	T_n (msec)	τ_n (sec)	τ_n/T_n	$\frac{E_M}{\langle(\delta R/R)^2\rangle}$ (erg)	$\frac{\text{勢力}}{\langle(\delta R/R)^2\rangle}$ (erg sec^{-1})	$\frac{(\delta R/R)}{(\delta r/r)_c}$	$\delta\theta_s/\delta\theta_c$
H–W	3×10^{14}	0.405	0.0574	0	1.197	13.	11,000	7.8×10^{50}	1.2×10^{50}	+7.4	+3.1
H–W	6×10^{15}	0.682	0.240	0	0.3109	0.19	610	2.8×10^{52}	2.9×10^{53}	+5.2	+3.7
				1	0.1713	0.28	1,600	3.6×10^{51}	2.6×10^{52}	−14.0	−3.3
				2	0.1179	1.3	11,000	2.6×10^{50}	3.9×10^{50}	+55.0	+5.9
				3	0.0938	24.0	250,000	8.9×10^{48}	7.0×10^{47}	−350.0	−24.0
V_γ	5.15×10^{14}	0.677	0.159	0	0.6991	1.7	2,400	5.7×10^{52}	7.0×10^{52}	+1.4	+1.3
				1	0.2358	11.0	47,000	6.0×10^{50}	1.1×10^{50}	−38.0	−4.7
V_γ	3×10^{15}	1.954	0.580	0	0.3777	0.22	600	1.7×10^{54}	1.6×10^{55}	+1.9	+3.1
				1	0.1556	1.6	10,000	1.5×10^{54}	1.9×10^{54}	−2.1	−0.66
				2	0.1026	2.6	25,000	5.2×10^{53}	4.0×10^{53}	+2.9	+0.40

表の列は以下の意味をもつ．

状態方程式：平衡な星の模型を構成し，そして断熱的な添字を $\gamma = [(\rho+p)/p]dp/d\rho$ から計算するときに用いられる状態方程式 $p(\rho)$，H–W は Hartle and Thorne (1968) の表 1 によって与えられている表形式における Harrison–Wheeler 状態方程式である．V_γ は Hartle and Thorne (1968) の表 2 に与えられている表形式における Levinger–Simmons–Tsruta–Cameron V_γ 状態方程式である．

ρ_c：平衡な星の模型に対する全質量–エネルギーの中心密度．

$M/M_\odot$：太陽質量の単位での，平衡模型の全質量–エネルギー（すなわち，遠い Kepler 軌道を支配する質量）．

$2M/R = 2GM/Rc^2$：平衡模型の重力半径の実際の半径（半径は $4\pi R^2 =$ 表面積によって定義されている）に対する比．

n：研究されている脈動規準モードの "次数"（ここで与えられているすべてのモードに対して，n はまた半径方向の相対的な固有関数，$\delta r/r$ における節（ふし）の数である）．**注意**：$n = 0$ は基本（四重極）モードである．

$T_n = 2\pi/\omega_n$：ミリ秒で測定された準規準モードの脈動周期．

τ_n：秒で測定された規準モードの振幅に対する減衰時間．

$\tau_n/T_n = \omega_n\tau_n/2\pi$：振幅が $1/e$ の因子だけ落ちるに要する脈動周期の数．

$E_M/\langle(\delta R/R)^2\rangle$：星の表面にわたって平均された，星の表面の半径方向の運動の相対的な振幅の平均化された 2 乗によって割られた，星の脈動エネルギー．

勢力$/\langle(\delta R/R)^2\rangle$：星表面の相対的な振幅の 2 乗を星表面で平均化したもので割られた，重力波として放射される勢力．

$(\delta R/R)(\delta r/r)_c{}^{-1}$：星の中心での相対的な振幅によって割られた，星の表面での半径方向の運動の相対的な振幅．

$\delta\theta_s/\theta_c = \delta\phi_s/\delta\phi_c$：星の中心での同じ振幅によって割られた，表面における星の流体の角変位の振幅．

*15　中性子星の脈動が，重力放射の反応によっておよび他の力によって減衰されてしまった後長く，星は回転し続けるだろう．そして星は回転するとき，軸以外の方向を指し示す磁気モーメントを回転に伴って，電波，光，および X 線を送るだろう．これらを天文学者は "パルサー放射" と同定する．このパルサーの位相では，星が軸対称からいくらか変形されている場合に限り重力放射は重要である（軸対称 ⇒ 一定の四重極モーメント ⇒ 重力波は存在しない）．練習問題 36.3 における評価によれば，星の質量の 0.001 だけを含む変形は，知られているもっとも若いパルサー（かに星雲）に対して秒あたり 10^{38} erg を放射するだろう．そしてそれに伴う放射反応はパルサーの減衰の重要な源になるだろう．しかし，それは今日（1973）まったくは明らかでない．実際，中性子星がそれほど小さい変形を保持できるということはありそうもないようにみえる．

本節で議論された源の中で，たいていは連続よりもむしろ "衝動的" である（重力半径を通って崩壊する星，ブラックホールに落下する岩屑，ブラックホール間の衝突，超新星爆発）．それらは重力波の爆発を生ずる．このような爆発を解析する，大きさの程度の方法はコラム 36.2 に詳しく説明されている．

重力波を生成すべき過程についての上述の記述から，地球を実際に覆う波の特徴の評価を行うことは困難であり危険である．1972 年になされ，宇宙の理解が進歩するにつれて広大な改訂を受けるこのような評価に対しては，Press and Thorne（1972）をみよ．

コラム 36.2　衝動的な事象* からの放射の爆発の解析

	電磁気	重力
放射に重要な代表的なモーメント	$d_x(t)$	$\text{\sout{I}}_{xx}(t)$
Fourier 変換	$(2\pi)^{-1/2}\int d_x \exp[i\omega t]dt$	$(2\pi)^{-1/2}\int \text{\sout{I}}_{xx} \exp[i\omega t]dt$
この量に対する名前	$d_x(\omega)$	$\text{\sout{I}}_{xx}(\omega)$
全放射エネルギー損失 ΔE の時間分解	$c^{-3}\int \ddot{d}^2(t)dt$	$Gc^{-3}\int \dddot{\text{\sout{I}}}^2(t)\,dt$
円振動数による ΔE の分解	$c^{-3}\int \ddot{d}^2(\omega)d\omega$	$Gc^{-5}\int \dddot{\text{\sout{I}}}^2(\omega)\,d\omega$

*15　(5) 若いパルサー

$\omega = 0$ から ω の臨界値，それを越えると放射が急速に落下する，ω についてほとんど一定の被積分関数	$\omega_{臨界} \sim 1/\Delta t$	$\omega_{臨界} \sim 1/\Delta t$
$\omega < \omega_{臨界}$ に対する $-d\Delta E/d\omega$	$\sim c^{-3}\ddot{d}^2(0)$	$\sim Gc^{-5}\,\dddot{I}^2(0)$
この公式に入るゼロ振動数モーメント	$\sim (e_1\,\Delta v_{x1} + e_2\,\Delta v_{x2})$	$\Delta(\langle\langle$運動エネルギー$\rangle\rangle)_{xx}$
$-d\Delta E/d\omega$ の書き直し	$\sim (e\,\Delta v)^2/c^3$	$\sim G[\Delta(\langle\langle K.E.\rangle\rangle)_{xx}]^2/c^5$
パルスの全エネルギー	$\sim$ This$/\Delta t$	$\sim$ This$/\Delta t$

* Wheeler (1962) の p.113 および 114 から採用されたコラム

この解析の見本の応用として，Wheeler（1962）は以下を引用する．

パラメータ	**180 MeV の原子核分裂**	**原子爆弾は 10% の効率で 17 kton を生ずる**	**脱出速度で地球に衝突する隕石**	**質量の 10^{-4} が解放されるときの星の爆発**
質量	4×10^{-22} g	10^4 g	10^9 g	2×10^{33} g
速度	1.2×10^9 cm/sec	4×10^8 cm/sec	11×10^5 cm/sec	4×10^8 cm/sec
エネルギー	2.9×10^{-4} erg	7×10^{20} erg	6×10^{20} erg	1.8×10^{50} erg
放射モーメントに適切と仮定される割合	1	0.1	1	0.1
このモーメントの時間積分 $=\langle\langle K.E.\rangle\rangle_{xx}$	2.9×10^{-4} erg	7×10^{19} erg	6×10^{20} erg	1.8×10^{49} erg
$\langle\langle K.E.\rangle\rangle_{xx}/c^2$	3.2×10^{-25} g	0.08 g	0.67 g	2×10^{28} g
$\frac{dE}{d\omega}\sim\frac{G}{c}\left(\frac{\langle\langle K.E.\rangle\rangle_{xx}}{c^2}\right)^2$	$2.3\times10^{-67}\frac{\text{erg}}{\text{rad/sec}}$	$1.4\times10^{-20}\frac{\text{erg}}{\text{rad/sec}}$	$1.0\times10^{-18}\frac{\text{erg}}{\text{rad/sec}}$	$9\times10^{38}\frac{\text{erg}}{\text{rad/sec}}$
Δt	10^{-21} sec	10^{-8} sec	10^{-3} sec	10^4 sec
$\Delta\omega\sim1/\Delta t$	10^{21} rad/sec	10^8 rad/sec	10^3 rad/sec	10^{-4} rad/sec
$\Delta E_{放射された}$	10^{-46} erg	10^{-12} erg	10^{-15} erg	10^{35} erg
探知機までの仮定された距離	10^3 cm	10^3 cm	10^9 cm	10^{26} cm
$\Delta E/4\pi r^2$	10^{-53} erg/cm^2	10^{-19} erg/cm^2	10^{-34} erg/cm^2	10^{-12} erg/cm^2

読者はこの表を拡張して，(1) ブラックホールに落下する岩屑，(2) 2 個のブラックホール間の衝突，および (3) 2 個の太陽質量の星が過程で質量の半分を吐き出し，核密度まで崩壊する超新星爆発，によって放出される波の爆発の知識を見出すだろう．

［練習問題］

36.2　ブラックホールへ落下する物質からの重力波

質量 m をもつ物質の塊が質量 M のブラックホールに落下する．重力波の爆発は継続期間 $\sim M$ および勢力 $\sim L_{\mathrm{GW}} \sim (m/M)^2 L_0$ で放出されるので，放射される全エネルギーは，式 (36.13) によって大ざっぱな大きさの程度が与えられることを示せ．

36.3　振動している中性子星からの重力波

中性子星を，Newton の重力の法則によって支配される構造をもつ，質量 M および半径 R の非圧縮性流体の球として理想化せよ．星は基本四重極モードで脈動するとせよ．Newton の理論を用いて以下の量を計算せよ．脈動の角振動数 ω，脈動のエネルギー $E_{\text{脈動}}$，量 $\frac{1}{5}\langle \dddot{I\!\!\!-}^{2} \rangle$．これは式 (36.1) によれば，重力波として放射される勢力，L_{GW} である．そして脈動のエネルギーを放射し去ることについては，$1/e$ 倍になる時間は，$\tau = E_{\text{脈動}}/L_{\mathrm{GW}}$ である．答えを，式 (36.15)—それははるかに大ざっぱな近似に基づいている—およびコラム 36.1 における結果，それははるかに良い近似に基づいている，と比較せよ［解に対しては，Wheeler（1966）の表 13 をみよ］．

36.4　パルサーの減衰

かに星雲内のパルサー NPO532 は 0.033 秒の周期をもち，$dP/dt = 1.35 \times 10^{-5}$ sec/yr の割合で減衰している．パルサーは代表的な中性子星であると仮定して，それが回転エネルギーを失いつつある割合を計算せよ．もしこのエネルギー損失がおもに重力放射反応によるならば，星の軸方向でない変形の大きさはどれほどであるか？［解に対しては，Ferrari and Ruffini（1969）をみよ．厳密な強い場の解析に対しては，Ipser（1970）をみよ］．

36.6　源としての連星

*16　弱い重力波を出すもっとも多数の源は連星系である．さらにすべての星の大ざっぱにいって半分は，連星あるいは多重系である［たとえば，Allen（1962）をみよ］．Kepler の法則によれば，互いに他の周りをまわる，質量 m_1 および m_2 の 2 個の星は角振動数 ω と間隔 a をもち，それらは公式

$$\omega^2 a^3 = m_1 + m_2 \equiv M$$

によって互いに結合している．この運動で運動エネルギーは

$$(\text{運動エネルギー}) = -\frac{1}{2}(\text{ポテンシャルエネルギー}) = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{a}$$

---

*16　重力波の源としての連星

である．それらが重力波として放射する勢力は回転している勢力，$L \sim \omega \times$ (運動エネルギー) の 2 乗として大ざっぱに評価することができる．こうして，

$$L_{\mathrm{GW}} \sim \frac{\mu^2 M^3}{4a^5} L_0$$

ここに $\mu = m_1 m_2 / M$ はよく知られた既約質量であり，そして $M = m_1 + m_2$ はこの連星系の全質量である．

式 (36.1) に基づいた**厳密**な計算は，これよりも因子 ~ 30 だけ大きい結果を与える．長半径 a，離心率 ε の連星系に対しては，軌道周期にわたって平均された出力は

*17

$$L_{\mathrm{GW}} = \frac{32}{5} \frac{\mu^2 M^3}{a^5} f(\varepsilon) L_0 \tag{36.16a}$$

である．ここに $f(\varepsilon)$ は次元をもたない "補正関数"，

$$f(\varepsilon) = \left[1 + \frac{73}{24}\varepsilon^2 + \frac{37}{96}\varepsilon^4\right] [1 - \varepsilon^2]^{-7/2} \tag{36.16b}$$

である［36.8 節の終わりにある練習問題 36.6 をみよ，また Peters and Mathews (1963) をみよ］．

*18

連星系が重力放射によってエネルギーを失うにつれて，2 個の星は互いに他の方にらせん状に進む（エネルギーの減少，重力的な結合の締まり）．円軌道に対してはエネルギー，$E = -\frac{1}{2} m_1 m_2 / a = -\frac{1}{2} \mu M / a$ は，

$$\begin{aligned} dE/dt &= (1/2)(\mu M / a^2)(da/dt) \\ &= -L_{\mathrm{GW}} = -\frac{32}{5} \frac{\mu^2 M^3}{a^5} \end{aligned}$$

として減少する．したがって，軌道半径の発展は公式

$$a = a_0 (1 - t/\tau_0)^{1/4} \tag{36.17a}$$

によって与えられる．ここに $a_0 = a_{今日}$ そして

$$\tau_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{-E}{L_{\mathrm{GW}}} \right)_{今日} = \frac{5}{256} \frac{a_0^4}{\mu M^2} \tag{36.17b}$$

こうして，重力以外の力が介入しなければ，2 個の星は時間 τ_0（**らせん時間**）で互いにらせん状になるだろう．楕円軌道については，離心率もまた変化する．放射はおもにペリアストロン（periastron）で放出される．したがって放射の制動力はそこで最大の力で作用する．この効果はそれぞれの星の間隔の往復運動の運動エネルギー（"半径方向の運動エネルギー"）のいくらかを星から奪う．したがって，軌道はほとんど円形になる［詳細な計算については Peters and Mathews (1963) をみよ］．

---

*17 (1) 勢力の出力
*18 (2) 放射反応の効果

*19　計算された出力，地球での束，そして減衰時間は，いくつかの知られている連星およびいくつかの興味ある仮説的な場合に対して，コラム 36.3 で示されている．知られている場合でもっとも都合のよいものの周期は，数時間であることに注意せよ．減衰時間は宇宙の年齢であり（よりよい場合が存在しないのは，放射反応がそのような場合を破壊してしまったことによるのだろうか?），重力波の形での出力は $\sim 10^{30}$ から 10^{32} erg/sec である（太陽の光の出力，3.9×10^{33} erg/sec に近づいている），そして計算された地球での束は $\sim 10^{-10}$ から 10^{-12} erg/sec である（1973 年では探知するには小さすぎる．しかしおそらく数十年後には小さすぎないかもしれない．37 章をみよ）．

コラム 36.3　いくつかの連星系[a] からの重力放射

系の型	名前	周期	$\frac{m_1}{M_\odot}$	$\frac{m_2}{M_\odot}$	地球からの距離 (pc)	らせん状の時間[b]	L_{GW} (erg/sec)	地球での束 (erg/sec cm^2)
太陽系 (太陽 + Jupiter)	太陽系	11.86 yr	1.0	9.56×10^{-4}	地球は近い領域内にある	2.5×10^{23} yr	5.2×10^{10}	—
Van de Kamp (1958) 編集からの代表的な解像された連星	η Cas	480 yr	0.94	0.58	5.9	9.5×10^{24}	5.6×10^{10}	1.4×10^{-29}
	ξ Boo	149.95 yr	0.85	0.75	6.7	3.8×10^{23}	3.6×10^{12}	6.7×10^{-28}
	Sirius	49.94 yr	2.28	0.98	2.6	7.2×10^{21}	1.1×10^{15}	1.3×10^{-24}
	Fu 46	13.12 yr	0.31	0.25	6.5	3.2×10^{21}	3.6×10^{14}	7.1×10^{-26}
Gaposhkin (1958) 編集からの代表的な食になる連星	β Lyr	12.925 day	19.48	9.74	330	7.0×10^{11}	0.057×10^{30}	0.0004×10^{-11}
	UWCMa	4.395 day	40.0	31.0	1470	8.2×10^{9}	$49. \times 10^{30}$	0.019×10^{-11}
	β Per	2.867 day	4.70	0.94	30	3.2×10^{11}	0.014×10^{30}	0.013×10^{-11}
	WUMa	0.33 day	0.76	0.57	110	6.2×10^{9}	0.47×10^{30}	0.032×10^{-11}
Braginsky (1965) 編集からの好的な場合	UV Leo	0.6 day	1.36	1.25	68	1.0×10^{10}	0.63×10^{30}	0.012×10^{-11}
	V Pup	1.45 day	16.6	9.8	390	2.3×10^{9}	$65. \times 10^{30}$	0.36×10^{-11}
	i Boo	0.268 day	1.35	0.68	12	2.0×10^{9}	3.2×10^{30}	$18. \times 10^{-11}$
	YY Eri	0.321 day	0.76	0.50	42	6.6×10^{9}	0.42×10^{30}	0.20×10^{-11}
	SW Lac	0.321 day	0.97	0.83	75	3.5×10^{9}	1.5×10^{30}	0.21×10^{-11}
	WZ Sge	81 min	0.6	0.03	100	1.1×10^{9} yr	0.5×10^{30}	0.04×10^{-11}
仮説的な連星（中性子星あるいはブラックホール）	10^4 km	12.2 sec	1.0	1.0	1000	3.2 yr	3.25×10^{41}	2.7×10^{-3}
	10^3 km	0.39 sec	1.0	1.0	1000	2.8 hr	3.25×10^{46}	2.7×10^{2}
	10^2 km	12.2 msec	1.0	1.0	1000	1.0 sec	3.25×10^{51}	2.7×10^{7}
	10 km	0.39 msec	1.0	1.0	1000	0.10 msec	3.25×10^{56}	2.7×10^{12}

[a] Braginsky (1965) および Ruffini and Wheeler (1971b) による表に基づいている．
[b] らせん状の時間，τ_0 は式 (36.17b) によって与えられているように，もし非重力的な力が介入しないならば，2 個の星が互いに他に対してらせん状になる時間である．

コラム 36.3 における仮説的な場合は 36.4 節に導かれた，天体物理学系の一般的な関係を例示する．すなわち，系が重力半径に近づくときに限って L_{GW} は L_0 に近づくことができる．そしてそのときのみ，減衰はただ 1 つの周期でほとんど全エネルギーを取り除く．

*19　(3) 天文学者によって観測される特別な連星

36.7 ほとんどNewton的で遅い運動源からの放射に対する公式

今や，実例となる天体物理学的な源から，広い範囲の源に対して成り立つ厳密な公式を考えよう．このような公式の 1 つはすでに書き下ろされている．

$$L_{\rm GW} = \frac{1}{5}\langle \dddot{I}_{jk}\,\dddot{I}_{jk}\rangle, \qquad 式\,(36.1)$$

しかしそれはいまだ導かれていないし，また妥当性の領域が議論されていない．

*20 出力に対するこの公式は，実際任意の "ほとんど Newton 的な，遅い運動源"—より特別に，

$$(源の大きさ)/(波の既約波長) \ll 1 \tag{36.18a}$$

$$|\text{Newton 的なポテンシャル}| \ll (源の大きさ)/(既約波長) \tag{36.18b}$$

$$\frac{|\,代表的な張力\,|}{(質量密度)} \ll \frac{(源の大きさ)}{(既約波長)} \tag{36.18c}$$

である任意の源に対して成り立つ．それは，速い運動あるいは強い場の源に対しては，おそらく近似的以外には成り立たない．さらに速い運動の場合あるいは強い場の場合を有効にそして**一般的に**取り扱いうる公式は今日利用できない．

本章の残りは，ほとんど Newton 的で遅い運動源からの重力波の詳細な解析にあてられる．しかし解析（トラック–2，36.9–36.11 節）は，本節および次の節におけるトラック–1 の要約によって先に始められるだろう．

大きさ R および平均の内部速度 v の任意の源に対して，放出される放射の特徴的な既約波長 ($\lambda\!\!\!^{-} = \lambda/2\pi$) は $\lambda\!\!\!^{-} \sim$ (運動の振幅$/v \lesssim R/v$) である．したがって $R/\lambda\!\!\!^{-} \ll 1$ という式 (36.18a) の要求［すなわち，源は（非放射）領域に近い内部の深く小さい領域に制限されるという要求］は，遅い運動制限

$$v \ll 1$$

を要求する．

これらが関係する条件，$v \ll 1$ および $R \ll \lambda\!\!\!^{-}$ は，現在考えられている重力波のすべての実験室での生成子によって満たされる．誰もいかにして，巨視的な質量を $v \sim 1$ という速さまでもたらすかは考えていない．これらの条件はまたすべての重力的に束縛された，ほとんど Newton 的な系によって満たされる．こうして，質量 M のこのような系に対して，重力的な束縛に対する条件，$\frac{1}{2}Mv^2 \lesssim M^2/R$ は，$v \lesssim (M/R)^{1/2} \ll 1$ を保証する．

条件 $M/R \ll R/\lambda\!\!\!^{-}$ および $|T^{jk}|/T^{00} \ll \lambda\!\!\!^{-}$ は，考えることができる関心のすべてのほとんど Newton 的な源によって満たされる．代表的な源（たとえば，連星）は

$$\frac{M}{R} \sim \frac{|T^{jk}|}{T^{00}} \sim \left(\frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}}\right)^2 \ll \frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}}$$

*20　重力波の源を解析するための "ほとんど Newton 的で遅い運動近似"

をもつ（ビリアル定理）．これらのまれな場合には $(M/R$ あるいは $|T^{jk}|/T^{00}) \gtrsim R/\lambda$（たとえば，辛うじて安定な，ゆるやかに振動している星）であり，運動は非常にゆるやかであるので放射は弱すぎて興味は弱いだろう．

任意のほとんど Newton 的な遅い運動系に対して，近い領域（$r \ll \lambda$）で内部に深いが，しかし源の境界の外部（$r > R$）にある時空領域が存在する．そこでは，真空の Newton
*21 的な重力理論がほとんど成り立つ．この Newton 的な領域内の観測者は，Newton 的なポテンシャル Φ を測定することができる．そしてそれを $1/r$ のべきに展開できる．

$$\Phi = -\left(\frac{M}{r} + \frac{d_j n^j}{r^2} + \frac{3\text{Ɨ}_{jk} n^j n^k}{2r^3} + \cdots\right) \qquad (\text{ここに}\ n^j = x^j/r) \quad (36.19a)$$

観測者はこの展開における係数に名前を与えることができる．

$$\begin{aligned} M &\equiv \text{“全質量–エネルギー”} = \text{“能動的な（active）重力質量”}, \\ d_j &\equiv \text{“双極子モーメント”}\ [\text{もし観測者が座標原点を注意深く選ぶ} \\ &\qquad\qquad \text{ならば}, d_j = 0\ \text{とすることができる}], \\ \text{Ɨ}_{jk} &\equiv \text{“既約四重極モーメント”}\ [\text{系はほとんど Newton 的であるから}, \text{Ɨ}_{jk} \\ &\qquad\qquad \text{は表現 (36.3) によって与えられる}] \end{aligned} \qquad (36.19b)$$

この Newton 的なポテンシャルは放射領域に達するから，その領域の静的な部分 $(-M/r - d_j n^j/r^3)$ は，Newton 的な形を変えずに保持する．しかし力学的な部分 $(-\frac{3}{2}\text{Ɨ}_{jk} n^j n^k/r^3)$ は Newton 的な項で記述できなくなる．遅延効果が（増大する r の値で）目立つようになるので，力学的な部分は徐々に出ていく重力波に変わっていく．それは完全な一般相対性理論で，あるいは線形化された理論，あるいは 35.13 節の “短波近似” で記述されなければならない．

*22 もし放射領域で線形化された理論を用いることを選ぶならば，そしてもしそこで横方向のゼロトレースゲージ $(h^{TT}_{0\mu} = 0, h^{TT}_{jj} = 0, h^{TT}_{jk,k} = 0)$ を課すならば，重力波は

*23
$$h^{TT}_{jk} = \frac{2}{r}\,\ddot{\text{Ɨ}}^{TT}_{jk}(t-r) + \left[\frac{1}{r^2}\,\dot{\text{Ɨ}}^{TT}_{jk}(t-r)\right] \text{程度の補正} \qquad (36.20)$$

の形をとる［式 (36.47) として後に導かれる］．ここに $\ddot{\text{Ɨ}}^{TT}_{jk}$ は四重極モーメントの横方向のゼロトレース部分（半径方向に対して横方向である，35.4 節をみよ）の 2 次の時間微分である．こうして，

$$\begin{aligned} \ddot{\text{Ɨ}}^{TT}_{jk} &= P_{ja}\,\ddot{\text{Ɨ}}_{ab} P_{bk} - \frac{1}{2} P_{jk} P_{ab}\,\ddot{\text{Ɨ}}_{ab}, \\ P_{ab} &= (\delta_{ab} - n_a n_b) \qquad (\text{射影演算子}), \\ n_a &= x^a/r \qquad (\text{半径方向の単位ベクトル}) \end{aligned} \qquad (36.21)$$

*21　ゆるやかな運動源に対する質量，双極子モーメント，および既約四重極モーメントの定義
*22　既約四重極モーメントによる重力波の性質
*23　(1) 波動場 h^{TT}_{jk}

これらの出ていく波に対する有効なストレス–エネルギーテンソル（35.7 節）は，光の速さで半径方向に外向きに進むゼロ質量粒子の群に対するのと同じ形をもつ．大きい距離でもっとも小さいゼロでない次数の成分は

*24
$$T_{00}^{(\mathrm{GW})} = -T_{0T}^{(\mathrm{GW})} = T_{TT}^{(\mathrm{GW})} = \frac{1}{32\pi}\langle h_{jk,0}^{TT} h_{jk,0}^{TT}\rangle = \frac{1}{8\pi r^2}\langle \dddot{I}_{jk}^{TT}\,\dddot{I}_{jk}^{TT}\rangle$$
$$= \frac{1}{8\pi r^2}\langle \dddot{I}_{jk}\,\dddot{I}_{jk} - 2n_i\,\dddot{I}_{ij}\,\dddot{I}_{jk}n_k + \frac{1}{2}(n_j\,\dddot{I}_{jk}n_k)^2\rangle \tag{36.22}$$

である．ここに $\langle\ \ \rangle$ はいくつかの波長にわたる平均を示す（エネルギーを波長よりも密に局在化できないことを思い出せ!）．半径 r の球を時間 t に横切る全勢力は

*25
$$L_{\mathrm{GW}}(t,r) = \int T^{(\mathrm{GW})0\mathrm{r}} r^2\, d\Omega = \frac{1}{5}\langle \dddot{I}_{jk}(t-r)\,\dddot{I}_{jk}(t-r)\rangle \tag{36.23}$$

（練習問題 36.9 をみよ）．これは本章の初めに出てきた公式である，式 (36.1)．

波頭は正確には球状でない．たとえば，連星系に対しては赤道平面内の波頭はらせん状でなければならない．これは運動量束のちっぽけな半径方向でない成分が存在して，強さにおいて $1/r^3$ のように減少することを意味する．この半径方向でない運動量に関連するのは角運動量密度（系の中心 $r=0$ に相対的な角運動量）であり，$1/r^2$ のように落下する [Peters（1964），DeWitt（1971），p.286 によって補正されているように]．

*26
$$\mathcal{J}^i = \frac{1}{8\pi r^2}\epsilon^{ijk}\langle -6n_j\,\ddot{I}_{km}\,\dddot{I}_{mp}n_p + 9n_j\,\ddot{I}_{km}n_m n_p\,\dddot{I}_{pq}n_q\rangle \tag{36.24}$$

この量の球にわたる積分は単位時間あたり外向きに輸送される全角運動量である．

*27
$$-dJ_j/dt = \int \mathcal{J}_j r^2 d\Omega = \frac{2}{5}\epsilon^{jkl}\langle \ddot{I}_{ka}\,\dddot{I}_{al}\rangle \tag{36.25}$$

（練習問題 36.9 をみよ）．

36.8　遅い運動源* における放射反応

コラム 19.1 で議論され 20.5 節で導かれた保存則は，源はエネルギーと角運動量を重力
*28 波が持ち去るのと同じ割合で失わなければならないことを保証する．これらの損失を生み出す主体は，源内部の時空曲率のほんの小さな成分であり，それはもし（現実的な）出ていく波の無限遠での境界条件から反対に（非現実的な）入ってくる波の条件に変えるには，符号を逆にする．曲率のこれらの“放射反応”の断片は，源がほとんど Newton 的な，遅い運動条件 (36.18) に従うとき Newton 的な言葉で記述することができる．

* 本節に記述されているアイデアおよび形式は Burke (1970)，Thorne (1969b)，および Chandrasekhar and Esposito (1970) によって案出された．これらのアイデアの先駆者の中には Peters (1964)，および Peres and Rosen (1964) の論文があった．

*24 (2) 有効なストレス–エネルギーテンソル

*25 (3) 放射される全勢力

*26 (4) 角運動量の密度

*27 (5) 放射される全角運動量

*28 出ていく波の境界条件は Newton 的な放射反応のポテンシャルを生ずる

Newton 的なポテンシャルの力学的な部分は，“標準的な形式”

$$\Phi=-\frac{3}{2}\text{\it I}\!\!\!{-}_{jk}(t)n_jn_k/r^3+O(1/r^4), \qquad \text{式 (36.18)}$$

において，遅延をもたない（Newton 的な理論は遠隔作用を要求する！）．したがって，標準的なポテンシャルが大きい半径で，出ていく波に接続すべきかあるいは入ってくる波に接続すべきかを定める方法はどのようなものであれ存在しない．定められないのであるから，定常波（半分出ていく，プラス半分入ってくる）に接続するという中間的な方法をとる．しかしこれは望むものでない．Φ がほんの小さな “放射反応” のポテンシャル

*29

$$\Phi=\Phi_{\text{標準的な Newton 的理論}}+\Phi^{(\text{反応})} \tag{36.26a}$$

$$\Phi^{(\text{反応})}=\frac{1}{5}\frac{d^5 I\!\!\!{-}_{jk}}{dt^5}\,x^j x^k \tag{36.26b}$$

によって拡大されるならば，その場合に限り接続は純粋に出ていく波にされることになる（36.11 節をみよ）．もし代わりに，$\Phi=\Phi_{\text{標準的な}}-\Phi^{(\text{反応})}$ と置くならば，ポテンシャルは純粋に入ってくる波に接続するだろう．

大きさの程度については，放射反応のポテンシャルは

$$\Phi^{(\text{反応})}\sim\frac{1}{\lambda\!\!\!{-}^5}(MR^2)r^2\sim\frac{MR^2}{r^3}\left(\frac{r}{\lambda\!\!\!{-}}\right)^5 \tag{36.27}$$

である．したがって，それは源の近くでは標準的な Newton 的ポテンシャルに比べて非常に小さなものである［因子 $(R/\lambda\!\!\!{-})^5\sim v^5$ だけより小さい！］．しかし，放射領域 $(r\sim\lambda\!\!\!{-})$ の内部境界で，それは標準的なポテンシャルの力学的な，四重極部分と同じ程度の大きさである．

*30 Newton 的なポテンシャルの放射反応の部分は，加速度の生産者として，Newton 的なポテンシャルの任意の他の部分と同じ役割を演ずる．Newton 的な領域内の任意の粒子は

*31

$$a_j=-\Phi_{,j}=-\Phi_{\text{標準的},j}-\Phi^{(\text{反応})}_{,j} \tag{36.28}$$

によって与えられる重力加速度を経験する．源の内部では，この加速度は

$$dE/dt=\int\rho a_j v_j\,d^3x \tag{36.29a}$$

および

$$dJ_j/dt=\int\varepsilon_{jkl}x_k\rho a_l\,d^3x \tag{36.29b}$$

によって与えられるエネルギーおよび運動量の損失に通ずる（ここに ρ は密度であり，v_j は速度であり，そして a_j は上述のように源内の物質の加速度である）．標準的な Newton

*29　放射反応のポテンシャルの形と大きさ
*30　ポテンシャルの効果
*31　(1) 放射反応の加速度

*32 理論はエネルギーおよび角運動量を保存する．したがってポテンシャルの反応部分のみが損失を生み出すことができる．

$$dE/dt = -\int \rho \Phi^{(\text{反応})}_{,j} v_j \, d^3x, \qquad (36.30)$$
$$dJ_j/dt = -\int \varepsilon_{jkl} x_k \rho \Phi^{(\text{反応})}_{,l} d^3x$$

反応ポテンシャルに対する表現 (36.26b) を用いる率直な計算は，時間平均された損失に対して，

$$dE/dt = -\tfrac{1}{5}\langle \dddot{I\!\!\!-}_{jk} \dddot{I\!\!\!-}_{jk} \rangle, \qquad (36.31)$$
$$dJ_j/dt = -\tfrac{2}{5}\varepsilon_{jkl}\langle \ddot{I\!\!\!-}_{ka} \dddot{I\!\!\!-}_{al} \rangle$$

を与える．

これらの結果は式 (36.1) および (36.25) によって与えられているように，放射によって持ち去られるエネルギーおよび角運動量と一致することに注意せよ．一致は絶対的な命令である．全エネルギーおよび角運動量の保存則はそれを要求する．

電気双極子放射を放出している遅い運動の電磁気的な系は放射反応のポテンシャル

*33 $$A^{(\text{反応})}_j = 0, \qquad A^{(\text{反応})}_0 = -\Phi^{(\text{反応})} = \frac{2}{3}\dddot{d}_j x^j \qquad (36.32)$$

をもち，それは重力理論の $\Phi^{(\text{反応})}$ に完全に類似している［たとえば，Burke（1971）をみよ］．しかし，通常はこのポテンシャルおよびそれが生み出す反応力には注目しない．代わりに，特別な場合，孤立した電荷が非電磁気的な力によって加速される場合における反応力に注目する．このような電荷に対しては反応力は

$$\boldsymbol{F}^{(\text{反応})} = \frac{2}{3}e^2 \dddot{\boldsymbol{x}} \qquad (36.33)$$

である．このような公式は重力理論に重要でない．なぜなら重力的に孤立した，放射する粒子（すなわち，重力に結合しない力によって加速される粒子）のようなものは存在しないからである．

［練習問題］

36.5　放射反応によるエネルギーおよび角運動量の損失

重力放射による減衰はゆるやかな運動源からエネルギーおよび角運動量を徐々に弱らせる割合に対する式 (36.31) を導け．導出を式 (36.26b) および (36.30) に基づけよ．

36.6　連星系からの重力波

36.7 および 36.8 節の完全な形式を円軌道をもつ連星系に適用せよ．重力波の角分布，放射される全勢力，放射される全角運動量，放射反応力，および放射反応によるエネルギー

*32 (2) エネルギーおよび角運動量の損失

*33 電磁波に対する放射反応のポテンシャル

の損失および角運動量の損失を計算せよ．答えを 36.6 節に引用されている結果と比較せよ [解のさらなる詳細に対しては，Peters and Mathews（1963）をみよ]．

[本章の残りはトラック–2 である．20 章（保存則）はこれに対する準備として必要とされる．これは 39 章（ポスト Newton 的な形式）に有用であるだろう．しかし他のどの章に対する準備としても必要とされない.]

36.9　放射の公式の導出に対する基礎

今や遅い運動におけるほとんど Newton 的な系からの放射に対する公式から，これらの公式の導出に向かう．最初（本節）はいかなる近似もなしに—遅い運動の近似すらない—完全な一般相対性理論で作業する．源は孤立していて，時空は源から遠く離れたところで漸近的に平坦になる，という制限のみを課する．

源から半径方向に外向きに無限遠に動くとき, 時空の曲率が許す限り速く漸近的に Lorentz 系になる座標系を用いる．この座標系でいたるところ，相対論的であるかもしれない源の内部においても，

*34
$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \tag{36.34}$$

を定義する．$h_{\mu\nu}$ は明らかにテンソルの成分でない．$\eta_{\mu\nu}$ もまた真の計量テンソルでない．にもかかわらず，自由に $h_{\mu\nu}$ に関する添字を $\eta_{\mu\nu}$ で上げ下げし，そして

*35
$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \qquad h = h_\alpha{}^\alpha = h_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta} \tag{36.35}$$

を**定義することができる**．さらに，つねに座標を特別に選んで 4 個の条件

$$\bar{h}_\mu{}^\alpha{}_{,\alpha} = 0 \tag{36.36}$$

が源の内部を含んで，いたるところ厳密に満たされるようにすることができる．

これらの定義および約束ごとで，$\bar{h}_{\mu\nu}$ は源から離れて，そしてまたそこで重力が弱いならば，源の内部でも線形化された理論の重力場になる．しかしもし内部の重力が強い（$|\bar{h}_{\mu\nu}|$ が $\ll 1$ でない）ならば，内部での $\bar{h}_{\mu\nu}$ は線形化された理論にどのような接続であれもつことはない．

厳密な Einstein の場の方程式は $\bar{h}_{\mu\nu}$ を用いて

*36
$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta} = -16\pi(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) \tag{36.37}$$

---

*34　遅い運動源によって生み出される重力波の場に対する公式の導出
*35　(1) $\bar{h}_{\mu\nu}$ の定義
*36　(2) $\bar{h}_{\mu\nu}$ による場の方程式

として書くことができる [20.3 節を参照せよ．とくに，式 (20.14)，(20.18)，および (20.3) を結合せよ．そして座標条件 (36.36) を課せ]．ここに $T^{\mu\nu}$ はストレス–エネルギーテンソルの成分であり，そして $t^{\mu\nu}$ は $\bar{h}^{\mu\nu}$ について 4 次およびさらに高次の量である（“重力場
*37 に対するストレス–エネルギー擬テンソル” の成分）．19.3 節に詳述されている “支配された無知の哲学” を思い出せ．われわれは非常に無知であるので $\bar{h}^{\alpha\beta}$ による $t^{\mu\nu}$ に対する明確な表現をいまだかつてどこにも書き下ろしていない．そしてこの無知は，次に来る計算においてこのような表現をけっして必要としないように制御されている！ さらに明確に，出ていく波の強さは系の内部，そこでは “重力的なストレス” は物質のストレスと同程度 ($|t^{jk}| \sim |T^{jk}|$) であるようなところにわたる複雑な表現の積分に比例する．物質は存在しない．放射に対して数え上げるだろうすべては場の四重極部分である．さらに，その四重極モーメントは，Newton 的な領域：(1) 波動領域の十分内部，しかし (2) 源の表面の十分外部で，純粋に Newton 的な測定によって経験的に定義できる．星の内部の動きが星の質量（外部の Kepler 軌道への影響）を定義することを知る必要はないし，また星の内部の動きが星の四重極モーメントを**外部から探知されるように**定義することを知る必要はない．

出ていく波の境界条件によって拡大される Einstein の方程式 (36.37) は，積分方程式

*38
$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, x^j) = 4\int_{\text{全空間}} \frac{[T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}]_{\text{遅延}}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x' \tag{36.38}$$

ここに

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| \equiv \left[\sum_j (x^j - x^{j'})^2\right]^{1/2}, \qquad d^3x' \equiv dx^{1'}dx^{2'}dx^{3'}$$

であり，そして下つき文字 “遅延” は，その量が遅延された時空点

$$t' = t - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|, x^{j'}$$

で評価されるべきであることを意味する．これらは積分方程式である．なぜなら未知量，$\bar{h}^{\mu\nu}$ は積分の外部にも内部にも現れるからである（内部ではそれらは $t^{\mu\nu}$ に含まれる）．波動方程式 (36.37) から積分方程式 (36.38) へ移行するとき，$\bar{h}^{\mu\nu}$ は平坦な時空における場であるかのように横柄に振る舞った．これは確かに真実でない，しかし数学的な操作はそれにもかかわらず成り立つ！ そして積分方程式 (36.38) は源の内部でも，任意の場の点 (t, x^j) に対して成り立つ．

36.10 遅い運動の近似における放射場の評価

*39 これまでは解析は厳密であった．今や 36.7 節の遅い運動の仮定，$R \ll \lambda\!\!\!^{-}$ を導入することが必要である．

---

*37 (3) コントロールされた無知の哲学

*38 (4) 場の方程式の積分公式

*39 (5) 遅い運動への特殊化

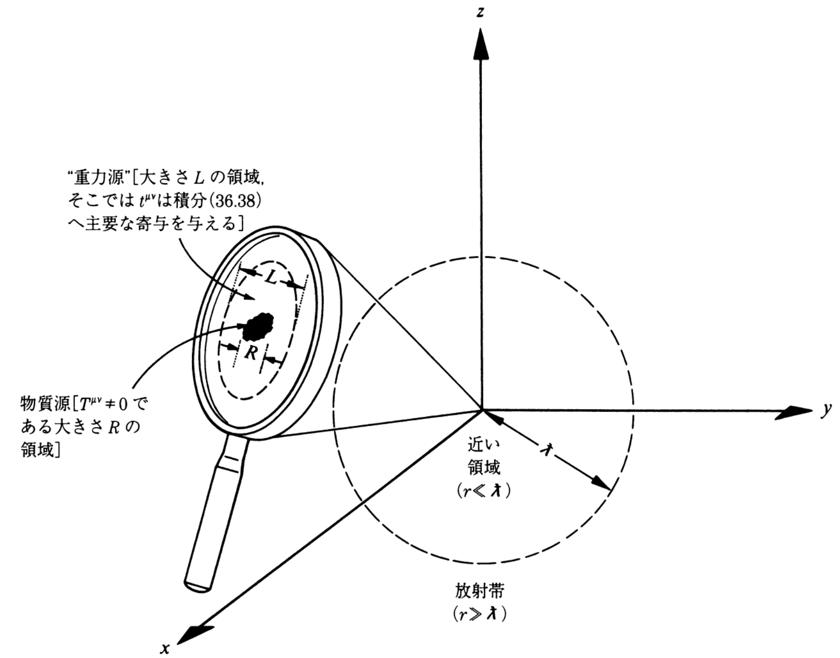


図 36.3　重力波を放射している遅い運動の源．空間座標の原点は源の内部に位置している．源の大きさ，R は既約波長に比べて非常に小さく，$R \ll ƛ$．$\bar{h}^{\mu\nu}$ に対する遅延積分 (36.38) への主要な寄与は，源を取り囲む大きさ $L \sim R \ll ƛ$ の領域からくる．なぜなら源の外部では—しかし近い領域 ($R \ll r \ll ƛ$) 内で—"ストレス–エネルギー擬テンソル" $t^{\mu\nu}$ は $1/r^4$ のように消滅する（練習問題 36.7 をみよ）．

放射帯では，$t^{\mu\nu}$ は $1/r^4$ のように消滅するのでなく $1/r^2$ のように消滅し始める．それは重力波によって運ばれるストレス–エネルギーを記述しようと試みることである（しかし実際には，適切な平均化なしにはできない）．もし源が十分に長く波を放射していたならば，放射地域から遅延積分 (36.38) への寄与は無視できないだろう．

$$\underbrace{[t^{\mu\nu}]_{\text{遅延}} \sim \frac{1}{r'^2}}_{[r > ƛ \text{に対して}]} \Longrightarrow \int [t^{\mu\nu}]_{\text{遅延}} d^3x' \sim \underbrace{\int \frac{1}{r'^2} r'^2 d\Omega' dr'}_{\left[\text{大きい } r' \text{から主要な寄与をもつだろう}\right]}$$

このような寄与は放射される波の計算において，本文で無視されている．なぜならそれらは放出過程そのものと何も関係をもたないからである．むしろ，それらは最後の章で取り扱われている伝播の過程の部分である．それらは波のストレス–エネルギーによって生み出される背景曲率，背景曲率による波の散乱，波と波との散乱等を含む．そしてそれらは源そのものの近傍では全体として無視することができる（たとえば，$r \lesssim 1{,}000ƛ$）．なぜなら遅い運動の源はきわめて弱い放射をするからである．

図 36.3 に示されているように，空間座標の原点を源の内部に置く．遅い運動系に対しては，遅延積分 (36.38) への唯一の主要な寄与は近傍の領域内深いところから（大きさ $L \sim R \ll ƛ$ の領域から，図 36.3 をみよ）生ずる．注意をこの "源の領域" の外部遠く離れた "場の点"（観測点）x^j

$$|\boldsymbol{x}| \equiv r \gg L \gtrsim |\boldsymbol{x}'| \tag{36.39}$$

に制限せよ．そして遅延積分 (36.38) を $\boldsymbol{x}'/r$ のべきに，ちょうど 19.1 節でなされたのと同じ仕方で展開せよ（このような展開は遅い運動の仮定，$ƛ/R \sim ƛ/L \ll 1$ によって正当化されそしてそれを要求する）．結果は

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{4}{r} \int [T^{\mu\nu}(\boldsymbol{x}', t-r) + t^{\mu\nu}(\boldsymbol{x}', t-r)] d^3x'$$

$$+O\left\{\frac{x^j}{r^2\lambda\!\!\!^{-}}\int x^{j'}[T^{\mu\nu}(\boldsymbol{x}',t-r)+t^{\mu\nu}(\boldsymbol{x}',t-r)]d^3x'\right\} \quad (36.40)$$

である．

*40 $\bar{h}^{\mu\nu}$ の 10 個の成分の中で，6 個の空間部分の成分，$\bar{h}^{jk}$ のみに興味がある．なぜならそれらのみが横方向のゼロトレースの放射場 $\bar{h}_{jk}^{TT}$ を射影するときに必要とされるからである．空間成分は "ストレス分布" $T^{jk}+t^{jk}$ にわたる積分による式 (36.40) によって表される．それは，$\bar{h}^{jk}$ をエネルギー分布 "$T^{00}+t^{00}$" にわたる積分を用いて再表現することは，Newton 理論と比較するときに，好都合であるだろう．厳密な運動方程式 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ の助けで変換をすることができる．この運動方程式は用いられる座標系において特別な

$$(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu})_{,\nu}=0 \quad (36.41)$$

の形式をもつ［式 (36.36) および (36.37) をみよ，また 20.3 節における議論をみよ］．これらの関係を 2 度続けて適用して，恒等式

$$\begin{aligned}(T^{(00)}+t^{(00)})_{,00}&=-(T^{0l}+t^{0l})_{,l0}=-(T^{l0}+t^{l0})_{,0l}\\&=+(T^{lm}+t^{lm})_{,ml}\end{aligned}$$

を得る．これおよび微分に対する基礎的な一連の法則から

$$\begin{aligned}[(T^{00}+t^{00})x^jx^k]_{,00}&=(T^{lm}+t^{lm})_{,ml}x^jx^k\\&=[(T^{lm}+t^{lm})x^jx^k)]_{,ml}-2[(T^{lj}+t^{lj})x^k+(T^{lk}+t^{lk})x^j]_{,l}\\&\quad+2(T^{jk}+t^{jk})\end{aligned}$$

が出る．したがって

$$\int(T^{jk}+t^{jk})d^3x=\frac{1}{2}(d^2I_{jk}/dt^2) \quad (36.42a)$$

ここに

$$I_{jk}(t)\equiv\int[T^{00}(t,\boldsymbol{x})+t^{00}(t,\boldsymbol{x})]x^jx^k\,d^3x \quad (36.42b)$$

*41 今やほとんど Newton 的な仮定を導入する．それは重力は全エネルギーの小さい割合のみを寄与することを保証する．

$$t^{00}\sim(\Phi,j)^2\sim M^2/R^4\sim(M/R)T^{00}\ll T^{00}$$

したがって

$$I_{jk}(t)=\int T^{00}(t,\boldsymbol{x})x^jx^k\,d^3x \quad (36.42b')$$

量 I_{jk} は，こうして質量分布の 2 次のモーメントを表している．

*40 (6) 放射領域における $\bar{h}^{jk}$ の計算
*41 (7) ほとんど Newton 的な源への特殊化

式 (36.42) および (36.40) を結合することによって，そして源の内部で $|t^{jk}| \sim |\Phi_{,j}\Phi_{,k}| \sim T^{00}|\Phi|$ を注意することによって，

$$\bar{h}^{jk}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{2}{r}\frac{d^2 I_{jk}(t-r)}{dt^2} + O\left[\frac{1}{r}\left(\frac{|T^{jk}|}{T^{00}} + |\Phi|\right)\frac{R}{\lambda}M\right]$$

$$= \frac{2}{r}\frac{d^2 I_{jk}(t-r)}{dt^2}\left\{1 + \underbrace{O\left[\frac{|T^{jk}|}{T^{00}} + \frac{M}{R}\right]\frac{\lambda}{R}}_{\text{[仮定 (36.18) によって無視できる]}}\right\} \tag{36.43}$$

*42　を得る．実際，われわれが欲するものは h^{TT}_{jk} であって，$\bar{h}^{jk}$ でない．それらは $\eta_{lm} = \delta_{lm}$ を用いて，添字をまず下げ，それから半径方向に進む波に対して射影演算子を用いて TT 部分を射影することによって得ることができる（コラム 35.1 をみよ）．

$$P_{lm} = \delta_{lm} - n_l n_m, \qquad n_l = x^l/r \tag{36.44}$$

（$\bar{h}_{jk}$ および h_{jk} はトレースにおいてのみ異なるから，それらは同じ TT 部分をもつ．）結果は

$$h^{TT}_{jk}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{2}{r}\frac{d^2 I^{TT}_{jk}(t-r)}{dt^2} \tag{36.45a}$$

ここに

$$I^{TT}_{jk} = P_{jl}I_{lm}P_{mk} - \frac{1}{2}P_{jk}(P_{lm}I_{ml}) \tag{36.45b}$$

これは答えを書く最善の形式でない．なぜなら外部の観測者は質量分布の 2 次のモーメ
*43　ント I_{jk} を直接測定できないからである．幸いに，I_{jk} を既約化四重極モーメントによって置き換えることができる．

$$\not{I}_{jk} \equiv I_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{jk}I = \int (T^{00} + t^{00})\left(x^j x^k - \frac{1}{3}\delta_{jk}r^2\right)d^3x \tag{36.46}$$

そして

$$h^{TT}_{jk}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{2}{r}\frac{d^2 \not{I}^{TT}_{jk}(t-r)}{dt^2} \tag{36.47}$$

と書く．これは許される．なぜなら I_{jk} および $\not{I}_{jk}$ の TT 部分は同等である（練習問題 36.8）からである．

既約化四重極モーメント $\not{I}_{jk}$ は，源の外部に制限された観測者に対するよく定義された，基礎物理学的な意義をもつ．近い領域 ($r \ll \lambda$) では，しかし源の外部では，真空の Newton 理論は非常にほとんど成り立ち，Newton のポテンシャルは

*42　(8) h^{TT}_{jk} への射影による，変換
*43　(9) 既約された四重極モーメントによる h^{TT}_{jk} の再表現

$$\Phi = -\frac{1}{2}h_{00} = -\frac{1}{2}h^{00} = -\frac{1}{2}\left(\bar{h}^{00} + \frac{1}{2}\bar{h}\right) = -\frac{1}{4}(\bar{h}^{00} + \bar{h}^{jj})$$
$$= -\int_{\text{全空間}} \frac{[T^{00} + t^{00} + T^{jj} + t^{jj}]_{\text{遅延}}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x'$$

である［式 (36.38) をみよ］．任意のほとんど Newton 的な，遅い運動の源は

$$|t^{00} + T^{jj} + t^{jj}| \ll T^{00}$$

を満たす ［$t^{\alpha\beta} \sim (\Phi_{,j})^2 \sim T^{00}|\Phi|$ を思い出せ］．したがって，

$$\Phi(\boldsymbol{x}, t) = -\int \frac{[T^{00}(\boldsymbol{x}', t)]}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x' \qquad (36.48)$$

と書くことができる．$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^{-1}$ を $1/r$ のべきで展開して，

$$\Phi = -\left(\frac{M}{r} + \frac{d_j x^j}{r^3} + \frac{3\text{I}\!\!\!-_{jk} x^j x^k}{2r^5} + \cdots\right) \qquad (36.49a)$$

［($r \ll \lambda\!\!\!-$, しかし r はそれにもかかわらず真空の Newton 理論が成り立つほど十分大きい) に対して］

を得る．ここに

$$M = (\text{源の全質量–エネルギー}) = \int T^{00} d^3x,$$
$$d_j \equiv (\text{源の双極子モーメント}) = \int T^{00} x^j d^3x, \qquad (36.49b)$$
$$\text{I}\!\!\!-_{jk} \equiv (\text{源の既約化四重極モーメント}) = \text{表現 (36.46)}$$

こうして，**その 2 次の時間微分は式 (36.47) によって放射場を定める，量 $\text{I}\!\!\!-_{jk}$ は近い領域 ($r \ll \lambda\!\!\!-$) の内部深くの Newton のポテンシャル Φ を探求する観測者によって測定されるとき，正確に星の既約化四重極モーメントの成分である**（“経験的な四重極モーメント”）．

放射場に対する $\text{I}\!\!\!-_{jk}^{TT}$ による最終の答え (36.47) は 36.7 節に与えられている結果の要約に引用された．放射の有効なストレス–エネルギーテンソルおよび放射されたエネルギーと角運動量に対する表現がまたそこで引用された［式 (36.22) から (36.25) まで］．それらの表現は短波近似の形式を用いて導くことができる（練習問題 36.9 をみよ）．

［練習問題］

36.7 $t^{\mu\nu}$ の大きさ

重力波の遅い運動源を考えよ．源から離れているが，しかし近い領域 ($R \ll r \ll \lambda\!\!\!-$) では，“ストレス–エネルギー擬テンソル” の成分 $t^{\mu\nu}$ は $1/r^4$ のように消え去る．しかし放射帯 ($r \gg \lambda\!\!\!-$) ではそれらは $1/r^2$ のようにしか消え去らないことを示せ．

36.8　$\not{I}_{jk}$ および I_{jk} の横方向のゼロトレースの部分は同等であるという証明

I_{jk} (36.42b) および $\not{I}_{jk}$ (36.46) の TT 部分は，TT 射影を行う観測者がどこにいようとも（すなわち，射影演算子における単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ が何であろうと），同等であることを直接の計算によって証明せよ．

36.9　放射されるエネルギーおよび角運動量

(a) 漸近的に平坦な時空で式 (36.47) によって記述される重力波に対して，式 (35.23) のぼんやり広がったストレス–エネルギーテンソル $T_{\mu\nu}^{(\mathrm{GW})}$ を計算せよ［**答え：**式 (36.22)］.

(b) 式 (36.23) および (36.25) の積分を遂行して放射される全勢力および角運動量を求めよ［**ヒント：**球にわたる以下の平均を導いて，それらを用いよ．

$$\frac{1}{4\pi}\int n_i\,d\Omega = 0, \qquad \frac{1}{4\pi}\int n_i n_j\,d\Omega = \frac{1}{3}\delta_{ij}, \qquad \frac{1}{4\pi}\int n_i n_j n_k\,d\Omega = 0,$$
$$\frac{1}{4\pi}\int n_i n_j n_k n_l\,d\Omega = \frac{1}{15}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

ここに $\boldsymbol{n} \equiv \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ は半径方向の単位ベクトルである］.

36.11　放射反応のポテンシャルの導出

*44　最後に，36.8 節に引用されている放射反応の結果の導出を行おう．解析はもとの（すなわち，TT でない）ゲージでの放射場の空間部分に対する解 (36.43)

$$\bar{h}^{jk}(t, \mathbf{x}) = \frac{2}{r}\ddot{I}_{jk}(t - r) \tag{36.50}$$

で始まる．この解は本来，$1/r$ よりも速く消え去るすべての項を無視することによって導かれたけれども，それは実際，線形化された理論の真空の場の方程式 $\bar{h}^{jk}{}_{,\alpha}{}^{\alpha} = 0$ への厳密な解である．これは，解が中間の領域および近くの領域（$r \lesssim \lambda$，しかし $r > R$）で，放射帯におけるのと同様に成り立つことを意味する．

出ていく波の条件を無限遠で，入ってくる波の条件によって置き換えるならば，$\bar{h}^{jk}$ に対する厳密解 (36.50) は

$$\bar{h}^{jk}(t, \mathbf{x}) = \frac{2}{r}\ddot{I}_{jk}(t + r)$$

によって置き換えられるだろう．こうして，出ていく波の境界条件の効果を描写するために，厳密解を

*45
$$\bar{h}_{jk}(t, \mathbf{x}) = \bar{h}^{jk}(t, \mathbf{x}) = \frac{2}{r}\ddot{I}_{jk}(t - \epsilon r) \qquad (\epsilon = \pm 1) \tag{36.51}$$

*44　放射反応のポテンシャルに対する公式の導出

*45　(1) 出ていく波であろうとあるいは入ってくる波であろうと，源の外部の任意のところで $\bar{h}_{jk}$ に対する公式

の形式に書き，それから ϵ の符号の効果に注目する．

近くの領域 $(r \ll \lambda)$ で，しかしほとんど Newton 的な源の外部で，$\bar{h}_{jk}$ に対するこの解は，r のべきで展開されると，

*46

$$\bar{h}_{jk} = 2\left[\frac{I_{jk}^{(2)}}{r} - \epsilon I_{jk}^{(3)} + \frac{I_{jk}^{(4)} r}{2!} - \epsilon\frac{I_{jk}^{(5)} r^2}{3!} + \cdots\right] \tag{36.52a}$$

となる．ここに

$$I_{jk}^{(n)} \equiv d^n I_{jk}(t)/dt^n$$

$\bar{h}_{0j}$ および $\bar{h}_{00}$ の対応する形は，これからゲージ条件 $\bar{h}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,\beta} = 0$，すなわち，$\bar{h}_{j0,0} = \bar{h}_{jk,k}$ および $\bar{h}_{00,0} = \bar{h}_{0j,j}$ によって生成することができる．結果は

*47

$$\bar{h}_{0j} = 2\left[-\frac{I_{jk}^{(1)} x^k}{r^3} + \frac{I_{jk}^{(3)} x^k}{2!r} - \epsilon\frac{2I_{jk}^{(4)} x^k}{3!} + \frac{3I_{jk}^{(5)} x^k r}{4!} - \epsilon\frac{4I_{jk}^{(6)} x^k r^2}{5!}\right] + (\text{放射に関係しない静的な項}) \tag{36.52b}$$

$$\begin{aligned}\bar{h}_{00} = 2\Bigg[&\frac{(3x^j x^k - r^2\,\delta^{jk})}{r^5} I_{jk} - \frac{(x^j x^k - r^2\,\delta^{jk})}{2!r^3} I_{jk}^{(2)} - \epsilon\frac{2}{3!} I_{jj}^{(3)} \\ &+ \frac{3(x^j x^k + r^2\delta^{jk})}{4!r} I_{jk}^{(4)} - \epsilon\frac{4(2x^j x^k + r^2\delta^{jk})}{5!} I_{jk}^{(5)} + \cdots\Bigg] \\ &+ (\text{放射と関係しない静的で時間について 1 次の項})\end{aligned} \tag{36.52c}$$

これらの表現における有力な項は，源に近づくとき $1/r^3$ のように大きくなる．

$$\bar{h}_{00} \approx \frac{2(3x^j x^k - r^2\delta^{jk})}{r^5} I_{jk} = \frac{6I\!\!\!-_{jk} n^j n^k}{r^3}$$

それは正確に Newton のポテンシャル，$\Phi = -\frac{1}{2}h_{00} = -\frac{1}{4}\bar{h}_{00}$ の力学的な四重極部分における有力な項である．冒頭に ϵ をもたないすべての他の項は，Newton のポテンシャルへの補正である．それらは系のエネルギーおよび角運動量をまったく減少させない，水星の近日点変位のような効果を生み出す．

*48 ϵ をもつ項は放射反応と関係している．有力な項を抜き出しそれらを "反応ポテンシャル" とよぶ．

$$\begin{aligned}\bar{h}_{jk}^{(\text{反応})} &= -2I_{jk}^{(3)} - \frac{1}{3} I_{jk}^{(5)} r^2, \\ \bar{h}_{0j}^{(\text{反応})} &= -\frac{2}{3} I_{jk}^{(4)} x^k - \frac{1}{15} I_{jk}^{(6)} x^k r^2, \\ \bar{h}_{00}^{(\text{反応})} &= -\frac{2}{3} I_{jj}^{(3)} - \frac{1}{15}(2x^j x^k + r^2\,\delta^{jk}) I_{jk}^{(5)}\end{aligned} \tag{36.53}$$

対応する計量摂動 $h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta_{\alpha\beta}$ は

---

*46 (2) 近くの領域に特殊化された $\bar{h}_{jk}$

*47 (3) 近くの領域でゲージ条件によって計算された $\bar{h}_{00}$ および $\bar{h}_{0j}$

*48 (4) $\bar{h}_{\alpha\beta}$ から放射反応のポテンシャルを抜き出すこと

$$
\begin{aligned}
h_{jk}^{(\text{反応})} &= -2I_{jk}^{(3)} + \frac{2}{3}I_{ll}^{(3)}\delta_{jk} + O(I_{jk}^{(5)}r^2),\\
h_{0j}^{(\text{反応})} &= -\frac{2}{3}I_{jk}^{(4)}x^k + O(I_{jk}^{(6)}r^3),\\
h_{00}^{(\text{反応})} &= -\frac{4}{3}I_{ll}^{(3)} - \frac{1}{15}(x^j x^k + 3r^2\delta_{jk})I_{jk}^{(5)}
\end{aligned}
\tag{36.54}
$$

である．近い領域におけるこれらの反応ポテンシャルはそれらを Newton の形式にもたらすゲージ変換によってもっとも明白に理解される．

*49
$$
x^{\mu}_{\text{新しい}} = x^{\mu}_{\text{古い}} + \xi^{\mu}(\mathbf{x}), \qquad h_{\mu\nu\,\text{新しい}} = h_{\mu\nu\,\text{古い}} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}
$$

ここに

$$
\begin{aligned}
\xi_j &= -I_{jk}^{(3)}x^k + \frac{1}{3}I_{ll}^{(3)}x^j,\\
\xi_0 &= -\frac{2}{3}I_{ll}^{(2)} + \frac{1}{6}I_{jk}^{(4)}x^j x^k - \frac{1}{6}I_{ll}^{(4)}r^2
\end{aligned}
\tag{36.55}
$$

それから新しいゲージで

$$
\begin{aligned}
h_{jk}^{(\text{反応})} = O(I_{jk}^{(5)}r^2), \qquad & h_{0j}^{(\text{反応})} = O(I_{jk}^{(6)}r^3),\\
h_{00}^{(\text{反応})} &= -\frac{2}{5}\rlap{-}I_{jk}^{(5)}x^j x^k
\end{aligned}
\tag{36.56}
$$

このゲージは Newton の解釈に理想的に適している．なぜならこのゲージでは，遅く動いている粒子に対する測地線の方程式は

$$
d^2x^j/dt^2 = -\Phi_{,j}^{(\text{反応})} + (\text{出ていく波の条件に敏感でない項}) \tag{36.57}
$$

の形式をもつ．ここに

$$
\Phi^{(\text{反応})} = -\frac{1}{2}h_{00}^{(\text{反応})} = \frac{1}{5}\rlap{-}I_{jk}^{(5)}x^j x^k \tag{36.58}
$$

である．

こうして，有力な放射反応の効果（わずかな誤差 $\sim[\lambda/r]^2$）は，ほとんど Newton の源に近い領域で，Newton のポテンシャルに項 $\frac{1}{5}\rlap{-}I_{jk}^{(5)}x^j x^k$ を書き添えることによって記述することができる．生ずる形式および上述の導出の定性的な形は，36.8 節で紹介されている．

---

*49　(5) 放射反応のポテンシャルの Newton のゲージへの変換

37章
重力波の探知

私はしばしば言う．あなたが語っているものを測定でき，そしてそれを数値で表すことができるとき，あなたはそれについて何かを知っている．しかしあなたがそれを測定できないとき，あなたがそれを数値で表すことができないとき，あなたの知識は不十分でありそして不満足なものである．それは知識の始まりであるかもしれない．しかしあなたはあなたの思索において，問題が何であろうと，科学の段階へほとんど進んでいない．

WILLAM THOMSON, LORD KELVIN (1889), p.73

37.1 座標系と衝突波

一般相対論の枠内で重力波を取り扱うとき，検波器は発信器あるいは送信器よりも解析が容易である．人間の潜在的な検波器はすべて太陽系内に存在する．そこでは重力は非常に弱く時空はほとんど平坦であるので，入射してくる平面重力波はすべての実際の目的に対して平面重力波のままである（太陽の周辺を通過する波頭のふれの角度は $1.''75$ に過ぎない）．さらに，重要な波のもっとも近い源は非常に遠く離れているので，実際のすべての目的に対して，波が地球に達するときには波を平面の波頭と考えることができる．したがって，波が検波器を通過して z 方向に伝播するとき，波は高い精度まで以下の横方向のゼロトレースの線形化された表現によって記述することができる．

*1

$$\text{計量摂動}:h_{xx}^{TT}=-h_{yy}^{TT}=A_+(t-z),\ \ h_{xy}^{TT}=h_{yx}^{TT}=A_\times(t-z) \tag{37.1a}$$

$$\begin{aligned}\text{Riemann テンソル}:R_{x0x0}&=-R_{y0y0}=-\tfrac{1}{2}\ddot{A}_+(t-z),\\ R_{x0y0}&=R_{y0x0}=-\tfrac{1}{2}\ddot{A}_\times(t-z)\end{aligned} \tag{37.1b}$$

$$\text{ストレス–エネルギー}:T_{00}^{(\mathrm{GW})}=T_{zz}^{(\mathrm{GW})}=-T_{0z}^{(\mathrm{GW})}=\frac{1}{16\pi}\langle\dot{A}_+^2+\dot{A}_\times^2\rangle_{\text{時間平均}} \tag{37.1c}$$

（練習問題 37.1 をみよ）．

これらの衝突波への検波器の応答をもっとも容易に解析するために，TT 座標系 $\{x^\alpha\}$（それは波に特別に“適合させられている”）を用いないでむしろ実験家および彼の検波器に特別に“適合させられている”座標系 $\{x^{\hat{\alpha}}\}$ を用いよ．検波器は振動する棒，あるいは振動する地球，あるいは流体で満たされている管の輪であるかもしれない（図 37.1 およ

*1 地球を通過して伝播する重力波の線形化された記述

*2 び 37.2 をみよ）．しかし検波器は何であろうと，それは質量中心をもつだろう．空間の原点，$x^{\hat{j}}=0$ を，この質量中心にとる．そして**直交**空間軸，$\partial/\partial x^{\hat{j}}$ をこの空間の原点に位置している（おそらく想像的な）ジャイロスコープ（図 37.1）に結びつける．もし検波器が加速しているならば（すなわち，自由落下していないならば），ジャイロスコープの質量中心に必要な力を加えることによって（ねじりモーメントがない!），ジャイロスコープを検波器とともに加速させる．時間座標として，空間の原点にある時計によって測定される固有時間 $x^{\hat{0}}=\tau$ を用いる．最後に，これらの局所的に定義された座標 $x^{\hat{\alpha}}$ を全時空に可能な "もっとも直線的な方法で" 拡張する（完全な詳細に対してはトラック–2 の 13.6 節をみよ）．**この "検波器の固有基準系"** における計量は以下の形式

$$ds^2=-(1+2a_{\hat{j}}x^{\hat{j}})(dx^{\hat{0}})^2+\delta_{\hat{j}\hat{k}}\,dx^{\hat{j}}dx^{\hat{k}}+O(|x^{\hat{j}}|^2)dx^{\hat{\alpha}}\,dx^{\hat{\beta}} \tag{37.2}$$

をもつだろう $[\omega^{\hat{\ell}}=0$ をもつ式 (13.71)$]$．ここに $a_{\hat{j}}$ は検波器の 4–加速度の空間成分である（$\boldsymbol{a}$ は検波器の 4–速度に直交しなければならないから，$a_{\hat{0}}$ はゼロになる）．$g_{\hat{0}\hat{0}}$ における加速度項（"重力による赤方偏移項"，38.5 節および練習問題 6.6 をみよ）を除いて，この基準系は局所的に Lorentz 系であることに注意せよ．

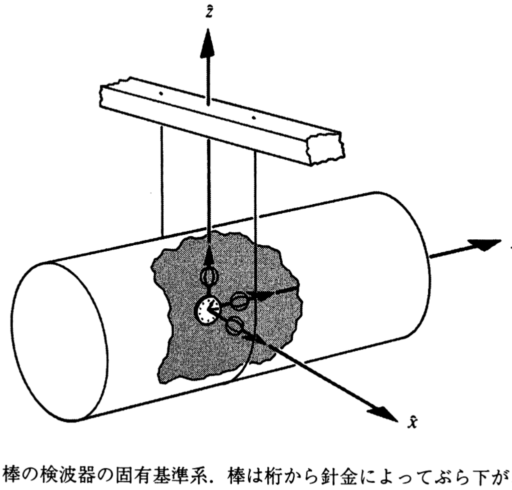


図 37.1　振動している棒の検波器の固有基準系．棒は桁から針金によってぶら下がる．桁は地球にはめ込まれている鉛直な支柱（示されていない）によって支えられている．したがって，棒はこの図が描かれている瞬間に，$\boldsymbol{a}=g(\partial/\partial\hat{z})$ によって，与えられる 4–加速度を経験する．ここに g は "重力の局所的な加速度" である ($g\sim980\,\mathrm{cm/sec^2}$)．後に，空間軸は棒に相対的に回転してしまっているだろう（地球の回転によって生み出される "Foucoult 振子の影響"），したがって $\boldsymbol{a}$ の成分は変わってしまっているだろう．しかしその大きさは変わらない．

固有基準系は想像上の時計と棒の質量中心に位置する 3 個の想像上のジャイロスコープに依存する（そして図では切り取られている外観で示されている）．座標時間は時計によって測定される固有時間に等しい．そして空間軸の方向 $\partial/\partial x^{\hat{j}}$ はジャイロスコープに結びつけられている．ジャイロスコープを地球の場内で落下するのを防ぐ力が個々のジャイロスコープの質量中心で加えられなければならない（回転力は存在しない!）．

*2　検波器の固有基準系

[練習問題]

37.1　TT ゲージにおける一般的な平面波

もっとも一般的な線形化された平面波は，線形化された理論の横方向，ゼロトレースゲージにおいて，表現 (37.1) によって記述することができることを示せ［**ヒント**：平面波を単色平面波の重ね合わせ（Fourier 積分）として表し，そして各単色平面波を表現 (35.16) によって記述せよ．式 (35.10) および (35.23) を用いて $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ および $T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu}$ を計算せよ］．

37.2　固有基準系における試験粒子の運動

式 (37.2) の固有基準系を通して自由落下する，遅く動いている試験粒子は，運動方程式（測地線の式）

$$d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2 = -a_{\hat{j}} + O(|x^{\hat{k}}|)$$

に従うことを示せ．こうして，$-a_{\hat{j}}$ を "重力の局所的な加速度" と解釈することができる（図 37.1 の説明文をみよ）．

37.2　力学的な検波器における加速度

式 (37.2) の固有基準系は，Newton 的な物理学者が検波器を解析するときに用いるであろう基準系に存在するもっとも近いものである．実際，それはほとんど Newton 的であるので，（コラム 37.1 の解析によれば）**力学的な検波器に対する運動方程式は，この固有基準系で書かれるとき，標準的な Newton の形式をとり，1 個の例外をもつが，完全に Newton の方法で眺められ取り扱うことができる．重力波は測地線のずれに対するよく知られた表現によって与えられる，非 Newton 的な原因の駆動力を生み出す．**

*3

$$\begin{pmatrix} x^{\hat{j}}=0\ \text{における検波器の質量中心} \\ \text{に相対的な}\ x^{\hat{j}}\ \text{にある粒子の単位質} \\ \text{量あたりの力 (すなわち，加速度)} \end{pmatrix} = \left(\frac{d^2x^{\hat{j}}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{波による}} = -(R_{\hat{j}\hat{0}\hat{k}\hat{0}})_{\text{波による}}\, x^{\hat{k}} \tag{37.3}$$

この式を用いるために，そして後に検波器の断面積を計算するために，検波器の固有基準系における曲率テンソル $R^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$，および波のストレス–エネルギーテンソル $T^{(\mathrm{GW})}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ の成分を知らなければならない．$R^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ を直接表現 (37.2) の計量係数 $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ から計算することはできない．そうするためには $O(|x^{\hat{j}}|^2)$ の未知の補正を必要とするだろう．しかし，$R^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ および $T^{(\mathrm{GW})}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ を TT 座標系における対応する成分 (37.1) から，変換行列 $\|\partial x^{\alpha}/\partial x^{\hat{\mu}}\|$ を適用することによって容易に得ることができる．変換を明らかなものにするためには，

---

*3　力学的な検波器に対する運動方程式

コラム 37.1　力学的な検波器に対する運動方程式の導出

力学的な検波器における “質量要素” (たとえば，もし検波器が図 37.1 の棒であるならば，各縁について 1 mm のアルミニウム立方体，あるいはもし検波器が図 37.2 の (h) に示されている流体で満たされた管であるならば体積 1 mm^3 の流体要素) を考える．検波器の媒質が振動したりあるいは流れたりあるいは想像されるものは何でも生ずるにつれて，この質量要素は隣接した物質および電磁場によって押したり引っ張られたりする．

$$\boldsymbol{f} \equiv \begin{pmatrix} \text{隣接した質量および電磁場によって質量} \\ \text{要素に及ぼされる単位質量あたりの 4–力} \end{pmatrix} \tag{1}$$

単位質量あたりのこの 4–力は質量要素に 4–加速度を与える $\boldsymbol{\nabla_u u} = \boldsymbol{f}$ であり，あるいは，検波器の固有基準系における成分を用いて，$f^{\hat{j}} = Du^{\hat{j}}/d\tau$ と書かれる．質量要素は検波器の固有基準系において (すなわち，検波器の質量中心に相対的に) 非常に小さい速度 ($v \ll 1$) をもつことを仮定する．それから，$O(v^2)$，$O(|x^{\hat{j}}|^2)$，および $O(|x^{\hat{j}}|v)$ を無視して，

$$d\hat{t}/d\tau = u^{\hat{0}} = 1 - a_{\hat{j}}x^{\hat{j}} \equiv 1 - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} \tag{2}$$

および

$$f^{\hat{j}} = d^2x^{\hat{j}}/d\tau^2 + \Gamma^{\hat{j}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}u^{\hat{\alpha}}u^{\hat{\beta}} = (d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2 + \Gamma^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{0}})(1 - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

をもつ [式 (37.2) をみよ]．練習問題 37.3 は $\Gamma^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{0}}$ を $O(|x^{\hat{j}}|)$ の精度まで計算する．その結果を挿入し，項を再整理して，

$$d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2 = (1 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})f^{\hat{j}} - a^{\hat{j}}(1 + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) - R^{\hat{j}}_{\ \hat{0}\hat{k}\hat{0}}x^{\hat{k}} \tag{4}$$

(**“質量要素に対する運動方程式”**)．

この式を，まず Einstein 的な物理学者の観点から，それから Newton 的な物理学者の観点から，吟味する．

Einstein 的な物理学者は $d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2$ を質量要素の “座標加速度” と考える．しかし彼は $O(|x^{\hat{j}}|^2)$ の精度まで，座標の長さと固有の長さは同じであることを知っている [式 (37.2) をみよ]．座標の加速度 $d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2$ の原因は 3 つある．(1) **外部から加えられる力**，

$$\begin{aligned}(1 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})f^{\hat{j}} &= (d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2)_{\text{外力}} \\ &= (1 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(d^2x^{\hat{j}}/d\tau^2)_{\text{外力}}\end{aligned} \tag{5a}$$

($\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ 補正の起源は単純に座標時間と固有時間との間の転換である)，(2) 基準系の加

速度による “慣性力”,

$$-a^{\hat{j}}(1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) = (d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2)_{\text{慣性力}} \tag{5b}$$

($\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ の補正の説明に対しては練習問題 37.4 をみよ), および (3) **“Riemann 曲率の力”**, それは局所的な Newton の重力場（地球, 太陽, 月, 等の場）による Riemann 曲率, プラス衝突する重力波による Riemann 曲率を含むだろう.

$$-(R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}})_{\text{波}}x^{\hat{k}} - (R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}})_{\text{Newton 場}}x^{\hat{k}} = (d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2)_{\text{曲率}} \tag{5c}$$

(1 次の重ね合わせ, なぜなら太陽系におけるすべての重力場は非常に弱いから). この “Riemann 曲率の力” はもちろん, 質量要素によって “感じ” られない. それは任意の 4–加速度を生み出さない. むしろ, 慣性力のように, それは基準系の選択に起因する. 空間座標 $x^{\hat{j}}$ は検波器の質量中心から離れた固有距離および方向を測定する. そして Riemann 曲率はこの固有距離および方向を変えようとする (“相対加速度”, “測地線のずれ”).

Newton 的な物理学者は運動方程式 (4) をむしろ異なる方法で眺める. 空間座標 $x^{\hat{j}}$ は, 検波器の質量中心から離れた固有距離および方向を測定するということになると, 物理学者はそれらを Newton 理論の標準的な Euclid 的空間座標と考える. 物理学者はそうすると式 (4) を

$$d^2x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2 = F^{\hat{j}} - (R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}})_{\text{波}}x^{\hat{k}} \tag{6}$$

の形式に書き直す. ここに

$$\begin{aligned} F^{\hat{j}} &\equiv (\text{質量要素に作用する単位質量あたりの Newton 的な力}) \\ &= (1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})f^{\hat{j}} - a^{\hat{j}}(1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) - (R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}})_{\text{Newton 場}}x^{\hat{k}} \end{aligned} \tag{7}$$

Newton 的な物理学者は $F^{\hat{j}}$ を, これよりもさらによく知られた形式に自由に表すことができる. 彼は $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$“赤方偏移の効果” の微妙さを無視できる. なぜなら (1) それらは小さい

$$|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})| \sim |f^{\hat{j}}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})| \lesssim |(R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}})_{\text{波}}x^{\hat{k}}| \tag{8}$$

および (2) それらは時間について定常である. したがって, 等しく小さい波に起因する力と対照すると, それらは検波器の共鳴運動を励起できない. また, 彼は “慣性加速度” $-a^{\hat{j}}$ を, 検波器の質量中心における重力の局所的な加速度からの寄与 $-(\partial\Phi/\partial x^{\hat{j}})_{x^{\hat{j}}=0}$ と Newton 理論の “絶対空間” に相対的な検波器の加速度による寄与 $-a^{\hat{j}}_{\text{絶対}}$ に分離できる. 最後に, 彼は Newton の重力による Riemann 曲率をよく知られた形式 $R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}} = \partial^2\Phi/\partial x^{\hat{j}}\partial x^{\hat{k}}$ に書き直すことができる. 正味の結果は

$$F^{\hat{j}} = \left[\text{質量要素に作用する単位質量あたりの全 Newton 力}\right]$$
$$+ f^{\hat{j}} \left[\begin{array}{l}\text{隣接する物質および電磁場によって及ぼ}\\ \text{される単位質量あたりの Newton 力}\end{array}\right]$$
$$- a^{\hat{j}}{}_{\text{絶対}} \left[\begin{array}{l}\text{Newton の絶対空間に相対的な検波器の}\\ \text{加速度による単位質量あたりの慣性力}\end{array}\right]$$
$$- \left(\frac{\partial \varPhi}{\partial x^{\hat{j}}}\right)_{\text{質量要素において}} \left[\begin{array}{l} = -(\partial \varPhi/\partial x^{\hat{j}})_{x^{\hat{j}}=0} - (\partial^2 \varPhi/\partial x^{\hat{j}} \partial x^{\hat{k}}) x^{\hat{k}} \\ = \text{Newton の重力加速度}\end{array}\right] \tag{9}$$

結論：力学的な検波器の質量要素に対する運動方程式は，検波器の固有基準系で書かれるとき，標準的な Newton 形式 (6) をもつ．それは標準的な Newton 駆動力 (9) と

$$(d^2 x^{\hat{j}}/d\hat{t}^2)_{\text{波による}} = -(R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}})_{\text{波}} x^{\hat{k}} \tag{10}$$

によって与えられる重力波による駆動力からなる．

$O(|h_{\mu\nu}|) \ll 1$ の精度になるように TT 座標系を位置づけて，TT 座標系を興味の瞬間 $t = \hat{t} = 0$ に，検波器の質量中心近くの検波器の固有基準系と一致させる．そうすると変換行列は

$$\partial x^{\alpha}/\partial x^{\hat{\mu}} = \delta^{\alpha}_{\mu} + O(h_{\mu\nu}) + O(a_{\hat{j}} x^{\hat{j}}) + O(|\boldsymbol{a}|\hat{t}). \tag{37.4}$$

[波によって引き起こされる時空におけるさざ波による補正] → $O(h_{\mu\nu})$

[赤方偏移による補正] → $O(a_{\hat{j}} x^{\hat{j}})$

[検波器の加速度から生ずる系の相対速度による補正] → $O(|\boldsymbol{a}|\hat{t})$

検波器が経験する加速度は特徴的に

$$|\boldsymbol{a}| = 1\text{“地球の重力”} = 980\,\text{cm/sec}^2 \sim 1/\text{lyr}$$

*4 　したがって，並外れた精度 $\|\partial x^{\alpha}/\partial x^{\hat{\mu}}\| = \|\delta^{\alpha}_{\mu}\|$ まで，テンソルの成分は 2 つの基準系で同じである．

$$R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}} = -R_{\hat{y}\hat{0}\hat{y}\hat{0}} = -\frac{1}{2}\ddot{A}_{+}, \qquad R_{\hat{x}\hat{0}\hat{y}\hat{0}} = R_{\hat{y}\hat{0}\hat{x}\hat{0}} = -\frac{1}{2}\ddot{A}_{\times},$$
$$T^{(\mathrm{GW})}_{\hat{0}\hat{0}} = T^{(\mathrm{GW})}_{\hat{z}\hat{z}} = -T^{(\mathrm{GW})}_{\hat{0}\hat{z}} = \frac{1}{16\pi}\langle \dot{A}_{+}^2 + \dot{A}_{\times}^2 \rangle_{\text{時間平均}} \tag{37.5}$$

[式 (37.1) をみよ]．

式 (37.3) および (37.5) を結合して，検波器の質量中心に相対的な波に起因する加速度に対して

*4　検波器の系における波の記述

*5

$$\left(\frac{d^2\hat{x}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{波による}} = -R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}}\hat{x} - R_{\hat{x}\hat{0}\hat{y}\hat{0}}\hat{y} = \frac{1}{2}(\ddot{A}_+\hat{x} + \ddot{A}_\times\hat{y}),$$
$$\left(\frac{d^2\hat{y}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{波による}} = -R_{\hat{y}\hat{0}\hat{y}\hat{0}}\hat{y} - R_{\hat{y}\hat{0}\hat{x}\hat{0}}\hat{x} = \frac{1}{2}(-\ddot{A}_+\hat{y} + \ddot{A}_\times\hat{x}), \qquad (37.6)$$
$$\left(\frac{d^2\hat{z}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{波による}} = 0$$

を得る．

*6 **これらの表現は，測地線のずれの式のように，1 波長に比べて小さい領域にわたってのみ成り立つ．** 計量の 2 次微分（すなわち，Riemann テンソルの成分）は測地線のずれおよび大きさ $L \gtrsim \lambda$ の領域にわたる波に起因する力の粗末な測度を与える．こうして，大きい検波器 ($L \gtrsim \lambda$) を解析するには，曲率テンソルの "局地的な数学" を無視してそれを "大域的な数学"，たとえば，計量成分 $h_{\mu\nu}$ を用いて，TT 座標系における解析によって置き換えなければならない．たとえば，練習問題 37.6 をみよ．

今日（1973）まで考案されてきた高い感受性をもつすべての検波器は 1 波長に比べて小さい．それゆえ Newton 物理学の技術および式 (37.6) の駆動力を用いて解析することができる．

種々な偏りをもつ波によって生み出される駆動力，$-R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}x^{\hat{k}}$ に対する物理学的な直感を発展させることは有用である．図 35.2 はこのような直感に対しての 1 つの助けである．コラム 37.2 は別な助けである［読者はそれらを吟味し，比較し，そして調和させることに興味を見出すだろう !］．

［練習問題］

37.3 固有基準系における接続係数

(a) 計量 (37.2) に対する $\Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}$ を $O(|x^{\hat{j}}|)$ の補正を無視して，計算せよ［**答え：**$\omega^{\hat{\ell}} = 0$ をもつ式 (13.69)］．

(b) $R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}$ を標準的な公式 (8.44) を用い，そして $\Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}$における $O(|x^{\hat{j}}|)$ の未知の補正のゆえに，接続係数の空間微分を求めずにそのままにして計算せよ［**答え：**$R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}} = \Gamma^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{0},\hat{k}} - a^{\hat{j}}a^{\hat{k}}$］．

(c)（b）への答えを用いて $\Gamma^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{0}}$ への $O(|x^{\hat{j}}|)$ の補正を求めよ［**答え：**

$$\Gamma^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{0}} = a^{\hat{j}}(1 + a_{\hat{k}}x^{\hat{k}}) + R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}x^{\hat{k}} + O(|x^{\hat{k}}|^2)] \qquad (37.7)$$

37.4 なぜ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$？

コラム 37.1 の式 (5b) における $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ 補正の起源を説明せよ［**ヒント：**2 個の自由落下する粒子が慣性力に反応するのを見つめている，空間原点に静止している観測者の観点をと

---

*5 波による加速度の明白な形式

*6 この解析は "小さい" 検波器 ($L \ll \lambda$) に対してのみ成り立つ

る．時間 $\hat{t}=0$ に，1 個の粒子を原点に他の粒子を $x^{\hat{j}}$ に置く．時間が経過するにつれて，それらの共通の Lorentz 系における 2 個の粒子の分離が固定したままとどまる．したがって $x^{\hat{j}}=0$ における観測者の観点からは Lorentz 収縮が展開する].

37.5　偏り図の方向づけ

コラム 37.2 の式 (2) を導け.

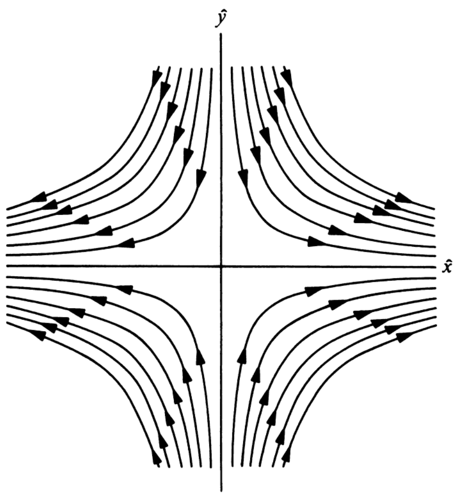
コラム 37.2　重力波の加速度に対する力線

A. 基礎的なアイデア

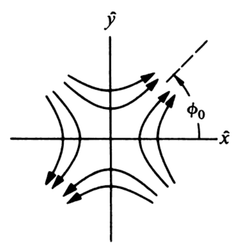
$\hat{z}$ 方向に伝播する平面波を考える．それを完全に検波器の固有基準系で議論する．波による相対加速度は完全に横方向である．検波器の質量中心（空間座標の原点）に相対的にそれらは

$$
\begin{aligned}
d^2\hat{x}/d\hat{t}^2 &= \frac{1}{2}(\ddot{A}_+\hat{x}+\ddot{A}_\times\hat{y}),\\
d^2\hat{y}/d\hat{t}^2 &= \frac{1}{2}(-\ddot{A}_+\hat{y}+\ddot{A}_\times\hat{x}),\\
d^2\hat{z}/d\hat{t}^2 &= 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

である．これらの加速度はゼロ発散であることに注意せよ．したがって加速度は真空電場の力線に類似した，“力線” によって表現することができる．$\ddot{A}_\times=0$（したがって偏りは完全に $\boldsymbol{e}_+$ である）が成り立つ $\hat{t}-\hat{z}$ の値で，力線はここに示されている双曲線である［図 (a)］．任意点における加速度の方向はそこでの矢印の方向である．加速度の大きさは力線の密度である．加速度は質量中心からの距離に比例するから，力線は与えられた方向において原点から 2 倍離れて動くとき，2 倍密接になる．$\ddot{A}_+$ が正であるとき，力線上の矢印は (a) に示されたとおりである．$\ddot{A}_+$ が負であるときは，力線上の矢印は逆になる．$|\ddot{A}_+|$ が増大するにつれて，力線は原点の方向に動くのでそれらの密度は増大する．$|\ddot{A}_+|$ が減少するにつれて，力線は無限遠の方向に動くので力線の密度は減少する．



(a)　$\ddot{A}_\times=0,\ \ddot{A}_+>0$ に対する力線



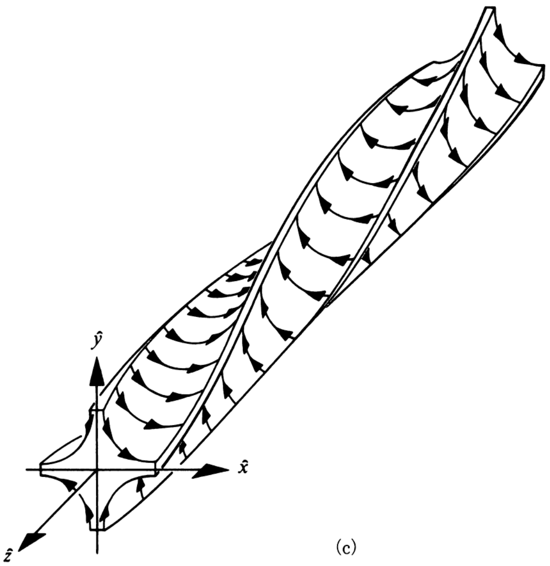
(b)

偏り $\boldsymbol{e}_\times$ に対しては力線は上の図から 45 度だけ回転される．中間の偏り（$\ddot{A}_+$ および $\ddot{A}_\times$ がともにゼロでない $\hat{t}-\hat{z}$ の値）に対しては，図は中間の角度だけ回転される［図（b)］．

$$\phi_0 = \frac{1}{2}\arctan(\ddot{A}_\times/\ddot{A}_+) \tag{2}$$

B. 3 次元図

$\hat{t}$–$\hat{z}$ のおのおのの値で波に起因する加速度は特別な偏り［図（b）の方向づけの角度 ϕ_0］および特別な振幅（力線の密度）をもつ．固定された $\hat{t}$ に対する 3 次元 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 図における力線を描け．そうすると時間が経過するにつれて，大域的な図は形を変えずにとどまるだろう．しかし $\hat{z}$ 方向に光の速さで伝播するだろう．



(c)

図（c）は不変の振幅をもつ右回りの円形に偏っている波に対してこのような図を示す．**注意**：著者は William H. Press（1970）に先立って，検波器の反応を解析するのに，これら［上の（a)，(b)，(c)］のような図およびこれらの図の使用を知っていない．

37.3 力学的な検波器の型

*7 図 37.2 は重力波に対する力学的な検波器の 8 個の異なる型を示す（“力学的な検波器” によって，物質の相対運動に依存する検波器が意味される．非力学的な検波器は本章の終

*7 力学的な検波器の 8 個の型

わり近くで，37.9 節に記述される）．これらの 8 個の検波器，および他の検波器は，コラム 37.2 の力線図を用いて容易に解析することができる．8 個の検波器のおのおのの**定性的な**議論は以下に与えられる（おのおのの検波器に対する完全な定量的な解析は，一般相対論は不適当である，そして本書の範囲を越えている実験的な技術を含むだろう．しかし，若干の定量的な詳細は 37.5–37.8 節に詳しく説明される）．

1．2 個の自由落下する物体の相対運動

*8　重力波が 2 個の自由落下する物体を通過するとき，それらの固有の分離は振動する（図 37.3）．これは赤方偏移および，2 個の物体間を行ったり来たり伝播する電磁気的な信号に対する 1 周時間に対応する振動を生み出す．いずれの効果，振動する赤方偏移あるいは振動する旅行時間も，原理的に波の通過を探知するのに用いることができるだろう．このような検波器の例は，レーザーの変動によって監視されるように，地球–月間の分離である [図 37.2(a)]，電波の変動によって監視されるときの地球–宇宙船間の分離，赤方偏移の測定あるいはレーザー干渉測定によって監視されるように，地球を周回する実験室内の 2 個の試験質量間の分離である．このような検波器の種々の特徴は練習問題 37.6 および 37.7 で解説される．練習問題 37.7 に示されているように，このような検波器は非常に低い感受性しかもたないので，それらにはほとんど実験的な興味はない．

2．地球と月の規準モードの振動

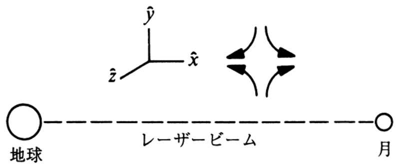
*9　地球にわたって進む重力波は地球の四重極モードの振動を励起するだろう．なぜなら波における駆動力は四重極の空間分布をもつからである [図 37.2(b) をみよ]．地球の基本的な四重極モードは 54 分の周期をもち，他方月の四重極モードは 15 分の周期をもつ．こうして，地球および月は任意の通過する波連の 54 分および 15 分の成分を選択的に取り出すはずである．37.7 節は定量的に波と固体振動間の相互作用を解析するだろう．その解析を地球の振動の地震計の研究と比較することによって，Weber（1967）は重力波の宇宙束について最初の観測的な限界を置いた．

$$I_\nu \equiv \frac{d\,\text{束}}{d\,\text{振動数}} < 3\times10^7\,\text{erg cm}^{-2}\,\text{sec}^{-1}\,\text{Hz}^{-1} \qquad (\nu = 3.1\times10^{-4}\,\text{Hz で}) \qquad (37.8)$$

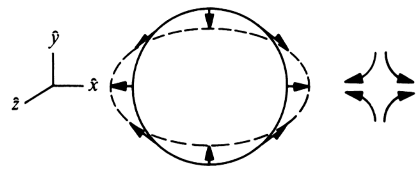
3．地球の地殻における振動

*10　もしパルサーにおける中性子星が軸対称からわずかにずれているならば，その回転は重力波を生み出すだろう．波の周期はパルサーの周期の半分である（180 度を通る星の回転は波の 1 周期を生み出す）．すなわち，波の周期は NPO532（かにパルサー）に対する 0.017 秒から NPO527 に対する 1.87 秒まで変動するはずである．このような波連は地球の 54

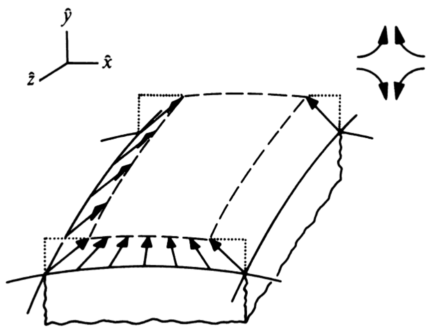
*8　(1) 自由落下する物体
*9　(2) 地球と月
*10　(3) 地球の地殻



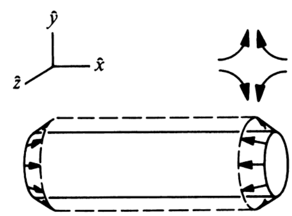
(a) 地球–月分離における振動(練習問題 37.7 をみよ)



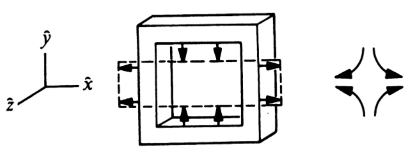
(b) 地球と月の規準モード振動[Weber(1968)をみよ]



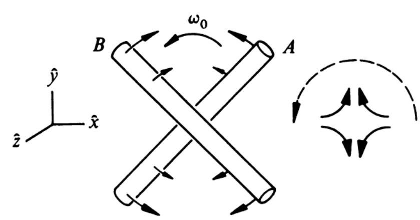
(c) 地殻における振動[Dyson(1969)をみよ]



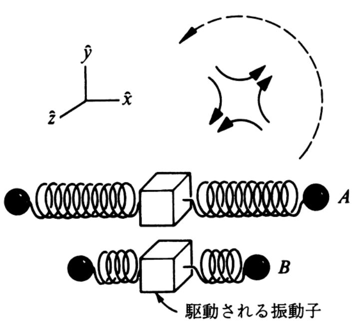
(d) 弾性的な棒の規準モード振動[Weber(1969)および
そこに引用されてある文献をみよ]



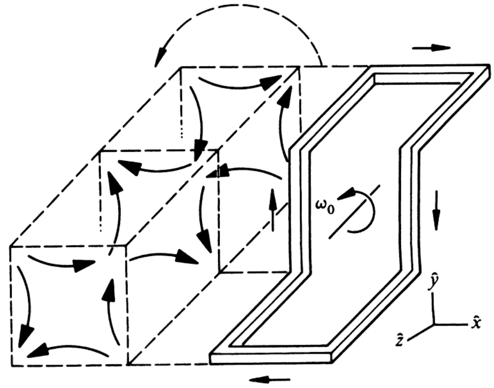
(e) 弾性的な正方形あるいは輪，あるいは音叉の規準
モード振動[Douglass(1971)をみよ]



(f) 回転している棒の角加速度["ヘテロダイン式の検波器".
Braginsky, Zel'dovich, and Rudenko(1969)をみよ]



(g) 駆動される振動子の角加速度[Sakharov(1969)]



(h) 回転している管のループ内の流体の上下運動[Press(1970)].
管は波と同じ角速度で回転する．したがって右回りに偏った
力線内での管の位置は永久に不変にとどまる

図 37.2　種々な型の重力波の検波器.

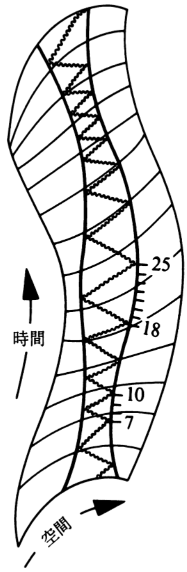


図 37.3　2 個の測地線の間の 1 周旅行の時間は時空の曲率における振動に反応する（図は概略図のみである．地球から月上の地域反射体に送られ，そして非常に強力な長波長の重力波が通過する時間に戻るレーザーパルスを表している．波は強力でなければならないだろう，なぜなら 10 cm よりもよい距離の直接的な測定は難しい．そしてこのような精度は Weber 棒の長さについての振動［10^{-14} cm あるいはそれよりも小さい］よりもはるかに感度の低い検波器になる．練習問題 37.7 をみよ）．測地線は，Riemann 曲率テンソルの関連した成分，それを $R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}}$とよぶ，が 1 つの符号をもつ領域では，互いの方向に向かって曲がっている．そして $R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}}$ が反対の符号をもつ領域では互いから離れた方向に曲がっている．図は一見してしばしば表現される困惑への答えを理解させる．1 周旅行の時間における任意の変化はたんなる見かけ倒しのたわごとではないか？　波の計量摂動，$\delta h_{\mu\nu}$ は距離のスケールをわずかに変える．しかしまた対応して時間のスケールを変える．したがって任意の実際に意味があり測定可能な影響は相殺しないか？　**答え**：(1) 測地線間の広げられた分離は局所的な影響でなくて累積的な影響である．それは直接 $\delta h_{\mu\nu}$ の局所的な値から生じないあるいは曲率の局所的な値からすら生じない．それは重力波の全半周期にわたる屈曲過程の蓄積から生ずる．(2) 測地線の分離における変化は固有距離における真の変化であり，そして固有時間における真の変化に現れる（1 つの粒子の世界線上の“カチカチ音”をみよ）．練習問題 37.6 をみよ．**注意**：ここでのように，ただ 1 個の周期にわたってでなく，多数の周期にわたって測地線間の分離を調べるとき，互いの方向に向かって急速に揺れ動く測地線の累積的な，統計的な，正味のゆるやかな曲がりを見出す．この小さい魅力的な加速度は重力波によって運ばれる有効質量–エネルギーの重力物理学における証拠である（35 章をみよ）．

分の四重極振動あるいは別な規準の，低い振動数の振動モードの何ものも励起できない．波連が励起できる振動の種類は原理的に規準モードの言葉で記述されうる．しかし，振動は明白にそしてより好都合に地球の局在化された領域の振動として想像される．あるいは，より特別に，地球の地殻の振動として想像される．

Dyson (1969) は地球のような弾性的な固体の，入射する，共鳴しない重力波への応答を解析した．彼は応答はずれの波に対する弾性率における不規則性に依存する．そして応答は自由な表面で最大であることを示している［図 37.2(c)］．固体の弾性運動のエネルギーに転換される，平坦な表面を横切る重力波のエネルギーの割合に対して，彼は

$$(\text{割合}) = (8\pi G\rho/\omega^2)(s/c)^3 \times \sin^2\theta|\cos\theta|^{-1}[1+\cos^2\theta+(s/v)\sin^2\theta] \qquad (37.9)$$

を見出す．ここに s および v はそれぞれ，ずれの波および圧縮波の速度である．そして θ は波の伝播方向と表面への法線間の角度である．水平に入射する（$\theta=\pi/2$，“発散する”

因子 $|\cos\theta|^{-1}$ は計算において相殺する！）2×10^{-5} erg/cm^2 sec（パルサーからの波に対する楽天的なしかし考えられうる値）の束を考えて，そして s を 4.5×10^5 cm/sec，ω を 6 rad/sec として，彼は表面において生み出される 1 Hz の水平変位は $\xi_0 \sim 2\times10^{-17}$ cm の振幅，背景の地震の雑音に反して探知されるには 10^5 程度の因子だけ小さすぎると計算する．彼はとくに共鳴（2 つの表面間を行ったり来たり反射される弾性波，南極の氷一面の広がり）で，改善の可能性を指摘する．

4. 弾性棒の規準モードの振動

*11 1972 年現在で，検波器のもっともしばしば議論された型は Joseph Weber によって考案されたアルミニウム棒である（1960, 1961）［図 37.1 および 37.2(d) をみよ］．Weber の棒は円筒形であり，長さが 153 cm, 直径が 66 cm，重さが 1.4×10^6 g である．おのおのの棒は針金によって真空内でつり下げられ，力学的に周囲と結合していない．その中央の周りに圧電気（ピエゾ電気）の張力変換器が結びつけられており，それが電気回路に結合して棒の端から端までの基本的な振動のモードを感受する（振動数 $\nu = 1{,}660$ Hz）．重力波が図 37.2(d) に示されているように，棒の舷側に衝突するとき，波によって運ばれる相対加速度は棒の基本モードを励起するだろう．1972 年現在で，Weber は一方，Washington, D.C. 近くの Maryland 大学で 2 個のこのような棒における突然の，同時の励起を観測する．他方 Chicago 近くの，Argonne 国立実験室で同様の観測をする［Weber（1969, 1970a,b)］．誰もいまだ，外部空間からの重力波以外に，Weber の出来事に対する実行可能な説明に到着していない．しかし，物理学の歴史は，おそらく新しい効果が長いよく知られた現象に最後に寄与される実例について豊富である．それゆえ観測される事象を“闘争で試されている”と評価することは難しいようにみえる．その自信の評価を達成することは異なる装置での，あるいは異なる環境での，あるいは両方の確認を要求するようにみえるだろう．その確認を提供する実験は現在（1972）進行中である．もしこの仮の評価をするならば，Joseph Weber が物理学の書物の上でもっともとらえどころのない放射に対する，彼の 10 年以上の長い探求に示した実験的な独創性，エネルギー，そしてすばらしい忍耐に対して最大の賞賛を同時に表すことが許されうる．

上述の 4 つの型の力学的な検波器は測定がなされてきた系を表している．したがって実際の困難および実現できる雑音のレベルは適切に評価することができる．改善された方法に対する継続的な探求において，より念の入った検波器が研究されている．そして 1972 年現在で以下のように，多くの興味ある提案を一覧にできる．これらに対して望ましい遂行を達成するために，どれほどの展開が要求されるかを知ることは難しい．

5. 別な形の弾性体の規準モードの振動

*12 Weber 検波器の “棒” は形が円筒形である必要はない．中空の正方形，輪，あるいは音

*11 (4) 弾性棒

*12 (5) 別な形の弾性体

叉の形をもつ検波器の議論に対しては，Douglass (1971) をみよ．このような検波器はその基本振動数は，与えられた質量，あるいは与えられた最大距離，あるいは両方で，もっとも好ましい応答に対して調整されることを可能にするだろう．37.4 および 37.7 節そして練習問題 37.9 から 37.12 までは，任意の形の“振動する棒”の検波器の作用を詳細に解析する．また Douglass and Tyson (1971) をみよ．

6. 回転している棒の角加速度

*13　今までに記述されているすべての将来性のある検波器は重力波の潮汐加速度にもっとも明白な方法で応答する．相対距離は内でも外でも振動する．しかし潮汐加速度は，長さを変化する成分の他に，接線方向の，回転を生み出す成分を含む．コラム 37.2 の図 (a) に，長さを変化する成分が $\hat{x}$ および $\hat{y}$ 軸の近くで支配的である．これに対して回転を生み出す成分は両軸間の半ばで支配的である．Vladimir B. Braginsky は初めて回転を生み出す加速度に応答する検波器を提案した [Braginsky, Zel'dovich, and Rudenko (1969) をみよ，Braginsky and Nazarenko (1971)]．それは互いに直交するよう方向づけられて，それらの共通平面内で角速度 ω_0 で自由に回転する 2 個の金属棒からなる [図 37.2(f) をみよ]（回転は検波器の固有基準系のジャイロスコープに相対的である．同等であるが，それは検波器に局在的な Lorentz 系に相対的である）．角振動数 $\omega = 2\omega_0$（単位時間あたりの位相の変化は力線のパターンが回転する角速度の 2 倍に等しい）の単色の重力波を回転する棒に側面から衝突させる．波の右回りの円形偏りの成分はそうすると棒とともに回転するだろう．したがって力線図における棒の方向づけは永久に固定されたままとなるだろう．図 37.2(f) の方向づけで，棒 A は角加速度を受けるだろう．他方棒 B は減速するだろう．実験家は 2 個の棒の一定の相対角加速度を探求できる（2 個の棒の間の角度が 90 度から無視できないほどそれない限り一定である）．さらによく，実験家は回転率 ω_0 に（まったく容易に）合わせることができる．したがって ω_0 は波の振動数 ω に完全には一致しない．それから $\frac{1}{2}\omega_0/|\omega - 2\omega_0|$ 回転に対して，棒 A は加速するだろうし B は減速するだろう．それから $\frac{1}{2}\omega_0/|\omega - 2\omega_0|$ 回転が従い，A は減速し B は加速する．そして続く（振動数が鼓動する）．実験家は棒の相対的な方向づけにおける振動を探求できる．実験を駄目にする左回りの偏り波について心配する必要はない．波は棒とともに回転しないから，波の角加速度は 1 サイクルにわたって平均化される．

このような装置は Braginsky によって“ヘテロダイン (heterodyne) 検波器”とよばれる．彼はこのような検波器は 1970 年代終わりに地球周りの自由落下軌道に置かれるだろうことを想像する．ヘテロダイン検波器はパルサーからの波連のような長い単色の波連に対してもっとも有効に働くだろう．しかし波の短い爆発に対してさえもヘテロダイン検波器は振動する棒よりも鋭敏に反応するだろう [Braginsky and Nazarenko (1971) をみよ]．

---

*13　(6) 回転している棒（“ヘテロダイン検波器”）

7. 駆動される振動子の角加速度

*14 Andrei D. Sakharov (1969) は重力波の角加速度に対する異なる型の検波器を提案した．2 個の回転する棒の代わりに，同様の 2 個の駆動される振動子からなる．それらは最初平行で回転しないで，互いに異なる位相で振動している．各振動子は通過する波の 1 位相で 1 つの方向に角加速度を経験する．そして次の位相で逆方向に角加速度を経験するが，ねじりモーメントは相殺されない．振動子は最大に引き延ばされるとき，最大に縮められるときよりも大きなねじりモーメントを経験する (加速度 $\propto$ 長さ，ねじりモーメント $\propto$ (長さ)^2)．したがって，もし駆動される振動が通過する，単色波と同じ角振動数をもつならば，そしてもし位相が図 37.2(g) に示されているようであれば，振動子 A は右手系方向に角加速度を受けるだろうし，他方 B は左手系方向に角加速度を受ける．

8. 回転している管のループ内の流体の上下運動

*15 角加速度に応答する 3 番目の型の検波器は William Press (1970) によって記述されている．この検波器はおそらく他の検波器よりもはるかに感受性が小さいだろう．したがって構成するに値しない．しかしこの検波器はその高尚な考案において魅力的である．そして他の検波器によって無視される重力波の特徴を実証する．Press の検波器は超流体を含む，回転している管のループからなる．管の形および管の一定の回転率は重力波が流体を管内で上下に動くように選ばれる．1 つの考えられうる管の設計 (実際につくるには悪い設計，しかし解析するには容易な設計) が図 37.2(h) に示されている．波の伝播方向に沿う潮汐加速度における変化が，伝播方向に垂直な潮汐加速度における変化とともに用いられるようにつくられていることに注意せよ．右回りの円形偏りの波への流体の応答を解析するには，コラム 37.2(c) の 3 次元の力線図に回転している管を心にとどめることができる．

[練習問題]

37.6 重力波の検波器としての自由落下している物体の相対運動 [図 37.2(a) および図 37.3 をみよ]

平坦な空の時空内に最初互いに静止している 2 個の試験物体を考える (他の，重力を及ぼしている物体が近くに存在する場合も，さほどの困難なしに取り扱うことができる．しかしこの練習問題はもっとも単純な例のみに関係している!)．角振動数 ω と偏り $\boldsymbol{e}_+$ をもつ，平面の，ほとんど単色の重力波が $-z$ 方向から来て，物体に衝突する．練習問題 35.5 に示されているように，物体は，波が到着する前に物体の大域的な慣性系を構成した TT 座標で永久に静止してとどまる．試験物体の任意の分離 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ に対して，試験物

*14 (7) 駆動される振動子の回転

*15 管内の流体

体の間を行ったり来たりする光子の赤方偏移および 1 周の旅行時間を計算せよ．答えを，大きい $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ に対して，測地線のずれの式を用いて（正当化なしに！）得た答えと比較せよ．物理学的に，なぜ増大する分離とともに正しい答えが**振動する**か？　流行している技術を用いる，このような検波器の実行可能性および潜在的な感受性を議論せよ．

37.7　重力波の検波器としての地球–月間の分離

1970 年代初めに少なくとも 1 周の旅行時間によって分離されている相次ぐ観測で，10 cm の精度まで伸びるレーザーを用いて，地球–月間の分離を監視することができる．1 周の旅行時間における振動は，地球–月–太陽–惑星の重力相互作用から予期される振動（どちらかと言えば長い周期の）を除いて，観測されないと仮定せよ．そうすると地球を通過する重力波のエネルギー束にどのような制限を置くことができるか？　答えに対する数学的な公式は数値的に

$$\text{束} \lesssim 10^{18}\,\mathrm{erg/cm^2\,sec} \qquad (0.3\,\mathrm{cycle/sec} \lesssim \nu \lesssim 1\,\mathrm{cycle/day}\ \text{に対して}) \tag{37.10a}$$

を与えるはずである．この数値は

$$\text{密度} \lesssim 10^{-13}\,\mathrm{g/cm^3} \tag{37.10b}$$

の重力波における質量密度への限界に対応する．なぜこれが興味のない限界であるか？

37.4　振動する，力学的な検波器：予備的な注意

[本章の残りはトラック–2 である．既述のトラック–2 の材料は準備として必要とされない．そしてまたそれは任意の後の章に対して必要とされない．]

本章の残りは（37.9 節を除いて），振動する，力学的な検波器（地球，Weber の棒，複雑な形をもつ“棒”等）の詳細な解析を与える．

解析の詳細およびその適用は，2 個の次元のない数の値に決定的な方法で依存する．(1) 比 $\tau_{\mathrm{GW}}/\tau_0$，ここに

$$\tau_{\mathrm{GW}} \equiv \begin{pmatrix}\text{重力波の振幅およびスペクトルにおけ}\\ \text{る変化に対する特徴的な時間スケール}\end{pmatrix} \tag{37.11a}$$

$$\tau_0 \equiv \begin{pmatrix}\text{内部減衰の結果として徐々に死に絶え}\\ \text{る (興味ある規準モードにおける) 検}\\ \text{波器の振動に対する } e^{-1} \text{ になる時間}\end{pmatrix} \tag{37.11b}$$

そして (2) 比 $\bar{E}_{\text{振動}}/kT$，ここに

$$\bar{E}_{\text{振動}} \equiv \begin{pmatrix}\text{波が通過して検波器を駆動している間}\\ \text{の (興味ある規準モードにおける) 検}\\ \text{波器の振動エネルギーの平均値}\end{pmatrix} \tag{37.12a}$$

$$kT \equiv (\text{Boltzman 定数}) \times (\text{検波器の温度}) = \begin{pmatrix} \text{重力波が検波器を励起してい} \\ \text{ないときに興味ある規準モー} \\ \text{ドにおける平均エネルギー} \end{pmatrix} \tag{37.12b}$$

*16 $\tau_{\rm GW} \gg \tau_0$ であるときは，検波器は放射を“**定常的な束**”をもつとして眺める．そして検波器は定常状態の振動に応答する．$\tau_{\rm GW} \ll \tau_0$（波の短い爆発）のときは，波は検波器に“**ハンマー強打**”を与える．$\bar{E}_{\text{振動}} \gg kT$ であるときは，波の駆動力は検波器のランダムで内在的な，Brown 運動的な雑音の力以上に支配的である（“**波が支配的な検波器**”）．$\bar{E}_{\text{振動}} \lesssim kT$ であるときは，波の駆動力は検波器のランダムで内在的な，Brown 運動的な雑音の力と競わなければならない（“**雑音の検波器**”）．

37.5 から 37.7 節までは波が支配的な検波器を取り扱う ($\bar{E}_{\text{振動}} \gg kT$)．それらの節の主要な結果はここで素早い予告編として現れるコラム 37.3 に要約される（前もって完全には理解できないかもしれないけれども）．37.8 節は雑音の検波器を取り扱う．

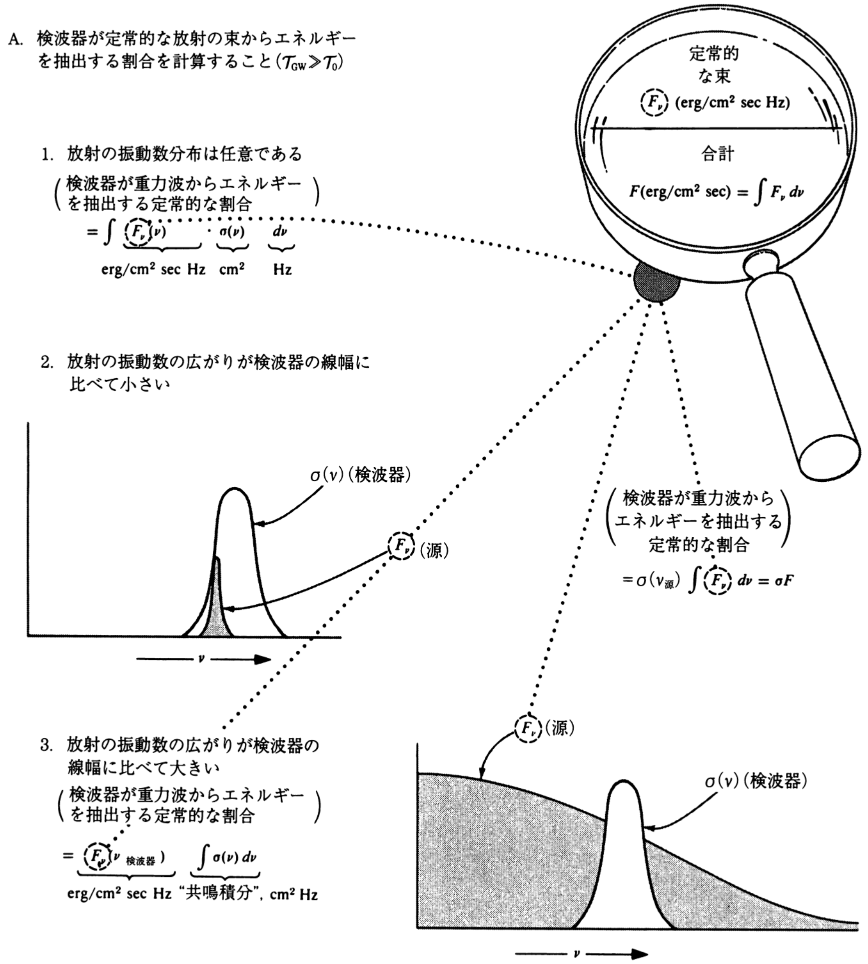
*17 **警告**：本章の残りを通して断面積の概念に集中する．これは検波器の理論への最初の導入に対して立派である．しかし断面積は，とくに放射の詳細な波の形を研究したいときには，完全な説明でない．そしてときには（たとえば，図 37.2(a) の検波器に対しては）断面積は説明ではけっしてない．新しい検波器を考案する第 1 級の実験家は，電波技師は新しい電波望遠鏡を考案するとき以上にほとんど断面積について取り扱わないだろう．注意はまたおもにアンテナの帯域幅に，および検波器の応答の他の，より詳細な特徴に，アンテナの変位信号検出器への結合に，信号検出器の応答の特徴に，アンテナの雑音に，信号検出器の雑音等に，集中するだろう．これらの題目の概観に対しては，そして断面積の概念が役に立たない検波器の議論に対しては，たとえば，Press and Thorne (1972) をみよ．

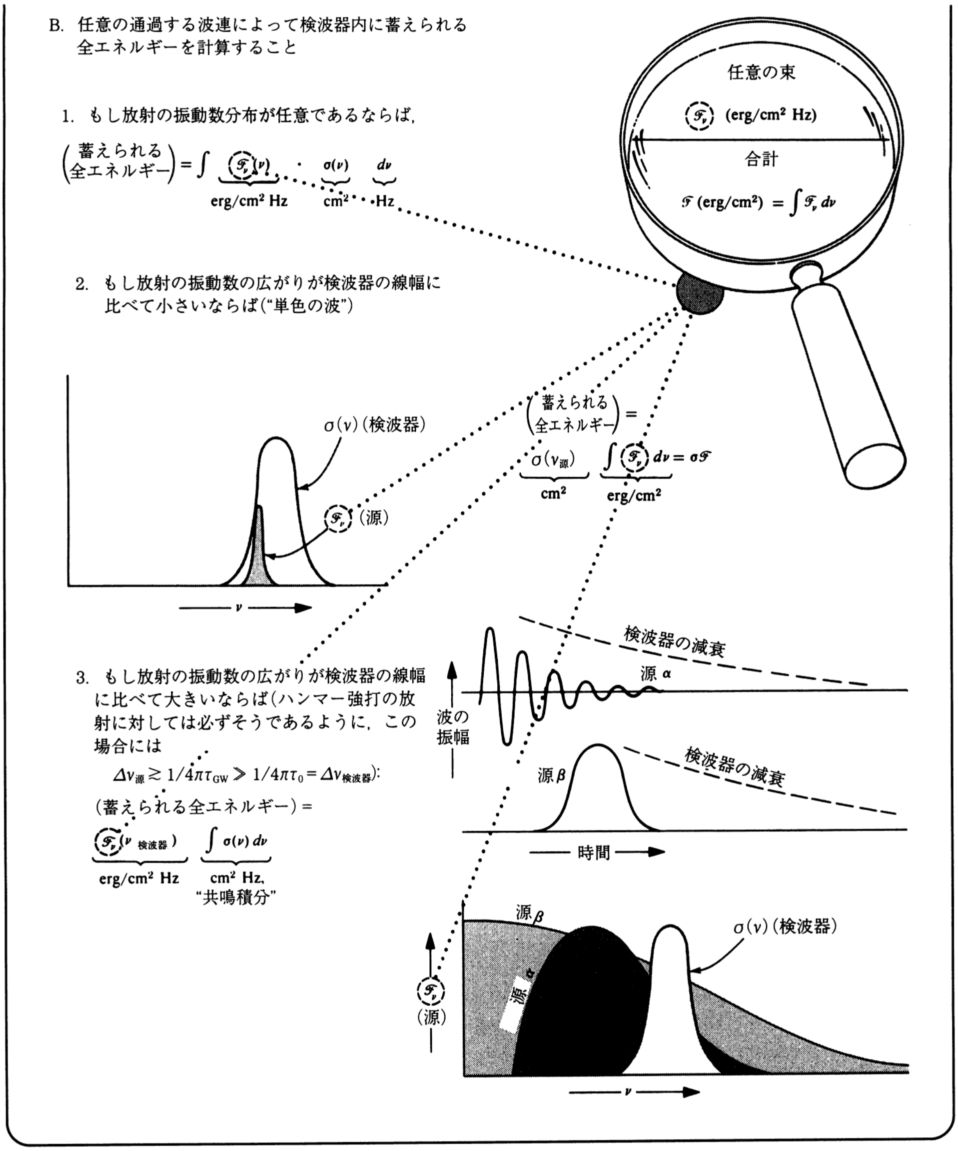
---

*16 定義：“定常的な束”，“ハンマー強打の波”，“波が支配的な検波器”，“雑音の検波器”

*17 検波器の考案は断面積の概念以上を要求する

コラム 37.3　波が支配的な検波器に対する断面積を用いる方法





37.5 単色波の定常的な束によって励起される，理想化された波が支配的な検波器

*18 波が支配的な検波器 ($\bar{E}_{振動} \gg kT$) が，放射の定常的な束 ($\tau_{GW} \gg \tau_0$) によって駆動されるという場合に始める．最初，任意の形の固体棒でなく，むしろ図 37.4 の理想化された検波器を取り扱う．平衡状態の長さ $2L$ のバネの両端にある 2 個の質量 M でつくられて
*19 いる振動子．検波器は自然な振動数 ω_0 および減衰時間 $\tau_0 \gg 1/\omega_0$ をもつとすると，検波器の運動方程式は（検波器の固有基準系で）

---

*18 理想化された検波器：単色波の定常的な束によって駆動される振動子

*19 (1) 運動方程式の導出

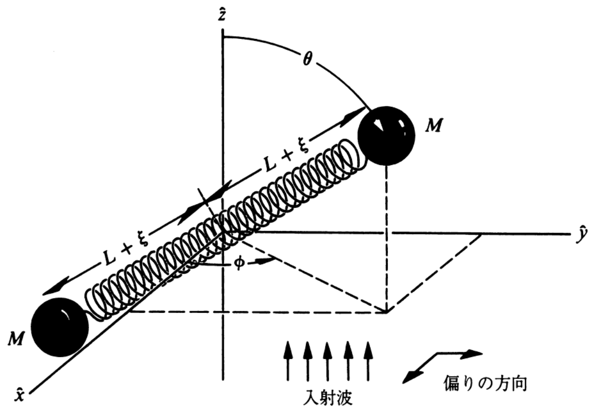


図 37.4　線形に偏った重力波に応ずる理想化された検波器（振動子）.

$$\ddot{\xi} + \dot{\xi}/\tau_0 + \omega_0^2\xi = \text{駆動の加速度} \tag{37.13}$$

である．偏り $\boldsymbol{e}_+$ および角振動数 ω の重力波を $-\hat{z}$ 方向から検波器に衝突させる．そして波によって決められる $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 軸に相対的な検波器の極角度は θ および ϕ とする．

入射波は振幅

$$A_\times = 0, \qquad A_+ = \mathcal{A}_+ e^{-i\omega(t-z)} \tag{37.14}$$

をもつ式 (37.1) によって記述される（ここおよびいたるところで，すべての複素数表現の実数部分をとらなければならない）．検波器は波長よりもはるかに小さいと仮定するので，検波器を通して $z \approx \hat{z} = 0$ と置くことができる．そうすると波によって生み出される潮汐加速度

$$\left(\frac{d^2\hat{x}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{波による}} = -R_{\hat{x}\hat{0}\hat{j}\hat{0}}x^{\hat{j}} = -\frac{1}{2}\omega^2\mathcal{A}_+e^{-i\omega\hat{t}}\hat{x},$$
$$\left(\frac{d^2\hat{y}}{d\hat{t}^2}\right)_{\text{波による}} = -R_{\hat{y}\hat{0}\hat{j}\hat{0}}x^{\hat{j}} = +\frac{1}{2}\omega^2\mathcal{A}_+e^{-i\omega\hat{t}}\hat{y}$$

は振動子に沿う潮汐加速度の成分として

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{\hat{x}}{L}\frac{d^2\hat{x}}{dt^2} + \frac{\hat{y}}{L}\frac{d^2\hat{y}}{dt^2} + \frac{\hat{z}}{L}\frac{d^2\hat{z}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\omega^2\mathcal{A}_+Le^{-i\omega\hat{t}}\frac{\hat{x}^2-\hat{y}^2}{L^2}\\ &= -\frac{1}{2}\omega^2\mathcal{A}_+Le^{-i\omega\hat{t}}\sin^2\theta\cos 2\phi\end{aligned}$$

をもつ．したがって振動子に対する運動方程式は

$$\ddot{\xi} + \dot{\xi}/\tau_0 + {\omega_0}^2\xi = -\frac{1}{2}\omega^2\mathcal{A}_+Le^{-i\omega\hat{t}}\sin^2\theta\cos 2\phi \tag{37.15}$$

である．駆動力は重力波の "スピン 2" の性質のゆえに $\cos 2\phi$ のように変化する．横平面における 180 度の回転は波を不変のままにとどめる．90 度の回転は位相を逆転させる．$\sin^2\theta$ 項は波の横方向の性質［$\sin\theta$ の 1 つの要素は検波器の方向への射影を説明する］プ

ラス波の潮汐力の性質から生ずる［$\sin\theta$ の別な要素は（相対的な力）$\propto$（**横方向の平面内での距離**）を説明する］.

運動方程式 (37.15) の簡明な定常状態の解は

*20
$$\xi = \frac{\frac{1}{2}\omega^2 \mathcal{A}_+ L \sin^2\theta \cos 2\phi}{\omega^2 - {\omega_0}^2 + i\omega/\tau_0} e^{-i\omega\hat{t}} \tag{37.16}$$

である．入射波が検波器と共鳴近くにあるときには $|\omega \pm \omega_0| \lesssim 1/\tau_0$ となり，振動子は大きい振幅まで励起される．それ以外では励起は小さい．今後，共鳴近くの励起に注目する．そうすると式 (37.16) は単純化することができる（**注意**：ω_0 は正であるが，ω は負あるいは正であってよい）.

$$\xi = \frac{\frac{1}{4}\omega_0 \mathcal{A}_+ L \sin^2\theta \cos 2\phi}{|\omega| - \omega_0 + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\omega) i/\tau_0} e^{-i\omega\hat{t}} \tag{37.16$'$}$$

検波器の有用さの 1 つの測度は，吸収する重力波のエネルギーに対する検波器の断面積である．上述の振幅および 2 個の質量 M をもつ検波器における定常状態の振動エネルギーは

$$E_{振動} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot M\cdot(\dot{\xi}^2)_{最大} = \frac{\frac{1}{16} M L^2 {\omega_0}^4 {\mathcal{A}_+}^2 \sin^4\theta \cos^2 2\phi}{(|\omega| - \omega_0)^2 + (1/2\tau_0)^2} \tag{37.17}$$

である．このエネルギーは最初，率 $E_{振動}/\tau_0$ で消失される．重力波としてのエネルギーの放射を無視するならば（無視できる過程!），消失率を検波器が入射波からエネルギーを吸収する率に等しく置くことができる．それは今度は "断面積"σ × 入射束に等しい.

$$E_{振動}/\tau_0 = -dE_{波}/dt = \sigma T^{0z(\mathrm{GW})} = \frac{1}{32\pi}\sigma\omega^2 {\mathcal{A}_+}^2$$

*21
したがって，**共鳴の近くでは** ($|\omega \pm \omega_0| \ll \omega_0$)，重力波のエネルギーを途中で奪う**断面積**は

$$\sigma = \frac{2\pi M L^2 ({\omega_0}^2/\tau_0) \sin^4\theta \cos^2 2\phi}{(|\omega| - \omega_0)^2 + (1/2\tau_0)^2} \quad （偏った放射に対して） \tag{37.18}$$

である．この表現は単色の放射に適用される．しかし，多くの別な種類の波についての経験はしばしば，検波器の共鳴幅よりもはるかに大きい入射放射の "帯域幅" をもつ，振動数の幅広い連続体を取り扱わなければならないことを教えた（コラム 37.3 をみよ）．これらの条件の下で，重要な量は断面積自身でなくて，"断面積の共鳴積分" である.

$$\int_{共鳴} \sigma\, d\nu = \int \sigma (d\omega/2\pi) = 2\pi M L^2 {\omega_0}^2 \sin^4\theta \cos^2 2\phi \quad （偏った放射に対して） \tag{37.19}$$

この断面積の大きさを吟味する前に，その方向性を吟味する（"アンテナビームパターン"）．$\sin^4\theta \cos^2 2\phi$ の因子は直線状に偏った，$\boldsymbol{e}_+$ 放射に関係する（図 37.4 をみよ）．偏りの直交モード，$\boldsymbol{e}_\times$ に対しては，$\cos^2 2\phi$ は $\sin^2 2\phi$ によって置き換えられるべきである．そして偏っていない（非干渉の混合）放射あるいは円形に偏った放射に対しては，断面積はこれら 2 つの表現の平均である．こうして
*22

*20 (2) 振動数と方向づけの関数としての振動子の振幅
*21 (3) 偏った放射に対する断面積
*22 (4) 偏っていない放射に対する断面積

$$\sigma = \frac{\pi M L^2 ({\omega_0}^2/\tau_0)\sin^4\theta}{(|\omega| - \omega_0)^2 + (1/2\tau_0)^2} \qquad \text{（偏っていない放射に対して）} \tag{37.20}$$

この偏っていない断面積は，検波器の赤道平面の周りに半分の幅 33 度で，ピークに達することに注意せよ．入射波のすべての可能な方向を通して平均すると，断面積は

$$\begin{aligned}\langle\sigma\rangle_{\text{すべての方向}} &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sigma \sin\theta \, d\theta = \frac{8}{15}\sigma_{\text{最大}} \\ &= \frac{(8\pi/15) M L^2 ({\omega_0}^2/\tau_0)}{(|\omega| - \omega_0)^2 + (1/2\tau_0)^2} \qquad \text{（偏っていない放射に対して）}\end{aligned} \tag{37.21}$$

である．

上述の断面積を種々の示唆に富む形式に書き直すことができる．たとえば，共鳴について，断面積 (37.21) は

$$\langle\sigma\rangle_{\text{すべての方向}} = \frac{4\pi^2}{15}\frac{4M}{2\pi/\omega_0}(\omega_0\tau_0)(2L)^2$$

となる．$\omega_0\tau_0$ は検波器の "$\mathcal{Q}$" を定義することを思い出せ．$1/\mathcal{Q} \equiv$（振動のラジアンあたり散失されるエネルギーの割合）．$2\pi/\omega_0$ は共鳴放射の波長 λ_0 であることに注意せよ．最後に $r_g = 4M$ によって検波器の重力半径を表す．これら 3 個のよく知られた量によって，断面積に対して公式

*23
$$\begin{aligned}\frac{\langle\sigma\rangle_{\text{すべての方向}}}{(2L)^2} &= \frac{\text{(共鳴に基づく吸収波に対する断面積)}}{\text{検波器の“幾何学的な”断面積}} \\ &= (4\pi^2/15)(r_g/\lambda_0)\mathcal{Q} \qquad \text{（共鳴に基づく偏っていない放射に対して）}\end{aligned} \tag{37.22}$$

を見出す．この関係は任意の共鳴する検波器に対して大きさの程度で成り立つ．それは，重力波天文学は困難な企てに違いないことを赤裸々に示している．適度な予算が与えられたとき，因子 r_g/λ_0 をあなたはどれくらい大きくすることができるだろうか？ Weber の 1970 年の検波器は $2L_{\text{有効}} \approx 1\,\text{m}$，$r_g \approx (0.74\times10^{-28}\,\text{cm/g})\times(10^6\text{g}) \approx 10^{-22}\,\text{cm}$，$\nu_0 = \omega_0/2\pi = 1,660\,\text{Hz}$，$\lambda_0 \approx 200\,\text{km}$，$r_g/\lambda_0 \approx \frac{1}{2}\times10^{-29}$，$\tau_0 \approx 20\,\text{sec}$，$\mathcal{Q} \approx 2\times10^5$．したがって

$$\sigma_{\text{Weber}} \approx 3\times10^{-20}\,\text{cm}^2 \qquad \text{（共鳴に基づく）} \tag{37.23}$$

*24 重力波のエネルギーのどのような束が冷たい検波器 ($\sim 0\,\text{K}$) を励起して，(Boltzmann 定数) × (室温) $\sim 4\times10^{-14}\,\text{erg}$ の振動エネルギーをもつ，大ざっぱに定常状態の振動にするのに入射されなければならないだろうか？ 振動子は，もし波が支配的になるほど十分冷却されるならば，率 $E_{\text{振動}}/\tau_0 \sim 2\times10^{-15}\,\text{erg/sec}$ でエネルギーを消失する．入射束は率

$$T_{00}^{(\text{GW})}\sigma \sim 2\times10^{-15}\,\text{erg/sec} \tag{37.24a}$$

---

*23　任意の共鳴する検波器に対する断面積の大きさ

*24　Weber 型の検波器を励起するために要求される束

でこの損失を埋め合わせなければならない．それは $2\times 10^{-15}/3\times 10^{-20} \sim 10^5\,\mathrm{erg/cm^2\,sec}$ の程度の入射束を意味する．さらに，この束は共鳴の狭い幅

$$\nu \approx \nu_0 \pm 1/4\pi\tau_0 = (1660 \pm 0.004)\,\mathrm{Hz} \tag{37.24b}$$

内に集中されなければならない．誰の標準によっても，これはこのような小さい帯域幅（$\sim 10^7\,\mathrm{erg/cm^2\,sec\,Hz}$, 同じ温度での Planck 平衡に対応するであろう，黒体重力放射，$8\pi\nu^2 kT/c^2 = 3\times 10^{-27}\,\mathrm{erg/cm^2\,sec\,Hz}$ に比べたとき，相違の大きい要因は摩擦および重力放射による振動子の減衰率における相違の直接な反映である）に対する非常に高い重力放射の束である．

*25　式 (37.22) は最適の検波器は大きい $\mathcal{Q}$ をもたなければならないように見える．これは必ずしもそうでない．断面積が大きい帯域幅，$\Delta\omega \approx \omega_0/\mathcal{Q}$ は，増大する $\mathcal{Q}$ とともに減少することを思い出せ．帯域幅 $\Delta\omega \gg \omega_0/\mathcal{Q} \equiv 1/\tau_0$ および特別な束

$$F_\nu(\mathrm{erg/cm^2\,sec\,Hz})$$

をもつ波の入射する定常的な束が検波器を駆動するとき，検波器は

$$(\text{エネルギーの消失率}) = \frac{dE}{dt} = \int_{\text{共鳴}} F_\nu \sigma\, d\nu = F_\nu(\nu_0) \int_{\text{共鳴}} \sigma\, d\nu \tag{37.25}$$

（↑ ［帯域幅 $\Delta\nu \gg 1/\tau_0$ をもつ放射に対して］）

という率でエネルギーを消失する．したがって，検波器の有効性の主要な測度は共鳴にわたる断面積の積分，$\int \sigma\, d\nu$ ［式 (37.19)］であるだろう（次節をみよ）．この振動数積分された断面積は検波器の $\mathcal{Q}$ によらない．したがって大きい $\mathcal{Q}$ が望ましいかどうかを定めるにはより高度の推論（たとえば，信号対雑音の理論）を用いなければならない（37.8 節をみよ）．

37.6　任意の放射束によって励起される，波が支配的な理想化された検波器

*26　偏り $\boldsymbol{e}_+$ しかし任意のスペクトルの平面に偏った波が ［$A_\times = 0$ をもつ式 (37.1)］ 図 37.4 の理想化された検波器に衝突する．そうすると検波器に対する運動方程式は単色波に
*27　対する運動方程式 (37.15) と同じである．しかし $-\omega^2 \mathcal{A}_+ e^{-i\omega\hat{t}}$ が $\ddot{A}_+$ によって置き換えられる．

$$\ddot{\xi} + \dot{\xi}/\tau_0 + {\omega_0}^2 \xi = \frac{1}{2}\ddot{A}_+ L \sin^2\theta \cos 2\phi \tag{37.26}$$

［今まで検波器のすべての解析は（検波器が波の波長よりもはるかに小さいとき）座標 $\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ をもつ固有基準系で遂行されるという事実に完全に慣れている．したがって，視力の容易

*25　大きい $\mathcal{Q}$ は必ずしも最適でない

*26　理想化された検波器の任意の非単色束への応答

*27　(1) 導出

さのために，これらの"固有座標"上の"ハット (hat)"を無視して，それらをたんに t, x, y, z と表す．]

波および検波器の変位を Fourier 解析する．

$$A_+(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_+(\omega) e^{-i\omega t} \tag{37.27a}$$

$$\xi(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\xi}(\omega) e^{-i\omega t} \tag{37.27b}$$

そして式 (37.26) から

$$\tilde{\xi} = \frac{\frac{1}{2}\omega^2 \tilde{A}_+ L \sin^2\theta \cos 2\phi}{\omega^2 - \omega_0{}^2 + i\omega/\tau_0}$$

を結論する．この Fourier の振幅は $|\omega \pm \omega_0| \ll \omega_0$ でなければ無視できる．したがって，精度の損失なしに，それを

$$\tilde{\xi} = \frac{\frac{1}{4}\omega_0 \tilde{A}_+ L \sin^2\theta \cos 2\phi}{|\omega| - \omega_0 + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\omega) i/\tau_0} \tag{37.28}$$

と書き直すことができる［定常状態の振幅 (37.16′) と比較せよ］．

どれだけの全エネルギーが重力波によって検波器内に蓄積されるかを求めよ．振動の振幅，$\xi(t)$ を，直接吟味することによって答えを**求めるな**．なぜならその振幅は内部減衰と波の駆動力の**両方**によって支配されるから，それは蓄積されるエネルギーを直接反映しない．蓄積される全エネルギーを得るには各質量に作用する力にその速度によって掛けられたものを時間について積分せよ．

$$\begin{pmatrix}\text{蓄積される全}\\ \text{エネルギー}\end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underset{[2\text{ 質量}]}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{2} M \ddot{A}_+ L \sin^2\theta \cos 2\phi\right)}_{[\text{各質量への力}]} \underset{[\text{各質量の速度}]}{\dot{\xi}}\, dt$$

Parseval の定理（数理物理学のもっとも有力な道具の 1 つ!）を用いて時間積分を振動数積分によって置き換えよ．

$$\begin{pmatrix}\text{蓄積される全}\\ \text{エネルギー}\end{pmatrix} = \mathbf{R} \int_{-\infty}^{+\infty} (ML \sin^2\theta \cos 2\phi)(-\omega^2 \tilde{A}_+{}^*)(-i\omega\tilde{\xi}) d\omega$$

それから式 (37.28) を用いてこれを完全に波の振幅によって書き直せ．

$$\begin{pmatrix}\text{蓄積される全}\\ \text{エネルギー}\end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2\pi(\omega_0{}^2/\tau_0) ML^2 \sin^4\theta \cos^2 2\phi}{(|\omega| - \omega_0)^2 + (1/2\tau_0)^2}\right] \left[\frac{\omega^2 |\tilde{A}_+|^2}{16\pi}\right] d\omega \tag{37.29}$$

この表現における最初の項は正確に最後の節［式 (37.18)］で導かれた，単色波に対する断面積である．2 番目の項は等しく単純な解釈をもつ．重力波が検波器の単位表面積を横切ってもち運ぶ全エネルギーは

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathrm{erg/cm^2}) &= \int T_{00}^{(\mathrm{GW})}dt = \int \frac{1}{16\pi}\dot{A}_+{}^2\,dt \\ &= \int \frac{\omega^2|\tilde{A}_+|^2}{16\pi}d\omega = \int \frac{\omega^2|\tilde{A}_+|^2}{8}d\nu\end{aligned} \tag{37.30}$$

である（Parseval の定理，再び!）．したがって，波によってもち運ばれる単位面積あたりの，単位振動数間隔あたりのエネルギーは

$$\mathcal{F}_\nu(\mathrm{erg/cm^2\,Hz}) = \frac{1}{8}\omega^2|\tilde{A}_+|^2 \tag{37.31}$$

である［$-\infty < \nu < +\infty$ に対して，$0 < \nu < +\infty$ に対してはこれを 2 倍せよ，本章の残りに対してわれわれが用いる慣習］．これは式 (37.29) における 2 番目の項の 2π 倍である．

*28 式 (37.18)，(37.29) および (37.31) を結びつけると

$$(\text{蓄積される全エネルギー}) = \int \sigma(\nu)\mathcal{F}_\nu(\nu)\,d\nu \tag{37.32}$$

を見出す．**これは，波のスペクトルに関係なく，そして波が長い時間定常的な束で入射しようと，あるいは短い爆発で入射しようと，あるいは任意の別な形で入射しようと関係なく，蓄積される全エネルギーである**．それは，波が検波器を駆動している間，検波器が波に支配されている限り（$E_{\text{振動}} \gg kT$），完全に一般的である．

*29 実験家はいかに蓄積される全エネルギーを測定することができるか？ 実験家は一般に，それを直接測定できない．しかし実験家はそれに等しい量，内部減衰すなわち，“摩擦” になる全エネルギーを測定することができる．エネルギーは，振動エネルギーが kT よりもはるかに大きいときには（波が支配的である期間は），率 $E_{\text{振動}}/\tau_0$ で “摩擦” によって取り除かれる．したがって，実験家は

$$(\text{蓄積される全エネルギー}) = \frac{1}{\tau_0}\int E_{\text{振動}}\,dt \qquad (\text{一般に}) \tag{37.33}$$

↑［$E_{\text{振動}} \gg kT$ である期間にわたって積分せよ］

を測定できる．

“ハンマー打撃のような波”（τ_{GW} = 波の継続期間 $\ll \tau_0$）の特別な場合には，振動エネルギーは “瞬間的に”$\sim kT$ からピーク値，$E_{\text{振動}}^{\text{ピーク}} \gg kT$ まで駆動される．それから指数関数的に $\sim kT$ まで低下する．こうしてハンマー打撃のような波に対しては

$$(\text{蓄積される全エネルギー}) = \frac{1}{\tau_0}\int_0^\infty E_{\text{振動}}^{\text{ピーク}}e^{-t/\tau_0}dt = E_{\text{振動}}^{\text{ピーク}} \tag{37.34}$$

波が時間の長い期間に対して（$\tau_{\mathrm{GW}} \gg \tau_0$）定常で，特別な束

$$F_\nu = \mathcal{F}_\nu/\tau_{\mathrm{GW}} \qquad (\mathrm{erg/cm^2\,sec\,Hz})$$

をもつときは，エネルギーは一定の率で蓄積されるだろう．

---

*28 (2) 答え—［(蓄積されるエネルギー) $= \int \sigma\mathcal{F}_\nu\,d\nu$］

*29 蓄積されるエネルギーをいかに測定できるか

$$(dE/dt) = (\text{蓄積される全エネルギー})/\tau_{\rm GW}$$

そして式 (37.32) は

$$(\text{エネルギーの蓄積率}) = \int \sigma(\nu) F_\nu \, d\nu \qquad [\text{定常波}\ (\tau_{\rm GW} \gg \tau_0)\ \text{に対して}] \qquad (37.35)$$

と書き直すことができる．

式 (37.32) および (37.35) は断面積の概念の現実的な状況への適用に対する主要な式である．それらは，もし適切な断面積を用いることを確かにさえするならば [式 (37.18) の代わりに (37.20) あるいは (37.21)]，偏った放射へのみならず，偏っていない放射へおよびすべての方向から入射する放射へ適用できる．それらの適用の例に対しては，コラム 37.3 をみよ．

37.7 任意の放射束によって励起される，波が支配的な一般的な検波器

理想化されたバネと質量検波器の断面積は式 (37.18) から (37.21) までよりも優雅な形—物理学の多くの分野と接触させ，そして**任意の**振動する共鳴的な検波器なら何に対しても成り立つ形に，表現されうる．

*30　検波器のエネルギーの単位量が内部減衰および重力波の再放射に失われる率を記述する，"Einstein の A 係数" を導入する．

$$A_{\text{消散}} \equiv \left(\frac{\text{エネルギーが内部で消散される率}}{\text{検波器の振動におけるエネルギー}}\right) = \frac{1}{\tau_0} \qquad (37.36a)$$

$$A_{\rm GW} \equiv \left(\frac{\text{エネルギーが再放射される率}}{\text{振動におけるエネルギー}}\right) \qquad (37.36b)$$

図 37.4 の理想化された検波器に対して，重力波の放出に対する標準的な公式 (36.1) は

$$(\text{再放射される勢力}) = \frac{32}{15}\omega^6 M^2 L^2 \langle \xi^2 \rangle_{\text{時間平均}} \qquad (37.37)$$

を与える（練習問題 37.8 をみよ）．したがって

$$A_{\rm GW} = \frac{16}{15} M L^2 \omega^4 \qquad (37.38)$$

これらの関係式を用いて検波器の断面積を $A_{\text{消散}}, A_{\rm GW}$，および放射の既約波長

$$\lambda\!\!\!^{-} \equiv 1/\omega \qquad (37.39)$$

によって書き直すことができる．たとえば，断面積 (37.21)—今 $\omega \geq 0$—は

$$\langle \sigma \rangle_{\text{すべての方向}} = \frac{1}{2}\pi \lambda\!\!\!^{-2} \frac{A_{\rm GW} A_{\text{消散}}}{(\omega - \omega_0)^2 + (A_{\text{消散}}/2)^2} \qquad (\text{偏っていない放射に対して}) \qquad (37.40)$$

である（**すべての断面積の公式において仮定** $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ **を思い出せ**）．そして共鳴に

*30　"Einstein の A 係数" によって再表現される断面積

わたる対応する積分は

$$\int \langle\sigma\rangle_{\text{すべての方向}}\, d\nu = \frac{1}{2}\pi\lambda\!\!\!^{-}{}_0{}^2 A_{\rm GW} \qquad \text{(偏った放射に対して)} \tag{37.41}$$

*31 **断面積に対するこれらの表現はそれらの応用において内容が広い．それらは任意の振動する，共鳴する，重力波の検波器なら何にでも適合する**，練習問題 37.9 の "詳細平衡" から，および練習問題 37.10 の力学的な計算からわかるように．それらはまた，統計的な要素および記号における明白な変化を用いて，核物理学における複合核反応に（"Breit–Wigner 公式"，Blatt and Weisskopf, pp.392–394, 408–410, 555–559 をみよ)，原子および分子による光子の吸収に，テレビジョンアンテナによる電磁波の受信等に適合する．式 (37.41) は実際述べる，"振動子が重力放射の放出によって減衰される率を計算せよ．その率にアンテナに関するすべての仕事においてよく知られた幾何学的な因子 $\frac{1}{2}\pi\lambda\!\!\!^{-}{}_0{}^2$ を掛ける．そしてただちに断面積の共鳴積分を得る．結果は幾何学的な単位（cm）で表される．共鳴積分を慣習的な単位で得るには，変換因子 $c = 3\times10^{10}\,\mathrm{cm\,Hz}$ を掛ける．

理想化されたバネ上に質量をもつ検波器の '力学的な解析' は，前節で展開されているように，容易に任意の形の振動する検波器に拡張される (地球, Weber の棒, 自動車の泥よけ等). 拡張は練習問題 37.10 で遂行される．そしてそのおもな結果はコラム 37.4 に要約される．

*32 検波器に入るエネルギーの部分は散乱される重力放射として再放射される．実験室の減衰係数をもつ実験室ほどの大きさの任意の検波器に対してこの割合は途方もなく小さい．しかし，原理的により大きい系と再放射が完全には無視できない条件を想像することができる．このような例では散乱を取り扱っている．ここではこのような散乱過程を解析する試みはなされない．単純な大きさの程度の取り扱いに対しては，核共鳴における中性子あるいは光学的な共鳴における光子の散乱を計算するために用いる，Breit–Wigner 散乱公式の同じ型を用いることができる．より詳細な説明は散乱される放射の偏りと入射放射の偏りとの間の相関を解析するだろう．テンソルの特徴をもつ重力放射に対してここで有用な公式の種類は，スピン 1 の特徴をもつ放射の偏りを取り扱う今日用いられる公式と非常に似ているだろう．ここではとくに種々の矛盾する記号で長年の経験後に，多くの研究者の協力的な努力によって展開された "Madison Convention" [Barschall and Haeberli (1971)] に注意する．スピン 1 の放射に対して今日利用されうる最善の記号が展開された方法を考慮して，重力放射を散乱している物体に対する散乱パラメータを記述するための任意の 1 つの記号を正典と認めるにはあまりにも早すぎると感じられる．

コラム 37.4　任意の形の振動している共鳴検波器

A. 検波器の物理学的な特徴

1. 検波器は密度分布 $\rho(\boldsymbol{x})$ と全質量 $M = \int \rho\, d^3x$ をもつ堅い物体（地球，Weber

*31 A 係数形式の一般性
*32 検波器による放射の散乱

棒，自動車の泥よけ，…）である．

2. 検波器は規準モードの振動をもつ．n 番目の規準モードは

$$\omega_n = \text{角振動数},$$

$$\tau_n = \begin{pmatrix}\text{振動のエネルギーが内部減衰の}\\ \text{結果として } e^{-1} \text{に減少する時間}\end{pmatrix} \gg 1/\omega_n, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{x}) = \text{固有関数 (ここでは次元をもたずそして実数であると定義されている)}$$

固有関数 $\boldsymbol{u}_n$ は直交化されているので，

$$\int \rho \boldsymbol{u}_n \cdot \boldsymbol{u}_m \, d^3x = M\delta_{nm} \tag{2}$$

3. $E_{\text{振動}} \gg kT$ をもつ規準モードの振動の間，最初 $\hat{x}$ にある質量要素は変位

$$\delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{x})\mathcal{B}_n e^{-i\omega_n t - t/\tau_n} \tag{3a}$$

（$\mathcal{B}_n$：[一定の振幅]）

を受ける．固定された $\boldsymbol{x}$ における密度は

$$\delta\rho = -\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{u}_n)\mathcal{B}_n e^{-i\omega_n t - t/\tau_n} \tag{3b}$$

だけ変化する．そして慣性モーメントのテンソルは振動する

$$\delta I_{jk} = I_{(n)jk}\mathcal{B}_n e^{-i\omega_n t - t/\tau_n} \tag{3c}$$

ここに $I_{(n)jk}$ は“**n 番目の規準モードに対する慣性モーメントの要素**”である．

$$\begin{aligned} I_{(n)jk} &\equiv \int -(\rho u_n{}^l)_{,l} x^j x^k d^3x \\ &= \int \rho(u_n{}^j x^k + u_n{}^k x^j) d^3x \end{aligned} \tag{4}$$

[次元：質量 × 長さ，I_{jk}を得るためには $\mathcal{B}_n$（長さ）を掛ける]

対応する“**n 番目の規準モードに対する既約化四重極要素**”は

$$\mathcal{I}_{(n)jk} \equiv I_{(n)jk} - \frac{1}{3} I_{(n)ll}\delta_{jk} \tag{5}$$

である．

B. 検波器に対する断面積（練習問題 37.10）

1. 伝播方向 $\boldsymbol{n}$ および偏りテンソル $\boldsymbol{e}$ をもつ偏った放射に対して

$$h_{jk} = A(t - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})e_{jk},$$

$$e_{jk}n_k = 0, \qquad e_{jj} = 0, \qquad e_{jk}e_{jk} = 2 \tag{6}$$

$$\sigma_n(\nu) = \sigma_n(\omega/2\pi) = \frac{\pi}{4}\frac{|I_{(n)jk}e_{jk}|^2}{M}\frac{{\omega_n}^2/\tau_n}{(|\omega|-\omega_n)^2+(1/2\tau_n)^2} \tag{7a}$$

$$\int_{\text{共鳴}} \sigma_n\, d\nu = \frac{\pi}{4}\frac{|I_{(n)jk}e_{jk}|^2}{M}{\omega_n}^2 \tag{7b}$$

2. 伝播方向 $\boldsymbol{n}$ をもつ**偏っていない放射**（偏りのでたらめな混合）に対して，断面積は

$$\sigma_n(\nu) = \sigma_n(\omega/2\pi) = \frac{\pi}{4}\frac{(I^{TT}_{(n)jk})^2}{M}\frac{{\omega_n}^2/\tau_n}{(|\omega|-\omega_n)^2+(1/2\tau_n)^2} \tag{8a}$$

$$\int_{\text{共鳴}} \sigma_n d\nu = \frac{\pi}{4}\frac{(I^{TT}_{(n)jk})^2}{M}{\omega_n}^2 \tag{8b}$$

である．ここに $I^{TT}_{(n)jk}$ は $I_{(n)jk}$ の横方向のゼロトレースの部分である（伝播方向 $\boldsymbol{n}$ に相対的に横方向でありそしてゼロトレースである）．

$$I^{TT}_{(n)} = PI_{(n)}P - \frac{1}{2}P\ \text{トレース}\ (PI_{(n)}), \qquad P_{jk} \equiv \delta_{jk} - n_j n_k \tag{9}$$

（コラム 35.1 をみよ）．

3. **偏っていない放射**に対する断面積は，**すべての方向にわたって平均されると，**

$$\langle\sigma_n(\nu)\rangle_{\text{すべての方向}} = \frac{1}{2}\pi\lambda^2\frac{A_{\text{GW}}A_{\text{消散}}}{(|\omega|-\omega_n)^2+(A_{\text{消散}}/2)^2} \tag{10a}$$

$$\int_{\text{共鳴}} \langle\sigma_n\rangle_{\text{すべての方向}}\, d\nu = \frac{1}{2}\pi\lambda^2 A_{\text{GW}} \tag{10b}$$

ここに Einstein の A 係数は

$$A_{\text{消散}} = 1/\tau_n \tag{11}$$

$$A_{\text{GW}} = \frac{1}{5}\frac{(I_{(n)jk})^2}{M}{\omega_n}^4 \tag{12}$$

C. 非周期的な源によって放射されるスペクトル（練習問題 37.11）

これらの公式を非周期的な源によって放出される放射に対する表現と比較することは教訓的である．

1. 源の既約化四重極要素を Fourier 解析せよ．

$$I_{jk}(t) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{I}_{jk}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

2. そうするとすべての時間にわたって放射される単位振動数あたりの $(\nu \geq 0)$ 全エネルギーは，方向 $\boldsymbol{n}$ 周りの単位立体角へ，そして偏りのテンソル $\boldsymbol{e}$ をもつ，

$$\frac{dE}{d\nu d\Omega} = \frac{1}{8}\sum_{\omega=\pm 2\pi\nu}|\tilde{I}_{jk}e_{jk}|^2\omega^6 \tag{13a}$$

[式 (7) と比較せよ]. 偏りについて集めると，これは

$$\frac{dE}{d\nu d\Omega}=\frac{1}{2}\sum_{j,k}|\tilde{I}_{jk}{}^{\mathrm{TT}}|^2\omega^6 \tag{13b}$$

である [式 (8) と比較せよ]. ここに $\nu \geq 0$.

3. 単位振動数あたりの放射される全エネルギーは，依然 $\nu \geq 0$ を保ち，すべての方向にわたって積分すると，

$$dE/d\nu=\frac{4\pi}{5}\sum_{j,k}|\tilde{I}_{jk}|^2\omega^6 \tag{14}$$

である [式 (10)–(12) と比較せよ].

[**練習問題**]

37.8　再放射される勢力

図 37.4 の理想化された重力波の検波器は角振動数 ω で振動する. 検波器が重力波として放射する勢力は式 (37.37) によって与えられることを示せ.

37.9　詳細平衡 (detailed balance) によって計算される断面積

詳細平衡の原理を用いて，任意の大きさ，形，あるいは質量の振動する共鳴検波器に対する（たとえば，振動する地球，あるいは Weber の振動する円筒，あるいは図 37.4 の理想化された検波器に対する）断面積 (37.41) を導け [**ヒント**：検波器は黒体重力波の浴槽と熱平衡にあるとする. そうすると検波器はエネルギーを波から吸収するのと同じ速さで再放射によってエネルギーを失わなければならない（内部減衰は無視できる. なぜなら真の熱平衡においては，内部減衰によるエネルギー損失はランダムな内部の Brown 的な力からのエネルギー増加と調和するだろうから）. 詳細には，検波器の内と外でのエネルギーの平衡は [I_ν =“比強度”, 式 (22.48) を用いて]

$$\begin{aligned}[4\pi I_\nu(\nu=\nu_0)]_{\text{黒体}}\times\int\langle\sigma\rangle_{\text{すべての方向}}\,d\nu\\ =A_{\mathrm{GW}}\times(\text{検波器の規準モードにおけるエネルギー})\end{aligned}$$

となる. Planck のスペクトルのよく知られた公式と重力波は 2 つの独立な偏りの状態をもつという事実を用いて，$\int\langle\sigma\rangle d\nu$ に対して解け]. **注意**：詳細平衡は放射あるいは粒子の任意の種類の熱的な浴槽と相互作用している任意の種類の共鳴系に適用できるから，式 (37.40) および (37.41) は，統計的な要素を適当に変えると，広い一般性をもつ.

37.10　振動する，共鳴検波器の規準モードの解析

コラム 37.4 に引用されている振動する，共鳴検波器に対するすべての結果を導け. 37.6 節における理想化された検波器の取り扱いにならって導出せよ [**指針**：(a) 検波器をコラム 37.4，式 (6) の偏った波によって駆動させよ. そして検波器を波によって支配させよ

$(E_{\text{振動}} \gg kT)$．検波器の質量要素の変位 $\delta\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$]．これは，

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_n B_n(t)\boldsymbol{u}_n(x) \tag{37.42a}$$

によって既述されることを示せ．ここに n 番目のモードに対する時間に依存する振幅は駆動される振動子の方程式

$$\ddot{B}_n + \dot{B}_n/\tau_n + {\omega_n}^2 B_n = R_n(t) \tag{37.42b}$$

を満たす．そしてここに曲率に起因する駆動項は

$$\begin{aligned} R_n(t) &= -R_{\hat{j}\hat{0}\hat{k}\hat{0}} \int (\rho/M) {u_n}^j x^k \, d^3x \\ &= \tfrac{1}{4}\ddot{A}(I_{(n)jk}e_{jk})/M \end{aligned} \tag{37.42c}$$

である（記号に対してはコラム 37.4 をみよ）．

（b）検波器および波の振幅を Fourier 解析せよ．

$$B_n(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{B}_n(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \tag{37.42d}$$

$$A_n(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \tag{37.42e}$$

そして運動方程式 (37.42b)，(37.42c) を解いて，共鳴の近傍で，

$$\tilde{B}_n = \frac{\frac{1}{8}\omega_n \tilde{A}(I_{(n)jk}e_{jk})/M}{|\omega| - \omega_n + \frac{1}{2}i/\tau_n} \qquad (|\omega \pm \omega_n| \ll \omega_n \text{に対して}) \tag{37.42f}$$

を得よ．

（c）検波器内で蓄積される全エネルギーを積分することによって

$$(\text{蓄積されるエネルギー}) = \int (\text{単位体積あたりの}\textbf{力})\cdot(\textbf{速度}) d^3x \, dt$$

を計算せよ．それによって

$$(n\ \text{番目の規準モード内に蓄積されるエネルギー}) = \frac{1}{4}(I_{(n)jk}e_{jk}) \int \ddot{A}\dot{B}_n \, dt$$

を得よ．

（d）Parseval の定理を適用し，そして表現 (37.42f) と結びつけて

$$(n\ \text{番目の規準モード内に堆積されるエネルギー}) = \int \sigma_n(\nu)\mathcal{F}_\nu(\nu) d\nu \tag{37.43}$$

を得よ．ここに σ_n はコラム 37.4 の式 (7a) によって与えられる．そして $(-\infty < \omega < +\infty$ に対して)

$$\mathcal{F}_\nu(\nu) = \mathcal{F}_\nu(\omega/2\pi) = \frac{1}{8}\omega^2 |\tilde{A}|^2 \tag{37.44}$$

（e）$\mathcal{F}_\nu(\nu)$ は検波器を通過する波によって運ばれる単位振動数あたり単位面積あたりの全エネルギーであることを示せ．

(f) コラム 37.4 に引用されているすべての残りの断面積を，この断面積の適切な操作によって得よ．コラム 35.1 および練習問題 36.9 に展開された，“横方向のゼロトレース部分” を射影しそして積分することに対して数学的な道具を用いよ．

37.11　源によって放射されるエネルギーのスペクトル

コラム 37.4 の最後の節に引用されている結果を導け．

37.12　放出と吸収のパターン

図 37.4 の基本的な亜鈴(アレイ)（dumbbell）振動子は，最初励起されていないときには $\sin^4\theta$ に比例する，偏っていない重力放射の吸収に対する断面積をもつ．そして励起されるときには，また $\sin^4\theta$（36 章）に比例する強度で放射する．放出と吸収のパターンは同一である．任意の別な亜鈴振動子は方向づけが可能だという相違を除いて，同じパターンを与える．ただ 1 つの非縮退の（したがって非回転の）モードにある，あるいは偏っていない放射によって外部から励起されている自由振動を受けている，一般的な形の非回転の振動子を考えよ．

(a) 検波器の放出のパターンはその吸収のパターンと同一であることを示せ［**ヒント**：コラム 37.4 の最後の若干の部分に提案されている比較をせよ］．

(b) この放出のパターン（≡ 吸収のパターン）は，空間におけるこのパターンの方向づけを記述する 3 個の Euler 角を除いて，そして全強度を定める 4 番目のパラメータを除いて，ただ 1 つの（“5 番目の”）パラメータによって一義的に固定される．

(c) このパラメータの 2 個の極端な値に対するのと，これらの 2 つの極端の間の中間のパラメータの自然な選択に対する，強度のパターンに対する図を構成せよ．

(d) 問題のパラメータを既約化四重極テンソルの主モーメントのある次元をもたない組合せによって定義せよ．

37.13　多重モード検波器

直径に比べて非常に長い長さの円筒棒を考える．棒の端から端までの振動の基本モードを “$n=1$” と名づけ，そして固有関数に $n-1$ 個の節をもつモードを “n 番目のモード” とよべ．n 番目の共鳴にある偏っていない重力波の傍受に対する断面積は，その共鳴にわたって積分し，そして方向にわたって平均すると，公式［Ruffini and wheeler（1971b）］

$$\int_{n\ \text{番目の共鳴,}\ \text{ランダムな}} \sigma(\nu)d\nu = \frac{32}{15\pi}\frac{v^2}{c^2}\frac{M}{n^2} \tag{37.45}$$

［奇数の n に対して（偶数の n に対してはゼロ)］

によって与えられる．ここに v は光の速さ c と同じ単位で表された棒内の音の速さである．そして M は棒の質量である（幾何学的な単位，慣習の単位を用いるときには右辺に因子 $G/c = 2.22\times10^{-18}\text{cm}^2\,\text{Hz/g}$ を掛けよ）．この表現は Weber の棒の最低のモードに対しては $\int\sigma\,d\nu = 10\times10^{-21}\text{cm}^2\,\text{Hz}$ を与える．多重モード検波器は William Fairbank and William Hamilton によって，および David Douglass and John A. Tyson によって構成されつつある（1973)．

37.14　重力放射の吸収に対する地球の理想化された模型の断面積

地球の四重極振動の観測される周期は 54 分である［たとえば，概説および参考文献につ

いては Bolt（1964）あるいは Press（1965）をみよ]．振動のモードを解析することは，地球における弾性に対してすべての十分な許容と密度の変化とともに，主要な計画である．したがって四重極放射の吸収に対する地球の断面積の最初の評価に対しては地球を重力のみによって球の形が保たれている一様な密度の流体の球（ゼロの剛性）として取り扱え．表面は $r=a$ から

$$r = a + a\alpha P_2(\cos\theta) \tag{37.46a}$$

まで変位させる．ここに θ は北極から測定された天頂角であり，そして α は主軸の微小な伸長である．形のこの変化と両立する最低のエネルギーの運動は速度の場

$$\xi^x = -\frac{1}{2}\alpha x, \qquad \xi^y = -\frac{1}{2}\alpha y, \qquad \xi^z = \alpha z \tag{37.46b}$$

によって記述される（ゼロ発散，ゼロ回転）．

(a) 運動エネルギーと重力のポテンシャルエネルギーとの和は

$$E = -(3/5)(M^2/a)(1-\alpha^2/5) + (3/20)Ma^2\dot{\alpha}^2 \tag{37.46c}$$

であることを示せ．

(b) 自由な四重極振動の角振動数は

$$\omega = (16\pi/15)^{1/2}\rho^{1/2} \tag{37.46d}$$

であることを示せ．

(c) 既約化四重極モーメントは

$$\not{I}_{xx} = \not{I}_{yy} = -Ma^2\alpha/5, \qquad \not{I}_{zz} = 2Ma^2\alpha/5 \tag{37.46e}$$

であることを示せ．

(d) 振動エネルギーの放出率は，1 周期にわたって平均すると，

$$-\langle dE/dt\rangle = (3/125)M^2a^4\omega^6\alpha_{ピーク}{}^2 \tag{37.46f}$$

であることを示せ．

(e) 重力波の減衰によるエネルギーの指数関数的な減衰率，あるいは“重力放射の線の広がり”は，

$$A_{\mathrm{GW}} = (4/25)Ma^2\omega^4 \tag{37.46g}$$

であることを示せ．

(f) でたらめの方向からでたらめの偏りで入射する放射に対する吸収断面積の共鳴積分は

$$\int_{共鳴}\langle\sigma(\nu)\rangle d\nu = (\pi/2)\lambda\!\!\!^{-}{}^2 A_{\mathrm{GW}} = (2\pi/25)Ma^2/\lambda\!\!\!^{-}{}^2 \tag{37.46h}$$

であることを示せ．

(g) この共鳴積分を評価せよ．**注意**：一様な密度の流体の球のこの模型は地球に対して，平均密度 $5.517\,\mathrm{g/cm^3}$ で，観測される 54 分と比べたとき，94 分 の四重極振動の周期を意味するだろう．そして観測される $0.33Ma^2$ と比べたときに慣性モーメント $(2/5)Ma^2$ を意味するだろう．Ruffini and Wheeler (1971b) は両方の効果に対する補正因子を評価し最終の共鳴積分に対して $\sim 5\,\mathrm{cm^2\,Hz}$ を与える．

37.8　雑音の検波器

入射波の帯域は検波器の共鳴幅に比べて大きいときには，波は

$$\underset{[\mathrm{erg}]}{(\text{蓄積される全エネルギー})} = \int \sigma \mathcal{F}_\nu\, d\nu = \underset{[\mathrm{erg\,cm^{-2}\,Hz^{-1}}]}{\mathcal{F}_\nu(\nu=\nu_0)} \underset{[\mathrm{cm^2\,Hz}]}{\int \sigma\, d\nu}$$

によって与えられる全エネルギーを蓄積する．少なくとも，検波器は波が支配的であるならば（すなわち，もし波が作用するあいだ $E_{\text{振動}} \gg kT$ ならば，Brown 的な力によって生み出される．振動の最初の振幅が，波による振幅と建設的にあるいは破壊的に干渉するには小さすぎるならば,）このとおりである．

*33 不幸にも，すべての実験は今日 (1973) 雑音を含む検波器に直面している．誰もいまだ，検波器は波が支配的であるほど強い波を見出していないし，あるいはそれほど感受性の強い検波器を構成していない．したがって，主要な実験的仕事は今日大きい雑音から小さい信号を拾うことである．これを行うための多くの技術が展開されており物理学の種々の分野で，天文学，心理学および工学におけるのとともに用いられている [たとえば，Davenport and Root (1958)，Blackman and Tukey (1959)，およびそこで与えられている文献をみよ]．主要な点はつねに雑音の同じ特徴よりも統計的により顕著な信号のある特徴，および予期される信号源から生じており他のところからでないことを示す相関（“体系的な誤りからの保護”）を見出すことである．こうしてパルサーからの定常的な重力波を検波するために，非常に正確に 2 つの数 $\langle N^2\rangle$ および $\langle (N+S)^2\rangle = \langle N^2\rangle + \langle S^2\rangle$ を定義することが求められるだろう．ここに N および S はそれぞれ雑音と信号の振幅である．長い系列の観測は（アンテナビームからのパルサーについての）$\langle N^2\rangle$ の 1 つの値を与える．別な等しく長い系列の観測は，最初の系列で点在されているが，ゼロ近似で $\langle N^2\rangle$ の同じ雑音を与えるべく予期されるだろう．次の近似で標準的な統計的な揺らぎの影響を認めそして計算する．実例となる見本で，同じデータから引き出される別なパラメータの統計的なテストによって確認される．理論は揺らぎは 95%の信頼で $10^{-5}\langle N^2\rangle$ よりも小さいことを保証する（$\langle 10^{-5}N^2\rangle$ を越える機会はただの 5%．この限界は時間とお金によって設定され，物理学の絶対的な制限によって設定されない）．2 番目の系列観測はパルサーがアンテ

*33　小さい信号の大きい雑音からの抽出，一般的な注意

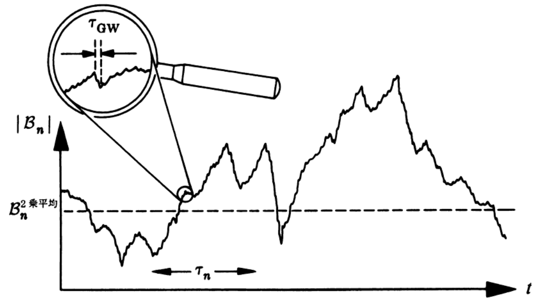


図 37.5 騒々しい検波器での，ハンマーで強打されて生ずる重力波の探知．弱いパルスさえも探知することは，もしパルスの時間が十分短いならば可能である．検波器の振動の振幅 $\mathcal{B}_n$ は，熱的な揺らぎ（ランダムウォーク，Brown 的雑音）による，時間間隔 Δt の間に量 $\sim\mathcal{B}_n^{2乗平均}(\Delta t/\tau_n)^{1/2}$ だけ変化する．検波器の熱運動（波によって引き抜かれるエネルギー！）と位相がはずれて到達する，継続 $\tau_{\rm GW}$ の波の爆発によって生み出される振幅の変化が挿入図に表現されている．波は探知できる．なぜなら

$$\Delta|\mathcal{B}_n|_{波による} \gg \mathcal{B}_n^{2乗平均}(\tau_{\rm GW}/\tau_n)^{1/2}$$

たとえ $\Delta|\mathcal{B}_n| \ll \mathcal{B}_n^{2乗平均}$ としても．

ナビーム内にある時間のみに遂行されるとする．アンテナビームは

$$\{\langle N^2\rangle + \langle S^2\rangle\}_{2\,番目の系列} = (1+7.3\times10^{-5})\{\langle N^2\rangle\}_{1\,番目の系列}$$

を与えるとする．そうすると 1 番目の近似で $\langle S^2\rangle$ は 95%の信頼で限界 $(7.3\pm1.0)\times 10^{-5}\langle N^2\rangle$ 内に存在するということができる．

*34 重力放射の多くの考えられうる源は，定常的な信号の強さよりもむしろ爆発を生み出す（図 37.5）．こうしてどのような特徴で “ハンマー打撃的な放射”($\tau_{\rm GW} \ll \tau_0$) が雑音と異なるかを調べるよう導かれる．検波器における “Brown 運動” 的な雑音は，熱浴槽との多数の小さい（分子的な）エネルギーの交換から生ずると考えられるだろう．以下の計算は，一連のこのような分子的な “一撃” が検波器内に生み出しうる振幅の代表的な変化率を評価しそしてそれを放射の “ハンマーでの一撃” のようなパルスによって生み出される急速な振幅の変化と比較する．計算は，突然の熱的に引き起こされる変化は，非常に小さい振幅のものであっても，まれであることを示す．こうして突然の変化は集中すべき観測に対する適当な特徴である．しかし，パルスの実際の探知は以下になされる評価を越える，より拡張された解析を要求する．このような解析はまれな事象（振幅における突然の変化）が偶然に（すなわち，熱的な揺らぎによる）指定された時間の周期で起こる確率，事象が 2 つあるいはより多くの検波器の間で一致して起こるさらにより小さい確率，および仮定された源との相関を計算するだろう．

コラム 37.4 で記述されている型の現実的な検波器を考える．しかし検波器が放射が支配的でない時間に検波器を吟味する．そうすると検波器の運動は内部の Brown 的な力（熱的な揺らぎ）によって，およびおそらくまた重力波のときどきの爆発によって駆動されている．注意を特別な規準モード（モード “n”）に集中し，そのモードの検波器の振動への寄与をベクトル場

$$\delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} = \mathcal{B}_n(t)e^{-i\omega_n t}\boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{x}) \tag{37.47}$$

*34 熱的な雑音から爆発信号を抽出するための道具としての検波器の振幅の変化率

によって記述する．$\boldsymbol{u}_n$ は次元をもたず，平均値 1 をもつ ($\int \rho \boldsymbol{u}_n{}^2 d^3x = M$) から，複素
*35 数 $\mathcal{B}_n(t)$ は検波器の質量要素の運動の振幅の，質量で重みを加えた平均である．この振幅は Brown 的な力による駆動の結果として時間とともにゆるやかに変化する (率 $\ll \omega_n$)．しかし時間にわたって平均されるとこの振幅は kT の振動エネルギーに相応する大きさをもつ．

$$\langle E_{振動}\rangle = 2\left\langle \frac{1}{2}\int \rho\, \dot{\boldsymbol{\xi}}^2 d^3x \right\rangle = \frac{1}{2}M\omega_n{}^2\langle|\mathcal{B}_n|^2\rangle = kT \tag{37.48}$$

すなわち，

$$\mathcal{B}_n^{2乗平均} \equiv \langle|\mathcal{B}_n|^2\rangle^{1/2} = (2kT/M\omega_n{}^2)^{1/2} \tag{37.49}$$

例：Weber の検知器 ($M \sim 10^3$ kg, $\omega_0 \sim 10^4$/sec) に対しては室温での基本モードは

$$\mathcal{B}_0^{2乗平均} = \left(\frac{2\times 1.38\times 10^{-16}\times 300\,\mathrm{erg}}{10^6\,\mathrm{g}\times 10^8\,\mathrm{sec}^{-2}}\right)^{1/2} = 3\times 10^{-14}\,\mathrm{cm} \tag{37.50}$$

をもつ．

弱いハンマーの一撃のような放射を探知することに対する希望は，検波器の振動の振幅（あるいはエネルギー）の吟味にあるのでなくて，その変化率の吟味にある（図 37.5)．振幅における大きい Brown 的な揺らぎ ($|\Delta\mathcal{B}_n| \sim \mathcal{B}_n^{2乗平均}$) に対する時間スケールは，検波器が騒々しいときには，検波器が $E_{振動} \gg kT$ まで駆動されるとき，内力が検波器を減衰させる時間スケール τ_n と同じである．こうして，**振幅 $\mathcal{B}_n$ は Brown 的な力の影響のもとで"ランダムな歩行"を行い，"大きい歩行距離"($|\Delta\mathcal{B}_n| \sim \mathcal{B}_n^{2乗平均}$) に対する平均時間は $\Delta t \approx \tau_n$ である．** より短い時間 Δt にわたる $\mathcal{B}_n$ における変化は $1/\sqrt{N}$ 因子だけより小さい．この因子はつねにランダムな歩行過程に入ってくる．

$$\sqrt{N} = \left(\frac{時間\,\tau_n\,内での振動サイクルの数}{時間\,\Delta t\,内での振動サイクルの数}\right)^{1/2} = \left(\frac{\tau_n}{\Delta t}\right)^{1/2} \tag{37.51}$$

$$\langle|\Delta\mathcal{B}_n^{(熱的)}|\rangle \approx \mathcal{B}_0^{2乗平均}\left(\frac{\Delta t}{\tau_n}\right)^{1/2} = \left(\frac{2kT}{M\omega_n{}^2}\right)^{1/2}\left(\frac{\Delta t}{\tau_n}\right)^{1/2} \quad (時間\,\Delta t\,の間)$$

(37.52)*

*36 さてハンマーの一撃のような放射（継続期間 $\Delta t = \tau_{\mathrm{GW}} \ll \tau_n$の爆発）が検波器に衝突して，検波器の振幅に変化 $\Delta\mathcal{B}_n^{(\mathrm{GW})}$ を生み出すと仮定せよ．振幅におけるこの変化は，それが非常に素早く生ずるので，(1) 同じ時間間隔に Brown 運動的な力の作用によって生み出される振幅における任意の変化に線形的に重なる．(2) したがって Brown 運動的な力の存在あるいは欠如の価値に無関係である．すなわち，すべての熱的な揺さぶりに無関係である．したがって $\Delta\mathcal{B}_n^{(\mathrm{GW})}$ （大きさと位相の**両方**をもつ量）は，もし検波器がゼロ温度にあったら生じたであろうものに同一である．

* この公式の完全な導出と議論に対しては，たとえば，Braginsky (1970) をみよ．そこで扱われている 2 つの主要な点は (1) 時間 Δt 内で振幅は与えられた初期値から，与えられた量だけ変化するだろう確率を記述する公式の統計的なバージョン，そして (2) $\tau_n \to \infty$ の極限で活動し始めるが 1970 年代初めの検波器に対しては重要でない量子力学的な補正である．

*35　共鳴検波器における熱的雑音の記述

*36　騒々しい，共鳴検波器への波の爆発の影響

$$\underbrace{\frac{1}{2}M\omega_n^2|\Delta B_n^{(\mathrm{GW})}|^2}_{\substack{\text{もし検波器がゼロ}\\\text{温度にあったら蓄}\\\text{積されるであろう}\\\text{エネルギー}}} = \int \sigma_n(\nu)\mathcal{F}_\nu(\nu)d\nu = \mathcal{F}_\nu(\omega_n/2\pi)\int \sigma_n(\nu)d\nu$$

[ハンマーの一撃のような放射に対して放射の帯域幅はつねに ≫ 検波器の帯域幅である，コラム 37.4 をみよ]

すなわち，

$$|\Delta\mathcal{B}_n^{(\mathrm{GW})}| = \left(\frac{2\mathcal{F}_\nu(\omega_n/2\pi)\int\sigma_n\,d\nu}{M\omega_n{}^2}\right)^{1/2} \tag{37.53}$$

振幅におけるこの波に誘発される変化は，時間 τ_{GW} の同じ長さの間に予期される熱的な変化 (37.52) よりもはっきり見分けがつくほど大きい場合に限り熱的な変化から区別できるだろう．

*37

$$\left.\begin{aligned}&|\Delta\mathcal{B}_n^{(\mathrm{GW})}| \gg \langle|\Delta\mathcal{B}_n^{(\text{熱的})}|\rangle\ \text{時間}\tau_{\mathrm{GW}}\text{の間}\\&\text{同等に：}F_\nu(\omega_n/2\pi) \gg \left(\frac{kT}{\int\sigma_n d\nu}\right)\left(\frac{\tau_{\mathrm{GW}}}{\tau_n}\right)\end{aligned}\right\}\ \text{探知可能性に対する基準} \tag{37.54}$$

もちろん，もし検波器の振幅あるいはエネルギーの大きさを測定するだけの装備をされていて，位相を測定する装備をされていないならば，これらの探知可能性に対する基準は完全には十分でない．2 乗された振幅（エネルギーにおける変化に比例する）における波に誘発される変化は最初の振幅と振幅の変化の相対的な位相に依存するだろう．

$$\begin{aligned}\Delta|\mathcal{B}_n|^2 &= |\mathcal{B}_{\hat{n}}^{(\text{最初})} + \Delta\mathcal{B}_n^{(\mathrm{GW})}|^2 - |\mathcal{B}_{\hat{n}}^{(\text{最初})}|^2\\&\approx 2|\mathcal{B}_{\hat{n}}^{(\text{最初})}||\Delta\mathcal{B}_n^{(\mathrm{GW})}| &&\text{（もし同位相であるならば）}\\&\approx 0 &&\text{（もし位相差が}\pm\pi/2\text{ であるならば）}\\&\approx -2|\mathcal{B}_{\hat{n}}^{(\text{最初})}||\Delta\mathcal{B}_n^{(\mathrm{GW})}| &&\text{（もし位相差が}\pi\text{ であるならば）}\end{aligned} \tag{37.55}$$

こうして，検波器の最初の運動と同位相であるいは逆位相で到達する爆発のみが測定可能であるだろう．しかしこのような爆発に対しては，基準 (37.54) が十分である．

*38 式 (37.54) は，**ハンマーの一撃のような放射への振動する検波器の感受性を改善する 3 つの方法がある．(1) 検波器の積分された断面積を増大する［それは検波器が重力波を再放射する率 A_{GW} を増大させることによってのみなされうる．コラム 37.4 の式 (10b) および (12) をみよ］，(2) 検波器を冷却する，(3) 検波器の減衰時間を増大すること**を明白にする．

コラム 37.5 は 1970 年代に実行可能に思われるある検波器に，そして理論によって予言される波のある爆発に上述の探知可能性の基準を適用する．その比較の結論は 1 つの希望を与える！

完全であるためには，上述の議論は検波器内の雑音のみならず，検波器の変位の振幅を測定するために用いるセンサー（信号検出器）内の雑音を解析すべきであった．しかし，変位センサーの理論は本書の範囲を越えている．簡潔な議論に対してはまた文献に対しては，Press and Thorne（1972）をみよ．

*37 爆発の探知可能性に対する基準

*38 検波器の感受性を改善する方法

37.9　非力学的な検波器

*39　重力波が物質内を流れるときは，重力波は物質を運動へと励起する．このような励起はこれまで記述されてきたすべての検波器に対する基礎である．しかし重力波は物質と相互作用するだけでない．重力波は電磁場とも相互作用する．そしてそれらの相互作用もまた検波器内で利用されうる．将来つくられるであろうもっとも有望な検波器の 1 つ，Braginsky and Menskii（1971）によって考案された検波器は，重力波と電磁波との間の共鳴的な相互作用に依存している．それはコラム 37.6 に記述されている．

37.10　将来をみる

*40　本書が書かれているときには，Joseph Weber の実験結果が重力波の真の意味での探知を形成しているかどうかはまったくのところ明白でない（37.4 節をみよ）．しかし Joseph Weber の実験結果がいずれであろうと，重力波天文学は始まっているし，輝かしい将来をもつようにみえる．1973 年の技術は，われわれの銀河内のどこかで崩壊してブラックホールを形成する星からの波を示す検波器の構成に対して十分であるようにみえる（コラム 37.5）．そして 1970 年代後期および 1980 年代初期の検波器は別な銀河内でのパルサーからのまた超新星からの波を十分示すだろう．このような検波器を構成するのに克服されるべき技術的な困難は莫大である．しかし物理学者は創造力がある．そして Joseph Weber の開拓者的な仕事によって与えられた刺激と，科学における開拓に真面目に興味をもつ幅広く横たわる社会の援助とで，すべての障害は確かに克服されるだろう．

コラム 37.5　天体物理学の源からのハンマーの一撃のような波の探知可能性：2 つの例

（以下の計算はある程度の大きさおよびその大きさまででのみ正確である）

A. 崩壊してブラックホールを形成している 10 倍の太陽質量をもつ星からの波，1975 年代（?）のセンサーをもつ 1972 年代の検波器

1. 放射の予言される特徴

$$(\text{地球での強度}) = \mathcal{F}_\nu \sim \frac{M_\odot}{4\pi(\text{距離})^2\nu}$$
$$\sim (2\times10^5\ \mathrm{erg/cm^2\ Hz})[(\text{銀河の中心までの距離})/(\text{距離})]^2,$$

*39　非力学的な検波器
*40　重力波天文学の将来

$$(\text{波の振動数}) = \nu \sim 10^3\,\mathrm{Hz},$$

$$(\text{波の帯域幅}) = \Delta\nu \sim 10^3\,\mathrm{Hz},$$

$$(\text{爆発の継続}) = \tau_{\mathrm{GW}} \sim 10^{-3}\,\mathrm{sec}\ \text{から}\ 10^{-1}\,\mathrm{sec}\ \text{まで}$$

2. 検波器の性質：基本モードで振動している Weber の棒は以下の性質をもつ．

$$M = 10^6\,\mathrm{g}, \qquad \int \sigma\, d\nu = 10^{-21}\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{Hz} \quad (\text{練習問題 37.13}),$$

$$\nu_0 = \omega_0/2\pi = 1{,}660\,\mathrm{Hz}, \qquad T = 3\,\mathrm{K} \quad (\text{流体ヘリウムの温度}),$$

$$\tau_0 = 20\,\mathrm{sec},$$

$$\mathcal{B}_0^{\text{2乗平均}} = \left(\frac{2\times 1.37\times 10^{-16}\times 3\,\mathrm{erg}}{10^6\,\mathrm{g}\times 10^8\,\mathrm{sec}^{-2}}\right)^{1/2} = 3\times 10^{-15}\mathrm{cm},$$

$$|\Delta\mathcal{B}_0^{(\text{熱的})}| = (3\times 10^{-15}\mathrm{cm})(10^{-3}/20)^{1/2} = 2\times 10^{-17}\mathrm{cm}$$

$$(\Delta t = 10^{-3}\,\mathrm{sec}\ \text{の間})$$

$$|\Delta\mathcal{B}_0^{(\text{熱的})}| = 2\times 10^{-16}\,\mathrm{cm} \quad (\Delta t = 0.1\,\mathrm{sec}\ \text{の間})$$

3. 波の効果 (37.53)

$$|\Delta\mathcal{B}_0^{(\mathrm{GW})}| = \left(\frac{2\times 2\times 10^5\times 10^{-21}\,\mathrm{erg}}{10^6\times 10^8\,\mathrm{sec}^{-2}}\right)^{1/2}\left(\frac{\text{銀河の中心}}{\text{距離}}\right)$$
$$= 2\times 10^{-15}\,\mathrm{cm}\left(\frac{\text{銀河の中心までの距離}}{\text{距離}}\right)$$

4. 結論：もし時間のスケール < 0.1 秒上で大きさ $\lesssim 10^{-15}\,\mathrm{cm}$ の振動の振幅における変化を測定するために **“センサー”** を構成できるならば，われわれの銀河内の任意のところでブラックホールをつくるべく崩壊している重い星からの重力波は容易に探知できる．これは 1972 年代の技術で実行可能であるようにみえる．Press and Thorne (1972) をみよ．

B. 銀河のおとめ座（Virgo）群における超新星爆発からの波，1970 年代後期あるいは 1980 年代初期までに構成できるであろう検波器

1. 放射の予言される特徴

$$(\text{地球での強度}) = F_\nu \sim \frac{0.03 M_\odot}{4\pi(11\,\mathrm{Mpc})^2\nu}$$
$$\sim 4\times 10^{-3}\,\mathrm{erg/cm^2\,Hz},$$

$$(\text{波の振動数}) = \nu \sim 10^3\,\mathrm{Hz},$$

$$(\text{波の帯域幅}) \sim \nu \sim 10^3\,\mathrm{Hz},$$

$$(\text{爆発の継続期間}) = \tau_{\mathrm{GW}} \sim 0.3\,\mathrm{sec},\ \text{あるいは}\ \tau_{\mathrm{GW}} \sim 2\times 10^{-3}\,\mathrm{sec}^*$$

2. 検波器：Weber 型の棒は金属でつくられておらず，3×10^{-3}K の温度まで冷却された 1,000 kg の水晶の単結晶でできている（このような単結晶に対しては，減衰時間は温度に逆比例して増大すると考えられる，$\tau_0 \propto 1/T$）．このような検波器の評価される性質．

$$M \sim 10^6\,\mathrm{g}, \qquad \int \sigma\, d\nu = 10^{-21}\,\mathrm{cm^2\,Hz} \quad (\text{Weber の棒に対するのと同じ}),$$

$$\nu_0 = \omega_0/2\pi \sim 1,500\,\mathrm{Hz}, \qquad T = 3\times10^{-3}\,\mathrm{K}, \qquad \tau_0 \sim 10^6\,\mathrm{sec},$$

$$\mathcal{B}_0^{2乗平均} = \left(\frac{2\times1.37\times10^{-16}\times3\times10^{-3}\,\mathrm{erg}}{10^6\,\mathrm{g}\times10^8\,\mathrm{sec^{-2}}}\right)^{1/2} = 1\times10^{-16}\,\mathrm{cm},$$

$$|\Delta\mathcal{B}_0^{(熱的)}| = (1\times10^{-16}\,\mathrm{cm})\left(\frac{0.3\ \text{あるいは}\ 2\times10^{-3}}{10^6}\right)^{1/2}$$
$$= 6\times10^{-20}\,\mathrm{cm},\ \text{あるいは}\ 5\times10^{-21}\,\mathrm{cm}$$

3. 波の効果 (37.53)

$$|\Delta\mathcal{B}_0^{(\mathrm{GW})}| = \left(\frac{2\times4\times10^{-3}\times10^{-21}\,\mathrm{erg}}{10^6\times10^8\,\mathrm{sec^{-2}}}\right)^{1/2} = 3\times10^{-19}\,\mathrm{cm}$$

4. 結論：重力波は，おとめ座群（Virgo cluster）内での超新星から探知できる．もし $\lesssim 0.1$ 秒の時間スケール上で，大きさ $\lesssim 10^{-19}$ cm の振動振幅における変化を測定するセンサーを構成できるならば，そしてもし上述の特徴をもつ検波器を構成できるならば．

---

*　超新星爆発からの波の継続期間に対しては，2 つの時間スケールが重要であるようにみえる．(1) 白色わい星の中核の崩壊の最終段階である中性子星あるいは中性子星パンケーキまでに要求される時間，$\tau \sim$（中性子星の次元）/（核物質内での音速）$\sim 2\times10^{-3}$ 秒（"重力放射のパルス"）．そして (2) 振動している中性子星が重力放射によって振動のエネルギーを失うのに要求される時間（"減衰された一連の波"），$\tau \sim 0.3$ 秒．

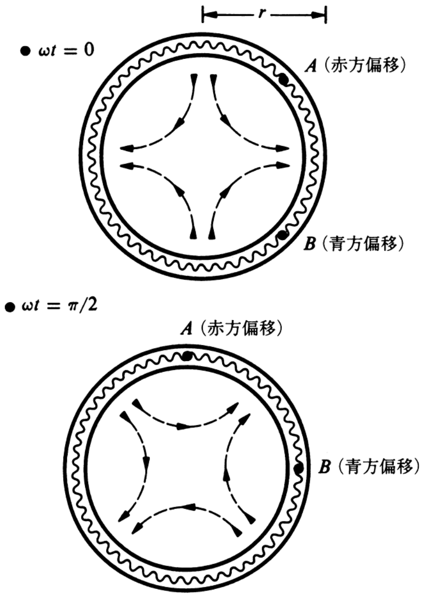
コラム 37.6　重力波の非力学的な検波器［Braginsky and Menskii（1971）］

アイデアの要約

（右側の図をみよ）

ドーナツ形の導波管は管の周りをぐるぐる進む単色の一連の電磁波を含んでいる．重力波はトーラス平面に垂直に伝播する．もし EM 波に対する巡回時間が重力波の周期の 2 倍であるならば，重力波の円形に偏った成分はつねに進む EM 波と同位相にとどまるだろう．**結果**：共鳴が展開する．EM 波の列の 1 つの領域で，重力潮汐力はつねに EM 波を前方に "押す"（**青方偏移！**），別な領域で潮汐力は後方に "押す"（**赤方偏移！**）．EM 振動数差は時間とともに 1 次的に増進する．位相差は 2 次的に増進する．

ω=（重力波の角振動数）=（波の位相の時間変化率）=（"力線"のパターンが回転する角速度の 2 倍）
r=（トーラス（円環面体）の半径），導波管内での EM 波の伝播速度が $v=\frac{1}{2}\omega r$ であるように調節されている



［EM 波は反時計回りに伝播する，重力の力線図は反時計回りに回転する，両方は同位相にとどまる．］

定量的な解析の輪郭

1．導波管を地球軌道内で自由落下させる．導波管の固有基準系（≡局所 Lorentz 系）の軸を次のように位置づける．(1) 導波管が $\hat{x},\hat{y}$ 平面内に存在する，そして (2) 重力波が $\hat{z}$ 方向に伝播する．

2．重力波に振幅

$$A_+ - iA_\times = \mathcal{A}e^{-i\omega(t-z)} \tag{1}$$

をもたせる［思い出せ：$\hat{t}\approx t, \hat{z}\approx z$．すなわち，固有系と TT 座標はほとんど一致する］．そうすると波導管の平面内で $(z=0)$

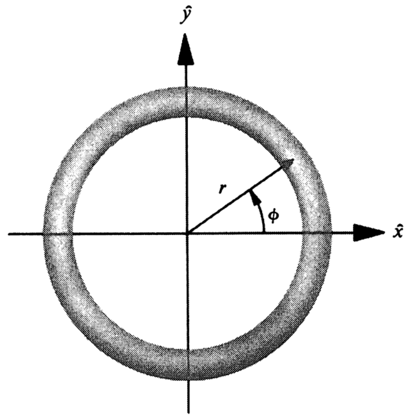
$$\begin{aligned} R_{\hat{x}\hat{0}\hat{x}\hat{0}} &= -R_{\hat{y}\hat{0}\hat{y}\hat{0}} = \tfrac{1}{2}\omega^2\mathcal{A}\cos(\omega t) \\ R_{\hat{x}\hat{0}\hat{y}\hat{0}} &= R_{\hat{y}\hat{0}\hat{x}\hat{0}} = \tfrac{1}{2}\omega^2\mathcal{A}\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{2}$$

3．EM 波の 2 つの近傍部分，1 つは $\phi=\alpha+\frac{1}{2}\omega t$ に，他は $\phi=\alpha+\delta\alpha+\frac{1}{2}\omega t$ に，を考える．それらを光子として取り扱う．おのおのは導波管による偏向指図をのぞいて，ヌル測地線に沿って動く．こうして，光子の波動ベクトル $\boldsymbol{k}$ は

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k} = (\text{導波管の偏向“加速度”}) \tag{3}$$

を満たす．そして波の 2 つの部分の波動ベクトル間の差（平行移動によって測定される差）$\delta \boldsymbol{k} = \boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{k}$ は式

$$\boldsymbol{\nabla}_k \delta \boldsymbol{k} = \boldsymbol{\nabla}_k \boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{k} \tag{4}$$
$$= [\boldsymbol{\nabla}_k, \boldsymbol{\nabla}_n]\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{\nabla}_k \boldsymbol{k}$$
$$= \boldsymbol{Riemann}(\cdots, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{\nabla}_n \underbrace{\boldsymbol{\nabla}_k \boldsymbol{k}}_{\text{導波管の偏向加速度}}$$



を満たす．導波管は波の伝播方向に影響を及ぼすが，波の振動数に影響を及ぼさない．こうして，**Riemann**のみが上式の 0 成分に入る．

$$k^{\hat{\alpha}} \delta k^{\hat{0}}{}_{,\hat{\alpha}} = R^{\hat{0}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} k^{\hat{\alpha}} k^{\hat{\beta}} n^{\hat{\gamma}} \tag{5}$$

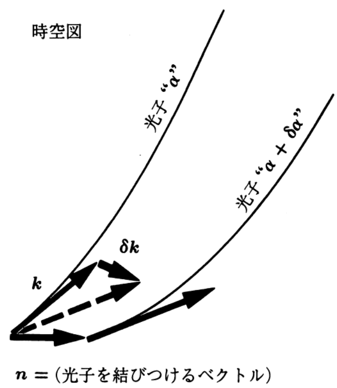
4. $k^{\hat{0}} = \omega_e$ を電磁波の角振動数とする．伝播 4–ベクトルの空間成分 $\boldsymbol{k}$ の方向は純粋に空間ベクトル $\boldsymbol{n}$ に沿う．したがって

$$k^{\hat{0}} = \omega_e, \quad \boldsymbol{k} = (v\omega_e / r\delta\alpha)\boldsymbol{n}, \quad n^{\hat{0}} = 0 \tag{6}$$

これらの関係を用いて式 (5) を

$$(d\,\delta\omega_e / d\hat{t})_{\text{光子とともに動いている}}$$
$$= (v\omega_e / r\delta\alpha) R^{\hat{0}}{}_{\hat{\imath}\hat{0}\hat{\jmath}} n^{\hat{\imath}} n^{\hat{\jmath}} \tag{7}$$

と書き直す．



5. 時空図における $\boldsymbol{n}$ に対する表現を式 (2) と (7)，および光子に対する世界線 $\phi = \alpha + \frac{1}{2}\omega t$ と結びつけて，

$$(d\,\delta\omega_e / d\hat{t})_{\text{光子とともに動いている}} = -\tfrac{1}{2} v\omega_e \omega^2 \mathcal{A} r (\cos 2\alpha)\delta\alpha \tag{8}$$

を得る．

6. 時間にわたってそして α にわたって積分し

$$\omega_e = \omega_{e0}\left[1 - \tfrac{1}{4}\mathcal{A} v (\sin 2\alpha)(\omega r)(\omega\hat{t})\right] \tag{9}$$

を得る．

パート IX

一般相対論の実験的検証

魅力的な重力理論のハーレム（あるものはそれほど魅力的でない）によって，読者は誘惑され，愚かしい情熱から実験の大群によって救われ，忠実な配偶者である幾何力学に進み，今後正直な生活を送ることを誓い，そして真の信者になる．

38章
相対論の基礎をテストする

Provando e riprovando
（**1** つを確かめよ，そして他の誤りを立証せよ）

GALILEO

38.1 遠く離れた空間でテストするよりも太陽系でテストする方が容易である

一般相対論はその生涯の最初の半世紀においては，理論家の天国であったが，実験家の地獄であった．どの理論がより美しいということもなく，どの理論もテストするのにより困難だということもなかった．

事情が変化した．最後の数年間で一般相対論は実験物理学のもっとも興味をそそる実りの豊かな分野の一つになった．半世紀後には，技術の進歩は最終的に Einstein の天才に追いついた—天文学的な面のみならず，実験室での実験においても．

*1 天文学的な面について，観測者は相対論が重要である現象を探し求め，それらを研究する—宇宙論，パルサー，クエーサー，重力波，ブラックホール．不幸にも，パルサーおよびクエーサーにおいて，そして宇宙論的な放射および重力波の源において，重力の効果は局所的な流体力学および局所的なプラズマ物理学と強く混ざり合う．種々の効果を十分鋭く分離して重力の性質の純粋な検証を得る希望はほとんどない．代わりに，天体物理学者は重力の法則を，すべての別な物理学の法則および観測データとともに，計算に翻訳しなければならない．そして天体物理学者はそれから出力として，“遠く離れた” 物質と場の振る舞いについての情報を求めなければならない．

こうして，一般相対論の純粋なテストのためには実験室に向かう．しかし今日形式的よりもはるかに大きい実験室に，全太陽系を含む実験室に向かう．

*2 太陽系ではすべての相対論的な効果はちっぽけである．にもかかわらず，相対論的な効果のあるものは 1970 年代には，全大きさの 1,000 分の 1 あるいはそれ以上の精度をもって測定可能である（コラム 38.1 をみよ）．

---

*1　一般相対論の純粋なテストは一般に太陽系に制限されている
*2　1970 年代における技術の能力

コラム 38.1　相対論的な現象と対応する1970年代の技術

測定されるべき量	相対論的な効果の大きさ	1970 年代初期における 1 日測定の精度
天空上の 2 個の源の角分離	星の光の太陽偏移 (1) もし光線が太陽の縁をかすめるならば，1″.75 (2) もし光線が地球–太陽線に垂直に入射するならば，0″.004	(a) 光学望遠鏡で，∼ 1″ (b) 電波望遠鏡での 2 個のクエーサーの角分離（日から日までの微分測定であって絶対測定でない）1970 年において，∼0″.1 1970 年代中期において，∼0″.001
太陽系における 2 個の物体間の距離	(a) 地球年あたりの近日点の移動 (1) 水星に対して，120 km (2) 火星に対して，15 km (b) 地球からの電波が，太陽の縁を通過して金星まで（片道）の相対論的な時間の遅れ，1×10^{-4} sec = 30 km (c) 地球–月分離における周期的な相対論的な効果 (1) 一般相対論では，100 cm (2) Jordan–Brans–Dicke 理論では，100 cm. $(840\,\mathrm{cm})/(2+\omega)$	(a) レーダー信号が別な惑星（水星，金星，火星）で跳ね返ることによる，地球からの隔たり，∼0.3 km (b) 電波の1 周時間を測定することによる（別な惑星上あるいは宇宙船内で）無線トランスポンダーの地球からの距離，$\sim 3\times10^{-8}$ sec = 10 m = 0.01 km (c) レーザー測距による地球–月間の隔たり，∼10 cm
太陽系における 2 つの世界線間の固有時間の経過における差	(a) 地球上の時計対同一速度で動く地球軌道内の時計，$\Delta t/t \sim 6\times10^{-10}$ (b) 地球上の時計対太陽の周りの軌道内の時計，$\Delta t/t \sim 10^{-8}$	水素メーザー時計の安定性，$\Delta t/t \sim 10^{-13}$ 1 年までの t に対して

38.2　一般相対論のテストを解析するための理論的な枠組み

*3 今や一般相対論をテストするための可能な多くの実験がある．しかしそれらの多くは非常に費用がかかる．実験には，宇宙船上で運ばれる原子時計や，惑星で跳ね返されるレーダー信号，惑星に着陸したりあるいは惑星の周りの軌道を回る電波標識（beacon）等を含む．費用のために，種々の実験の相対的な価値を比較するために，そして見落とされてきたであろう新しい実験を提案するために，できるだけよい理論的な枠組みをもつことが重要である．

このような枠組みは一般相対論の外に存在しなければならない．それは Einstein の理論の基礎を吟味しなければならない．それは Einstein の理論を重力の他の実現可能な理論と比較して，どの実験がそれらを区別できるかをみなければならない．“それは理論の理論”でなければならない．

4 現在，1973 年に，2 つの異なる枠組みが広く用いられている．1 つは Dicke (1964b) によって広く工夫されているが，重力の性質についてほとんど何も仮定しない．非常に基礎的なレベルで，時空および重力の性質をテストするための実験を考案し議論することが用いられている．その中で，次のような質問をする．すべての物体は重力に同じ加速度で対応するか？　空間はその内在的な性質について局所的に等方性であるか？　何が局所的な等方性の理論的な暗示であるか？　たとえあるとしても，どのような型の場が，重力と関係しているか．スカラー場，ベクトル場，テンソル場，アフィン場？　これらの質問に取り組む実験のあるものは以下に議論されるだろうけれども，本書は Dicke の枠組みの詳細な解説を試みない．

*5 広く用いられている 2 番目の枠組みは“パラメータ化されたポスト（post）Newton 的な（PPN）形式論”である．それは Eddington (1922), Robertson (1962, 1967), Nordtvedt (1968b, 1969)，Will（1971c)，および Will and Nordtvedt（1972）によってより高いレベルまで洗練されている．

PPN 形式論は一般相対論への，そしてまた“計量理論”とよばれる，種々の他の現代の重力理論への近似である．それは，太陽系におけるように，場の源が弱い重力を及ぼし（$|\Phi|/c^2 \ll 1$），そして遅く動く（$v^2/c^2 \ll 1$）ときはつねによい近似である．PPN 形式論は 1 組の 10 個のパラメータを含み，それらの値は 1 つの理論と他の理論で異なる．太陽系の実験（近日点の変位の測定，光の偏向等）はこれらの PPN パラメータのいくつかを測定し，それによって重力のどの計量理論—一般相対論，Brans–Dicke (1961)–Jordan (1959) 理論，Bergmann (1968) のスカラー理論の一つ，Nordstrøm の理論の一

* 両方の枠組みの詳述およびそれらの比較に対しては，Thorne and Will (1971)，あるいは Will (1972) をみよ．

*3 重力実験を解析するための理論的な枠組み

*4 (1) Dicke の枠組み

*5 (2) PPN の枠組み

つ，Whitehead (1922) の理論，あるいはそれ以外の何か，が正しいかを定める試みとみなされうる [Nordstrøm and Whitehead のレビューに対しては，Whitrow and Morduch (1965)，Will (1971b)，および Ni (1972) をみよ．重要な非計量理論に対しては，Cartan (1920) および Trautman (1972) をみよ]．

39 章では重力の計量理論の概念を議論し，PPN 形式論を構成するだろう．それから 40 章では PPN 形式論を用いて太陽系の体系を解析し，重力の種々の計量理論を区別する，種々の過去と未来の実験を議論するだろう．しかしまず，それらの話題への序曲として，本章では一般相対論の基礎—たいていの他の計量理論もまた基づいている基礎をテストする実験を吟味しよう．これらの実験の多くの，より詳細な議論に対しては，Dicke (1964b) をみよ．

[本章の残りはトラック–2 である．これまでのトラック–2 の材料はそれに対する準備として必要とされないが，7 章（重力および特殊相対論の非両立）は有用であるだろう．本章は任意の後の章に対する準備として必要とされないが，しかし 39 および 40 章（他の理論，PPN 形式論，実験的なテスト）で有用であるだろう.]

38.3 自由落下の一意性の原理のテスト：Eötvös–Dicke の実験

Einstein の重力理論にそしてほとんどすべての他の現代理論に共通な 1 つの基礎的な建設ブロックは **“自由落下の一意性”** である*．**“自由落下する試験物体の世界線はその成分あるいは構成に無関係である”**．**“試験物体”** によって (1) 自ら重力を及ぼすエネルギーは，標準的な Newton 理論を用いて計算されるとき，その静止質量に比べて無視されうる ($M/R \ll 1$)，そして (2) 多重極モーメントの重力場の不均質さへの，多重極モーメントの結合が無視されうるほど十分小さい電気的に中性な物体を意味する**．

自由落下の一意性は時空を，パラメータ化を除いて一意的である 1 組の曲線，試験物体の軌道で満たされているとみなすことを可能にする．おのおのの事象を通して，時空内の各時間的なあるいはヌル方向に沿って，1 つそしてただ 1 つの試験物体の軌道が通過する．これらの軌道を数学的に記述すること，それは重力の任意の理論の中心的な命令である．

Newton の言葉に翻訳されるとき，自由落下の一意性によれば，任意の 2 つの試験物体は

---

* R. H. Dicke はこの原理を “弱い等価原理” とよぶ．われわれは等価原理との混乱を避けることを好む（16 章）．

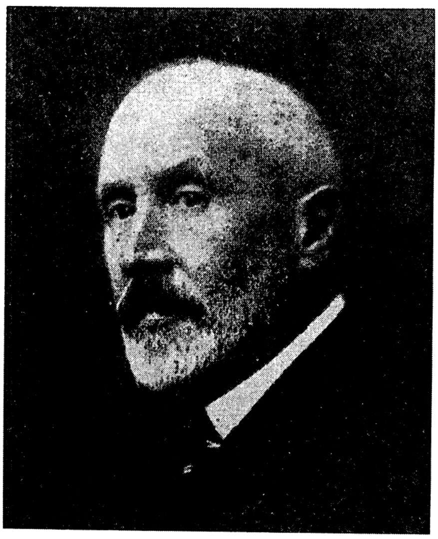
** 一般相対論では，しばしば，自ら重力を及ぼすエネルギーに制限を置かない，試験物体の別な定義を用いる [条件 (1) を捨て (2) を保持する]．このような定義は原理的に望ましい．なぜなら物質の理論は，核以下のスケールでの重力エネルギーが静止質量の小さい割合，大きい割合あるいは全体であるかどうか（いずれかを定めるべき客観的なテストはいまだかつて提案されていない）を定めるほど十分には展開されていない．しかし現在の目的に対しては試験物体が $M/R \ll 1$ をもつように制限する定義は，2 つの理由について望ましい．まず，現在 Einstein の理論と “張り合う” 重力のたいていの理論は (a) 巨視的な Newton の，自ら及ぼす重力エネルギーが無視される ($M/R \ll 1$) ときは自由落下の一意性の原理と一致するが，しかし (b) 巨視的な Newton の，自ら重力を及ぼすエネルギーが考慮されるときその原理を破る．詳細については 40.9 節をみよ．2 番目に，Eötvös–Dicke の実験で用いられる試験物体は非常に小さい M/R をもつので，それらの巨視的な Newton の，自ら重力を及ぼすエネルギーは，実際無視できる ($M/R \sim E_{\text{重力}}/M \sim 10^{-27}$)．

与えられた外部の重力場内で同じ加速度で落下しなければならない．この原理の実験的な
*6 検証は 1 つの物体から他の物体へ加速度における相違を求める．現在までのもっとも正確な実験は Baron Lorand von Eötvös（コラム 38.2）によって考案され，Rovert H. Dicke（コラム 38.3）の Princeton グループによって再考案されてはるかに高い精度まで押し進められ，Vladimir B. Braginsky の Moscow グループによる修正で拡張された型である（実験的な詳細については図 1.6 およびコラム 1.2 をみよ）．

これらの Eötvös–Dicke の実験は "ヌル実験" である．それらは 1 つの物体の加速度を他の物体の加速度と比較考慮して，平衡からのわずかなずれを求める．理由は単純である．ヌル実験は特徴的にゼロでない量の値を測定する実験よりもはるかに高い精度をもつ．

コラム 38.2　Baron Lorand von Eötvös

1848 年 7 月 27 日 Budapest に生まれ，1919 年 4 月 8 日 Budapest に没．



Photograph by A. Szekely 1913

Eötvös（ut'vûsh と発音される）は Heidelberg で Kirchhoff，Helmholtz，および Bunsen とともに学んだ．そして Könisberg で Neumann および Richelot とともに学んだ．彼の 1870 年の Heidelberg での Ph.D. 論文は相対論の問題を取り扱った．"エーテル" に相対的な光の源の運動は運動方向と逆方向における光の強度を比較することによって認められうるか？

同時期における彼の研究は毛細管現象，(表面張力) $\approx 2.12(T_{臨界} - T)/($比体積 (密度の逆数)$)^{2/3}$ の Eötvös の法則を生み出した．Eötvös は，1872 年に Budapest で物理学の教授となり，1886 年以降，重力に集中した．彼は，$\Phi_{,xx}$ および $\Phi_{,xy}$（ここ

*6　自由落下の一意性をテストするための Eötvös–Dicke の実験

に Φ は重力ポテンシャルである）のみならず $\Phi_{,xz}$ および $\Phi_{,yz}$ を測定した，最初の Michell–Canvendish のねじれ平衡を，まったく，数十年間抜きん出られることのないほどかなり高い精度まで，展開し拡張した．彼は，いわゆる“重力質量と慣性質量間の比”は，10^9 分の 5 の精度で材料によらず一致することを示した．彼はれんがおよび陶器の古地磁気を調べ，そして地球の形を研究した．彼は社会教育および宗教問題の大臣（先年に彼の父が保持していた内閣の地位）として奉仕した（1894 年 6 月–1895 年 1 月）．彼は高校教師を訓練する学校を創立した．von Karman，von Neumann，Teller，および Wigner のような卓越した科学者に対する信頼のいくばくかは，これらの高校教師が与えた影響に帰することができる．彼は 1 年 Budapest 大学の学長として奉仕した．

“私は，自分の乗った列車が Necker 川岸に沿って Heidelberg の鉄道駅に突進した瞬間をけっして忘れることができない…その名声によって私をそこに引きつけた科学者たちと同じ空気を今や呼吸できるという幸福を忘れることができない．”

[1887 年の EÖTVÖS, FEJÉR AND MIKOLA（1918), p.259 に引用されているように.]

“それがわずかな実験に基づいて許されるかぎり，われわれはしたがって μ，すなわち，介在する補償装置の四分儀を通して地球の引力の弱まりは 5×10^{10} 分の 1 よりも小さい，…直径に沿う全地球による（重力の）吸収は約 800 分の 1 よりも小さいと宣言することができる．”

“われわれはすべての以前の観測を精度において越える一連の観測を実行したが，しかしどの場合にも，重力と慣性の比例則から探知できるどのようなずれも発見できなかった．”

[EÖTVÖS, PEKÁR, AND FEKETE（1922)]

“科学はその必要な特徴が証明されうる公式をけっして見出さないだろう．実際科学自身，もしわれわれが秘密への手掛かりを見出したならば終わるだろう．”

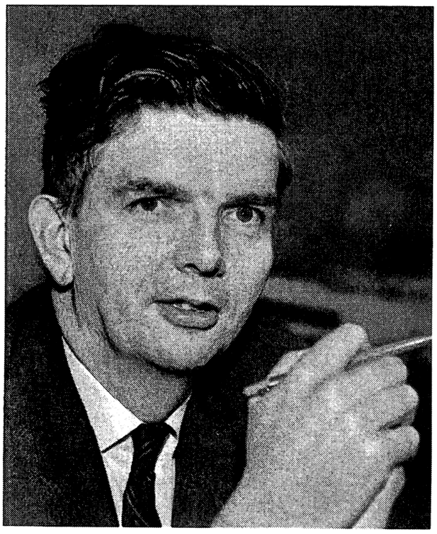
[EÖTVÖS，ハンガリー科学アカデミーへの大統領の演説，1980．FEJÉR AND MIKOLA（1918), p.280 に引用されているように.]

“非常に多くの人々が宗教の教義の代わりに，中世的な短気をもつが，しかし歴史的な正当化をもたない科学的な教義を提供する偽りの予言者の言葉に傾聴することを，われわれは，現在の時代のもっとも驚くべき誤りの一つと考えるべきである．”

[EÖTVÖS, 1877, FEJÉR AND MIKOLA（1918), p.280 に引用されているように.]

コラム 38.3　Robert Henry Dicke

1916年5月6日, St. Louis に生まれ, Missouri, Princeton 大学 Cyrus Fogg Brackett 物理学教授



1941–1946年の間, Dicke はひとまとまりにされた回路要素の廃れた概念を, 対称性の考察, 保存則, 相互関係, および散乱行列, 別な概念の中で, ロックイン (lock–in) 増幅器およびマイクロ波放射計に通じた概念, に基づいた新しいマイクロ波解析によって置き換えることにおける指導者であった. 精密な測定のためにスペクトル線の Doppler 幅を減少する手段を求めて, Dicke は箱あるいは緩衝ガス内に保たれた原子系における無反動放射を発見した. この展開は (1) ガス–セル原子時計の基礎的なアイデアの発見および (2) 水素原子の 1s および 2s レベルにおける電子の磁気回転比および水素原子の超微細構造のはるかによい精度の測定に通じた.

1954年における Dicke による基本的な論文はコヒーレントな放射過程および超放射状態の理論を説明した. そしてレーザーおよびメーザーの将来の展開に対する基礎を置き, またその展開に寄与した. 彼の特許番号 2,851,652 (1956年5月21日に提出された) は, コヒーレント過程による赤外線放射の生成に対する考案の最初の認定であった. そしてエータロン (etalon) 共鳴器の使用を増幅気体と結びつけるための最初の提案を与えた.

1960年代に始まり, Dicke は実験宇宙論の奉仕への精密測定に対して, 彼の才能を発揮した. そして彼の協力者とともに (1) 等価原理を 10^{11} 分の1という, 当時まで先例のない精度で点検した, (2) 太陽の扁球性を定めた, (3) 原始宇宙の火の玉放射, 宇宙の過去の歴史を今まで可能であったより深くみるための道具は, 観測可能である

はずであり，したがって探して突き止め発見されるべきであることを提案した．

“よりよい術語の欠如のために，コヒーレンスのゆえに強く放射している気体は‘超放射’とよばれるだろう…系が放射するとき系は r を不変のままにしてより低い m の状態へ—‘超放射の’領域 $m \sim 0$ へ進む”

(1954)

“可能性は，気体の光学的な‘超放射’の状態の励起に対して吟味される”

(1957)

“[太陽の] 5×10^{-5} の重力的な扁球性は Einstein の純粋に幾何学的な重力理論の放棄を要求するだろう．…このような [太陽が] 平らになることはむしろ急速に回転している内部の効果と理解されるだろう．…答えは，過去において，そして今日まで，磁場をもつ太陽のコロナが，太陽の表面上でブレーキとして作用してきたようにみえる．”

(1964a)

“太陽の扁球性の新しい測定は，$(5.0\pm0.7)\times10^{-5}$ という赤道半径と極半径の微小な相違に対する値を与えた．”

[DICKE AND GOLDNENBERG (1967)]

“[宇宙は] 水素以外の要素が存在するまでに十分な時代を経てきたに違いない．物理学者をつくるためには炭素が要求されることはよく知られている．”

(1961)

“このような次元をもたない数の一定の問題は，測定による以外の定義で解決されるべきでない．”

[BRANS AND DICKE (1961)]

“地球物理学のデータは微細構造定数の変化率について 1 年あたり 10^{13} 分の 3 の上限を与える．”

[DICKE AND PEEBLES (1962)]

Eötvös, Pekar, および Fekete (1922) は 10^9 分の 5 の精度まで，地球は同じ加速度を，木材，プラチナ，銅，アスベスト，水，マグナリウム (90%アルミニウム，10%マグネシウム)，銅硫酸鉛，および硬脂 (tallow) に，与えることを検査した．Renner (1935) は 10^{10} 分の 7 まで，プラチナ，銅，ビスマス，真鍮，ガラス，アンモニウムふっ化物 (fuluoride)，および 30%マグネシウム，70%銅の合金の，地球の加速度を検査した．Dicke，および後に Braginsky は地球の重力加速度よりもむしろ太陽の重力加速度を用いることを選んだ．なぜなら 12 時間ごとの太陽の引っ張り方向の変更が，共鳴による増大に適するからである (図 1.6 をみよ)．Roll, Krotokov, および Dicke (1964) は，アルミニウムおよび金に対する太陽の加速度間に 10^{11} 分の 1 の精度での一致を報告した．他方 Braginsky and Panov (1971) は，アルミニウムとプラチナに対して 10^{12} 分の 1 までの一致を報告した．

[*7] この一致から，中性子，陽子，電子，仮想的な電子–陽電子対，核の結合エネルギー，そして太陽の重力への静電気エネルギーの応答を推論できる．金は 60%中性子であり，他方アルミニウムは 50%中性子に過ぎない．それゆえ 1964 年の結果からでも中性子と陽子は 10^{11} 分の $[0.6 - 0.5 = 0.1]^{-1} = 10^{10}$ 分の 1 まで同じ加速度をもたなければならない．同様に，電子は 10^7 分の 2 まで核子と同じく加速されなければならない．仮想的な対（アルミニウムにおけるよりも金においてよりたくさん存在する）は 10^4 分の 1 まで同じく加速されなければならない．核の結合エネルギーは，10^7 分の 1 まで，そして静電気エネルギーは 10^9 分の 3 まで．

このテストの精度は**自由落下の一意性**の原理に 1 つの信頼を与える．

38.4　長さおよび時間の測定を支配する計量の存在に対するテスト，および粒子運動学

特殊相対論，一般相対論，そして重力のすべての他の計量理論は計量場の存在を仮定し，この場が原子時計の刻み率および実験室の棒の長さをよく知られた関係 $-d\tau^2 = ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$ によって定めることを予言する．

[*8] 計量に対する実験的証拠はおもに素粒子物理学からくる．それは次の 2 つの型である．**1 番目**，時間間隔を直接測定する実験，たとえば，不安定粒子の崩壊時間の時間膨張の測定*，**2 番目**，粒子運動学，および粒子物理学におけるどこか他のところで，Lorentz 群によって演じられる基本的な役割を明かす実験**．計量テンソルを完全に追い出すことは，このような実験を解釈するのに適切な理論的な枠組みを残さないだろう．

[*9] どのような粒子物理学の実験が計量テンソル $\boldsymbol{g}$ について**告げる**および**告げない**かに注意せよ．**1 番目**，実験は大域的な Lorentz 系，すなわち，$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ が成り立つ，時空のすべてを通して広がる座標系が存在することを**保証しない**．しかし，実験は各事象 $\mathcal{P}$ に $\boldsymbol{e}_{\hat\alpha}(\mathcal{P})\cdot\boldsymbol{e}_{\hat\beta}(\mathcal{P}) = \eta_{\alpha\beta}$（それは Lorentz 変換によって互いに関係している）をもつ直交系が存在することを**示す**．これらの直交系は与えられた事象における任意の 2 つのベクトル間の内積の定義を与える．そして，それによって，実験は計量場を定義する．

2 番目，粒子の実験は自由落下する粒子が計量場の測地線に沿って，すなわち，局所 Lorentz 系内の直線に沿って動くことを**保証しない**（ここに，38.4 および 38.5 節において，“局所 Lorentz 系” という語句は事象 $\mathcal{P}$ における “規準” 座標系，そこでは $g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) = \eta_{\alpha\beta}$ および $g_{\alpha\beta,\gamma}(\mathcal{P}) = 0$ を意味する．“慣性系” という語句は，試験物体の運動について，い

---

* 貯蔵環（粒子加速装置で高エネルギーの荷電粒子を円形軌道上に蓄える装置）内で $(1 - v^2)^{-1/2}$～12 の μ 粒子での 2%の時間膨張のテストに対しては，Farley, Bailey, Brown, Giesh, Jöstlein, van der Meer, Picasso, and Tannenbaum（1966）をみよ．以前の時間膨張の実験に対しては Frish and Smith（1963），Durbin, Loar, and Havens（1952），および Rossi and Hall（1941）をみよ．

** Lorentz 不変性，スピンと統計，TCP 定理，および重要な実験に対しては Lichtenberg（1965）の p.18 をみよ．

*7 Eötvös–Dicke の実験の理論的な意味

*8 計量の存在に対する実験的証拠

*9 粒子の実験は大域的な Lorentz 系の存在あるいは試験粒子に対する測地線的な運動を保証しない

まだ，主張がなされていないので避けられている)．とくに，素粒子の実験から，実験室における局所 Lorentz 系が自由落下しているかどうか（したがって系は地球の中心から上に昇りそれから Newton の加速度 $g = 980\,\mathrm{cm/sec^2}$ で逆に落下する)，系が実験室の壁に相対的に永久に静止しているかどうか，あるいは系がある別な型の運動を受けるかどうかはわからない．信じるべきことのすべては，計量は原子時計によって測定される時空間隔 ($d\tau^2 = -g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu$) の性質を定めるということ，実験室における種々な局所 Lorentz 系はしたがって互いに相対的に一様な速度で動く（系は Lorentz 変換によって結びついている）ということ，そして電場，磁場，エネルギーおよび粒子の運動量は，1 つの局所 Lorentz 系から別な局所 Lorentz 系への移動の際，Lorentz 変換を受けるということである．

*10 **3 番目**，素粒子の実験は，原子時計によって測定される時間は速度にのみ依存し，加速度に依存しないことを示唆**する**．測定される距離の 2 乗は，加速度に関係なく（加速度が非常に大きくなって時計の構造を邪魔するまで，16.4 節およびコラム 16.3 をみよ）$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ である．同等に，しかしより物理学的に，局所 Lorentz 系に相対的に速度 v^j で動いている時計によって測定される時間間隔は，時計の加速度 d^2x^j/dt^2 に関係なく，

$$d\tau = (-\eta_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta)^{1/2} = [1 - (v^x)^2 - (v^y)^2 - (v^z)^2]^{1/2}dt \tag{38.1}$$

である．もしそうでなかったら，強い磁場内で円形軌道に動いている粒子は，自由に動いている粒子と異なる崩壊率を示すだろう—粒子はそれを示さない [Farley *et al.* (1966)]*.

38.5 測地線的な運動のテスト：重力による赤方偏移の実験

自由落下の一意性は，Dicke–Eötvös の実験によってテストされているように，時空は選ばれた 1 群の曲線，試験物体の軌道で満たされていることを意味する．また別な群の選ばれた曲線，計量の $\boldsymbol{g}$ の**測地線**が存在する．これらの測地線を試験物体の軌道と同一視することは魅力的である．Einstein の幾何学的な重力理論はこの同定をする（“等価原理”)．この同定を拒絶する理論を考えられるだろうか？ この点についての実験的な証拠は何であるか？

どのような種類の実験が重要であるかをみるためには，測地線の物理学的な重要性を解明することは有用である．

*11 $\boldsymbol{g}$ の測地線は局所的な Lorentz 系において直線であるという事実によって，もっとも容易に局所的に同定される．別な言葉で述べると，物体の運動は物体が $\boldsymbol{g}$ の測地線に沿って動く場合に限り，局所的な Lorentz 系において測定されるとき加速されない．したがって，

---

* Farley *et al.* の実験は，エネルギーが $E/m = (1 - v^2)^{-1/2} \sim 12$ で，μ 粒子の静止系で測定されたときに，加速度が $a = 5\times10^{20}\mathrm{cm/sec^2} = 0.6\,\mathrm{cm^{-1}}$ のときの，μ 粒子の崩壊率の加速度–非依存性のチェックは 2%である．

*10 粒子の実験は，固有時間は加速度に無関係であることを意味する

*11 試験物体の軌道と計量の測地線間の比較の物理学的な意味

試験物体の軌道が測地線であるかどうかを定めるには，局所 Lorentz 系の空間原点の運動を試験物体（物質粒子）の運動と実験的に比較しなければならない（原子時計の読みによって定義されるとき）.

試験物体の運動を実験的に調べることは容易である．地球に束縛された実験室に相対的に，試験物体は下方に $g = 980\,\mathrm{cm/sec^2}$ で加速する．そしてこの加速度は 10^6 分の 1 の精度まで地球上の与えられた位置で測定することができる.

不幸にも，局所 Lorentz 系の運動を測定することは，再び原子時計の読みによって定義されるとき，はるかに困難である．今日これについて，興味ある十分な精度で可能な唯一の直接の実験的な方法は，重力による赤方偏移の実験である（一般相対論の枠組み内での重力による赤方偏移の理論的な議論に対しては 7.2–7.5 節および 25.4 節をみよ）.

*12　もっとも高い精度の赤方偏移実験は，Pound and Rebka (1960)，Pound and Snider (1965) によって改善されている実験である．図 38.1 をみよ．それは Fe^{57} からの 14.4 keV γ 線の赤方偏移を測定するために Mössbauer 効果を用いた．γ 線の放出機と吸収機は Harvard 大学での塔の底面と頂上（高さ $h = 74\,\mathrm{ft} = 22.5\,\mathrm{m}$ だけ離れている）に静止して置かれた．測定された赤方偏移は 1%の精度まで,

$$\Delta\lambda/\lambda = gh = 2.5\times10^{-15} \tag{38.2}$$

の一般相対論の予言と一致した.

この結果は，局所 Lorentz 系は地球の表面に相対的に静止していないことを述べる．むしろ系は自由粒子に作用するのと同じ加速度 g（1%の精度内まで）で下方に加速している．この結論に達するために，実験室の基準系—そこではすべてのもの（実験装置，地球，地球の重力場）は静的である—の中での実験を解析する．実験室に相対的に局所 Lorentz 系は，瞬間的に静止し，下方へ（水平方向の加速度は対称性によって除外される）ある未知の加速度 a で加速する．同等に，実験室は上方に（$+z$ 方向に）局所 Lorentz 系に相対的に加速度 a で加速する．したがって，実験室系内での時空計量は標準的な形,

$$ds^2 = -(1+2az)dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \mathrm{O}(|x^j|^2)dx^\alpha dx^\beta \tag{38.3}$$

をもつ．トラック–2 の読者は 6.6 および 13.6 節でこの形に出会っている．そしてトラック–1 の読者はコラム 16.2 でこの形に出会いそして用いている．さらに，実験室系では計量は静的であり，重力は静的である，そして実験装置は静的である．したがって上方に昇る各電磁波の波頭は前後の波頭の世界線に形が同等な世界線 $t(z)$ に従わなければならない．こうして

$$\begin{aligned}
&\text{波頭}\quad \mathrm{No.}0:\ t = t_0(z),\\
&\text{波頭}\quad \mathrm{No.}1:\ t = t_0(z) + \Delta t,\\
&\qquad\vdots\\
&\text{波頭}\quad \mathrm{No.}n:\ t = t_0(z) + n\Delta t
\end{aligned}$$

*12　測地線の運動のテストとして Pound–Rebka–Snider の赤方偏移実験

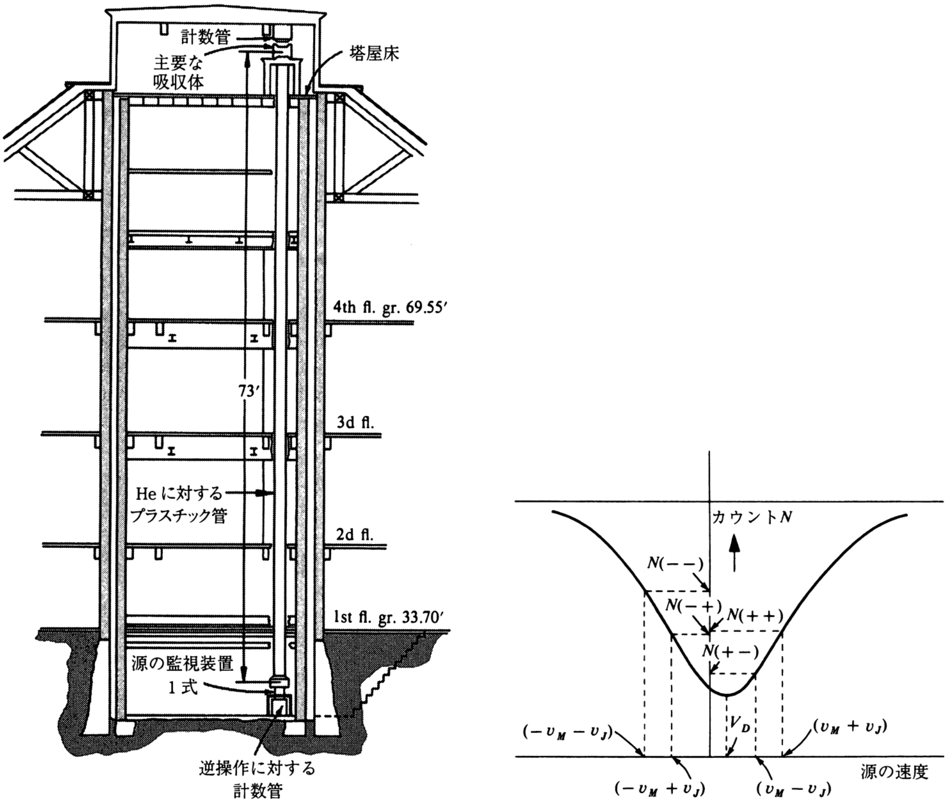


図 38.1　Harvard 大学の Jefferson 物理学実験室における，エレベーターの通る空間内に，ヘリウムで満たされた管を通して，重力に反して 22.5 m 上る光子の重力による赤方偏移について行われた，Pound and Rebka (1959) および Pound and Snider (1965) の実験．Co^{57} の源は 1 キュリーよりも大きい強さを最初もっていた．14.4 keV の γ 線は大きい窓をもつ比例計数管に達するのに，Fe^{57} を豊富に含む吸収体を通っていかなければならなかった．源と吸収体の両方は温度を調節されたオーブンに入れられた．源の速度は 2 つの部分からなっていた．1 つは定常的であり (v_M)，放出線の中心がほとんど直線である送信曲線の部分上にある．そしてもう 1 つは $+v_J$ と $-v_J$ との間にあり，この直線領域内では送信曲線をゆったりたどる．定常的な速度が $-v_M$ のときも同様である．2 つの場合，$+v_M$ および $-v_M$ 間の対称性からのずれによって，定常的な放出体と定常的な吸収体のゼロ重力の場合からの相殺 v_D（重力による赤方偏移の影響）を定めることが可能になる．赤方偏移に対する最終結果は，等価原理から予言される $2gh/c^2$ の値 4.905×10^{-15} の (0.9990 ± 0.0076) 倍であった（“上向きの” 実験と “下向きの” 実験との間の差）．図は Pound and Snider (1965) から改良されたもの．

[ここで，赤方偏移は時空曲率を意味するという Schild の議論（7.3 節）におけるように，波頭の世界線 $t_0(z)$ の形について仮定はなされていない．図 7.1 をみよ]．したがって，座標時間で表すと，相続く波頭の受信間隔は放射間隔と同じである．両方は Δt である．しかし実験の原子時計（Fe^{57} 核）は座標時間でなく，固有時間 $\Delta\tau \equiv (-g_{\alpha\beta}\Delta x^{\alpha}\Delta x^{\beta})^{1/2}$ を測定すると仮定される．こうして

$$\frac{\lambda_{受信}}{\lambda_{放出}} = \frac{\Delta\tau_{受信}}{\Delta\tau_{放出}} = \frac{(1+az_{受信})\Delta t}{(1+az_{放出})\Delta t}$$
$$= 1 + a(z_{受信} - z_{放出})$$

すなわち，

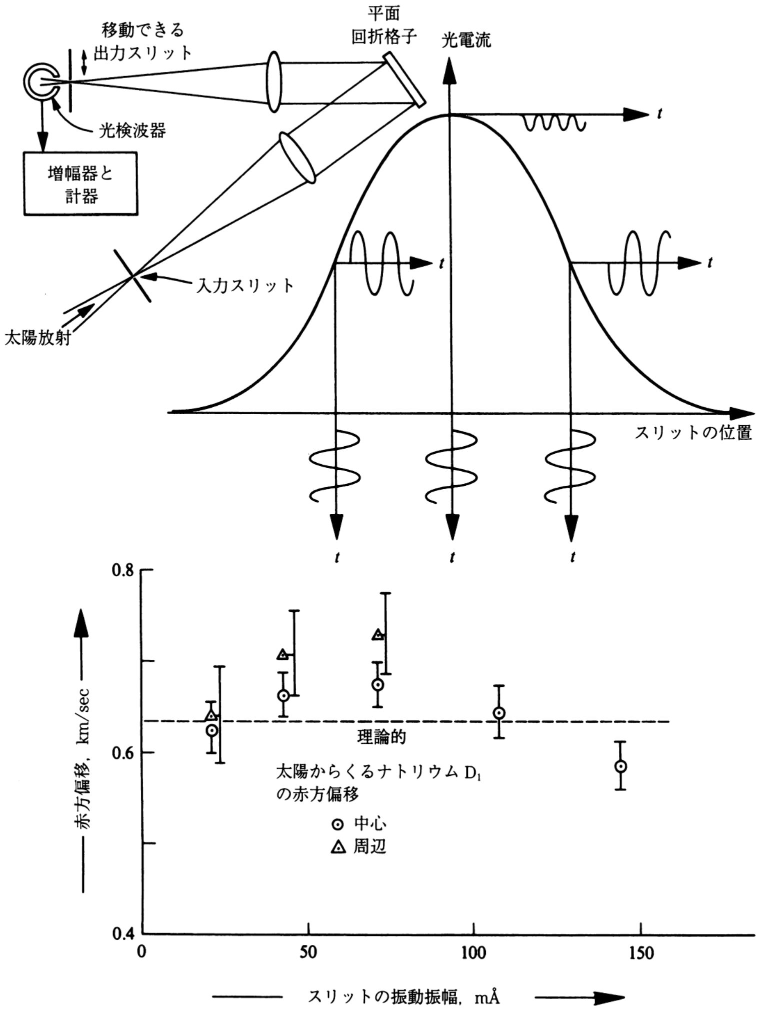


図 **38.2**　ナトリウムの D_1 線の赤方偏移の Brault（1962）による測定は，一般相対論によって予言される重力による赤方偏移の 1.05±0.05 を与える．この強い線は，以前の研究者によって用いられた弱い線と対照的に，(1) 圧力および対流で強く乱される領域以上に，しかし彩層（太陽のもっとも外側の層）よりも低く，太陽の大気中で激しく放出される．そして (2) 視覚的に表示されるスペクトル内で任意の他の線よりも，背景を越えてさらにきれいに目立つようになる．Brault はスペクトルの狭い領域内を力学的に前後に振動させられるスリットをもつ新しい光電分光計（上図）をつくって，線のピークの位置を (1) 電気的に，(2) 主観的な判断と無関係に，そして (3) 慣習になっている視覚的な方法によってもたらされる精度よりも 10 倍程度の因子だけより大きな精度で定めた．スリットは，その平均位置が光電増倍管の流れが変調の振動数での信号を含まないときの線上に据えられていると考えられている．このようにして測定される赤方偏移は太陽と地球の軌道運動と回転に対して補正され，下図における円および三角形内の点を与える．スリットのゼロ振動への外挿は赤方偏移に対して引用されている数を与える．図は Brault（1962）の学位論文から改良されたもの．

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = ah \quad \begin{bmatrix} \text{以下の仮定に基づいた理論的な予言} \\ \text{(i) 原子時計は } \Delta\tau = (-g_{\alpha\beta}\Delta x^{\alpha}\Delta x^{\beta})^{1/2} \text{ を測定する,} \\ \text{(ii) 電磁放射は波連の形をもつ,} \\ \text{(iii) 局所 Lorentz 系は実験室に相対的に加速度 } a \text{ で下方} \\ \quad\quad \text{に加速する} \end{bmatrix} \tag{38.4}$$

実験結果 (38.2) との直接的な比較によると，**地球に束縛された実験室内の局所 Lorentz**

系は試験粒子に作用するのと同じ加速度 g で下方に加速する（1%の精度内まで）.

[上の議論は，基本的に赤方偏移の実験は時空が曲がっていることを意味する Schild の証明（7.2 節）の書き直された形である．結局，もしワシントン，モスクワ，北京における Lorentz 系がすべて地球の中心に向かって $g = 980\,\mathrm{cm/sec^2}$ で加速するならばいかに時空が平坦でありうるだろうか?]

13 すべての赤方偏移の実験の中で，Pound–Rebka–Snider の実験は理論的に解釈するのにもっとも容易である．なぜならそれは一様な重力場内で遂行されたからである．それを補ったのが Brault による実験（1962）である．その実験は太陽の表面で放出され地球で受信される（図 38.2）ナトリウム D_1 線の赤方偏移を測定した．5%の精度まで，彼は $GM_\odot/R_\odot c^2$ の赤方偏移を観測した．ここに $M_\odot$ および $R_\odot$ は太陽の質量および半径である．これは，もし局所 Lorentz 系が，光子の軌道に沿う各点で自由落下する試験物体 と一致して落下するならば，ちょうど予期されるべき赤方偏移である．

要約すると，赤方偏移の実験は数%の精度まで，地球表面でのおよび太陽の近くでの局所 Lorentz 系は，自由落下する試験物体に相対的に加速されないことを表す．同等に，試験物体は局所 Lorentz 系内で直線に沿って動く．同等に，**試験物体の軌道は計量 g の測地線である.**

38.6 等価原理のテスト

*14 重力についての仕事におけるすべての原理の中で，等価原理以上に重要なものはない．16.2 節に精密に述べられているように，等価原理は次のように述べる．**“任意のそしてすべての局所 Lorentz 系で，宇宙のどこでもそしてどのような時間でも，すべての（非重力的な）物理法則はよく知られた特殊相対論の形式を取らなければならない.”**

*15 試験物体が局所 Lorentz 系で直線に沿って動く（測地線の運動）ということは，等価原理の一面である．別な面は Maxwell の方程式

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 4\pi J^\alpha \qquad \text{および} \qquad F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0 \tag{38.5}$$

のすべての局所 Lorentz 系における一般性である．局所的なエネルギー運動量保存の法則

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \tag{38.6}$$

の一般性および，局所的な物理法則に入る次元をもたない定数の値の一般性

$$\begin{aligned} &\alpha_e \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.0360\cdots} = \text{電磁気の微細構造定数}, \\ &\frac{m_{\text{中性子}}}{m_{\text{陽子}}} = 1.00138\cdots, \qquad \frac{m_{\text{電子}}}{m_{\text{陽子}}} = \frac{1}{1836.12\cdots} \qquad \text{など} \end{aligned} \tag{38.7}$$

---

* 別な，さほど正確でない赤方偏移に関する実験のレビューに対しては，Bertotti, Brill, and Krotkov (1962) をみよ．

*13 別な赤方偏移の実験

*14 等価原理のテスト

*15 (1) 測地線の運動

(**注意**：ここで次元をもたない定数に制限される．なぜならそれらだけが，測度の単位の任意の選択によらないからである)．

*16 もし与えられた事象に注目し，物理法則の形式の，1 つの Lorentz 系から別な Lorentz 系への不変性［式 (38.5)，(38.6)，他］について尋ねるならば，それは特殊相対論の領域である．ここに多数の実験は等価原理を実証する（38.4 節をみよ）．

もし法則の形式における，1 つの事象から別な事象への変化について尋ねるならば，とてもあえて熟慮しないような可能性についてのパンドラ（Pandora）の箱を開けることになる．しかし，実験的な証拠は，物理学の法則の作用における，任意のこのような “民主主義からのずれ” を考慮すべききわめてわずかな保証もいまだ与えていない．さらに，天文学的な観測は，物理学の法則は遠い星雲系において太陽系におけるのと同じである，そして遠い銀河においてわれわれの銀河におけるのと同じであるという強い証拠を与える（コラム 29.5 において，これを発見したことについての Edwin Hubble の喜びの表現をみよ）．

*17

*18 次元をもたない “定数” が事象から事象へ一定であることは，物理法則の一定さを仮定するならば，高い精度までテストできる．Dirac（1937, 1938），Teller（1948），Jordan（1955, 1959），Gamow（1967），および他の物理学者は微細構造 “定数”α_e は，もしかしたら宇宙論的な方程式によって支配される，ゆるやかに変化するスカラー場であるかもしれないと提案した．しかし，このような変化についてのむしろ厳しい限界は，クエーサーおよび電波銀河のスペクトル線の微細構造の分離についてのデータから出る．赤方偏移 $z = 1.95$ をもつクエーサー 3C 191 に対して，Bahcall, Sargent, and Schmidt（1967）は $\alpha_e(\text{3C 191})/\alpha_e(\text{地球}) = 0.97 \pm 0.5$ を見出す．クエーサーの赤方偏移の宇宙論的な解釈で，これは限界 $(1/\alpha_e)(d\alpha_e/dt) \lesssim 1/10^{11}$ 年に対応する．さらに厳しい限界は電波銀河データから得られている．ここに赤方偏移の解釈について問題は存在しない．Bachall and Schmidt（1967）は，2×10^9 年前の光の放出に対応して，$z \approx 0.20$ をもつ 5 個の電波銀河における微細構造の分離を測定した．彼らは $\alpha_e(z = 0.20)/\alpha_e(\text{地球}) = 1.001 \pm 0.002$ を得た，それは限界 $|(1/\alpha_e)(d\alpha_e/dt)| \lesssim 1/10^{12}$ 年 を与える．

Dyson(1972) によれば，過去の時代における Re^{187} の β 崩壊の率（古い鉱石におけるオスミウム（osmium)–レニウム（rhenium）の存在量の比を通して）と今日の β 崩壊の率との比較は，赤方偏移のデータよりも厳密な，そして初期の時期と今日との間の α 崩壊と原子核分裂の率における任意の変化よりも厳密な，時間に伴う，α_e の任意の可能な変化についてチェックする手段を提供する．Dyson は Re^{187} について利用できるデータを要約しそして，限界

$$|(1/\alpha_e)(d\alpha_e/dt)| \lesssim 5/10^{15} \text{ 年}$$

に達する．基本的な定数の一定性のさらなる証拠に対しては Minkowski and Wilson（1956），Dicke（1959a,b），Dicke and Peebles（1962b）をみよ．

---

*16　(2) 物理法則は局所的に Lorentz 不変である
*17　(3) 法則は事象から事象へ変化しない
*18　(4) 基本的な定数は事象から事象へ変化しない

*19 太陽系における α_e，$m_{中性子}/m_{陽子}$，および別な“定数”の空間変化は Eötvös 型の実験によって求めることができる．このような実験から定数の任意の空間変化についての限界に通ずる推論（Dicke（1969）による）は非直接的である．この推論はイオン化した分子についての標準的な取り扱いにおいて用いられる推論を思い出させ，不均質な電場によって引っ張られるイオン化されうる分子の加速度を演繹する．この推論は以下のように進行する．

次元をもたない“定数”の一つ“α”は，位置に依存すると仮定せよ．これは実験室の試験物体の全質量–エネルギーの位置依存性に通ずるだろう．たとえば，もし α_e が位置に依存するならば，原子核の Coulomb エネルギーもまた位置に依存するだろう（$E_{\text{Coulomb}} \propto e^4 \propto {\alpha_e}^2$，$\delta M/E_{\text{Coulomb}} = 2\,\delta\alpha_e/\alpha_e$）．試験物体が x^μ から $x^\mu + \delta x^\mu$ へ動かされるとき，その変位の間，物体の構造がまったく変化しないと仮定することによって，試験物体の質量–エネルギーにおける変化を計算することができる．

$$\delta M = (\partial M/\partial\alpha)_{\text{固定された構造}}(\partial\alpha/\partial x^\mu)\delta x^\mu \tag{38.8}$$

変位の後に，内力の弱まり（たとえば，α の減少による）が構造における変化を引き起こすかもしれない．しかしその変化は内部のポテンシャルエネルギーの内部の運動エネルギーへの変換を伴うだろう．それは M を保存する．

さて次の思考実験を考える［Einstein が初めて重力による赤方偏移を導いた議論を精巧にしたもの（7.2 節）］．n 個の粒子をとる，おのおのは質量–エネルギー μ をもつ．μ の無視できる割合が興味ある“定数”α と関係しているような構造をもつ粒子をつくる．

$$(1/\mu)(\partial\mu/\partial\alpha) = 0 \tag{38.9}$$

これらの粒子を（局所的に）一様な Newton 場内で高さ h に置く．それらをそこで互いに結合している束縛エネルギー $E_B(h)$ を解放して，質量

$$M = n\mu - E_B(h) \tag{38.10}$$

の複合物体を形成する．それは重要な方法で“定数”α に依存する．

$$(1/M)(\partial M/\partial\alpha)\neq 0 \tag{38.11}$$

この物体，および小さい袋の中に拘束されている解放された束縛エネルギーを，距離 δh 下げる．作用する全体の力は（Newton の言葉で）

$$F = Ma + E_B(h)g \tag{38.12}$$

である．ここに g は自由落下のときに，α に無関係な型の質量–エネルギーが受ける加速度である．対照的に，集められた物体 M の“自由”落下は，この物体に補足的に引っ張りの“偏極の力”が働くので，実際には自由落下でない．したがって“自由”落下における集合

*19 基本的な定数の空間的な変化に対するテストとして Eötvös 型の実験

体は g とわずかに異なる加速度，a を経験する．しかし，加速される質量は正確に M であり，したがってこの加速度を生み出すために要求される力は積 Ma によって与えられる．物体および袋を下げるときに得られるエネルギーは

$$E(\text{落下}) = F\delta h = Ma\,\delta h + E_B(h)g\,\delta h$$

である．このエネルギーを袋に与える．

$h - \delta h$ で，袋からの若干のエネルギーを用いて物体をその成分粒子に引き離す．要求されるエネルギーは

$$\begin{aligned} E_B(h-\delta h) &= n\mu - M(h-\delta h) = n\mu - M(h) + \frac{\partial M}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial h}\delta h \\ &= E_B(h) + \frac{\partial M}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial h}\delta h \end{aligned}$$

である．したがってエネルギー

$$\begin{aligned} E_{\text{袋}} &= E_B(h) + E(\text{落下}) - E_B(h-\delta h) \\ &= \left[Ma + E_B(h)g - \frac{\partial M}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dh}\right]\delta h \end{aligned} \tag{38.13}$$

が袋に残される．このエネルギーを用いて n 個の粒子と袋を逆に高さ h まで上げる．**全エネルギーの保存を仮定すると，**n 個の粒子と袋が高さ h で逆に元の状態に戻ってしまったときに余分のエネルギーと不足のエネルギーは存在しないだろう．これは，$E_{\text{袋}}$ は正確に上にあげるエネルギーとちょうど同じ量でなければならない．

$$E_{\text{袋}} = n\mu g\,\delta h = [M + E_B(h)]g\,\delta h \tag{38.14}$$

$E_{\text{袋}}$ に対する表現 (38.13) および式 (38.14) を結合して，

$$a - g = \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dh} \tag{38.15}$$

を見出す．

こうして，全エネルギー保存の仮定のもとで（永久運動の機械でない!），物理的な“定数”α の空間依存性は，質量が α に依存する物体の加速度における異常性 (38.15) に通ずるだろう．

$\alpha_e{}^2$ に比例する，Coulomb エネルギーは，金の原子核で質量の 0.4%になる，そしてアルミニウムの原子核で 0.1%になる．したがって，α_e における空間変化はこれら 2 つの原子核の重力加速度における微小な差に通ずるはずであり

$$\left|\frac{a_{\text{金}} - a_{\text{アルミニウム}}}{g}\right| \approx \frac{1}{g}2\frac{0.003}{\alpha_e}\frac{d\alpha_e}{dh} \lesssim 1\times10^{-11}$$

に等しい．すなわち，

$$\frac{1}{\alpha_e}\left|\frac{d\alpha_e}{dh}\right| \lesssim 1\times10^{-9}\,g \approx 1\times10^{-9}\,\text{cm/sec}^2 = 1\times10^{-30}/\text{cm} \quad \text{(太陽による地球での)} \tag{38.16}$$

ここに Dicke の実験（38.3 節）からの限界（1×10^{-11}），および地球での太陽による加速度 $g = 0.6\,\mathrm{cm/sec^2}$ が用いられている．

これは，$\ln\alpha_e$ の勾配は Newton のポテンシャルの勾配よりも，1×10^{-9} 小さいことを述べていることに注意せよ！

38.7 未知の長い領域にわたる場の存在に対するテスト

*20 試験物体が計量の測地線上を動くという仮定を受け入れようと受け入れまいと，これまでよく知られていない，長い領域にわたる場（大きい距離で “$1/r$” で減少する場）が，何らかの形で重力と関係しているということはありうるだろう．

もし “新しい” 長い領域にわたる場（計量でない，電磁気的でない）が存在するならば，発見されるのを待って，物質に影響を及ぼしうるであろう 2 つの方法が存在する．1 番目，新
*21 しい場は**直接物質に結合しうる**だろう．たとえば，測地線の運動からのわずかなずれ（38.5 節の限界よりも小さいずれ），あるいは粒子の質量の位置に対するわずかな依存性（38.6 節の限界よりも小さい依存性）を生み出して．2 番目（探知するにはさらに難しい），新しい場は**非直接的に物質に結合しうる**だろう．時空の幾何学を定める場の方程式へのたんなる参加者であることによって．この節では直接的な結合の効果に対するテストについて説明する．非直接的に結合する場についての理論はコラム 39.1 に記述されるだろう．そしてこのような場に対するテストは 40 章で議論されるだろう．

*22 Dicke（1964b）は，重力理論（38.2 節）のテストを解析するための枠組みを用いて，いくつかのヌル実験は未知の，直接的な結合の，長い領域にわたる場に対する厳しい限界を置くことを示した．

*23 これらの実験の一つは “Hughes–Drever 実験” ［Hughes, Robinson, and Beltran–Lopez（1960），Drever（1961）］である．それは試験物体の軌道の計量 $g_{\alpha\beta}$ の測地線からのわずかなずれを生み出す，対称な 2 階のテンソル場 $h_{\alpha\beta}$ に対する探求と考えることができる．実験が，たまたま $h_{\alpha\beta}$ が $g_{\alpha\beta}$ の一定の倍数である（“すべての長さおよび時間を一定の因子だけたんにスケールを変える”）時空の領域内でなされるのでなければ，このテンソル場は時空の性質に非等方性を生み出さなければならない．それは，今度は，核子の慣性質量に非等方性を引き起こすだろう．そして今度は，原子核に異なる磁気量子数をもつ縮退したエネルギーレベルの相対的な変位を引き起こすだろう．Hughes–Drever 実験はこのような変位に，そしてそれによって可能なテンソル場 $h_{\alpha\beta}$ に厳密な限界を与える．Dicke（1964, p.186）を引用するには，“もし 2 つの［テンソル］場が存在し，別なテンソル場を等方的にするために選ばれた座標系で 1 つのテンソル場が強く非等方であるならば，1 つのテンソル場への［直接の］結合の強さは，別なテンソル場への結合の強さの 10^{-22}

*20 重力と関係している新しい長い領域にわたる場の可能な存在
*21 直接的な結合対非直接的な結合
*22 直接的な結合の場に対する実験的な限界
*23 (1) Hughes–Drever 実験

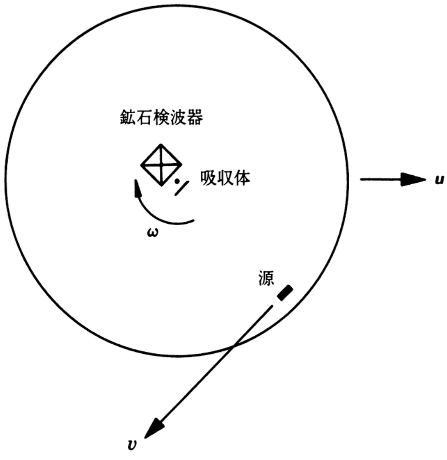


図 **38.3**　Turner and Hill（1964）の実験は，固有時計の進度（時計は遠心分離器の縁近くに置かれている Co^{57} である）の，宇宙の遠く離れた物質に相対的な，あるいは，操作上の術語で，4–ベクトルによって記述される “新しい局所場” に相対的な，速度への依存性を探す．Co^{57} からの 14.4 keV γ 線はすでに 10^{13} 分の 1.3 部分の 2 次の Doppler 変位を受ける．付加的な変位 $\gamma\beta^2$ を探す．ここに $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{u} + v(\boldsymbol{e}_x \cos\omega t + \boldsymbol{e}_y \sin\omega t)$ はスカラー場が純粋に時間的である系に相対的な速度である．Fe^{57} 吸収体を通して γ 線の放出は任意のこのような付加的な変位とともに直線的に低下するだろう．そして NaI 結晶の勘定率の低下として言及されるだろう．源は回転軸から 10 cm であった，そして遠心分離器は毎分 15,000 回回転した．実験から演繹された γ の値は $(1\pm4)\times10^{-5}$ であった．

倍の程度に過ぎないものでなければならない…．［さらに］，絶えず変化している速度をもつ動いている地球上で，非等方性はある季節に予期されるだろう．” そうすると，Hughes and Drever の実験から，2 番目のテンソル場の存在に対するわずかな証拠すら存在しないと結論される．さらなる詳細については Dicke and Peebles（1962a）をみよ．

*24　**“エーテル漂流実験”** とよばれる別な系列の実験は，質量–エネルギーに直接結合する任意の未知の，長い領域のベクトル場に厳密な限界を与える．宇宙論的な起源のこのような場を想像することができる．宇宙論的であるから，4–ベクトルは “宇宙論的な流体” の 4–ベクトル $\boldsymbol{u}$ と同じ方向（宇宙論的なマイクロ波放射が等方向である系の時間方向 $\boldsymbol{e}_0$ と同等である）を指すことがもっとも自然に予期されるだろう．新しい場の 4–ベクトルはそうすると任意の別な系における空間成分をもつだろう．

原理的に観測者はそれらの空間成分を用いて，宇宙の平均的な静止系に相対的な観測者の運動方向および速度を知ることができるだろう．エーテル漂流実験はこのような場の効果を探す．

たとえば，Turner and Hill（1964）の実験は，横波の Doppler 偏移を，遠心分離器の縁上の放出器と中心にある受信器（図 38.3）に対する方向の関数として吟味することによって，時計の刻み率のこのようなベクトル場に対する依存性を探す．もし何かの効果が存在するならば，それはもっとも自然に形式

*24　(2) エーテル漂流実験

$$\frac{(\text{速度 }\boldsymbol{\beta}\text{ で宇宙に相対的に動いている時計の刻み率})}{(\text{宇宙に相対的に静止している時計の刻み率})} = 1+\gamma\beta^2 \ (\gamma\text{ は小さい定数である}) \tag{38.17}$$

をもつことが予測されるだろう．遠心分離器の中心にある時計は $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{u} = u\boldsymbol{e}_x$ をもつ．他方，縁上の時計は $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{u} + v(\boldsymbol{e}_x \cos\omega t + \boldsymbol{e}_y \sin\omega t)$ をもつ．こうして，縁と円盤間の変移は位置とともに変化するはずである．

$$\Delta\lambda/\lambda = -\Delta\nu/\nu = -2\gamma uv\cos\omega t + \text{通常の横波の変移}$$

Turner and Hill のデータは，Mössbauer 効果を用いて

$$|\gamma| < 4\times10^{-5} \tag{38.18}$$

を示す．したがって，宇宙論のベクトル場は，もし存在するならば，ただ弱い直接的な物質との結合をもつ．

これらの実験およびそれらのような別な実験についての文献のさらなる議論については，Dicke（1964b）をみよ．

39章
重力の別な理論およびポストNewton近似

39.1 別な理論

物理法則のすべての集合の中でEinsteinの幾何学的な重力理論（16および17章）よりも単純である，あるいは美しい物理法則はいまだ発見されていない，そしてより強制力のあるどのような重力理論もいまだ発見されていない．

実験が次々と遂行され，そして重力理論が次々と観測の犠牲となって落伍するにつれて，Einstein理論が確固たるものとなった．実験とEinsteinの重力法則との間でよく話題になるような矛盾は，いまだ時の試練に耐えて残ったものはない．

*1 **質問**：なぜ別な重力理論を吟味して悩むのか？ **答え**：Einsteinの理論をテストするための“引き立て役”をもつために．

Einsteinの幾何力学が“戦いで試されている”というのは，異なる予言をする理論に対して試されたときにすべて勝利したということである．それでは戦いによる決定的な新しい試練に対する新しい対立者を，いかにして選ぶか？

すべての重力理論が等しく創造されているわけでない．多数の文献の中で，きわめてわずかなものだけが，一般相対論あるいは将来の実験と比較するだけの価値を十分もちうる．“価値のある”理論は**存在可能性に対する3つの基準**，すなわち，**自己無矛盾性**，**完全性**，
*2 **および過去の実験との一致**を満たす理論である．

*3 **自己無矛盾性**はこのテストを落第させる若干の理論を記述することによってもっともよく例示される．内部的に矛盾している理論の古典的な例は，重力のスピン2の場の理論であり［Fierz and Pauli（1939），コラム7.1］，ここではそれは線形化された一般相対論（18章）に同等である．スピン2の理論の場の方程式は，重力を及ぼしているすべての物体は大域的なLorentz基準系において直線に沿って動くことを意味する．他方，理論の運動方程式は，重力は物体を直線運動からそらせることを主張する［この矛盾を除去しようと試みるときは，自らを一般相対論まで“ブートストラップ”（bootstrapped）しなければならない．コラム17.2の5項をみよ］．別な自己矛盾な理論はKustaanheimo（1966）の理論である．それは，光の波動性（Maxwell理論）が用いられるときには重力による赤方偏移は光の重さがゼロだと予言する，そして粒子性（光子）が用いられるときにはゼロ

*1 実験的なテストに対する失敗としての別な重力理論の役割
*2 理論の存在可能性に対する基準
*3 （1）自己無矛盾性

でない赤方偏移を予言する．

*4 **完全性**：完全であるには，重力の理論は“第1原理”から興味あるすべての実験の結果を解析できなければならない．したがってそれは電磁気，量子力学，およびすべての他の物理学の法則の両立する組と調和し，そして合体しなければならない．もし重力の理論が，原子時計が特別な計量から構成される“間隔” $d\tau = (-g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta)^{1/2}$ を測定することを**仮定する**ならば理論は完全でない．原子時計は複雑な系であり，その振る舞いは量子論および電磁気学の基本的な法則から計算されなければならない．もし理論が，惑星が測地線上を動くことを**仮定する**ならば，その理論は完全でない．惑星は複雑な系であり，その運動は，圧力を加えられた物質の，重力への応答に対する基本的な法則から計算されなければならない．さらなる議論については 16.4，20.6 節および 40.9 節をみよ．

*5 **過去の実験との一致**：理論は若干の標準的なずれの範囲まで，“4 つの標準的なテスト”（重力による赤方偏移，近日点の変位，電磁波の偏向，レーダーの時間の遅延）と一致するという必要性は明白である．宇宙の膨張（歴史的に一般相対論のすべてのエースの中のエース）との一致と，さらに毎日の，Newton のレベルにおける観測との一致の必要性は等しく明白であるがしばしば忘れられる．たとえば，Birkoff（1943）の理論は一般相対論と同じ赤方偏移，近日点の変位，偏向，および時間の遅延を予言する．しかし Birkoff の理論は重力を及ぼしている物体内部の圧力は質量–エネルギーの全密度に等しく，$p = \rho$. 結果として，音波は光の速度で動くことを要求する．もちろん，この予言は実験と激しく異なる．したがって，Birkhoff の理論は可能でない．別な例：Whitehead（1922）の重力理論は長らく Einstein の理論に代わりうるものと考えられていた．なぜなら彼の重力理論は“4 つの標準的なテスト”に対して Einstein と同じ予言を正確に行う．Whitehead の理論が，毎日の経験にと完全に矛盾する大洋の潮汐の引き潮および上げ潮に対する時間依存性を予言する（40.8 節をみよ）ことは，Will（1971b）の仕事まで理解されなかった．

39.2　重力の計量理論

*6 議論の 2 つの流れは，**計量理論**とよばれる，重力理論の制限されたクラスに注意を狭める．

1 番目の議論は前章の題目を形成する．それは実験を次々に吟味して，2 つの結論に達した．(1) **時空は計量をもつ，そして** (2) **その計量は等価原理を満たす**（標準的な特殊相対論の物理法則はおのおのの局所 Lorentz 系で成り立つ）．**これら 2 つの原理を統合する重力理論は計量理論とよばれる***．要するに，38 章は“重力の任意の適切な記述に対しては，計量理論をみよ”と述べる．

例外：Cartan（1922b, 1923）の理論［“一般相対論とねじれ”，Trautman（1972）をみよ］は計量的でないが，しかし実験と一致し，実験的には 1970 年代の技術で一般相対論

---

* 計量理論のわずかにより狭い定義に対しては，Thorne and Will（1971）をみよ．

*4 (2) 完全性

*5 (3) 過去の実験との一致

*6 なぜ重力の計量理論に注目するか

と区別できない.

計量理論を示す 2 番目の議論は完全性の問題で始まる（前節）. 完全であるには, 理論は自己矛盾のない形の, すべての非重力の物理法則を包含しなければならない. 計量を導入することを除いて物理学の残りを容易に包含し, それから等価原理を生み出す方法を誰も発見していない. 別な方法は悲観的な複雑さに通じ, そして通常, 自己矛盾のないこと, 完全性, および過去の実験との一致という 3 個のうちの 1 つについて, 理論の失敗に通ずる. **1973 年において存立できることが知られているすべての理論は Cartan の理論を除いて, 計量理論である [Ni（1972b）, Will（1972）をみよ].**

*7 重力の計量理論は, ただ 1 つの重要な方法において, 互いに他と異なる. 計量の生成に対するそれらの理論の法則である. 一般相対論では, 計量は物質のおよび非重力場のストレス–エネルギーによって直接生成される. Dicke–Brans–Jordan 理論（コラム 39.1）では, 物質および非重力場がスカラー場 ϕ を生成し, それから ϕ が物質および他の場とともに作用して計量を生成する. 38.7 節の言葉で表すと, ϕ は "新しい長い領域の場" であり, 非直接的に物質と結合する. 別な例として, Ni（1970, 1972）（コラム 39.1）によって考案された理論は平坦な空間の計量 $\boldsymbol{\eta}$ および普遍的な時間座標 t（"先験的な幾何学", 17.6 節をみよ）をもつ. $\boldsymbol{\eta}$ は物質と非重力場とともに作用してスカラー場 ϕ を生成する. それから $\boldsymbol{\eta}$, t, ϕ は結合して等価原理に入る物理学的な計量 $\boldsymbol{g}$ を創造する.

上述の 3 つの理論—Einstein, Dicke–Brans–Jordan, Ni—はすべて, 本節が書かれた 1971 年の夏には存立できた. しかし 1971 年の秋には Ni の理論, および存立できるとみなされていた多くの他の理論は Nordtvedt and Will（1972）によって実験と一致しないことが証明された. これは重力理論の実験的なテストの現在の進歩の速さの例である！

今後, 本章および次章では, 注意は重力の計量理論およびそれらの実験との比較に向けられるだろう.

39.3　ポスト Newton の限界および PPN 形式

*8 計量理論の間を区別するような実験が遂行される, 太陽系は弱い重力をもつ.

$$|\Phi| = |\text{Newton のポテンシャル}| \lesssim 10^{-6} \tag{39.1a}$$

さらに, 太陽系の重力を生成する物質は遅く動く.

$$v^2 = (\text{太陽系の質量中心に相対的な速度})^2 \lesssim 10^{-7} \tag{39.1b}$$

そして小さい張力と内部エネルギーをもつ.

$$|T_{jk}|/\rho_0 = (\text{バリオンの“質量” 密度によって割られた張力}) \lesssim 10^{-6} \tag{39.1c}$$

$$\Pi = (\rho - \rho_0)/\rho_0 = \begin{pmatrix} \text{単位のバリオンの“質量” 密度} \\ \text{あたりの内部エネルギー密度} \end{pmatrix} \lesssim 10^{-6} \tag{39.1d}$$

*7　計量理論はいかに異なるか

*8　弱い場, 遅い運動, 計量理論の展開

[ここにバリオンの **"質量" 密度** ρ_0 は，その名前にもかかわらず，そしてときにはさらに誤解を招くことに "静止質量–エネルギーの密度" とよばれる事実にもかかわらず，実際バリオンの数密度 n の測度であり，それ以上でない．バリオンの質量密度は n と，あるよく定義された標準的な状態における，バリオンあたりの質量に対するある標準的な表現 μ_0 との積として定義される．こうして，

$$\rho_0 \equiv n\mu_0 \tag{39.1e}$$

である.] したがって，重力の任意の計量理論を用いての太陽系の実験の解析は，精度の重要な損失なしに，小さいパラメータ $|\Phi|$，v^2，$|T_{jk}|/\rho_0$，および Π についての同時展開によって単純化することができる．このような "弱い場，遅い運動展開" は次のようなものを与える．(1) "ゼロ次" における平坦な，空の時空，(2) "1 次" における太陽系の Newton の取り扱い，および (3) "2 次" における Newton の取り扱いへのポスト Newton の補正．

*9 Newton の理論とポスト Newton の補正の形式は **"ポスト Newton 近似"** とよばれる．おのおのの計量理論は自らのポスト Newton 近似をもつ．計量理論そのもの間の大きい相違にかかわらず，それらのポスト Newton 近似は非常に似ている．それらは，実際，非常に似ているので非直接的に結合している場 (Dicke–Brans–Jordan における ϕ，Ni における $\boldsymbol{\eta}$，t，および ϕ，コラム 39.1 をみよ）へのいかなる関係をも除いて，1 つのポスト Newton の重力理論を構成することができる．この理論は特別な例としてすべての考えられうる計量理論のポスト Newton 近似を含んでいる．このすべてを包含するポスト Newton の理論は **"パラメータ化されたポスト Newton (PPN) 形式"** とよばれる．それは任意に指定できる 1 組のパラメータ（**"PPN パラメータ"** とよばれる）を含んでいる．これらのパラメータに対する 1 組の値は，PPN 形式を一般相対論のポスト Newton の極限と同等にする．別な組の値は，PPN 形式を Dicke–Brans–Jordan 理論という他のポスト Newton の極限にする．

*10

本章の以下の節は，Cliford M. Will and Kenneth Nordtvedt, Jr.（1972）によって考案された PPN 形式の形を解説する［また Will（1972）をみよ］．この形は，10 個の PPN パラメータを含み，特別な例として著者に知られている重力のほとんどすべての計量理論を含む．若干の例外［Whitehead（1922）および Will（1973）によって考案された理論］はすべて実験と一致しない．付加的な項およびパラメータを追加することによって PPN 形式内に重力の計量理論を含むことができる．

10 個のパラメータについては，形式の完全な詳細をとばすだろう読者の便宜のために，コラム 39.2 で発見法的に記述される（39.4–39.12 節）．

*11 PPN 形式はいかに正確であるか？ あるいは，より正確に述べれば，ポスト Newton 近似は，計量理論から生ずるが，いかに正確にこの理論と一致するか？ $|\Phi|$，v^2，$|T_{jk}|/\rho_0$，および Π はすべて $\lesssim 10^{-6}$ である太陽系では，ポスト Newton 近似はポスト Newton

*9 ポスト Newton の近似
*10 PPN 形式
*11 太陽系における PPN 形式の精度

の量の程度について $\lesssim 10^{-6}$ の微小な誤りを生み出す，そして Newton 近似の量について $\lesssim 10^{-12}$ 程度の微小な誤りを生み出す．たとえば，$\lesssim 10^{-6}\times$(ポスト Newton のずれ) $\sim 10^{-6}$ 秒の弧だけの光のふれを誤って表す．そして $\lesssim 10^{-12}\times$(1 天文単位) $\sim 10\,\mathrm{cm}$ の大きさの，地球の軌道の相対性理論による変形を無視する．明らかに，1970 年代にはポスト Newton の近似への高次の補正を用いる必要は存在しない．したがって “パラメータ化されたポスト–ポスト Newton の枠組み” を構成する必要は存在しない．しかし，Shapiro (1971b) の言葉で “もし先の 10 年間における達成から投射するならば，1980 年代の技術では一般相対論の 2 次の効果を観測することが可能になるだろうと予言することは理にかなっていないことはない．その点で理論的な相対論者の実験的な相対論者に対する比は，下方へ鋭く方向転換をするだろう．”

コラム 39.1　Dicke–Brans–Jordan の理論および Ni の理論

A. Dicke–Brans–Jordan

文献：Brans and Dicke (1961), Jordan (1959) [**注意**：これは Jordan の理論の特別な例 $\eta=-1$ である．理論の別な数学的な表現は Dicke (1962) によって与えられている].

重力と関係した場：

- ϕ：長い領域のスカラー場.
- $\boldsymbol{g}$：時空の計量（これから共変微分 $\boldsymbol{\nabla}$ および曲率テンソルが，通常の方法で構成される）.

これらの場を定める方程式：ストレス–エネルギーテンソルのトレースは曲がった時空の波動方程式

$$\Box\phi=\phi^{,\alpha}{}_{;\alpha}=\frac{8\pi}{3+2\omega}T$$

を通して ϕ を生成する．ここに ω は次元をもたない “Dicke の結合定数” である．

ストレス–エネルギーテンソルおよび ϕ はともに計量（すなわち，時空の曲率）を場の方程式

$$G_{\alpha\beta}=\frac{8\pi}{\phi}T_{\alpha\beta}+\frac{\omega}{\phi^2}\left(\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}\right)+\frac{1}{\phi}(\phi_{;\alpha\beta}-g_{\alpha\beta}\Box\phi)$$

を通して生成する．ここに $G_{\alpha\beta}$ は Einstein テンソルである．

これらの方程式に対する変分原理：

$$\delta\int[\phi R-\omega(\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}/\phi)+16\pi L](-g)^{1/2}\,d^4x=0$$

ここに R はスカラー曲率であり，そして L は物質の Lagrangian である．

等価原理は満たされている：

特殊相対論の物理法則は，変化なしに，計量 $\boldsymbol{g}$ の局所 Lorentz 系で成り立つ．

結果：スカラー場は物質にいかなる直接的な影響も及ぼさない．その唯一の役割は時空の幾何学を定める場の方程式に関与する役割である．それは 38.7 節の意味において“間接的に結合する場”である．この理論は自己矛盾のない，完全な，そして $\omega > 5$ に対してはすべての 1973 年以前の実験と（2 つの標準的なずれあるいはよりよく）“理にかなった”一致をしている．

B. Ni

文献：Ni（1970, 1972）

重力と関係した場：

$\boldsymbol{\eta}$：平坦な“背景計量”（17.6 節の意味において“先験的な幾何学”）．仮定によって，座標系（“背景 Lorentz 系”）が存在し，そこではいたるところ即座に $\eta_{00} = -1$，$\eta_{0j} = 0$，そして $\eta_{jk} = \delta_{jk}$．

t：“普遍的な時間座標”（17.6 節の意味で“先験的な幾何学”）とよばれるスカラー場，それは背景計量に非常に“調和している”ので

$$t_{|\alpha\beta} = 0, \qquad t_{,\alpha}t_{,\beta}\eta^{\alpha\beta} = -1$$

ここに“|”は $\boldsymbol{\eta}$ についての共変微分を示す．

これは $x^0 = t$ である背景 Lorentz 系（“宇宙の静止系”）が存在することを意味する．

ϕ：“スカラー重力場”とよばれるスカラー場．

$\boldsymbol{g}$：時空の計量（これから共変微分 $\boldsymbol{\nabla}$ および曲率テンソルが，通常の方法で構成される）．

これらの場を定める方程式：時空のストレス–エネルギーはスカラー重力場 ϕ を波動方程式

$$\begin{aligned}\Box\phi \equiv \phi^{,\alpha}{}_{;\alpha} &= -2\pi T^{\alpha\beta}\,\partial g_{\alpha\beta}/\partial\phi \\ &= 4\pi T^{\alpha\beta}[\eta_{\alpha\beta}e^{-2\phi} + (e^{2\phi} + e^{-2\phi})t_{,\alpha}t_{,\beta}]\end{aligned}$$

を通して生成する．

ϕ，$\boldsymbol{\eta}$，および t はともに時空の計量を代数関係

$$\boldsymbol{g} = e^{-2\phi}\boldsymbol{\eta} + (e^{-2\phi} - e^{2\phi})\boldsymbol{dt} \otimes \boldsymbol{dt}$$

を通して定める．

注意：この理論で前提条件とされている“宇宙の静止系”で，この計量は

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = -e^{2\phi}\, dt^2 + e^{-2\phi}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

に帰着する．
ϕ に対する場の方程式に対する変分原理：

$$\delta \int (-2\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} + 16\pi L)(-g)^{1/2}\, d^4x = 0$$

ここに L は物質の Lagrangian である．
等価原理は満たされている：

特殊相対論の物理法則は，時空計量 $\boldsymbol{g}$ の局所 Lorentz 系で，変化なしに成り立つ．結果：ϕ, $\boldsymbol{\eta}$, および t は物質にいかなる直接的な影響も及ぼさない．それらは 38.7 節の意味において "非直接的に結合する場" である．

この理論は自己矛盾がなく完全である．もし太陽系が "宇宙の静止系" で静止していたならば，理論は—おそらく，宇宙の膨張を除いて，—現在まですべての実験と一致するだろう．しかし宇宙を通しての太陽系の運動は，実験との深刻な不一致に通ずる（Will and Nordtvedt 1972, 40.8 節）．

コラム 39.2　10 個の PPN パラメータの発見法的記述

パラメータ	一般相対論に対して，それは何を測定するか？[a]	一般相対論における値	Dicke–Brans–Jordan 理論における値[b]	Ni の理論における値[b]
γ	どれほどの空間曲率（g_{jk}）が単位静止質量によって生成されるか？	1	$\dfrac{1+\omega}{2+\omega}$	1
β	どれほどの非線形性が重力（g_{00}）に対する重ね合わせの法則に存在するか？	1	1	1
β_1	どれほどの重力（g_{00}）が単位の運動エネルギー（$\frac{1}{2}\rho_0 v^2$）によって生成されるか？	1	$\dfrac{3+2\omega}{4+2\omega}$	1
β_2	どれほどの重力（g_{00}）が単位の重力のポテンシャルエネルギー（$\rho_0 U$）によって生成されるか？	1	$\dfrac{1+2\omega}{4+2\omega}$	1

β_3	どれほどの重力 (g_{00}) が単位内部エネルギー ($\rho_0 \Pi$) によって生成されるか？	1	1	1
β_4	どれほどの重力 (g_{00}) が単位圧力 (p) によって生成されるか？	1	$\dfrac{1+\omega}{2+\omega}$	1
ζ	どれほどより多くの重力 (g_{00}) が，横方向の運動エネルギーによるよりも半径方向の運動エネルギー $[\frac{1}{2}\rho_0(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})^2]$，すなわち，観測者に向かう運動の運動エネルギーによって生成されるか？	0	0	0
η	どれほどより多くの重力 (g_{00}) が，横方向のストレスによるよりも半径方向のストレス $[\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{t}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}]$ によって生成されるか？	0	0	0
Δ_1	どれほどの慣性系 (g_{0j}) の引きずりが単位運動量 ($\rho_0 v$) によって生成されるか？	1	$\dfrac{10+7\omega}{14+7\omega}$	$-\dfrac{1}{7}$
Δ_2	運動量 ($\rho_0 v$) が慣性系を半径方向に（観測者に向かって）引きずる方が，横方向におけるよりもどれほど容易であるか？	1	1	1

[a] これらの発見法的な記述は式 (39.23) に基づいている．

[b] これらの理論の説明に対してはコラム 39.1 をみよ．それらの PPN 値および別な理論に対する PPN 値の導出に対しては，Ni (1972) をみよ．

実際，ポスト Newton の近似が 1970 年代に対して十分であるという主張に対して若干の例外がある．これらの例外は外部宇宙が太陽系に作用し影響を及ぼすところで生ずる．たとえば，遠く離れた源から太陽系に伝播する重力波 (35–37 章) は，すべてのポスト Newton の近似によってまた PPN 枠組みで無視される．これらの重力波は完全な計量理論，あるいはこのような理論に対する弱い場の，“素早い運動” の近似を用いて取り扱われなければならない．同様に，ある理論で宇宙の膨張に起因する，“重力定数” の時間依存性 (40.8 節)

は，膨張自身と同じく，PPN 形式の領域を越えている．

12 PPN 形式は重力理論の実験的なテストを解釈するときばかりでなく，理論的な天体物理学における有力な道具としても用いられる．すべての PPN パラメータを，$\zeta = \eta = 0$ を除いて，1 に特殊化することによって，Einstein の重力理論へのポスト Newton の近似を得る．このポスト Newton 近似はそうすると，星の構造と安定性のような現象に対する一般相対論の補正を計算するのに用いることができる（そして広範囲にわたって用いられてきた）．

歴史的なおよび記号上の注意

*13 ポスト Newton 近似のもっとも早いパラメータ化は，太陽系の実験を解釈するときに，Eddington (1922)，Robertson (1962)，および Schiff (1962, 1967) によって遂行され用いられた．しかし，彼らは孤立した，球状の物体 (太陽) 外部の真空の重力場のみを取り扱った．Nordtvedt (1968b, 1969) は太陽系のすべての様相を取り扱うことができる最初の完全な PPN 形式を考案した．彼は太陽，惑星，および月を重力的におよび電磁気学的に相互作用する点粒子 (原子) の "気体" からつくられているものとして取り扱った．Will (1971c) は，後に Chandrasekhar (1965a) によって考案された技術を用いて Nordtvedt の形式を修正し，それに天体の，圧力を加えられた連続物質の記述を用いる．Will and Nordtvedt (1972) によって考案された，ここで説明される形式はすべてのこれまでの形を一般化して，"ポスト Galilei の不変性" を得る［Chandrasekhar and Contopolous (1967) をみよ］．PPN 形式についてのもっとも詳細で最新式のレビュー論文は Will (1972) である．

ポスト Newton の物理学および PPN 形式の文献では，Newton のポテンシャルは伝統的に Φ によってでなく，

$$U \equiv -\Phi \equiv +\int \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}')d^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{39.2}$$

によって記述される．混乱を避けるために，本書のこれ以降では Φ を用いるけれども，本章と次章では U を用いるだろう．

今や PPN 形式の詳細な，トラック–2 の解説に向かう．

39.4 PPN 座標系

［本章の残りはトラック–2 である．これまでのトラック–2 の材料はそれに対する準備として必要とされないが，しかし以下は有用であるだろう．(1) 7 章（重力と特殊相対論との非両立性)，(2) 17.6 節（先験的な幾何学でない)，(3) 36.9–36.11 節（重力波の生成)，

---

* たとえば，Chandrasekhar (1965a,b,c) に始まる，Astrophysical Journal における Chandrasekhar および彼の仲間による長い一連の論文をみよ．

*12 PPN 形式の天体物理学への応用

*13 PPN 形式の歴史および記号

および (4) 38 章 (基礎のテスト). 本章は後のどの章に対する準備としても必要とされないが, しかし 40 章 (太陽系のテスト) で有用であるだろう.]

*14,*15 PPN 形式は可能な限りほとんど大域的に Lorentz である座標 $(t, x_j) \equiv (t, x^j)$,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \qquad |h_{\alpha\beta}| \lesssim M_\odot/R_\odot \sim 10^{-6} \tag{39.3}$$

で太陽系 (あるいは解析されるどのような系でも) を覆う (この意味で PPN 形式は線形化された理論のようである, 18 章をみよ). 座標系の速度 (すなわち, 空間原点の 4–速度) は太陽系がこれらの座標で近似的に静止しているように選ばれる (太陽系の質量中心が正確に静止しているか, あるいはある低い速度 $v \lesssim (M_\odot/R_\odot)^{1/2} \sim 10^{-3} \sim 300\,\mathrm{km/sec}$ で動いているかどうかは, 形式の使用者が決定すべき問題である. 選択について詳しくは, 39.9 および 39.12 節をみよ).

PPN 座標は時空の空間プラス時間への自然な "3+1" 分割を与える. その分割は, たとえ時空および 3 次元の超曲面 $x^0 =$ 一定がともに曲がっているとしても, 3 次元の, 平坦な空間ベクトルの解析の記号を用いて都合よく取り扱われる. 生ずる 3 次元形式は一般相対論のようではなく, むしろ Newton 理論のようにみえるであろう. 実際, 望む通り, 結局, 目標は Newton 理論への小さい相対論の補正を研究することである!

39.5 太陽系における物質の記述

*16 PPN 座標に対して, 太陽系の物質 (圧力を加えられた媒体として理想化されている) は座標–速度の場

$$v_j \equiv dx_j/dx^0 \tag{39.4}$$

をもつ. 事象 $\mathcal{P}$ を選び, その近傍でそこでの物質とともに動く直交系に変換する. この共運動系の空間軸 $\boldsymbol{e}_{\hat{j}}$ を方向づけて, それらが PPN 座標軸と可能な限り正確に一致するようにする (この要求は 39.10 節でより正確にされるだろう). 直交共運動系で, 物質の状態を記述する以下の量を定義する.

$$(\text{全質量–エネルギーの密度}) \equiv \rho \tag{39.5a}$$

$$\begin{aligned}(\text{バリオンの“質量” 密度}) &\equiv \rho_0 \\ &\equiv \begin{pmatrix}\text{バリオンの}\\ \text{数密度}, n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{ある標準状態における物質に}\\ \text{対するバリオンあたりの標準}\\ \text{的な静止質量}, \mu_0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{39.5b}$$

$$(\text{比内部エネルギー密度}) \equiv \Pi \equiv (\rho - \rho_0)/\rho_0 \tag{39.5c}$$

$$(\text{ストレステンソルの成分}) \equiv t_{\hat{i}\hat{j}} \equiv \boldsymbol{e}_{\hat{i}} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_{\hat{j}} \tag{39.5d}$$

*14 PPN 形式の詳述
*15 座標系
*16 物質の記述

$$(\text{圧力}) \equiv p \equiv \frac{1}{3}(t_{\hat{x}\hat{x}} + t_{\hat{y}\hat{y}} + t_{\hat{z}\hat{z}}) \qquad (39.5e)$$
$$\equiv (\text{すべての方向にわたる応力の平均})$$

応力における非等方性（すなわち，ずれ）は地球のような惑星においてのみ重要である．そして惑星でも非等方性は，次のような等方的な圧力によって支配される．

$$t_{\hat{i}\hat{j}} = p\,\delta_{ij} + p \times [\text{補正} \ll 1] \qquad (39.6)$$

多くの目的に対しては，とくに太陽の内部では，非等方性を無視することができる．それによって太陽系の物質を完全流体として近似する*．

放射場の等方部分は，太陽の内部では，圧力 p，および内部エネルギーの密度 $\rho_0 \Pi$ への重要な寄与を与える．しかし，非等方的な放射束はストレス–エネルギーテンソルで無視される．この近似は許される．なぜなら太陽では放射によって運ばれる外向きのエネルギー束は内部エネルギー密度 $\rho_0 \Pi$ の 10^{-15} よりも小さく，惑星ではさらに小さい．

39.6　ポスト Newton 展開の性質

太陽系のような任意の重力に束縛された構成に対しては，Newton 近似は，次元をもたない種々の物理量の大きさ（練習問題 39.1 をみよ）に限界を課する．

*17

$$\epsilon^2 \equiv \text{Newton のポテンシャル } U \text{ の最大値} \qquad (39.7)$$
$$\gtrsim U, v^2, p/\rho_0, |t_{\hat{i}\hat{j}}|/\rho_0, \Pi \text{ の任意のところでの値}$$

（太陽の中心における Newton のポテンシャルは $\epsilon^2 \sim 10^{-5}$．そこでの p/ρ_0，t_{ij}/ρ_0，および Π の値はまた $\sim 10^{-5}$ である．そしてそれらは他のところでははるかに小さい．惑星の軌道速度はすべて $100\,\mathrm{km/sec} = 3\times 10^{-4}$ よりも小さい．したがって $v^2 < 10^{-7}$）．さらに，固定された x_j におけるすべての量の時間に伴う変化はおもに物質の運動による．結果として，時間微分は空間微分に比べて $O(\epsilon)$ だけ小さい．

$$\left|\frac{\partial A/\partial t}{\partial A/\partial x_j}\right| \sim |v_j| \lesssim \epsilon \qquad (\text{任意の量 A に対して}) \qquad (39.8)$$

出ていく重力波が流れる放射帯では小さくないけれども（距離 $\gtrsim$ 太陽から 1 光年）．したがって，放射帯はポスト Newton の展開をするときには，解析から除かれなければならない．ポスト Newton の展開を取り扱うことは異なる技術，たとえば，36 章の技術を要求する．

---

* 太陽系では，非等方の応力によるポスト Newton の補正は他のポスト Newton の補正よりもはるかに小さいので，1970 年代にそれらを測定する欲求は存在しない．この理由のために，文献における他のところでは（しかし本書においてでない），PPN 形式はすべての応力をポスト Newton のレベルで等方的な圧力として取り扱い，それによって 39.8–39.11 節の PPN パラメータ η をゼロに置く．

*17　展開パラメータの相対的な大きさ

*18 条件 (39.7) および (39.8) は，U，v^2，p/ρ_0，t_{ij}/ρ_0，および Π を，それらがすべて $O(\epsilon^2)$ であるかのように取り扱い（しばしばそれらはより小さい!），時間微分を空間微分よりもさらに小さい $O(\epsilon)$ として取り扱い，計量係数を小さいパラメータ ϵ のべきで展開することを提案する．

この "ポスト Newton" の展開で，ϵ について奇数項（すなわち，v および $(\partial/\partial t)$ の全数が奇数である

$$\int \frac{\rho_0(\mathbf{x}', t) v_j(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \sim \frac{M}{R} v \sim \epsilon^3 \tag{39.9}$$

のような項）は時間反転で符号を変化する，他方 ϵ について偶数項は変化しない．時間反転（$x^{\bar{0}} = -x^0$）もまた g_{0j} の符号を変える（$g_{\bar{0}j} = -g_{0j}$），しかし g_{00} および g_{jk} を不変にとどめる．したがって，g_{0j} **は ϵ について奇数項のみを含まなければならない．他方 g_{00} および g_{jk} は偶数項のみを含まなければならない**（実際，放射減衰が生ずるときにはこれは問題でなくなる．現実の世界ではつねに出ていく波の境界条件が主張される．しかし時間反転は出ていく波を入射波に変換するので，余分の符号変換は入射波を出ていく波に変換するために要求される．したがって，近傍領域の計量における放射減衰項は g_{0j} に対しては ϵ について偶数であるが，しかし g_{00} および g_{jk} に対しては奇数である．しかし，放射減衰は Newton の理論を越えて ϵ^5 の程度まで活動し始めない，36 章をみよ．したがってそれはここで無視されるだろう）．

*19 展開の形はすでに Newton の程度を通して知られている（17.4 節をみよ，Φ は $-U$ によって置き換えられる）．Newton の重力は

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + 2U + [\lesssim \epsilon^4 \text{である項}], \\ g_{0j} &= [\lesssim \epsilon^3 \text{である項}], \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + [\lesssim \epsilon^2 \text{である項}] \end{aligned} \tag{39.10}$$

を要求するときにのみ得られる．高次補正について述べられている限界は，測地線の方程式の空間成分が Newton の運動方程式と一致することを要求することによって定められる．

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_j}{dt^2} \approx \frac{d^2x_j}{d\tau^2} &= -\Gamma^j{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} \approx -\Gamma^j{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} \\ &= -\Gamma^j{}_{00} - 2\Gamma^j{}_{0k}v_k - \Gamma^j{}_{kl}v_k v_l \\ &= U_{,j} + \{\epsilon g_{0k,j}; \epsilon^2 g_{kl,j}\} \text{程度の項} \end{aligned} \tag{39.11}$$

もし g_{0k} が $O(\epsilon)$ あるいはさらにより大きいならば，そしてもし $g_{kl} - \delta_{kl}$ が $O(1)$ あるいはさらに大きいならば，間違った Newton の限界を得るだろう．

上述のパターンは展開におけるすべての次数まで続く．こうして，測地線の方程式において，またエネルギー運動量の局所的な保存の法則 $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ において，g_{00}はつねにϵg_{0k}

---

*18 展開の規則

*19 計量の展開された形

および $\epsilon^2 g_{jk}$ と協力していく（練習問題 39.2 をみよ）．したがって，ポスト Newton の展開はコラム 39.3 に要約されている形をもつ．

［練習問題］

39.1　重力によって束縛された系における大きさの程度

Newton 理論を用いて任意の重力によって束縛された系に対する条件 (39.7) を導け［ヒント：軌道速度のような概念，音波およびずれ波の速さ，ビリアル定理，および流体静力学の平衡が重要である］．

39.2　ポスト Newton の展開における項のパターン

式 (39.11) に続く節での陳述を確かめよ．とくに，座標加速度 d^2x_j/dt^2 をある整数 N に対して精度 $\epsilon^{2N}U_{,j}$ まで，評価したいと仮定せよ．この仕事は g_{00} の知識を精度 ϵ^{2N+2} まで，g_{0k} の知識を精度 ϵ^{2N+1} まで，そして g_{jk} の知識を精度 ϵ^{2N} まで要求することを示せ．また T^{00} を精度 $\rho_0\epsilon^{2N}$ まで，T^{0j} を精度 $\rho_0\epsilon^{2N+1}$ まで，そして T^{jk} を精度 $\rho_0\epsilon^{2N+2}$ まで知っていることを仮定せよ［たとえば，$N=0$ に対する式 (39.13) および $N=2$ に対する式 (39.42) をみよ］．$T^{0\alpha}{}_{;\alpha}$ を精度 $\epsilon^{2N+1}\rho_{0,j}$ で，そして $T^{j\alpha}{}_{;\alpha}$ を精度 $\epsilon^{2N+2}\rho_{0,j}$ で計算するには，g_{00} を ϵ^{2N+2} まで，g_{0k} を ϵ^{2N+1} まで，そして g_{jk} を ϵ^{2N} まで知らなければならないことを示せ．これはコラム 39.3 のパターンを指示する．

39.7　Newton 近似

*20　Newton の程度で計量は形 (39.10) をもつ．そして 4–速度およびストレス–エネルギーテンソルは PPN 座標系に対して，成分

$$u^0 = +1 + \mathrm{O}(\epsilon^2), \qquad u^j = v_j + \mathrm{O}(\epsilon^3) \tag{39.12}$$

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho_0 + \mathrm{O}(\rho_0\epsilon^2), \qquad T^{0j} = \rho_0 v_j + \mathrm{O}(\rho_0\epsilon^3) \\ T^{jk} &= t_{\hat{j}\hat{k}} + \rho_0 v_j v_k + \mathrm{O}(\rho_0\epsilon^4) \end{aligned} \tag{39.13}$$

をもつ（練習問題 39.3 をみよ）．2 組の方程式が太陽系の構造および展開を支配する．(1) Einstein の場の方程式．18.4 節，そしてまた 17.4 節で示されたように，Newton の限界で Einstein の方程式は Laplace の方程式

$$U_{,jj} = -4\pi\rho_0 \tag{39.14a}$$

に帰着する．それは “遠隔作用” 解

*20　Newton の近似

$$U(\mathbf{x},t)=\int\frac{\rho_0(\mathbf{x}',t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{39.14b}$$

をもつ．

(2) 局所的なエネルギー–運動量保存の法則，$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$. この法則の時間成分は静止質量の保存に帰着する

$$\partial\rho_0/\partial t+\partial(\rho_0 v_j)/\partial x_j=0+\mathrm{O}(\epsilon^2)\text{ の微小な誤差} \tag{39.15a}$$

そして空間成分は Newton の運動の第 2 法則，“$F=ma$” に帰着する．

$$\rho_0\,dv_j/dt=\rho_0(\partial U/\partial x_j)-\partial t_{\hat{j}\hat{k}}/\partial x_k+\mathrm{O}(\epsilon^2)\text{ の微小な誤差} \tag{39.15b}$$

$$d/dt\equiv(\text{物質に伴う時間微分})\equiv\partial/\partial t+v_k\partial/\partial x_k \tag{39.16}$$

(練習問題 39.3 をみよ)．

式 (39.14)–(39.16) は，惑星の物質および太陽の物質を記述する状態方程式とともに，太陽および惑星の構造および運動のすべての Newton の計算に対する基礎である．内部エネルギー密度 $\rho_0\Pi$ は，これらの方程式のどこにも入らないことに注意せよ．それは Newton の流体力学に対して重要でない．それは太陽の熱的なエネルギーの平衡に対して重要である．しかしそれはここでは重要でない．

コラム 39.3 計量係数のポスト Newton の展開

近似のレベル（一般相対論をこのレベルにまで展開する論文）	項の値の程度 g_{00}	g_{0j}	g_{jk}
平坦な，空の時空	-1	0	δ_{jk}
Newton 近似	$2U$	0	0
ポスト Newton 近似 [Fock (1959), Chandrasekhar (1965a)]	$+\sim\epsilon^4$ の項	$+\sim\epsilon^3$ の項	$+\sim\epsilon^2$ の項
ポスト–ポスト Newton 近似 [Chandrasekhar and Nutku (1969)]	$+\sim\epsilon^6$ の項	$+\sim\epsilon^5$ の項	$+\sim\epsilon^4$ の項
放射減衰 [Chandrasekhar and Esposito (1970)]	$+\sim\epsilon^7$ の項	$+\sim\epsilon^6$ の項	$+\sim\epsilon^5$ の項

[練習問題]

39.3　Newton 近似

(a) PPN 座標系におけるストレス–エネルギーテンソルの成分に対する式 (39.13) を導け［ヒント：物質の静止系で（“共運動の直交系”）$T_{\hat{0}\hat{0}} = \rho = \rho_0 + \mathrm{O}(\epsilon^2)$，$T_{\hat{0}\hat{j}} = 0$，$T_{\hat{j}\hat{k}} = t_{\hat{j}\hat{k}}$．式 (39.5) をみよ．これらの成分を通常の速度 $-v_j$ をもつ純粋なブーストによって Lorentz 変換をして $T_{\alpha\beta}$ を得よ］．

(b) PPN 座標系で，$T^{0\alpha}{}_{;\alpha} = 0$ は式 (39.15a) に帰着し，そして $T^{j\alpha}{}_{;\alpha} = 0$ は，式 (39.15a) と結合されるときには，式 (39.15b) に帰着することを示せ．］

39.4　有用な公式

方程式 (39.15) から任意の関数 $f(\boldsymbol{x}, t)$ に対して成り立つ，以下の有用な公式を導け．

$$\frac{d}{dt}\int \rho_0(\boldsymbol{x},t) f(\boldsymbol{x},t) d^3x = \int \rho_0(\boldsymbol{x},t)\frac{df(\boldsymbol{x},t)}{dt} d^3x + \mathrm{O}(\epsilon^2) \text{ の微小な誤差} \tag{39.17}$$

ここに両方の積分は空間のすべてにわたって拡張される．そして df/dt は物質に伴う微分 (39.16) である．

39.5　Newton の重力場に対するストレステンソル

“Newton の重力場 U に対するストレステンソル” を以下のように定義せよ．

$$\mathbf{t}_{jk} \equiv \frac{1}{4\pi}\left(U_{,j}U,k - \frac{1}{2}\delta_{jk}U_{,l}U_{,l}\right) \tag{39.18}$$

物質に対する運動方程式 (39.15b) は形式

$$\rho_0 \frac{dv_j}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x^k}(\mathbf{t}_{jk} + t_{\hat{j}\hat{k}}) + \mathrm{O}(\epsilon^2) \text{ の微小な誤差} \tag{39.19}$$

$$(\rho_0 v_j)_{,t} + (\mathbf{t}_{jk} + t_{\hat{j}\hat{k}} + \rho_0 v_j v_k)_{,k} = 0 + \mathrm{O}(\epsilon^2) \text{ の微小な誤差} \tag{39.19$'$}$$

と書かれることを示せ．

39.6　Newton 的なビリアル定理

(a) 式 (39.19′) から

$$d^2 I_{jk}/dt^2 = 2\int(\mathbf{t}_{jk} + t_{\hat{j}\hat{k}} + \rho_0 v_j v_k) d^3x + \mathrm{O}(\epsilon^3) \text{ の微小な誤差} \tag{39.20a}$$

であることを示せ．ここに I_{jk} は系の質量分布の 2 次モーメントである．

$$I_{jk} = \int \rho_0 x_j x_k d^3x$$

これは **“時間に依存するテンソルビリアル定理”** とよばれる．

(b) これから，もし $\langle\ \ \rangle_{\text{長時間}}$ が長い時間の周期にわたる平均を示すならば，

$$\left\langle \int(\mathbf{t}_{jk} + t_{\hat{j}\hat{k}} + \rho_0 v_j v_k) d^3x \right\rangle_{\text{長時間}} = \mathrm{O}\left(\epsilon^4 \int \rho_0\, d^3x\right) \tag{39.20b}$$

であることを推論せよ．これは**“テンソルビリアル定理”**とよばれる．

(c) 添字の縮約および式 (39.18)，(39.14a)，および (39.5e) の使用によって，(通常の) **ビリアル定理**を導け．

$$\frac{1}{2}d^2I/dt^2 = \int \rho_0 \boldsymbol{v}^2\, d^3x - \int \frac{1}{2}\rho_0 U\, d^3x + 3\int p\, d^3x + O(\epsilon^2) \text{ の微小な誤差} \tag{39.21a}$$

ここに I は質量分布の 2 次モーメントのトレースである．

$$I = I_{jj} = \int \rho_0 r^2\, d^3x$$

そして

$$\left\langle \underbrace{\int \rho_0 \boldsymbol{v}^2\, d^3x}_{2\times\left(\text{運動エネルギー}\right)} - \underbrace{\frac{1}{2}\int \rho_0 U\, d^3x}_{+\left(\text{重力のエネルギー}\right)} + \underbrace{3\int p\, d^3x}_{+\,3\times\left(\text{圧力の積分}\right)} \right\rangle_{\text{長時間}} = O\left(\epsilon^4 \int \rho_0\, d^3x\right) \tag{39.21b}$$

39.7 Newton 的な星に対する脈動振動数

通常の，時間に依存するビリアル定理 (39.21a) を用いて，非回転の，Newton 的な星の脈動の基本的な角振動数に対する次式を導け．

$$\omega^2 = (3\bar{\Gamma}_1 - 4)\frac{|\text{星の自らの重力のエネルギー}|}{(\text{星の質量分布の 2 次モーメントのトレース})} \tag{39.22a}$$

$$\bar{\Gamma}_1 = (\text{断熱指数の，圧力で重みをつけた平均}) \equiv \frac{\int \Gamma_1 p\, d^3x}{\int p\, d^3x} \tag{39.22b}$$

導出において脈動は“同型である”(homologous)．すなわち，平衡の位置 x^j（質量中心 $x^j = 0$ に相対的に）をもつ流体要素は $x^j + \xi^j(x,t)$ に変位する．ここに

$$\xi^j = (\text{小さい定数})x^j e^{-i\omega t}$$

他に何も仮定しないこと．**注意：**(1) 結果 (39.22) はコラム 26.2 で異なった方法で導かれ 24.4 節で用いられた．(2) 同型の脈動の仮定は，もし $|\bar{\Gamma}_1 - 4/3| = \text{定数} \ll 1$ であるならば完全に正当化される．コラム 36.2 をみよ．(3) 結果 (39.22) は遅く回転している Newton 的な星に容易に一般化される．たとえば，Chandrasekhar and Lebovitz (1968) をみよ．それはまた回転していないポスト Newton 的な星に一般相対論を用いて（コラム 26.2)，あるいは任意の計量理論に対する PPN 形式を用いて [Ni (1973)] 拡張されうる．そしてそれは遅く回転しているポスト Newton 的な星に拡張することができる [たとえば，Chandrasekhar and Lebovitz (1968) をみよ]．

39.8 PPN 計量係数

*21 計量係数 $g_{\alpha\beta}$ に対するポスト Newton の補正 $k_{\alpha\beta}$ は，重力の任意の計量理論において，場の方程式の長い操作によって計算される（たとえば，一般相対論に対する本章末の練習問題 39.14 をみよ）．しかしこれまでにある 1 つの理論を選ぶことなしに，そして場の方程式の任意の組をこれまでに書き下ろすことなしに，ポスト Newton の補正 $k_{\alpha\beta}$ の形式を
22 推測することができる．それらの形式は以下の制限によって固定される．(1) それらはポスト Newton の程度でなければならない（$k_{00}\sim\epsilon^4$，$k_{0j}\sim\epsilon^3$，$k_{ij}\sim\epsilon^2$）．(2) それらは次元をもたないものでなければならない．(3) k_{00} は回転の下でスカラーでなければならない，k_{0j} は 3–ベクトルの成分でなければならない，そして k_{jk} は 3–テンソルの成分でなければならない．(4) 補正は太陽系から離れると少なくとも $1/r$ 程度に速く減少しなければならないので，座標は大域的に Lorentz になり時空は $r=\infty$ で平坦になる．(5) 単純さのために，計量成分は，ρ_0，$\rho_0\Pi$，$t_{\hat{i}\hat{j}}$，p，これらと，速度 v_j，およびこのような量の時間微分との積によってのみ生成される．しかしそれらの空間勾配によってでない［この単純さの仮定は，Whitehead (1922) および Will (1973) によってレビューされた理論—それは実験と一致しない—を除き，1973 年まで吟味されたすべての計量理論によって満たされる］．練習問題 39.8 におけるこの仮定に対するさらなる正当化に注意せよ．

*23 空間成分への補正 $k_{ij}\sim\epsilon^2$ から始める．少なくとも $1/r$ 程度に速く消え去り，次元をもたず，$O(\epsilon^2)$ であり，2 階の，対称 3–テンソルである，ρ_0，p，Π，$t_{\hat{j}\hat{k}}$，v_j のただ 2 個の汎関数が存在する．それらは

$$\delta_{ij}U(\boldsymbol{x},t),\qquad U_{ij}(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)(x_i-x_i{}')(x_j-x_j{}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x' \tag{39.23a}$$

である．こうして，k_{ij} はある定数 “PPN パラメータ” γ および Γ に対して $k_{ij}=2\gamma\delta_{ij}U+2\Gamma U_{ij}$ でなければならない．無限小座標変換 $[x_{i\,\text{新しい}}=x_{i\,\text{古い}}+\Gamma\partial\chi/\partial x_i$，ここに $\chi(\boldsymbol{x},t)=-\int\rho_0(\boldsymbol{x}',t)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|d^3x']$ によって $\Gamma=0$ と置くことができる．それによって

$$g_{ij}=\delta_{ij}+k_{ij}=\delta_{ij}(1+2\gamma U)+O(\epsilon^4) \tag{39.23b}$$

を得る．

---

* 時間微分を考慮に入れるのは，遅延積分はポスト Newton 近似の次数まで展開されるとき，このような項を含むからである．こうして，

$$\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'=\int\left[\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}-\frac{\partial\rho_0(\boldsymbol{x}',t)}{\partial t}+\cdots\right]d^3x'$$

しかし，座標（“ゲージ”）の適当な選択で，すべての時間について奇数の遅延項［たとえば，$\int(\partial\rho_0/\partial t)d^3x$］は “ポスト $^{5/2}$ Newton の次数” でおよび高次の近似でを除いて，ゼロになる．それらは放射減衰に通ずる（コラム 39.3 をみよ）．たとえば，$\int(\partial\rho_0/\partial t)d^3x=(d/dt)\int\rho_0\,d^3x$ はバリオン数の保存によってゼロになる．

*21 計量に対するポスト Newton の補正

*22 (1) 形式を支配する規則

*23 (2) 補正の構成

次に $k_{0j} \sim \epsilon^3$ を考える．思考錯誤により，$1/r$ あるいはさらに速く消え去り，次元をもたず，そして $O(\epsilon^3)$ であるただ 2 個のベクトル汎関数が与えられる．それらは

$$V_j(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)v_j(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x' \tag{39.23c}$$

$$W_j(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)](x_j-x_j{}')d^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} \tag{39.23d}$$

である．こうして，k_{0j} は，未知の定数（PPN パラメータ）Δ_1 および Δ_2 を含んで，これらの 1 次結合でなければならない．

$$g_{0j} = k_{0j} = -\frac{7}{2}\Delta_1 V_j - \frac{1}{2}\Delta_2 W_j + O(\epsilon^5) \tag{39.23e}$$

最後に $k_{00} \sim \epsilon^4$ を考える．思考錯誤は種々の項を与え，それらは g_{00} の Newton の部分とすべて結合されて

$$g_{00} = -1 + 2U + k_{00} = -1 + 2U - 2\beta U^2 + 4\Psi - \zeta\mathcal{A} - \eta\mathcal{D} \tag{39.23f}$$

を与えることができる．ここに

$$\Psi(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)\psi(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'$$

$$\psi = \beta_1\boldsymbol{v}^2 + \beta_2 U + \frac{1}{2}\beta_3\Pi + \frac{3}{2}\beta_4 p/\rho_0 \tag{39.23g}$$ *

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)]^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x' \tag{39.23h}$$

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{\left[t_{\hat{j}\hat{k}}(\boldsymbol{x}',t) - \frac{1}{3}\delta_{jk}t_{\hat{l}\hat{l}}(\boldsymbol{x}',t)\right](x_j-x_j{}')(x_k-x_k{}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x' \tag{39.23i}$$

また，β，β_1，β_2，β_3，β_4，ζ，η は未知の定数（PPN パラメータ）である．文献における他のところでは g_{00} における $-\eta\mathcal{D}$ は無視されている（39.6 節の脚注をみよ）．

しかし別な項が可能である：以下のように置くことができるだろう．

$$\begin{aligned} g_{00} = {} & [\text{式 (39.23f) における値}] \\ & - \Sigma \int\!\!\int \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)\rho_0(\boldsymbol{x}'',t)[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}'')]}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'||\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|^3}d^3x'\,d^3x'' \end{aligned} \tag{39.24}$$

ここに Σ は別な PPN パラメータである [Newton の式 (39.14)–(39.16) を用いて，この表現は太陽系から離れると $1/r$ のように消え去ることを示すことができる]．もしこのような Σ 項が含まれているならば，無限小座標変換

$$x^0{}_{\text{新しい}} = x^0{}_{\text{古い}} - \frac{1}{2}\Sigma\int \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)]}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x' \tag{39.25}$$

---

* 警告：文献を通して記号 Φ が用いられる．ここにわれわれは汎関数 (39.23g) に対して Ψ を用いる．そして ϕ はわれわれの ψ に対して用いられる．Newton のポテンシャル $\Phi = -U$ との混乱を避けるために，われわれは標準的な記号を破ることを強制される．しかし，われわれは他の誰も標準的な記号を破らないよう勧める！

をすることによってそれを取り除くことができるだろう（練習問題 39.9 をみよ）．こうして，Σ 項を含む必要は存在しない．

*24 g_{00} からの Σ 項の不存在は，時間座標はポスト Newton の次数を通して堅く規定されていることを意味する．

$$x^0 \text{は} O(R_\odot \epsilon^5) \sim 10^{-14}\text{秒の不確定さのみをもつ} \tag{39.26a}$$

空間座標はまたポスト Newton の次数を通して堅く規定される．

$$x^j \text{は} O(R_\odot \epsilon^4) \sim 0.1\,\mathrm{cm}\text{の不確定さのみをもつ} \tag{39.26b}$$

なぜなら形式

$$x^j{}_{\text{新しい}} = x^j{}_{\text{古い}} + O(\epsilon^2 R_\odot)\text{の位置に依存する項}$$

の任意の変換は計量の空間部分の形 (39.23b) を破るだろうからである．

*25 **要約して**，ポスト Newton の次数を通して正確な，いまだ発見されていない重力のほとんどすべての計量理論に対して，計量係数は形 (39.23) をもつ．1 つの理論は他の理論から 10 個の “ポスト Newton のパラメータ” β, β_1, β_2, β_3, β_4, γ, ζ, η, Δ_1 および Δ_2 の値によって区別される．これらは与えられた理論の場の方程式をポスト Newton の計量の形 (39.23) と比較することによって定まる．一般相対論に対するおよび若干の他の理論に対するパラメータ値が，おのおののパラメータの発見法的な記述に沿ってコラム 39.2 に与えられている．

[練習問題]

39.8　ポスト Newton の限界における “計量が計量を生成する” 項の不存在

ポスト Newton の計量の補正を書き下ろすときに，物質からのいかなる**直接の**援助もなしに，Newton のポテンシャルが作用するだけで生成される項を含むように誘惑されるだろう．結局，一般相対論および他の計量理論は非線形である．したがって 2 段階過程（物質）→U→（ポスト Newton の計量補正）がまったく自然にみえる．このような項は必要とされないことを示せ．なぜなら Newton の近似の式 (39.14)–(39.16) は物質の分布にわたる直接の積分によってそれらを再表現することを可能にするからである．とくに

$$\int \frac{\partial^2 U(\boldsymbol{x}', t)/\partial x_j'\,\partial t}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} d^3x' = 2\pi[V_j(\boldsymbol{x}, t) - W_j(\boldsymbol{x}, t)] \tag{39.27}$$

を示せ．ここに V_j および W_j は式 (39.23c), (39.23d) によって定義される．また

$$\int \frac{[\partial U(\boldsymbol{x}', t)/\partial x_j'][\partial U(\boldsymbol{x}', t)/\partial x_j']}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} d^3x' = -2\pi[U(\boldsymbol{x}, t)]^2 + 4\pi \int \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}', t) U(\boldsymbol{x}', t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} d^3x' \tag{39.28}$$

---

*24　座標系の堅さ

*25　PPN 計量およびパラメータの要約

を示せ．式 (39.27) および (39.28) の右辺の項はすでに g_{0j} および g_{00} に対する表現 (39.23e), (39.23f) に含まれていることに注意せよ．

39.9 g_{00} から Σ 項の除去

座標変換 (39.25) は，本文で主張されているように，式 (39.24) の計量係数 g_{00} から Σ 項を除去することを示せ．

39.10 ポスト Newton の補正の形式の確認

式 (39.23a), (39.23b), (39.23c), (39.23f) に直接先立つ，本文における主張を確かめよ．

39.9 “普遍的な静止系” に相対的な PPN 座標の速度

今まで，太陽系の質量中心は PPN 座標系で静止していることが暗黙裏に仮定されてきた．これは実際に許される仮定であるか？ 別の表現で述べれば，つねに PPN 座標系を調整してその原点が任意の望まれる速度（たとえば，太陽系の速度）で動くようにすることができるかあるいは PPN 座標系は堅くそして変更できないようにある “普遍的な静止系” に結びついているか？

一般相対論では，曲がった時空の幾何学は優先的な座標系を採用しない（特別な対称性をもつ場合を除いて）．したがって，PPN 座標系の速度は自由に指定することができると予期する．異なった述べ方をすれば，全 PPN 形式は，一般相対論に対して，PPN 座標の Lorentz 変換のもとで不変であると予期する［おそらく，無限小座標変換と結合されて，式 (39.24) および (39.23a) の “Σ” および “U_{jk}” 項が存在しないというゲージ条件を保持する］．
*26 対照的に，Ni の重力の理論（コラム 39.1）では時空の幾何学は**つねに**優先的な座標系 “宇宙の静止系” を採用する．この場合に，PPN 座標系は宇宙の静止系に堅く結びついているのを発見するとしても驚かないだろう．

上述の直感は，Will（1971d）による，および Will and Nordtvedt（1972）による計算によれば，正しい．一般相対論および “先験的幾何学” をわずかにもつかあるいはもたない別な理論を取り扱うときは，PPN 座標系の速度を自由に指定できる（ある最初の時間の瞬間に）．しかし優先的な “普遍的な静止系”（“優先的な系の理論”）をもつ Ni のような理論に対しては，優先的な系においてのみポスト Newton の計量は最後の節で導かれる形式をとることができる［式 (39.23)］．PPN 計量についてのこの制限は優先的な系の理論で，普遍的な系ですべての計算を遂行しなければならないことを意味しない．むしろ，それは，このような理論に対しては PPN 計量は，普遍的な静止系に相対的な座標系の運動を考慮すべき一般化を要求することを意味する．

*27 要求される一般化は PPN 計量 (39.23) を，(1) 優先された系 $\{x^{\alpha}_{古い}\}$ から速度 $\boldsymbol{w}$ で動

---

*26 重力の優先的な系の理論

*27 PPN 計量の動いている系への一般化

く，新しい PPN 系 $\{x^{\alpha}_{新しい}\}$ へ Lorentz ブーストする．そして（2）計量係数を可能な限り単純に保つために意図されたゲージ変化するようにさせることによって達成することができる．ブースト–プラス–ゲージ変化は［Will and Nordtvedt（1972)］，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{古い} &= \boldsymbol{x}_{新しい} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{新しい}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{w} + \left(1+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^2\right)\boldsymbol{w}t_{新しい} \\ &\quad + \mathrm{O}(\epsilon^5 t_{新しい} + \epsilon^4 \boldsymbol{x}_{新しい}),\end{aligned} \tag{39.29a}$$

$$\begin{aligned}t_{古い} &= t_{新しい}\left(1+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^2+\frac{3}{8}\boldsymbol{w}^4\right) + \left(1+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^2\right)\boldsymbol{x}_{新しい}\cdot\boldsymbol{w} \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\Delta_2+\zeta-1\right)w_j\frac{\partial\chi}{\partial x^j_{新しい}}}_{[\text{ゲージ変化}]} + \mathrm{O}(\epsilon^6 t_{新しい} + \epsilon^5 \boldsymbol{x}_{新しい})\end{aligned} \tag{39.29b}$$

$$\chi(t_{新しい},\boldsymbol{x}_{新しい}) \equiv -\int \rho_0(t_{新しい},\boldsymbol{x}'_{新しい})|\boldsymbol{x}_{新しい}-\boldsymbol{x}'_{新しい}|d^3x'_{新しい} \tag{39.29c}$$

である［**注意**：ポスト Newton 近似の精神で，新しい PPN 系の宇宙の静止系に相対的な速度 $\boldsymbol{w}$ が系の特徴的な内部速度よりも大きくないことを主張する.］

$$|\boldsymbol{w}| \lesssim \epsilon \tag{39.30}$$

この座標の変化は物質の速度における対応する変化を生み出す.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{古い} = \frac{d\boldsymbol{x}_{古い}}{dt_{古い}} &= \boldsymbol{v}_{新しい}\left(1-\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_{新しい}-\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^2\right) \\ &\quad + \boldsymbol{w}\left(1-\frac{1}{2}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_{新しい}\right) + \mathrm{O}(\epsilon^5)\end{aligned} \tag{39.31}$$

長いが単純な計算（練習問題 39.11）により，新しい PPN 座標で計量に対する以下の
*28 成分が与えられる［**注意**：下つき添字「新しい」はここおよび今後記号から落とされる].

$$g_{jk} = \delta_{jk}(1+2\gamma U) + \mathrm{O}(\epsilon^4) \tag{39.32a}$$

$$g_{0j} = -\frac{7}{2}\Delta_1 V_j - \frac{1}{2}\Delta_2 W_j + \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1\right)w_j U - \alpha_2 w_k U_{kj} + \mathrm{O}(\epsilon^5) \tag{39.32b}$$

$$\begin{aligned}g_{00} &= -1 + 2U - 2\beta U^2 + 4\Psi - \zeta\mathcal{A} - \eta\mathcal{D} + (\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1)\boldsymbol{w}^2 U \\ &\quad + (2\alpha_3-\alpha_1)w_j V_j - \alpha_2 w_j w_k U_{jk} + \mathrm{O}(\epsilon^6)\end{aligned} \tag{39.32c}$$

ここに α_1，α_2，および α_3 は PPN パラメータのある結合である.

$$\alpha_1 = 7\Delta_1 + \Delta_2 - 4\gamma - 4 \tag{39.33a}$$

$$\alpha_2 = \Delta_2 + \zeta - 1 \tag{39.33b}$$

$$\alpha_3 = 4\beta_1 - 2\gamma - 2 - \zeta \tag{39.33c}$$

---

*28　計量の最終形式

ここに現れる "重力ポテンシャル" U, V_j, W_j, Ψ, $\mathcal{A}$, および $\mathcal{D}$ は新しい, "動いている" PPN 座標系で, 普遍的な静止系で用いられたのと同じ操作によって計算されるべきである. こうして, それらの汎関数の形は以前と同じであるが, 任意の与えられた事象でのそれらの値は異なる (練習問題 39.11 をみよ).

$$U(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x' \tag{39.34a}$$

$$V_j(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)v_j(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x' \tag{39.34b}$$

$$W_j(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)](x_j-x_j{}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x' \tag{39.34c}$$

$$\Psi(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)\psi(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'$$

$$\psi=\beta_1\boldsymbol{v}^2+\beta_2U+\frac{1}{2}\beta_3\Pi+\frac{3}{2}\beta_4p/\rho_0 \tag{39.34d}$$

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)]^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x' \tag{39.34e}$$

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\left[t_{\hat{j}\hat{k}}(\boldsymbol{x}',t)-\frac{1}{3}\delta_{jk}t_{\hat{l}\hat{l}}(\boldsymbol{x}',t)\right](x_j-x_j{}')(x_k-x_k{}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x' \tag{39.34f}$$

量 U_{jk} は式 (39.23a) で定義された重力ポテンシャルである.

$$U_{jk}(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)(x_j-x'_j)(x_k-x'_k)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x' \tag{39.34g}$$

普遍的な静止系に相対的な PPN 座標系の速度 $\boldsymbol{w}$ は, 係数 α_1, α_2, α_3 の 1 個あるいはそれ以上がゼロでない限り PPN 計量において明確に現れることに注意せよ. こうして, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ をもつ理論 (たとえば, 一般相対論) は, ポスト Newton の限界で優先的な普遍的な静止系を**もたず**, すべてのそれらの PPN 系は "等しく生成される". 対照的に, α_1, α_2, α_3 の少なくとも 1 個がゼロでない理論 (たとえば, Ni の理論) は優先的な系を**もつ**.

PPN 計量の一般化された形 (39.32) は, 構成に用いられた操作によって, Lorentz ブーストとゲージ調整のもとで不変である [*29 "ポスト Galilei 変換", Chandrasekhar and Contopolous (1967) をみよ].

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{古い}&=\boldsymbol{x}_{新しい}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{新しい}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}+\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)\boldsymbol{\beta}t_{新しい}\\&\quad+\mathrm{O}(\epsilon^5t_{新しい}+\epsilon^4\boldsymbol{x}_{新しい}),\\t_{古い}&=\left(1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{8}\beta^4\right)t_{新しい}+\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)\boldsymbol{x}_{新しい}\cdot\boldsymbol{\beta}\\&\quad+\left(\frac{1}{2}\Delta_2+\zeta_1-1\right)\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla_{新しい}\chi+\mathrm{O}(\epsilon^6t_{新しい}+\epsilon^5\boldsymbol{x}_{新しい})\end{aligned} \tag{39.35}$$

*29 ポスト Galilei 変換での不変性

もちろん，それはまた空間回転のもとで不変である．

[練習問題]

39.11　動いている系への変換

座標の変化 (39.29) は，PPN 計量係数を形 (39.23) から形 (39.32) へ変化することを示せ [ヒント：(1) ポテンシャル U，V_j，W_j，$\mathcal{A}$，および $\mathcal{D}$ はスカラー場でないという事実を堅く心に保持せよ．おのおのの座標系はそれ自身のポテンシャルをもつ．たとえば，$U_{古い}$ に対する積分において式 (39.29) を用いることによって，

$$U_{古い}(\boldsymbol{x}_{古い}, t_{古い}) = \int \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}'_{古い}, t_{古い})}{|x_{古い} - x'_{古い}|} d^3x'_{古い} \tag{39.36}$$
$$= \left[U_{新しい} - w_j(V_{j\,新しい} - W_{j\,新しい}) + \frac{1}{2} w_j\, w_k \chi_{,jk}\right]_{x_{新しい}, t_{新しい}} + \mathrm{O}(\epsilon^6)$$

を見出す．(2) バリオン保存の法則 (39.44) は有用であるだろう]．

39.10　PPN ストレス–エネルギーテンソル

太陽系の運動は式 $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ によって支配される．それらの式を研究する前に，PPN 座標系でストレス–エネルギーテンソルへのポスト Newton の補正を計算しなければならない．これは共運動している直交系 $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\alpha}}$ から座標系への変換を要求する．この共運動直交系では

$$T^{\hat{0}\hat{0}} = \rho_0(1 + \Pi), \qquad T^{\hat{0}\hat{j}} = 0, \qquad T^{\hat{j}\hat{k}} = t_{\hat{j}\hat{k}} \tag{39.37}$$

である．この変換を 2 段階で成し遂げることができる．段階 2 は座標系とそれに結びついている直交系との間の変換

$$\boldsymbol{\omega}^{\tilde{0}} \equiv [1 - U + \mathrm{O}(\epsilon^4)]\boldsymbol{d}t \tag{39.38a}$$
$$+ \left[\frac{7}{2}\Delta_1 V_j + \frac{1}{2}\Delta_2 W_j + \left(\frac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_2\right) w_j U + \alpha_2 w_k U_{kj} + \mathrm{O}(\epsilon^5)\right] \boldsymbol{d}x^j,$$

$$\boldsymbol{\omega}^{\tilde{j}} \equiv [(1 + \gamma U)\delta_{jk} + \mathrm{O}(\epsilon^4)]\boldsymbol{d}x^k + \mathrm{O}(\epsilon^5)\boldsymbol{d}t \tag{39.38b}$$

である．段階 1 は 2 つの直交系 $\boldsymbol{\omega}^{\tilde{\alpha}}$ と $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\alpha}}$ との間の純粋な Lorentz 変換（ブースト）である．このブーストの 4–速度は物質の 4–速度のマイナスであり，それは成分

$$u^j = v_j u^0, \qquad u^0 = 1 + \frac{1}{2}v^2 + U + \mathrm{O}(\epsilon^4) \qquad \text{(座標系で)} \tag{39.39}$$

$$\left.\begin{aligned} u^{\tilde{j}} &= v_{\tilde{j}} u^{\tilde{0}}, \qquad u^{\tilde{0}} = 1 + \tfrac{1}{2}v^2 + \mathrm{O}(\epsilon^4) \\ v_{\tilde{j}} &= v_j[1 + (1+\gamma)U] \end{aligned}\right\} \qquad (\boldsymbol{\omega}^{\tilde{\alpha}}\ \text{系で}) \tag{39.40}$$

をもつ.

通常の速度 $\beta_{\tilde{j}} = -v_{\tilde{j}}$ をもつブーストを変換 (39.38) と結びつけ，それから逆にして，結果（練習問題 39.12）を得る.

*30

$$\boldsymbol{d}x^\alpha = A^\alpha{}_{\hat{\beta}}\boldsymbol{\omega}^{\hat{\beta}}, \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\omega}^{\hat{\beta}} = \text{直交共運動している基底}, \\ \boldsymbol{d}x^\alpha = \text{PPN 座標の基底}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A^0{}_{\hat{0}} &= 1 + \frac{1}{2}v^2 + U + \mathrm{O}(\epsilon^4), \\ A^0{}_{\hat{j}} &= v_j\left[1 + \frac{1}{2}v^2 + (2+\gamma)U\right] - \frac{7}{2}\Delta_1 V_j - \frac{1}{2}\Delta_2 W_j \\ &\quad + \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1\right)w_j U - \alpha_2 w_k U_{kj} + \mathrm{O}(\epsilon^5), \\ A^j{}_{\hat{0}} &= v_j\left[1 + \frac{1}{2}v^2 + U\right] + \mathrm{O}(\epsilon^5), \\ A^j{}_{\hat{k}} &= (1-\gamma U)\delta_{jk} + \frac{1}{2}v_j v_k + \mathrm{O}(\epsilon^4) \end{aligned} \tag{39.41}$$

*31 この変換はストレス–エネルギーテンソル (39.37) に適用されるとき，PPN 座標系で，

$$T^{00} = \rho_0(1 + \Pi + v^2 + 2U) + \mathrm{O}(\rho_0\epsilon^4) \tag{39.42a}$$

$$T^{0j} = \rho_0(1 + \Pi + v^2 + 2U)v_j + t_{\hat{j}\hat{m}}v_m + \mathrm{O}(\rho_0\epsilon^5) \tag{39.42b}$$

$$\begin{aligned} T^{jk} &= t_{\hat{j}\hat{k}}(1 - 2\gamma U) + \rho_0(1 + \Pi + v^2 + 2U)v_j v_k \\ &\quad + \frac{1}{2}(v_j t_{\hat{k}\hat{m}}v_m + v_k t_{\hat{j}\hat{m}}v_m) + \mathrm{O}(\rho_0\epsilon^6) \end{aligned} \tag{39.42c}$$

を与える.

[練習問題]

39.12 共運動系と PPN 系との間の変換

変換行列 (39.41) の導出の詳細を実行せよ．そしてその過程で $A^0{}_{\hat{0}}$ への $\mathrm{O}(\epsilon^4)$ の補正を計算せよ.

---

*30 物質の静止系から PPN 座標系への変換
*31 座標系におけるストレス–エネルギーテンソル

39.11　PPN 運動方程式

Newton の運動方程式 (39.15) および (39.16) へのポスト Newton の補正は，バリオン数の保存則 $(\rho_0 u^\alpha)_{;\alpha}=0$，および局所的なエネルギー運動量の保存則，$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$ から導かれる．運動方程式の中でもっとも単純なものはバリオン数の保存である．その厳密な表現は $(\rho_0 u^\alpha)_{;\alpha}=(1/\sqrt{-g})(\sqrt{-g}\rho_0 u^\alpha)_{,\alpha}=0$ である．新しい量

$$\begin{aligned}\rho^* &\equiv \rho_0\left(1+\frac{1}{2}v^2+3\gamma U\right) \\ &= \rho_0 u^0\sqrt{-g}+\mathrm{O}(\rho_0\epsilon^4)\end{aligned} \tag{39.43}$$

を定義する [u^0 に対しては式 (39.39) をみよ，そして計量に対しては式 (39.32) をみよ]．そうすると静止質量の保存は，今やより正確であることを除いて，Newton の次数におけるものと同じ形 (39.15a) をとる．

*32
$$\rho^*{}_{,t}+(\rho^* v_j)_{,j}=0+\mathrm{O}(\rho_{0,j}\epsilon^5)\ \text{の誤差} \tag{39.44}$$

次にもっとも単純な運動方程式は $T^{0\alpha}{}_{;\alpha}=0$ である．まっすぐな評価は，式 (39.32) の計量および式 (39.42) のストレス–エネルギーテンソルを用いて，

$$\begin{aligned}&[\rho_0(1+\mathit{\Pi}+v^2+2U)]_{,t}+[\rho_0(1+\mathit{\Pi}+v^2+2U)v_j+t_{\hat{j}\hat{m}}v_m]_{,j} \\ &\qquad +(3\gamma-2)\rho_0 U_{,t}+(3\gamma-3)\rho_0 v_k U_{,k}=\mathrm{O}(\rho_{0,j}\epsilon^5)\end{aligned} \tag{39.45}$$

を与える．式 (39.44) をこれから引き，そして Newton の近似が適切である若干の項を単純化するために Newton の運動方程式 (39.15) および (39.16) を用いることによって，

*33
$$\rho_0\, d\mathit{\Pi}/dt+t_{\hat{j}\hat{k}}v_{j,k}=0+\mathrm{O}(\rho_{0,j}\epsilon^5)\ \text{の誤差} \tag{39.46}$$

を得る．これは物質を通したエネルギーの流れが無視されたときの，熱力学の第 1 法則（局所的なエネルギー保存）以外の何ものでもないことに注意せよ（エネルギーの流れを無視することは 39.5 節で正当化された）．熱力学のこの第 1 法則は，Newton の式よりもむしろ，実際に流体力学の背景におけるポスト Newton の式である．なぜなら $\mathit{\Pi}$ は Newton の次数での流体力学の運動に影響しない（39.7 節をみよ）からである．

運動方程式の最後のもの，$T^{j\alpha}{}_{;\alpha}=0$ はポスト Newton の Euler 方程式に帰着する．

---

*32　バリオン保存の法則

*33　エネルギー保存の法則

*34
$$\rho^* \frac{dv_j}{dt} - \rho^* U_{,j} + [t_{\hat{j}\hat{k}}(1+3\gamma U)]_{,k} - t_{\hat{j}\hat{k},k}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \Pi\right) - \frac{t_{\hat{j}\hat{k}}t_{\hat{k}\hat{l},l}}{\rho^*}$$
$$+ \rho^* \frac{d}{dt}\left[(2\gamma+2)Uv_j - \frac{1}{2}(7\Delta_1 + \Delta_2)V_j - \frac{1}{2}\alpha_1 U w_j\right] - v_j \rho^* U_{,t} + v_k t_{\hat{k}\hat{j},t}$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta_2 \rho^* (V_j - W_j)_{,t} + \frac{1}{2}\rho^*[(7\Delta_1 + \Delta_2)v_k + (\alpha_1 - 2\alpha_3)w_k]V_{k,j}$$
$$- \rho^*\left[2\Psi - \frac{1}{2}\zeta\mathcal{A} - \frac{1}{2}\eta\mathcal{D} - \frac{1}{2}\alpha_2 w_i w_k U_{ik} + \alpha_2 w_i (V_i - W_i)\right]_{,j} \tag{39.47}$$
$$- \rho^* U_{,j}\left[\gamma \boldsymbol{v}^2 - \frac{1}{2}\alpha_1 \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)\boldsymbol{w}^2 - (2\beta - 2)U + 3\gamma p/\rho^*\right]$$
$$+ \frac{1}{2}(v_{j,k} t_{\hat{k}\hat{m}} v_m - t_{\hat{j}\hat{m}} v_{m,k} v_k) + \frac{1}{2}[v_m (t_{\hat{m}\hat{j}} v_k)_{,k} - v_j (t_{\hat{k}\hat{l}} v_k)_{,l}] = 0$$

偏微分はコンマによって記述される．d/dt は物質に伴う時間微分である［式 (39.16)］.

式 (39.44)，(39.46)，および (39.47) はポスト Newton の次数での運動方程式の完全な組である．

［練習問題］

39.13 運動方程式

運動方程式 (39.44)，(39.46)，(39.47) の導出の詳細を実行せよ．導出の部分として，Christoffel 記号の以下の値を PPN 座標系で計算せよ．

$$\Gamma^0{}_{00} = -U_{,t} + \mathrm{O}(U_{,j}\epsilon^3), \qquad \Gamma^0{}_{0j} = -U_{,j} + \mathrm{O}(U_{,j}\epsilon^2),$$
$$\Gamma^0{}_{jk} = \gamma U_{,t}\,\delta_{jk} + \frac{7}{2}\Delta_1 V_{(j,k)} + \frac{1}{2}\Delta_2 W_{(j,k)} + \left(\frac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_2\right) w_{(j}U_{,k)}$$
$$+ \alpha_2 w_i U_{i(j,k)} + \mathrm{O}(U_{,j}\epsilon^3),$$
$$\Gamma^j{}_{00} = -U_{,j} + \left[(\beta+\gamma)U^2 - 2\Psi + \frac{1}{2}\zeta\mathcal{A} + \frac{1}{2}\eta\mathcal{D} + \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\boldsymbol{w}^2 U\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_3)w_i V_i + \frac{1}{2}\alpha_2 w_i w_k U_{ik}\right]_{,j} - \frac{7}{2}\Delta_1 V_{j,t} - \frac{1}{2}\Delta_2 W_{j,t} \tag{39.48}$$
$$+ \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1\right) w_j U_{,t} - \alpha_2 w_i U_{ij,t} + \mathrm{O}(U_{,j}\epsilon^4),$$
$$\Gamma^j{}_{0k} = \gamma U_{,t}\,\delta_{jk} - \left(\frac{7}{2}\Delta_1 + \frac{1}{2}\Delta_2\right) V_{[j,k]} - \frac{1}{2}\alpha_1 w_{[j}U_{,k]} + \mathrm{O}(U_{,j}\epsilon^3),$$
$$\Gamma^j{}_{kl} = -\gamma(U_{,j}\,\delta_{kl} - 2U_{,(k}\,\delta_{l)j}) + \mathrm{O}(U_{,j}\epsilon^2)$$

ここにテンソルの添字についての角括弧は反対称化を表し，そして円括弧は対称化を表す．導出の部分として関係式

$$\chi(t,\boldsymbol{x}) = -\int \rho_0(t,\boldsymbol{x}')|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|d^3x' \tag{39.49a}$$

*34 ポスト Newton の Euler 方程式

$$\chi_{,jk} = -\delta_{jk}U + U_{jk} \tag{39.49b}$$

$$\chi_{,it} = V_i - W_i + \mathrm{O}(\epsilon^5) \tag{39.49c}$$

$$W_{[k,j]} = V_{[k,j]} \tag{39.50}$$

を証明し用いるのが有用であるだろう．ここに χ は本来式 (39.29c) で定義された関数である．

39.14　一般相対論へのポスト Newton 近似

Einstein の場の方程式のポスト Newton の展開を遂行し，それによって一般相対論の PPN パラメータに対するコラム 39.2 で引用されている値を得よ．計算は Chandrasekhar (1965a) の方法に従うのが最善であるだろう．$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ と置き，そして

$$h_{00} = \mathrm{O}(\epsilon^2) + \mathrm{O}(\epsilon^4), \qquad h_{0j} = \mathrm{O}(\epsilon^3), \qquad h_{jk} = \mathrm{O}(\epsilon^2) \tag{39.51}$$

を仮定せよ．4 個の “ゲージ条件”

$$\left.\begin{aligned} h_{jk,k} - \tfrac{1}{2}h_{,j} &= \mathrm{O}(\epsilon^4/R_\odot) \\ h_{0k,k} - \tfrac{1}{2}h_{kk,0} &= \mathrm{O}(\epsilon^5/R_\odot) \end{aligned}\right\} \text{ ここに}, h = h_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta} = -h_{00} + h_{ll} \tag{39.52}$$

が満たされるように空間座標と時間座標を選べ．

(a) 空間のゲージ条件は弱い重力波の研究で用いられたもの［式 (35.1a)］へのポスト Newton 近似であるが，しかし時間のゲージ条件はそうでないことを示せ．

(b) これらのゲージ条件および式 (8.24) および (8.47) でのポスト Newton の限界を用いて，線形化された次数まで正確な，Ricci テンソルを求めよ．

$$R_{00} = -\frac{1}{2}h_{00,mm} + O(\epsilon^4/{R_\odot}^2), \qquad R_{jk} = -\frac{1}{2}h_{jk,mm} + O(\epsilon^4/{R_\odot}^2) \tag{39.53a}$$

$$R_{0j} = -\frac{1}{2}h_{0j,mm} - \frac{1}{4}h_{00,0j} + O(\epsilon^5/{R_\odot}^2) \tag{39.53b}$$

(c) これらをストレス–エネルギーテンソルの Newton の式 (39.13) と，式 (39.27) とを結びつけて，1 次の次数まで正確な，以下の計量係数を得よ．

$$h_{00} = 2U + k_{00} + O(\epsilon^6), \qquad h_{0j} = -\frac{7}{2}V_j - \frac{1}{2}W_j + O(\epsilon^5),$$

$\uparrow$［未知のポスト Newton の補正］（k_{00} について）　(39.54)

$$h_{jk} = 2U\,\delta_{jk} + O(\epsilon^4)$$

ここに U，V_j および W_j は式 (39.34a)，(39.34b)，(39.34c) によって定義されているとみなされるべきである．これらの計量係数を式 (39.32) と比較することによって，一般相対論に対して

$$\gamma = 1, \qquad \varDelta_1 = 1, \qquad \varDelta_2 = 1 \tag{39.55}$$

を発見せよ．

(d) 1 次の計量のこの知識で（終始 $\gamma = \Delta_1 = \Delta_2 = 1$ を用いて），39.10 節の解析を実行し，ストレス–エネルギーテンソル [$\gamma = 1$ をもつ式 (39.42)] へのポスト Newton の補正を得ることができる．

(e) Ricci テンソルの成分 R_{00} へのポスト Newton の補正を，$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ を用い，式 (39.54) に与えられているものとしての $h_{\alpha\beta}$ を用い，そしてゲージ条件 (39.52) を用いて，同様に計算せよ．答えは

$$R_{00} = \left(-U - \frac{1}{2}k_{00} - U^2\right)_{,mm} + 4UU_{,mm} + O(\epsilon^6/R_\odot{}^2) \tag{39.56}$$

であるはずである．

(f) Einstein の方程式 $R_{00} = 8\pi(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T)$ をポスト Newton の次数まで正確に求めて，それを解きポスト Newton の計量補正

$$k_{00} = -2U^2 + 4\Psi \tag{39.57}$$

を得よ．ここに Ψ は，$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1$ をもつ式 (39.43d) によって与えられる．式 (39.32c) および (39.34d) と比較することによって，一般相対論に対して

$$\beta = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1, \qquad \zeta = \eta = 0 \tag{39.58}$$

を見出せ．

(g) 完全なポスト Newton の計量と，完全なポスト Newton のストレス–エネルギーテンソルを知ると，($\gamma = \beta = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \Delta_1 = \Delta_2 = 1$, $\zeta = \eta = 0$ を用いて) 39.11 節の計算を実行して，物質に対するポスト Newton の運動方程式 (39.44), (39.46), および (39.47) を得ることができる．

39.12　PPN 座標の取り巻く宇宙への関係

1 つの決定的な問題が解明されずに残っている．PPN 座標系の，取り巻く宇宙に対する方向づけは何であるか？　より特別に PPN 座標系は “空の恒星” に相対的に回転しているか，あるいはある意味で，それらに “堅く結びついているか”？　この問題に答えるために，PPN 形式を用いて太陽系を解析するとしよう．PPN 座標系を通して太陽系の速度について仮定をしてはいけない．そうすると太陽から外へ，地球の軌道を横切り，冥王星の軌道を横切り，そして星間空間へ向かうと，PPN 座標系は大域的な性質においてますます Lorentz になる [$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + O(M_\odot/r)$]．こうして，**太陽系から離れると PPN 座標は “銀河を通して動いている Lorentz 系” になる**．これはもちろん，PPN 座標系の空間軸が太陽系の外部遠く離れたジャイロスコープに結びついているかのように振る舞

*35 太陽系の PPN 座標系は銀河の局所 Lorentz 系に結びついている

うことを意味する．同等であるが，PPN 座標系は銀河および宇宙の時空幾何学を通して Fermi–Walker 移動をする．

39.13　PPN 形式の要約

PPN 形式は本章で構成されているように，コラム 39.4 で要約されている．最近の文献の多くは本書で用いられているのとは異なる PPN パラメータの組を用いる．1 つのパラメータの組から別なパラメータの組への変換に対しては，コラム 39.5 をみよ．

コラム 39.4　PPN 形式の要約

I. 変数

$\rho_0(\boldsymbol{x},t)$：バリオン "質量" 密度（39.3 節），静止系で測定されるとき

$\Pi(\boldsymbol{x},t)$：特有の内部エネルギー（次元をもたない，39.3 節），静止系で測定されるとき

$t_{\hat{j}\hat{k}}(\boldsymbol{x},t)$：静止系の直交軸に関係するストレスの成分

$v_j(\boldsymbol{x},t)$：PPN 座標に関係する物質の座標速度（すなわち，静止系）

$U(\boldsymbol{x},t)$，$\Psi(\boldsymbol{x},t)$，$\mathcal{A}(\boldsymbol{x},t)$，$\mathcal{D}(\boldsymbol{x},t)$，$V_j(\boldsymbol{x},t)$，$W_j(\boldsymbol{x},t)$，$U_{jk}(\boldsymbol{x},t)$：重力ポテンシャル

γ，β，β_1，β_2，β_3，β_4，Δ_1，Δ_2，ζ，η：その値が 1 つの理論を別な理論から区別するパラメータ（コラム 39.2 をみよ）

$\boldsymbol{w}$："普遍的な静止系" に相対的な PPN 座標系の速度［ゼロでない α_1，α_2，あるいは α_3 をもつ理論に対してのみ重要である．式 (39.33) をみよ］．

II. これらの変数の発展を支配する式

ρ_0：静止質量の保存，式 (39.44)

Π：熱力学の第 1 法則，式 (39.46)

$t_{\hat{j}\hat{k}}$：ρ_0，Π，および他の材料変数（化学組成，ひずみ等）を用いて，状態方程式および圧力のかかった媒体の通常の理論—ここでは議論されていない—によって定まる．

v_j：運動方程式（"$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$"），式 (39.47)

U，Ψ，$\mathcal{A}$，$\mathcal{D}$，V_j，W_j，U_{jk}：源の式 (39.34)

III. これらの変数から計算されるべき量

$g_{00}(\boldsymbol{x},t)$，$g_{0j}(\boldsymbol{x},t)$，$g_{jk}(\boldsymbol{x},t)$：PPN 座標系における計量のこれらの成分は，重力

ポテンシャルを用いて式 (39.32) によって表される．

$u^0(\boldsymbol{x},t)$，$u^j(\boldsymbol{x},t)$：PPN 座標系における物質の 4–速度のこれらの成分は式 (39.39) によって与えられる．

$T^{00}(\boldsymbol{x},t)$，$T^{0j}(\boldsymbol{x},t)$，$T^{jk}(\boldsymbol{x},t)$：PPN 座標系におけるストレス–エネルギーテンソルのこれらの成分は式 (39.42) によって与えられる．

IV. 静止系，PPN 座標，および宇宙の間の関係

1. $t_{\hat{j}\hat{k}}$ が定義されている，静止系の直交基底 $\boldsymbol{\omega}^{\hat{\alpha}}$ は，PPN 座標基底 $\boldsymbol{d}x^{\alpha}$ に式 (39.41) によって関係している．
2. 太陽から遠く離れると，PPN 座標は漸近的に Lorentz になる．すなわち，PPN 座標は銀河および宇宙の時空幾何学を通して動いている慣性系をつくる．
3. 宇宙の膨張あるいは太陽系に衝突する宇宙の重力波についての説明を与えない．

コラム 39.5 文献で用いられている PPN パラメータ：変換者の手引き

PPN 形式の本来の “点粒子形” [Nordtvedt (1968b)]，および本来の “完全流体形” [Will (1971c)] は PPN パラメータの異なる組を用いた．本書は Will の組を採用した，そして非等方の応力の効果を特徴づけるパラメータ η を追加した．より最近に，Will と Nordtvedt は共同で以下に記述されている，改訂されたパラメータの組を採用した．

A. 変換表

Will–Nordtvedt 改訂されたパラメータ [a]	本書の記号における改訂されたパラメータ [b]	**Nordtvedt (1968b)** [c] の記号における改訂されたパラメータ
γ	γ	γ
β	β	β
α_1	$7\Delta_1+\Delta_2-4\gamma-4$	$8\Delta-4\gamma-4$
α_2	$\Delta_2+\zeta-1$	$\alpha'''-1$
α_3	$4\beta_1-2\gamma-2-\zeta$	$4\alpha''-\alpha'''-2\gamma-1$
ζ_1	ζ	$\alpha'''-\chi$
ζ_2	$2\beta+2\beta_2-3\gamma-1$	$2\beta-\alpha'-1$
ζ_3	β_3-1	ない

ζ_4	$\beta_4-\gamma$	ない

[a] 改訂されたパラメータは Will and Nordtvedt (1972), Nordtvedt and Will (1972) および Ni (1973) によって用いられている.

[b] 本書の記号は Will (1971a,b,c,d), Ni (1972), および Thorne, Ni and Will (1971) によって用いられている.

[c] Nordtvedt の本来の "点粒子" パラメータは Nordtvedt (1968b, 1970, 1971a,b) によって用いられた.

B. 改訂されたパラメータの意義

α_1, α_2, α_3 は "優先された系の効果" の限度および性質を測る. 39.9 節をみよ. 少なくとも 1 個のゼロでない α をもつ任意の重力理論は, **優先された系の理論**とよばれる.

ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4, α_3 は大域的な保存則における破れの限度および性質を測る. 重力理論はポスト Newton のレベルで, $\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=\zeta_4=\alpha_3=0$ である場合に限り, すべての 10 個の大域的な保存則 (エネルギー運動量に対して 4, 角運動量に対して 6; 19 および 20 章をみよ) をもつ. 証明と議論に対しては, Will (1971d), Will and Nordtvedt (1972), Will (1972) をみよ. $\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=\zeta_4=\alpha_3=0$ をもつ任意の理論は**保守的な理論**とよばれる.

一般相対論および Dicke–Brans–Jordan の理論では, すべての α および ζ はゼロである. こうして, 一般相対論および Dicke–Brans–Jordan の理論は優先された系の効果をもたない保守的な理論である.

[**練習問題**]

39.15　一般相対論のポスト Newton の限界における多体系

一般相対論のポスト Newton の限界で, 多くの重力的に相互作用し, 大きさに比べて大きく分離している物体からつくられている系 (例：太陽系) を考える. おのおのの物体は球対称であること, 内部運動をもたないこと, そして等方的な内部応力, $t_{\hat{j}\hat{k}}=\delta_{jk}p$ をもつと理想化せよ. 物体 A の中心の世界線がある選ばれた PPN 座標系で, $\boldsymbol{x}_A(t)$ であるとする. そして物体 A の中心の (座標) 速度が

$$\boldsymbol{v}_A(t)=d\boldsymbol{x}_A/dt \tag{39.59a}$$

であるとする. 物体 A の全質量–エネルギー, その近傍で測定されるとき, (静止質量–エネルギープラス内部エネルギープラス自らの重力のエネルギー) は

$$M_A=\int_{\mathcal{V}_A}\left(1+\Pi-\frac{1}{2}U_{\text{自身}}\right)d(\text{静止質量})+\mathrm{O}(M_A\epsilon^4) \tag{39.59b}$$

によって与えられる. ここに $U_{\text{自身}}$ は物体自身の Newton のポテンシャルであり (他の物

体からの寄与をもたない)，そして $\mathcal{V}_A$ は物体の内部である．

(a) 選ばれた PPN 座標系で書かれるとき，M_A に対するこの表現は

$$M_A = \int_{\mathcal{V}_A} \rho_0 \left(1 + \Pi + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_A{}^2 + 3U - \frac{1}{2}U_{\text{自身}}\right) d^3x + \mathrm{O}(M_A\epsilon^4) \quad (39.59\text{c})$$

となることを示せ．式 (39.43)，(39.44)，および (39.46) を用いて，物体が動き回るとき M_A が保存される，$dM_A/dt = 0$ を示せ．

(b) すべての物体の外部の事象 $(t, \boldsymbol{x})$ をとり，そして時間 t で

$$\boldsymbol{r}_A \equiv \boldsymbol{x}_A - \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{r}_{AB} \equiv \boldsymbol{x}_A - \boldsymbol{x}_B, \qquad r_A \equiv |\boldsymbol{r}_A|, \qquad r_{AB} \equiv |\boldsymbol{r}_{AB}| \quad (39.59\text{d})$$

と表す．選ばれた事象での一般相対論の，ポスト Newton の計量 (39.32) は

$$g_{jk} = \delta_{jk}\left(1 + 2\sum_A \frac{M_A}{r_A}\right) + \mathrm{O}(\epsilon^4), \quad (39.60\text{a})$$

$$g_{0j} = -\sum_A \frac{M_A}{r_A}\left[\frac{7}{2}v_{Aj} + \frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{r}_A)r_{Aj}}{r_A{}^2}\right] + \mathrm{O}(\epsilon^5), \quad (39.60\text{b})$$

$$g_{00} = -1 + 2\sum_A \frac{M_A}{r_A} - 2\left(\sum_A \frac{M_A}{r_A}\right)^2 + 3\sum_A \frac{M_A v_A{}^2}{r_A} - 2\sum_A \sum_{B\neq A} \frac{M_A M_B}{r_A r_{AB}} + \mathrm{O}(\epsilon^6) \quad (39.60\text{c})$$

の形をもつことを示せ［ヒント：物体 A 自身の静止系で物体 A 自身に適用される，Newton のビリアル定理 (39.21a) から，

$$\int_{\mathcal{V}_A} \left(3p - \frac{1}{2}\rho_0 U_{\text{自身}}\right) d^3x = \mathrm{O}(M_A\epsilon^4) \quad (39.61)$$

を結論せよ．ここに積分は PPN 系で遂行される］．

(c) 無限小座標変換

$$t_{\text{古い}} = t_{\text{新しい}} - \frac{1}{2}\sum_A \frac{M_A(\boldsymbol{r}_A\cdot\boldsymbol{v}_A)}{r_A}, \qquad \boldsymbol{x}_{\text{古い}} = \boldsymbol{x}_{\text{新しい}} \quad (39.62)$$

を遂行し，計量 (39.60) を Einstein, Infeld and Hoffman (1938)，および Eddington and Clark (1938) によって本来考案された標準的な形

$$g_{jA} = \delta_{jA}\left(1 + 2\sum_A \frac{M_A}{r_A}\right) + \mathrm{O}(\epsilon^4) \quad (39.63\text{a})$$

$$g_{0j} = -4\sum_A \frac{M_A}{r_A} v_{Aj} + \mathrm{O}(\epsilon^5) \quad (39.63\text{b})$$

$$g_{00} = -1 + 2\sum_A \frac{M_A}{r_A} - 2\left(\sum_A \frac{M_A}{r_A}\right)^2 + 3\sum_A \frac{M_A v_A{}^2}{r_A} - 2\sum_A \sum_{B\neq A} \frac{M_A M_B}{r_A r_{AB}} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \mathrm{O}(\epsilon^6) \quad (39.63\text{c})$$

に表せ．ここに χ［式 (39.49a)］は

$$\chi = -\sum_A M_A r_A$$

によって与えられる．

(d) 物体に対する運動方程式は 2 つの方法のいずれかによって得ることができる．おのおのの物体の内部にわたる Euler 方程式 (39.48) の体積分を遂行することによって，あるいは 20.6 節の一般的な議論を発動することによって，である．後の方法はより容易である．それを用いて任意の選ばれた物体 K は，式 (39.63) における和から $A = K$ をもつ項を省略することによって得られる，計量の測地線に沿って動くことを結論せよ．物体 K に対する測地線の式は

$$\begin{aligned}\frac{d^2\boldsymbol{x}_K}{dt^2} \equiv \frac{d\boldsymbol{v}_K}{dt} = \sum_{A\neq K} \boldsymbol{r}_{AK}\frac{M_A}{{r_{AK}}^3}\Bigg[1 - 4\sum_{B\neq K}\frac{M_B}{r_{BK}} - \sum_{C\neq A}\frac{M_C}{r_{CA}}\left(1 - \frac{\boldsymbol{r}_{AK}\cdot\boldsymbol{r}_{CA}}{2{r_{CA}}^2}\right) \\ + {\boldsymbol{v}_K}^2 + 2{\boldsymbol{v}_A}^2 - 4\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{v}_K - \frac{3}{2}\left(\frac{\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{r}_{AK}}{r_{AK}}\right)^2\Bigg] \\ - \sum_{A\neq K}(\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_K)\frac{M_A\boldsymbol{r}_{AK}\cdot(3\boldsymbol{v}_A - 4\boldsymbol{v}_K)}{{r_{AK}}^3} \\ + \frac{7}{2}\sum_{A\neq K}\sum_{C\neq A}\boldsymbol{r}_{CA}\frac{M_A M_C}{r_{AK}{r_{CA}}^3}\end{aligned} \tag{39.64}$$

に帰着することを示せ．

方程式 (39.63) および (39.64) は，多体系の幾何学と発展に対する Einstein–Infeld–Hoffman（“EIH”）方程式とよばれる．それらは太陽系における惑星の軌道の解析に広く用いられている．たとえば，Caltech Jet 推進実験室は，修正された形でそれらを用いて，惑星および宇宙船の高精度の軌道に対する位置推算表を計算する．EIH 方程式および計量を導く上述の方法は Fock（1959）によって考案された．Dicke–Brans–Jordan 理論における同様の計算に対しては，Estabrook（1969）をみよ．そして完全な PPN 形式における類似の多体方程式の導出に対しては，Will（1972）をみよ．

40章
太陽系の実験

40.1 一般相対論を提案されている重力の計量理論から区別する多くの実験

もしすべての人の目に，挑戦者が勝つ機会がゼロであるようにみえるならば，観客は誰も戦いのために現れないだろう．戦いを渇望して，戦いのために必死で貢ごうとする興行主も，チャンピオンに対して，見出しうる最善の相手以外の人をリングへもたらす余裕はもちえない．Einsteinの重力の計量理論に対して，現代の判断は（39.2節が示しているように），また計量（あるいは計量とねじれ）であるもう1つの重力理論を提起する以外の選択を残さない．

そうすると，論争を評価するには，一般相対論を完全に信じ難いとは言い切れないある重
*1 力の計量理論から区別する実験を，考案し遂行することである．本章はこのような実験を説明する．あるものはすでに遂行されており，あるものは将来遂行されるものである．そして39章のPPN形式を用いて実験の意義を解析する．

記述されるべき多くの実験で，太陽系の時空幾何学を通しての，月，惑星，宇宙船，光線，
*2 あるいはジャイロスコープ，の運動を調べる．あの時空幾何学は非常に複雑である．それは太陽およびすべての惑星の球状な場，それらの四重極および高次の変形による非球状な場，およびそれらの運動量および角運動量による場を含む．さらに，時空幾何学はすべてのこれらの場*の**非線形**の重ね合わせから生ずる．あるいは少なくともポストNewtonの形式でそれはこのような**非線形**の重ね合わせから生ずるとみられる．

この議論に対して幸いなことに，もっとも重要な実験のいくつかは，これらの複雑さをほとんどもたない．それらが測定する効果は，完全に太陽の重力場の球状部分と関係している．これらの実験の記述を最初に行い（40.2–40.5節），それから原理的により複雑な実験に注目しよう．

*3 中心場の実験を議論するために，理想化された，孤立した，静的な，球状の太陽の外部

---

* もちろん，Einsteinの完全な一般相対性理論の観点から，合法的に重要であるのは，現実の物理学的な世界のただ1つの曲がった時空幾何学である．すべてのこれらの"個々の場"はたんなる帳簿係の論説であり，ポストNewtonの限界から完全なEinstein理論へ移行するとき，それらはほとんどよく捨て去られる（それらは有用であることを終える）．

*1 本章はPPN形式を用いて実験を解析する

*2 太陽系の時空幾何学の複雑さ

*3 孤立した，静的な，球状の太陽の幾何学への幾何学の理想化

の重力場に対する表現が必要になる．一般相対論で，このような重力場は Schwarzschild 線要素，

*4
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M_\odot}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M_\odot/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

によって記述される．しかしこの線要素は 2 つの理由のために，欲するものでない．(1) それは "正確すぎる"，(2) それは "間違った" 座標系で書かれている．

なぜ正確すぎるか？ なぜならそれは摂動を受けず修正されないときに限り単純であるからである．他方，ある修正された理論は非常に複雑でポスト Newton 近似でのみ取り扱いやすい，新しい効果を表す．なぜ間違った座標系であるか？ なぜなら物理学者，天文学者，および別な天体の力学は，太陽系を解析するとき "Schwarzschild 座標" よりもむしろ "等方的な座標" を用いるというかなり標準的な慣習を採用しているからである．**例**：ポスト Newton の展開は 39 章の PPN 形式を含めて，ほとんどつねに等方的な座標を用いる．**別な例**：太陽系に対する相対論的な天体暦は，Caltech jet 推進実験室［Ohandley *et al.* (1969)，Anderson (1973)］によって用意され世界中で幅広く用いられ，等方的な座標を使う．

それでは，Schwarzschild 線要素を修正しよう．最初等方的な座標（練習問題 31.7）に変換する．それから $M_\odot/r$ のべきで計量係数をポスト Newton の精度まで展開する．それによって

*5
$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left[1 - 2\frac{M_\odot}{r} + 2\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]dt^2 + \left[1 + 2\frac{M_\odot}{r}\right][dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \\ &= -\left[1 - 2\frac{M_\odot}{r} + 2\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]dt^2 + \left[1 + 2\frac{M_\odot}{r}\right][dx^2 + dy^2 + dz^2] \end{aligned} \tag{40.1}$$

を得る．ここに r，θ，ϕ は x，y，z に通常の方法で関係している．

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \theta = \tan^{-1}[z/(x^2 + y^2)^{1/2}], \quad \phi = \tan^{-1}(y/x) \tag{40.2}$$

そして r は新しい "等方的な" 半径方向の座標であり，Schwarzschild の r と混乱されるべきでない（39.6 節を勉強していない読者は次節で，なぜ g_{00} において次数 ${M_\odot}^2/r^2$ の項を保持するのに，g_{jk} において保持しないかを見出すだろう）．**注意**：計量に対するこのポスト Newton の表現は練習問題 19.3 で導かれている結果の特別な場合である．

もし同じ源（太陽）の重力場を重力の別な計量理論で同じポスト Newton の近似で計算すれば，非常に似た結果を得る．

*6
$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left[1 - 2\frac{M_\odot}{r} + 2\beta\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]dt^2 + \left[1 + 2\gamma\frac{M_\odot}{r}\right][dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \\ &= -\left[1 - 2\frac{M_\odot}{r} + 2\beta\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]dt^2 + \left[1 + 2\gamma\frac{M_\odot}{r}\right][dx^2 + dy^2 + dz^2] \end{aligned} \tag{40.3}$$

---
*4　(1) Schwarzschild 座標で
*5　(2) 等方的な座標で
*6　(3) PPN 形式で

(練習問題 40.1 をみよ). ここに γ および β はコラム 39.2 に記述されている 10 個の PPN パラメータの中の 2 個である. そのコラムから, γ は "単位静止質量によって生成される空間曲率の量" を測定し, 他方 β は "g_{00} に対する重ね合わせの法則における非線形性の量" を測定することを思い出せ. これらの発見法的な記述は, 球対称の中心を取り巻く引力の理想化された計量に対して, 上述の形式によって数学的な対応を見出す.

パラメータ γ を高精度まで測定することによって, 一般相対論 $(\gamma = 1)$ と Dicke–Brans–Jordan の理論 $[\gamma = (1+\omega)/(2+\omega)$, ここに ω は "Dicke の結合定数" である$]$ とを区別できる. コラム 39.2 をみよ. しかし一般相対論および Dicke–Brans–Jordan は β $(\beta = 1)$ に対して同じ値を予言する. この同一性は β は測定する価値がないことを意味しない. 値 $\beta \neq 1$ は別な理論によって予言される [Ni (1972) をみよ]. したがって β の測定は, このような理論を一般相対論と区別することにおいて有用である.

実際, 太陽の計量に対する上述の形 (40.3) は完全には一般的でない. 優先された "普遍的な静止系" をもつ任意の理論において (たとえば, Ni の理論, コラム 39.1), 系 (練習問題 40.1) に相対的な太陽の運動による, 計量への付加項が存在する.

*7
$$\begin{aligned} ds^2 = (\text{表現 } 40.3) &+ (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)\frac{M_\odot}{r}\boldsymbol{w}^2 dt^2 + 2\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1\right)\frac{M_\odot}{r} w_j\, dx^j\, dt \\ &- \alpha_2\left[\frac{M_\odot}{r^3}x^j x^k - \frac{I_\odot}{r^5}\left(x^j x^k - \frac{1}{3}r^2\delta_{jk}\right)\right] w_j\, dt\,(2\,dx^k + w_k\, dt) \end{aligned} \tag{40.3$'$}$$

これらの "優先された系の項" において $I_\odot \equiv I_{jj} = \int \rho r^2 d^3x$ は太陽の質量分布の 2 次モーメントのトレースである.

$$\alpha_1 = 7\Delta_1 + \Delta_2 - 4\gamma - 4,$$
$$\alpha_2 = \Delta_2 + \zeta - 1,$$
$$\alpha_3 = 4\beta_1 - 2\gamma - 2 - \zeta$$

は PPN パラメータの結合である. そして $\boldsymbol{w}$ は優先された系に相対的な太陽の速度 (≡ 座標系の速度) である (優先された系をもたない一般相対論および Dicke–Brans–Jordan のような理論は, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ をもつ. したがって計量における優先された系の項をもたない). 解説の容易さのために, 本章でのすべての式および計算は優先された系の項を無視するだろう. しかしそれらの項の結果は議論されるだろう, そしてそれらを解析する文献は引用されるだろう.

[練習問題]

40.1　理想化された太陽に対する PPN 計量 [トラック–2]

PPN 座標系の原点に静止している孤立した, 静的な, 球状の太陽に対して PPN 計量 (39.32) は表現 (40.3), (40.3′) に帰着することを示せ. 還元の部分として太陽の全質量–エ

*7　(4) 優先された系の効果を含むこと

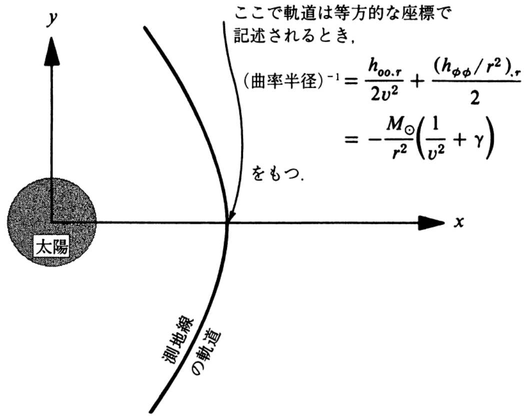


図 40.1　3–速度の関数としての，太陽に最接近する点での試験物体の軌道の曲がり（計算および議論に対しては本文をみよ）．

ネルギーは

$$M_\odot = \int_0^{R_\odot} \rho_0(1 + 2\beta_2 U + \beta_3 \Pi + 3\beta_4 p/\rho_0)4\pi r^2 dr \tag{40.4}$$

によって与えられることを示せ．

[**警告**：この公式をみてただちに “静止質量の寄与は $\int \rho_0 4\pi r^2 dr$ であり，重力エネルギーの寄与は $\int 2\beta_2\rho_0 U 4\pi r^2 dr$ である，等” と考えてはならない．むしろ，このような解釈をするときには（1）時空は曲がっており，したがって $4\pi r^2 dr$ は物理的なメートル棒によって測定されるとき**固有体積**でない．また（2）ビリアル定理（練習問題 39.6）および他の積分定理は被積分関数の形を変えるのに用いることができる．さらなる議論に対しては以下の練習問題 40.9 および 40.10 をみよ．]

40.2　重力のテストへの光および電波の使用

Newton の極限で，惑星および宇宙船の軌道は重力によって強く影響されるが，しかし光の伝播および電波の伝播は（“無限大の” 速度で）まったく影響されない．この理由のために，軌道の実験的な研究は，相対論的な効果を，それよりはるかに大きい標準的な Newton の効果から分離するという問題に困らされることになる．対照的に，光および電波の伝播の実験的な研究は，このような圧倒的な Newton の背景と競うことはない．驚くべきでないが，それらは現在（1973 年）まで，太陽系の実験の中でもっとも明白でもっとも決定的なものである．[*8]

数学的に，光を惑星から区別するパラメータはその高速度である．測地線の式で，速度の大きさはどの計量係数が運動に影響しうるかを定める．たとえば，弱い，静的な場

[*8] 光および電波は相対論の “純粋な” テストを与える

$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ と，速度 $(v_x, v_y, v_z) = (0, v, 0)$ で動いている $(x, y, z) = (r, 0, 0)$ における粒子を考える．図 40.1 をみよ．ここで粒子の軌道への重力の効果は量

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\text{3 次元の，ほとんど}\\ \text{Euclid な空間にお}\\ \text{ける軌道の曲率}\end{pmatrix} &= (\text{軌道の曲率半径})^{-1} \\
&= \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d\tau}{dy}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\tau}{dy}\frac{dx}{d\tau}\right) = \frac{1}{u^y}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{u^x}{u^y}\right) = \frac{1}{(u^y)^2}\frac{du^x}{d\tau} \\
&= -\frac{(1-v^2)}{v^2}\Gamma^x{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = -\frac{1}{v^2}\Gamma^x{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} \\
&= -\Gamma^x{}_{00}v^{-2} - 2\Gamma^x{}_{0y}v^{-1} - \Gamma^x{}_{yy} \\
&= \frac{1}{2}h_{00,x}v^{-2} + (h_{0y,x} - h_{0x,y})v^{-1} + \left(\frac{1}{2}h_{yy,x} - h_{xy,y}\right)
\end{aligned}$$

によって特徴づけることができる．球座標で再表現すると，理想化された太陽線要素 (40.3) の術語で，この公式は，太陽にもっとも接近した点での粒子に対して

$$\begin{aligned}
\Big(\text{3–空間の軌道の曲率}\Big) &= \frac{1}{2}h_{00,r}v^{-2} + \frac{1}{2}(h_{\phi\phi}/r^2)_{,r} \\
&\approx -(M_\odot/r^2)(v^{-2} + \gamma)
\end{aligned} \tag{40.5}$$

となる（練習問題 25.21 と比較せよ）．ここで γ は PPN パラメータであることに注意せよ．それは $(1-v^2)^{-1/2}$ でない．

粒子の速度をブーストすると何が起こるかに注意せよ．遅い速度 $[v^2 \sim$（ポスト Newton の展開パラメータ ϵ^2）$\approx M_\odot/R_\odot]$ に対しては，h_{00} の Newton の部分は完全に支配的である．そしてわずかなポスト Newton の補正は h_{00} の ϵ^4 部分，h_{0j} の ϵ^3 部分，そして h_{jk} の ϵ^2 部分から等しく生ずる［これはポスト Newton 的な極限で h_{00} を $O(\epsilon^4)$ まで，h_{0j} を $O(\epsilon^3)$ まで，そして h_{jk} を $O(\epsilon^2)$ まで展開することに対する正当化であった，39.6 節をみよ］．しかし v が増大すると，項の順序づけは変化する．v の大きい領域で $(v \sim 1 \gg \epsilon^2)$，軌道の曲がりは，粒子の前方方向への大きい運動量と粒子が太陽から横方向の運動量を受ける時間が短いために，ほとんど知覚できなくなってしまう．どのような曲がりが残るかは h_{00} の ϵ^2（Newton の）部分，および h_{jk} の ϵ^2（ポスト Newton の）部分による．それ以外の何ものも重要な影響をもつことはできない．さらに，—"優先された系" の効果を考慮に入れたときでさえ—これらの主要な項，

$$h_{00} = 2U = 2M_\odot/r \qquad \text{および} \qquad h_{jk} = 2\gamma U\delta_{jk} = 2\gamma(M_\odot/r)\delta_{jk}$$

は，Newton のポテンシャル $U \equiv -\Phi$ および PPN パラメータ γ のみに依存する．

*9 これはより一般的な結果の特別な場合である．$\epsilon^2 \lesssim 10^{-6}$ **の微小な補正を除いて，光および電波の伝播への相対論の効果は完全に Newton のポテンシャル** U **および PPN パラメータ** γ **によって支配される．**これらの相対論の効果は，重力による赤方偏移（前章で議論されている，γ に無関係である），光および電波の重力による偏向（以下で議論される，γ に依存する），および "相対論の時間の遅れ"（以下に議論される，γ に依存する）を含む．

*9 光は，ただ Newton のポテンシャルおよび PPN パラメータ γ によって支配される

40.3　“光” の偏向

*10　遠方の星あるいはクエーサーから地球上の望遠鏡に入射する光あるいは電波を考える．通常の議論におけるように（練習問題 18.6 および 25.24），光は太陽の近くを通過すると仮定してはいけない．太陽の重力場による偏向（偏り）はおそらく 1970 年代の中頃あるいは後半に，光が太陽から離れて通過するときでさえ測定可能になるだろう！［以下の計算は Ward（1970）による，しかし Shapiro（1967）が最初に答えを導いた］．

*11　式 (40.3) の PPN 球座標を方向づけて，光が “平面” $\theta=\pi/2$ 内に存在するようにする．対称性によって，もし光が地球から離れたこの平面内で出発するならば，光はつねにこの平面内に存在しなければならない．入射光が線 $\phi=0$ に沿って太陽系に入るとする．そして光が地球に達したときに地球は $r=r_E$，$\phi=\phi_E$ に位置しているとする（図 40.2 をみよ）．地球上の観測者の直交系（$\boldsymbol{e}_{\hat{r}}, \boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}$）で測定されたときの，入射光と太陽の中心との間の角度 α を計算したい．もし太陽の質量がゼロであるならば（平坦な，Euclid 空間），α は $\pi-\phi_E$ となるだろう（図 40.2 をみよ）．しかし，太陽は偏向，$\alpha=\pi-\phi_E+\delta\alpha$ を生み出す．偏向角度 $\delta\alpha$ が計算の真の対象である．

計算では，地球の軌道運動および回転運動を無視せよ．それらは光行差に通じ，それらに対する補正は特殊相対論の通常の公式によって行うことができる（望遠鏡の近傍における Lorentz 変換）．また地球の重力場による光の偏向を無視せよ（偏向角度 $\sim 2M_E/R_E \sim 0''.0003$）．それは 1970 年代後半に探知されうるだろう．

偏向角度を計算する第 1 段階として，r,ϕ 平面内での光線の軌道を定めよ．これは測地線の方程式を用いるかあるいは幾何光学のアイコナール（eikonal）法（Hamilton–Jacobi の方法，22.5 節およびコラム 25.4）を用いるかのいずれかによって計算することができる．このような計算の結果は（練習問題 40.2）r を ϕ と結びつける式である．こうして

$$\frac{b}{r}=\sin\phi+\frac{(1+\gamma)M_\odot}{b}(1-\cos\phi) \tag{40.6}$$

b は単純な幾何学的解釈をもつことに注意せよ．太陽から離れたところで光の軌道は $\phi=b/r+O(M_\odot b/r^2)$ である．したがって，b は古典的な散乱理論の通常の意味で衝突径数である（図 40.2 をみよ）．光は PPN 座標半径でもっとも太陽に近づく（光が最初地球によって遮られないと仮定して）

$$r_{最小}=b\left[1-\frac{(1+\gamma)M_\odot}{b}\right]\approx b \tag{40.7}$$

こうして，b はまた光の “近日点” の半径と考えることができる．

光は角度 $\phi=\pi$ でなくて，むしろ

$$\phi(r=\infty)=\pi+2(1+\gamma)M_\odot/b \tag{40.8a}$$

---

*10　光の偏向

*11　(1) 導出

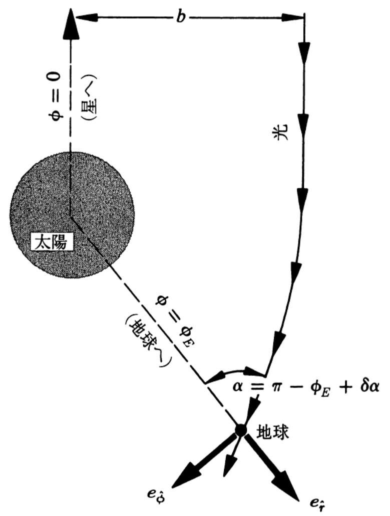


図 40.2 光の偏向を計算することに対して本文で用いられている座標．この図では ϕ は時計回りの方向に増大することに注意せよ．

で $r=\infty$ に戻ることに注意せよ．こうして，全偏向角度は

$$\begin{aligned}(\text{全偏向角度}) &= 2(1+\gamma)M_\odot/b \\ &= \frac{1}{2}(1+\gamma)1''.75 \qquad \left(\begin{array}{l}\text{ちょうど太陽のすぐそば}\\ \text{を通過する光に対して}\end{array}\right)\end{aligned} \tag{40.8b}$$

である．

しかしこれは根本的に興味のある量でない．むしろ，地球上の天文学者によって観測されるときの星の位置を求める．天文学者によって観測されるときの，太陽と星との間の角度 $\alpha=\pi-\phi_E+\delta\alpha$ は

$$\begin{aligned}\tan(\pi-\phi_E+\delta\alpha) &= -\tan\phi_E+\delta\alpha/\cos^2\phi_E \\ &= \frac{u^{\hat\phi}}{u^{\hat r}} = \left[\frac{(1+\gamma M_\odot/r)rd\phi/d\lambda}{(1+\gamma M_\odot/r)dr/d\lambda}\right]_E = \left[\frac{rd\phi}{dr}\right]_E \\ &= -\left[\frac{(b/r)d\phi}{d(b/r)}\right]_E\end{aligned} \tag{40.9}$$

によって与えられる（図 40.2 をみよ）．ここに $u^\beta = dx^\beta/d\lambda$ は地球での光への接線の成分である．光の軌道に対する表現 (40.6) をこの式に挿入することによって，

$$\begin{aligned}\tan\phi_E - \frac{\delta\alpha}{\cos^2\phi_E} &= \frac{\sin\phi_E + [(1+\gamma)M_\odot/b](1-\cos\phi_E)}{\cos\phi_E + [(1+\gamma)M_\odot/b]\sin\phi_E} \\ &= \tan\phi_E - [(1+\gamma)M_\odot/b](1-\cos\phi_E)/\cos^2\phi_E\end{aligned} \tag{40.10}$$

を得る．

こうして，地球で観測される偏向角度は

*12
$$\delta\alpha = \frac{(1+\gamma)M_\odot}{b}(1+\cos\alpha) = \frac{(1+\gamma)M_\odot}{r_E}\left(\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right)^{1/2} \tag{40.11}$$

である．それは光が太陽の方向（$\alpha = \pi$）と逆方向に入射するとき，ゼロから，光が地球–太陽線（$\alpha = \pi/2$）に垂直に入射するとき，

$$(1+\gamma)M_\odot/r_E = \frac{1}{2}(1+\gamma)0''.0041 \tag{40.12}$$

という値を通り，光が太陽の縁を通って入射するとき，$\frac{1}{2}(1+\gamma)\times 1''.75$ の古典的な値まで変動する．

*13 現在（1972 年）までのすべての実験は，縁を通過する場合を吟味している．実験結果はコラム 40.1 で述べられ議論されている．それらは，PPN パラメータ γ が約 20%の誤差の範囲で，1 という一般相対論の値をもつことを示す．

1970 年代中頃あるいは後半までに，クエーサーからの電波の偏向の測定は γ を 1%よりもはるかによく定めるはずである．また，そのときまでに電波天文学者は非常に長い基線の干渉計を用いて，空の高精度の座標を設定する方向に進歩するだろう．もしそうならば，電波天文学者は，ちょうど太陽の縁近くだけでなく，空のすべての領域における電波について，太陽による偏向で引き起こされる座標の “ねじれ” を補正するために，式 (40.11) を用いなければならないだろう．

[練習問題]

40.2　太陽の重力場内での光の軌道

太陽の “赤道平面” 内での等方的な座標 (40.3) における光の経路に対する式 (40.6) を導け．3 つの選択できる方法の中の 1 つあるいはそれ以上を用いよ．(1) 測地線の方程式の直接的な積分（もっとも難しい方法!），(2) 運動の 3 つの積分に基づく計算

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 0, \qquad \boldsymbol{k}\cdot(\partial/\partial t) = k_0, \qquad \boldsymbol{k}\cdot(\partial/\partial\phi) = k_\phi = -bk_0,$$
$$\boldsymbol{k} \equiv d/d\lambda = \text{測地線への接線ベクトル}$$

(35.2 および 25.3 節をみよ)，(3) Hamilton–Jacobi の方法（コラム 25.4）に基づく計算，それは光子（ゼロ静止質量）に対しては幾何光学の “アイコナール（eikonal）法”（22.5 節をみよ）に帰着する．

---

*12　(2) 偏向角度に対する公式
*13　偏向の実験的測定

コラム 40.1 光および電波の太陽による偏向：実験結果

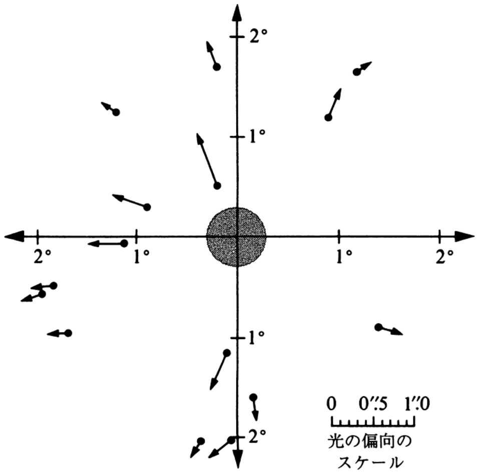
食の測定

1968 年まですべての実験は，皆既日食の間に，星の光の偏向を測定した．測定は悪天候，温度変化による光学的なひずみ，および，食の奇妙な性質により，皆既食の時間を最大にするためにジャングル内や大洋の真ん中，砂漠，そして北極のツンドラ（凍土帯）で行うといった困難につきまとわれた．すべての結果および文献のリストは Bertotti, Brill and Krotkov（1962），および Klüber（1960）によって与えられている．Dicke（1964b）は以下のように結果を要約する．

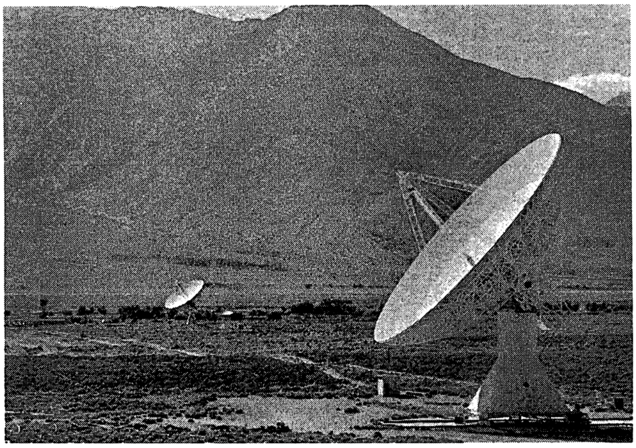
"[実験データの] 解析は，太陽の縁で弧の 1.43 秒の偏向から 2.7 秒まで散在する [1.75 秒の一般相対論の値に比べて]．もし技術が体系的な誤差をもたないと信ずることができるならば，散在はそれほど悪くはないだろう．この観測は少なくとも 10%，そしておそらく 20%ほどまで不確かであると考えなければならないようにみえる．" この結果は 20 から 40 までの，γ における不確定性に対応する．

電波の偏向についての測定

毎年 10 月 8 日太陽は，地球からみたとき，クエーサー 3C279 の表面を通過する．3C279 と近傍のクエーサー 3C273 との間の角分離を監視することによって，電波天文学者は，3C279 電波の太陽による偏向を測定できる．監視は電波干渉計を用いる [技術の議論に対しては表に引用されている文献をみよ]．1970 年代初めの技術では，もし干渉計の両端が数千 km だけ離れているならば（"大陸横断の" あるいは "世界横断の" 基本線），0.001 秒の弧あるいはそれ以上の精度までの測定が可能になるはずである．しかし 1971 年について言えば，唯一の成功した実験はそんな野心的なものでなかった．10 km よりも小さい基本線が用いられた．これらの 1971 年以前の短い基本線の結果の要約は表に示されている．



1922 年 9 月 21 日西部オーストラリアの皆既日食で，太陽の中心の 2.5 度内のもっともよく測定された星，15 個の観測された光の偏向(2 個の計器の平均)．Campbell and Trumpler(1928)によって定められた．矢印は観測された光の偏向を基準の星に相対的な大きさと方向について表している(太陽の中心から 5 度から 10 度まで)．太陽の近くの偏向の幾何学の曲率による Einstein の記述に対してはコラム 1.6 をみよ)．



Caltech の Owens 谷の電波観測所における，90 フィート(後方)および 130 フィート(前方)の電波干渉計．これらは Seielstadt，Sramek，and Weiler(1970)によってクエーサー電波の太陽による偏向の開拓的な測定に用いられた．測定の間 2 個のアンテナは 1.07 キロメートル離れていた(Alan Moffet による写真)．

観測日	観測所	実験者と文献	望遠鏡の数と分離	波　長	実験結果[a] $\frac{1}{2}(1+\gamma)=\left(\frac{\text{観測された偏向}}{\text{Einstein の予言}}\right)$	形式的な標準誤差	1σ 誤差
1969 年 9 月 30 日– 10 月 15 日	Owens Vally (谷) (Caltech)	Scielstadt, Sramck, Weiler (1970)	2, 1.07 km	3.1 cm	1.01	±0.12	±0.12
1969 年 10 月 2 日– 10 月 10 日	Goldstone (Caltech–JPL)	Muhleman, Ekers, Fomalont (1970)	2, 21.56 km	12.5 cm	1.04	±0.05	+0.15 −0.10
1970 年 10 月 2 日– 10 月 12 日	米国立電波天文学観測所 (USA)	Sramek (1971)	3, 0.80 km, 1.90 km, 2.70 km	11.1 cm, 3.7 cm	0.90	±0.05	±0.05
1970 年 9 月 30 日– 10 月 15 日	Mullard 電波天文学観測所 (Cambridge 大学)	Hill (1971)	113, 0.66 km, 1.41 km	11.1 cm, 6.0 cm	1.07	±0.17	±0.17

[a] ここに (観測された偏向)/(Einstein の予言) は，観測データを PPN 予言 (40.11) に適合することによって得られる数 $\frac{1}{2}(1+\gamma)$ である［これらの実験に対しては光は太陽の縁近くを通過するので，式 (40.11) は $\delta\alpha=\frac{1}{2}(1+\gamma)(M_{\odot}/b)$ に帰着する］．“形式的な標準誤差” は標準的な統計的技術によるデータから得られる．しかし，それは通常，結果の確かさについてのよい測度でない．なぜならそれは体系的誤差を考慮しないからである．引用されている “1σ 誤差” は結合された統計的および体系的不確かさについての実験家の最善の評価である．実験家は真の結果は彼らの測定値の “1σ” 以内にあるという 68%の確率を評価する．真の結果は “2σ” 以内にあるという 95%の確率等．

40.4　レーダー伝播における時間の遅れ

*14　時空曲率の電磁波への別な効果は，レーダー信号の1周旅行の時間における相対論的な遅れである．それはShapiroによって初めて指摘された（1964）．またMuhleman and Reichley（1964, 1965）をみよ．

*15　地球上のレーダー送信機が電波を太陽系内の別なところの反射体に送り，そして反射体が波を地球に送り返す．地球上の時計によって測定されるとき，1周の周期を計算せよ．計算の単純さのために，地球および反射体の両方が，回転していないで，静的で球状の，太陽の重力場内で静止しているものと理想化する．計算の終わりで，回転および運動の効果は別々に議論されるだろう．また地球の重力場による送信機の時計の時間の遅れを無視せよ．時間の遅れは容易に補正される．これらは非常に小さいので1970年代の中頃あるいは後半までにはこれらのレーダー実験に影響しないだろう．他の惑星の電波への重力効果は，ビームが地球および反射体の1つの縁を通過しなければ，予測しうる未来に認知するには小さすぎる．しかし，太陽風およびコロナにおける分散の効果は認知できるし，補正されなければならない．これらの補正はここでは議論されないだろう．なぜならそれらは一般相対論の影響を何も受けないからである．

1周旅行の時間の計算はFermatの原理の一般相対論の形を用いることによって単純化することができる．**任意の静的な場において**（$g_{0j}=0$，$g_{\alpha\beta,0}=0$），**空間内の2点，$x^j=a^j$および$x^j=b^j$間のすべてのヌル曲線を考える．おのおののこのようなヌル曲線，$x^j(t)$は，特別な座標時間間隔Δtがa^jからb^jまで到達することを要求する．極値Δtの曲線は時空のヌル測地線である．**この定理の証明は練習問題40.3に要約されている．

Fermatの原理によって，レーダービームの送信と反射体での反射との間の座標時間の経過t_{TR}は，PPN座標における直線の経路に対してビームが実際に通過するわずかに曲がった経路に対するのと同じである（2つはわずかな量$\Delta t_{\mathrm{TR}}/t_{\mathrm{TR}}\sim$(偏向の角度)$^2 \lesssim 10^{-12}$だけ異なり，識別できないほどである）．したがって，計算ではビームの重力による偏向は無視できる．

*16　太陽を原点にもつ直交PPN座標を採用する．送信機，太陽，反射体は$z=0$“平面”内にあり，そして送信機–反射体を結ぶ線はx方向に沿う（図40.3をみよ）．送信機はPPN座標で$(x,y)=(-a_T,b)$にある，そして反射体は$(x,y)=(a_R,b)$にある．ヌル光線に対しては$ds^2=0=g_{00}dt^2-g_{xx}dx^2$を思い出せ．送信機と反射体間の座標時間の経過は

$$t_{\mathrm{TR}}=\int_{-a_T}^{a_R}\left(\frac{g_{xx}}{-g_{00}}\right)^{1/2}dx=\int_{-a_T}^{a_R}\left[1+\frac{(1+\gamma)M_\odot}{\sqrt{x^2+b^2}}\right]dx$$

である．積分は

---

*14　レーダーの時間の遅れ

*15　(1) 計算に対する基礎，Fermatの原理

*16　(2) 計算の詳細

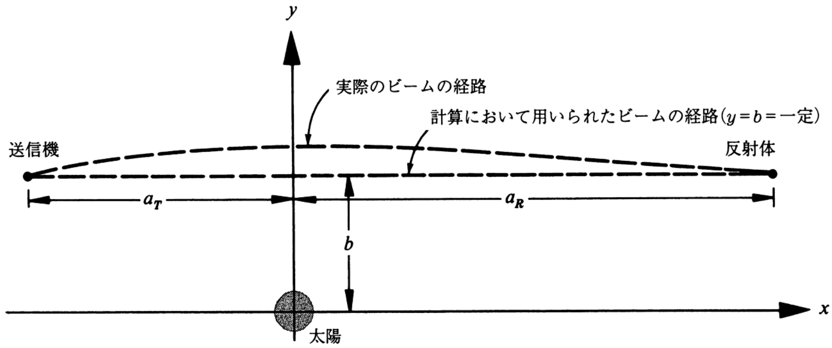


図 40.3　相対論的な時間の遅れの計算に対する PPN 座標系における図.

$$t_{\mathrm{TR}} = a_R + a_T + (1+\gamma)M_\odot \ln\left[\frac{(a_R + \sqrt{a_R^2+b^2}(a_T + \sqrt{a_T^2+b^2})}{b^2}\right] \qquad (40.13)$$

を与える.

1 周旅行における座標時間の経過はこの大きさの 2 倍をもつ. 地球に基づいた時計によって測定される固有時間の経過は

*17

$$\begin{aligned} \varDelta\tau &= |g_{00}|^{1/2}_{\text{地球}}\, 2t_{\mathrm{TR}}, \\ \varDelta\tau &= 2(a_R + a_T)\left(1 - \frac{M_\odot}{\sqrt{a_T^2+b^2}}\right) \\ &\quad + 2(1+\gamma)M_\odot \ln\left[\frac{(a_R + \sqrt{a_R^2+b^2})(a_T + \sqrt{a_T^2+b^2})}{b^2}\right] \end{aligned} \qquad (40.14)$$

である. **これは地球に基づいた時計についての時間の経過であり**, 地球の軌道運動および回転運動, 反射体の軌道運動, 太陽風およびコロナを通過する放射の分散, および地球の重力場内での時間の膨張に対する補正は除かれている.

*18 式 (40.14) の形に書かれた時間の遅れに反対する読者は誰でも理にかなっている. 量 a_R, a_T, および b は天文学者が直接測定できる値ではなく, PPN 座標系における座標位置である. それらは別の, 同様によい座標系における座標位置と $M_\odot \sim 1.5\,\mathrm{km}$ の程度の量だけ異なる. 反対の原因は数学的なことではない. 量 a_R, a_T, および b は完全によく定義されている $[b(M_\odot/b)^2 \lesssim 10^{-6}\,\mathrm{km}$ 程度のポスト–ポスト Newton の不確定さをもつ$]$. なぜなら PPN 座標系は完全によく定義されているからである. しかしそれらは実験家が時間の遅れの公式 (40.14) において, 相対論の項をテストするために要求される精度にとにかく近い精度で, 直接測定できる量でない.

実際, 幸いにも実験家は, a_R, a_T, あるいは b を高精度で測定する必要はない. 代わりに実験家は, 地球および反射体が太陽の周りの軌道内を動くときに, $\varDelta\tau$ における変化を測定することによって時間の遅れの公式を確かめる. すなわち, 実験家は $\varDelta\tau$ を地球に

---

*17　(3) 遅れに対する公式

*18　(4) 実験との比較

基づいた時間 τ の関数として測定する．ビームが太陽の近くを通過するとき（$b \ll a_R$, $b \ll a_T$．しかし $db/d\tau \gg da_R/d\tau$ および $db/d\tau \gg da_T/d\tau$，なぜなら地球および反射体の軌道はほとんど円形であるからである），式 (40.14) の ln 項における b の変化は Newton の遅れへのすべての他の相対論の補正を支配する．したがって（代表的な実験に対して $db/d\tau \sim 10\,\mathrm{km/sec}$ を用いて）

$$\frac{d\Delta\tau}{d\tau} - \begin{pmatrix}\text{一定の Newton}\\ \text{の部分}\end{pmatrix} \approx -4(1+\gamma)\frac{M_\odot}{b}\frac{db}{d\tau} \tag{40.15}$$
$$\sim 4(1+\gamma)\left(\frac{1.5\,\mathrm{km}}{10^6\,\mathrm{km}}\right)\left(\frac{10\,\mathrm{km}}{\mathrm{sec}}\right) \sim \frac{30\,\mu\mathrm{sec}}{\mathrm{day}}$$

1 周旅行時間におけるこのような微分移動—それは地球–反射体線が太陽に向かって動くにつれて昇りそして太陽から離れて動くにつれて落下する—は容易に観測可能である．

実際上は，時間の遅れの測定によるパラメータ γ の決定において，約 20%よりもよい精度を得るために，1 年という大きい数に対するデータを注意深く集め，そして解析しなければならない．ビームが太陽から離れている時間から（$b \sim a_T \sim 10^8\,\mathrm{km}$），優勢に結合している時間まで（$b \sim R_\odot \sim 10^6\,\mathrm{km}$），そして再び離れたビームの時間辺りへ向かって．このような長いデータの “弧” は，反射体の軌道を高精度で定めるために，そして $\Delta\tau$ の b とともに遅い，対数的な落下を完全に利用するために [式 (40.14)] 必要とされる．ビームが太陽から離れているときには（$b \gg R_\odot$），式 (40.15) の背後にある単純化するための仮定は成り立たない．そして相対論の時間の遅れは地球および反射体の軌道運動と絡み合う．そうすると解析は簡明にとどまるが，しかしその詳細は非常に複雑であるので解析を遂行するにはコンピュータでの数値積分に頼ることになる．軌道運動が入るがゆえに，時間の遅れのデータは，そうすると γ の他に別な計量パラメータについての情報を含む（β は主要な計量パラメータである）．

1971 年での実験結果はコラム 40.2 に記述されている．それらは光および電波の偏向実験からの値よりも，正確な PPN パラメータ γ に対する値を与える．

*19
$$\gamma = 1.02 \pm 0.08 \tag{40.16}$$

宇宙船を用いる未来の実験は，γ の精度を ± 0.001 あるいはよりよく改善するだろう．

[練習問題]

40.3 Fermat の原理

静的な重力場に対する Fermat の原理を証明せよ．[ヒント：証明は以下のように進行するだろう．アフィンパラメータ λ を用いて 4 次元時空における測地線の方程式を書き下ろせ．パラメータ λ から座標時間 t へ変換し，そして $ds^2 = 0$ を用いて

*19 (5) γ に対する実験結果

$$g_{jk}\frac{d^2x^k}{dt^2}+\Gamma_{jkl}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}-\Gamma_{j00}\frac{g_{kl}}{g_{00}}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}+\frac{d^2t/d\lambda^2}{(dt/d\lambda)^2}g_{jk}\frac{dx^k}{dt}=0$$

を得よ．測地線の方程式の時間部分と結合せよ．

$$\frac{d^2t/d\lambda^2}{(dt/d\lambda)^2}=-2\Gamma_{0k0}\frac{dx^k/dt}{g_{00}}$$

そして計量による Christoffel 記号に対する表現を用いて

$$\gamma_{jk}\frac{d^2x^k}{dt^2}+\frac{1}{2}(\gamma_{jk,l}+\gamma_{jl,k}-\gamma_{kl,j})\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}=0,\qquad \gamma_{jk}\equiv-\frac{g_{jk}}{g_{00}}$$

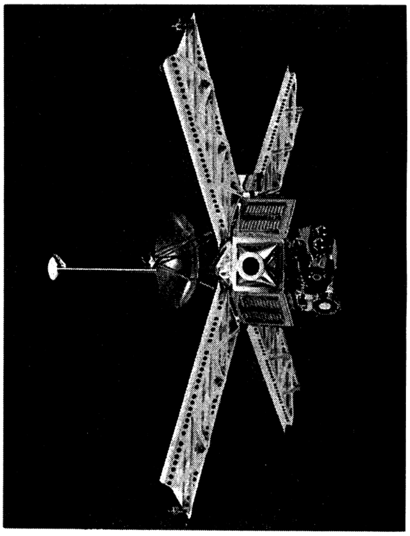
を得よ．それから，これは計量 γ_{jk} をもつ3次元多様体におけるアフィンパラメータ t をもつ測地線の方程式であることに注意せよ．この測地線に対する極値原理は

$$\delta\int_{a^j}^{b^j}(\gamma_{jk}dx^jdx^k)^{1/2}=\delta\int_{a^j}^{b^j}dt=0$$

である．それは正確に Fermat の原理である！]

コラム 40.2　太陽系におけるレーダーの時間の遅れ：実験結果

2つの型の実験は，太陽系での1周旅行によるレーダーの旅行時間における相対論の効果 [$\frac{1}{2}(1+\gamma)$ に比例する，式 (40.14)] を測定するために遂行されている．1つの型では（“**受動的な**” 実験），反射体は金星あるいは水星の表面である．別な型では（“**能動的な**” 実験），“反射体” は宇宙船上の電子装置であり，信号を受信して[“トランスポンダー” (受信波を周波数変換して再送信する中継器)] それを地球に送り返す．受動的な実験は反射する惑星の地形による雑音を受け（レーダーは谷底からよりも山頂から速く戻る），そして戻ってきた信号は弱くなる．能動的な実験は，太陽風による宇宙船への妨害，太陽放射圧における揺らぎによる妨害，およびガスジェットからの漏えいによる妨害（“ガスの放出”）を受ける．将来の実験はこれらの問題を，トランスポンダーを惑


Mariner VI 宇宙船(模型)，それはレーダーの時間の遅れによる $\frac{1}{2}(1+\gamma)$ の 1970 年の測定における反射体であった[Caltech ジェット推進実験室]．

星の表面上に，あるいは引きずりを受けない（乱気流に巻き込まれない）宇宙船上に置くことによって解決するだろう．しかし現在および将来の実験はともに，揺らいでいる太陽風およびコロナにおける分散のために揺らいでいる時間の遅れと戦わなければならない．幸いにも，これらはビームが太陽半径の 2 倍あるいは 3 倍より近くを通過するときを除いて，相対論の効果よりも小さい．

1972 年以前に遂行された実験の結果は表にリストされている．

観測日	レーダー望遠鏡	反射体	実験者と文献	波長	実験結果[a] $\frac{1}{2}(1+\gamma) = \left(\begin{matrix}\text{観測される遅れ}\end{matrix}\right) / \left(\begin{matrix}\text{Einstein の予言}\end{matrix}\right)$	形式的な標準誤差	1σ 誤差
1966 年 11 月 1967 年 8 月	Haystack (MIT)	金星および水星	Shapiro (1968)	3.8 cm	0.9		±0.2
1967–1970 年	Haystack (MIT) および Arecibo (Cornell)	金星および水星	Shapiro, Ash 等 (1971)	3.8 cm, 70 cm	1.015	±0.02	±0.05
1969 年 10 月– 1971 年 1 月	遠い宇宙空間放送網 (NASA)	Mariner VI および VII 宇宙船	Anderson 等 (1971)	14 cm	1.00	±0.014	±0.04

[a] ここで（観測される遅れ）/(Einstein の予言）は，観測データ $\Delta\tau(\tau)$ を PPN 予言 (40.14) のより精巧な形に適合することによって得られる $\frac{1}{2}(1+\gamma)$ の値である．このより精巧な形は，反射体および地球の軌道へのすべての惑星の重力の影響を含む．また地球の軌道への月の効果および旅行時間への地球の回転の効果，また，可能な限りの程度までよく，太陽コロナおよび太陽風における分散による遅れを含む．"形式的な標準誤差" および "1σ 誤差" はコラム 40.1 の表で定義されている．

40.5 近日点の移動および測地線の軌道における周期的な摂動

光の偏向および時間の遅れの実験はともに γ を測定した．別な PPN パラメータを測定するには，遅く動いている物体への重力の効果を吟味しなければならない．これは 40.2 節の趣旨であった．

*20 もっとも単純な場合から始める．惑星，太陽の回転楕円体および任意の優先された系に相対的な運動物体の，重力効果をすべて無視して，太陽の球状の重力場内での試験物体の測地線の軌道を考える．そうすると PPN 計量は

$$ds^2 = -\left[1 - 2\frac{M_\odot}{r} + 2\beta\frac{{M_\odot}^2}{r^2}\right]dt^2 + \left[1 + 2\gamma\frac{M_\odot}{r}\right]\left[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right] \tag{40.3}$$

という形式をもつ．試験物体が赤道 "平面" $\theta = \pi/2$ 内で動くように座標を方向づけよ．そしてほぼ Kepler 運動をする，ほとんど楕円形の測地線の軌道の形 $\gamma(\phi)$ を計算せよ．結

*20 優先された系の効果を無視して，球状の太陽の周りを回る測地線の軌道に対する近日点の移動

果は，Newton 理論を越えて $M_{\odot}/r$ 程度まで正確であり，

$$r = \frac{(1-e^2)a}{1+e\cos[(1-\delta\phi_0/2\pi)\phi]} \tag{40.17}$$

である．ここに a および e は積分定数である．そして $\delta\phi_0$ は

$$\begin{aligned}\delta\phi_0 &= \frac{(2-\beta+2\gamma)}{3}\frac{6\pi M_{\odot}}{a(1-e^2)} \\ &= \frac{6\pi M_{\odot}}{a(1-e^2)} \qquad (\text{一般相対論で})\end{aligned} \tag{40.18}$$

によって定義される（導出に対しては，練習問題 40.4 をみよ）．

もし $\delta\phi_0$ がゼロであったならば—Newton の極限においてそうであるように—軌道 (40.17) は長半径軸 a および離心率 e（コラム 25.4 をみよ）をもつ楕円であるだろうことに注意せよ．定数 $\delta\phi_0$ は楕円を歳差運動させるだけである．r は近日点から遠日点へそして再び近日点へ，完全な周行をするためには，$(1-\delta\phi_0/2\pi)\phi$ は 2π だけ変化しなければならない．したがって ϕ は $2\pi+\delta\phi_0$ だけ変化しなければならない．こうして，**近日点は楕円の周りを周行するごとに角度 $\delta\phi_0$ だけ前方に移動する．**

近日点の移動は何に相対的に行われるか？（1）PPN 座標系に相対的に，(2) 太陽系の周辺にある慣性系に相対的に（PPN 座標はそれらの系に結びついているから，39.12 節をみよ），(3) "空に固定されている星" によって定まる系に相対的に（太陽系の周辺にある慣性系，われわれの銀河内の他のところの慣性系，そしてわれわれの銀河群内の慣性系は互いに対してそれほど大きく回転するはずがないから），(4) 太陽系で水星から金星へ，地球へ,…と外に向かって動くにつれて減少する計算可能な割合で，自ら移動している，(別な）惑星の近日点に相対的に．

*21 近日点の移動は，試験物体の軌道運動に含まれる唯一の相対論の効果でない．別な効果が存在するが，しかしそれらはすべて，時間とともに累積的であるのではなく，周期的である．したがって空間時代以前の時期の限られた技術でそれらを探知することは不可能であった．しかし 1970 年代の技術はそれらを手が届く範囲内にもたらしつつある．さらに，多くの空間時代の実験は必然的に短い継続期間に行われる（$\lesssim 1$ 軌道)．とくに宇宙船および惑星上に設置されるトランスポンダーを含む実験はそうである．これらの実験に対して，軌道における周期的な摂動は，蓄積的な近日点の移動とほぼ同じ実験的な価値がある．周期的な効果は PPN 軌道方程式 (40.17) では明白でない，PPN 軌道方程式は歳差運動している楕円の中でもっとも単純なもののようにみえる．しかし観測者が直接測定する量は a, e，および $\delta\phi_0$ でない．代わりに，観測者は 1 周旅行のレーダーの旅行時間 $\Delta\tau(\tau)$ の，および空上の角度位置 $[\theta_0(\tau), \phi_0(\tau)]$ の時間発展を測定する．これらの量を計算することは原理上はきわめて簡明である．しかし実際上は非常に複雑な仕事である．計算は，軌道の振動数およびすべてのその倍音（harmonics）と周期的な相対論の効果を予言する．これらの効果の振幅は，より低い倍音に対しては，明白に空上で $M_{\odot} \sim 1\,\text{km} \sim 10\,\mu\text{sec} \sim 0''.01$

*21　測地線の軌道における周期的な摂動

弧の程度でなければならない（距離 $M_\odot = 1.48\,\mathrm{km}$ は太陽の球状の場の中でのすべての相対論的効果に対する特徴的な長さである!）.

*22 近日点の移動の，および周期的な効果の実験的なテストに対するもっとも有望な軌道は，太陽にもっとも近づきそしてもっとも高い離心率をもつ軌道［式 (40.18) をみよ］，すなわち水星，金星，地球，火星および小惑星のイカロス（Icarus）の軌道である．しかしこれらの軌道は測地線であることがいかにしてわかるか？　結局，惑星は“試験物体”でない．惑星は自ら時空に無視できない曲率を生み出す．測地線の運動からのわずかなずれが存在するはずであることがわかる（完全な議論については 40.9 節をみよ）．しかしそれらは小さすぎて，少なくともこれら 5 つの物体に対しては，近日点の移動と，あるいは上で議論された周期的な効果と張り合うには小さすぎる．

惑星軌道の広範囲にわたる天文学的な観測は，19 世紀半ばにまでさかのぼり，そして 1966 年以来レーダーによって助けられ，惑星の近日点の移動に対して正確な値を与えている（水星に対しては 1 世紀あたり ±0.4 秒の弧にまで正確である）．コラム 40.3 に要約され議論されているデータから，観測される相対論のずれの一般相対論の予言に対する比に対して，

$$\frac{1}{3}(2-\beta+2\gamma) = 1.00\begin{cases}+0.01\\-0.10\end{cases} \tag{40.19a}$$

という値を得る．この結果を γ に対するレーダーの遅れの値 (40.16) と結びつけると，PPN パラメータ β に対して

*23

$$\beta = 1.0\begin{cases}+0.4\\-0.2\end{cases} \tag{40.19b}$$

という値を得る（思い出せ：β は“g_{00} に対する重ね合わせの法則における非線形性の量”を測定する）.

惑星軌道における周期的な効果はいまだ実験で研究されていない（1973 年）.

上述の議論およびコラム 40.3 は，優先された系（もし存在するならば）に相対的な太陽系の運動を無視している．すなわち，それらは太陽の計量における項 (40.3′) を無視している．これらの項を考慮するとき，小さい離心率 $e \ll 1$ に対して，

*24

$$\begin{aligned}\delta\phi_0 = &-\alpha_1\frac{\pi}{2e}\left(\frac{M_\odot}{a}\right)^{1/2}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{Q} - \alpha_2\frac{\pi}{4}[(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{P})^2-(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{Q})^2]\\ &+\alpha_3\frac{\pi}{e}\left(\frac{|\Omega_\odot|}{M_\odot}\right)\left(\frac{\omega_\odot a^2}{M_\odot}\right)\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{Q}\end{aligned} \tag{40.20}$$

によって与えられる，近日点の移動への付加的な寄与を見出す［Nordtvedt and Will (1972) をみよ］．ここで $M_\odot$，$\Omega_\odot$，および $\omega_\odot$ は太陽の質量，自らの重力のエネルギー，および回転の角速度であり，$\boldsymbol{w}$ は優先された系に相対的な太陽の速度であり，a および e は軌道の長半径軸および離心率であり，$\boldsymbol{P}$ は太陽から近日点を指し示す単位ベクトルである．そ

*22　理論と惑星軌道との比較
*23　β に対する実験結果
*24　優先された系の力による近日点の移動

して $\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{P}$ に直交し軌道平面内に存在する単位ベクトルである．水星に対する観測との比較—および以下で議論される α_1 および α_2 についての限界 (40.40b) および (40.48) との結合—は，限界

*25
$$\left|\alpha_3 \frac{\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{Q}}{200\,\mathrm{km/sec}}\right| \lesssim 2 \times 10^{-5} \tag{40.21a}$$

を与える．銀河の周りの太陽の速度は $\sim 200\,\mathrm{km/sec}$ であり，別な近傍の銀河に相対的な銀河の固有な運動は $\sim 200\,\mathrm{km/sec}$ であるから，値 $\boldsymbol{w} \sim 200\,\mathrm{km/sec}$ は適度である．さらに，$\boldsymbol{w}$ および $\boldsymbol{Q}$ は直交していると信ずる理由は存在しないから，

$$|\alpha_3| = |4\beta_1 - 2\gamma - 2 - \zeta| \lesssim 2 \times 10^{-5} \tag{40.21b}$$

と結論することはかなり安全である．これは普遍的な静止系をもつ理論について厳密な限界である．たとえば，大きな確かさでそれは，$\beta = \gamma = 1$ と $\alpha_3 = -4$ をもつ，Coleman (1971) によって改訂された理論を除外する，Ni (1972) をみよ．

*26 将来を眺めて，一般相対論の決定的なテストを与えるために，宇宙船の軌道についてのデータに期待することはできない．宇宙船を追跡することができるほど高精度（1972 年には $\sim 10\,\mathrm{m}$）にもかかわらず．宇宙船は太陽風によって衝撃を受ける．宇宙船はこの風における，および太陽放射の圧力における揺らぎに反応し，そして漏れるジェットからの “ガスの放出” にも反応する．優れた “引きずりを受けない” あるいは “良心に導かれた” 宇宙船を開発できなければ，測地線についてのデータの源としての惑星に依存し続けなければならない．しかし，惑星のデータそのものは，レーダートランスポンダーを惑星の表面あるいは惑星の軌道内に置くことによって，レーダー技術の改善によって，そしてさらなる観測の絶えざる蓄積によって，将来大いに改善することができる．

コラム 40.3　近日点の移動，実験結果

Newton 理論に対する相対論の補正だけが，惑星軌道の近日点の移動に対する原因でない．Newton の重力場の，理想的な球状の逆 2 乗則の形からの任意のずれもまた，移動を生み出す．このような非球状性およびそれによって生じる移動は，(1) 他の惑星からの重力の引っ張り，および (2) 太陽の変形（“太陽の回転楕円体性”，“四重極モーメント”）によってもたらされる．加えて，主要なデータが空上の惑星の光学的な位置であるとき（時間の関数としての赤経と赤緯），地軸の歳差（“一般的な歳差”，“安定なプラットホーム” 上に存在しない観測者，練習問題 16.4 をみよ）によって引き起こされる見かけの近日点の移動が存在する．

一般的な歳差や他の惑星からの重力の引っ張りによる近日点の移動は高精度で計算することができる．しかし 1973 年には太陽の四重極モーメントを定める完全に信頼できる方法は存在しない．太陽の四重極モーメントを，Newton のポテンシャルに対

*25　α_3 に対する実験結果
*26　軌道実験の将来

する以下の表現に現れる，次元をもたないパラメータ J_2 によって定量化することは慣習的になっている．

$$U = \frac{M_\odot}{r}\left[1 - J_2 \frac{{R_\odot}^2}{r^2}\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right)\right]$$

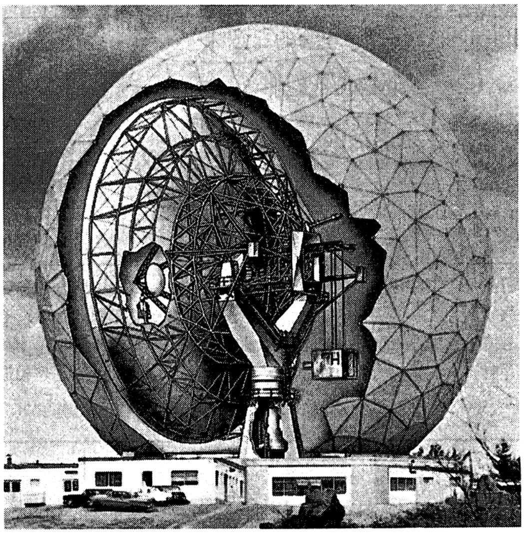
もし太陽が崩壊速度の近くで回転していたとすれば，J_2 は 1 に近いだろう．太陽の光学的な形の非常に注意深い測定［Dicke and Goldenberg (1967)］は平らになることを示し，それは J_2 が 3×10^{-5} に近いだろうことを暗示する．

相対論と太陽の四重極モーメントによって生み出される全近日点の移動は

$$\delta\phi = \frac{6\pi M_\odot}{a(1-e^2)}\lambda_p,$$
$$\lambda_p \equiv \frac{2 - \beta + 2\gamma}{3} + J_2 \frac{{R_\odot}^2/M_\odot}{2a(1-e^2)}$$

である（練習問題 40.5 をみよ）．相対論による移動と四重極による移動は，軌道の長半径軸 a および離心率 e に対して異なる依存性をもつことに注意する．依存性におけるこの相違によって，四重極モーメントパラメータ J_2，および PPN パラメータ $\frac{1}{3}(2 - \beta + 2\gamma)$ の両方の値を，2 個以上の惑星に対する $\delta\phi$ の測定を組み合わせることによって得ることが可能になる．

1972 年についての実験結果は，以下のようである．



Haystack のレーダーアンテナ．Irwin Shapiro および彼のグループはこれを用いて太陽系の内部の体系学についての広範囲のデータを集めた．それらのデータは，近日点の移動に関する情報のもっとも重要な源に急速になってきている（図は Lincoln 実験室，MIT の好意による）．

I. 光学的な研究からの水星についてのデータ［Clemence（1943, 1947）］*
（太陽の回転楕円体性をもたない一般相対論は 43.03″/世紀の移動を予言する）

量		値
(a)	観測された 1 世紀あたりの全移動	$5599''.74 \pm 0''.41$
(b)	観測者が太陽から遠く離れた慣性系に存在しないことに起因する，移動への寄与（1947 年に求められた“一般的な歳差”）	$5025''.645 \pm 0''.50$
(c)	別な惑星の Newton の重力によって引き起こされる 1 世紀あたりの移動	$531''.54 \pm 0''.68$
(d)	一般相対論と太陽の回転楕円体性に帰着される 1 世紀あたりの残りの移動	$42''.56 \pm 0''.94$
(e)	一般的な歳差に対する 1973 年の値を用いたときの残りの移動	$41''.4 \pm 0''.90$
(f)	λ_p の対応する値（上をみよ）	$\lambda_p = 0.96 \pm 0.02$

II. Shapiro（1970, 1971a, b), Shapiro *et al.*（1972）の 1970 年の結果

(a)	すべての世界の光学的なデータの取り集めを再解析し，それをレーダーのデータと結びつけることによって得られる λ_p の値	$\begin{cases} (\lambda_p)_{水星} = 1.00 \pm 0.01 \\ (\lambda_p)_{火星} = 1.07 \pm 0.10 \end{cases}$
(b)	水星および火星に対して観測された移動を比較することによって得られる J_2 の値	$J_2 \lesssim 3 \times 10^{-5}$

III. Shapiro の結果の理論的な意味

(a)	$(2 - \beta + 2\gamma)/3$ の値	$1.00 \begin{cases} +0.01 \\ -0.10 \end{cases}$
(b)	時間の遅れの実験からの γ と結びつけることによって得られる β の値 (40.16)	$1.0 \begin{cases} +0.4 \\ -0.2 \end{cases}$

* Clemence（1947）は注意する．“観測は Newton の基準系ではなされえない．観測は動いている分点に関係する，すなわち，観測は分点の歳差によって影響される．そして歳差運動の決定はもっとも困難でないとしても，観測天文学のもっとも困難な問題の一つである．すべてのこれらの危険を考慮すれば，観測された運動と理論的な運動との間の一致の近さに関して，意見の相違が存在しうるだろうということは驚くにはあたらない．”

［練習問題］

40.4　PPN 形式における近日点の移動の導出

［重力は強い（$2M/r$ が $\frac{1}{3}$ 程度の大きさ）が軌道離心率は小さいときに正確な，一般相対

論における導出については練習問題 25.16 をみよ．この練習問題は任意の“計量理論”および任意の離心率に適用されるが，それは重力は弱い（$2M/r \ll 1$）ことを仮定し，任意の普遍的な静止系に相対的な運動を無視する．] PPN 重力場 (40.3) の赤道平面内で動いている，試験粒子の任意の束縛軌道の形に対する式 (40.17) を導け．Newton の理論を越えて 1 次の補正（$M_\odot/r$ のべきについて 1 次）のみを保持せよ．[Hamilton–Jacobi の理論（コラム 25.4）を用いる**解の略図**：(1) 単位質量の試験物体に関係した，Hamilton–Jacobi の方程式は，

$$
\begin{aligned}
-1 &= g^{\alpha\beta}\tilde{S}_{,\alpha}\tilde{S}_{,\beta} \\
&= -\left[1+2\frac{M_\odot}{r}+(4-2\beta)\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t}\right)^2+\left[1-2\gamma\frac{M_\odot}{r}\right]\left[\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\phi}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

である．(2) Hamilton–Jacobi の方程式への解は

$$
\begin{aligned}
\tilde{S} = -\tilde{E}t+\tilde{L}\phi \pm \int^r \Bigg\{ &-(1-\tilde{E}^2)+\frac{2M_\odot}{r}[1-(1+\gamma)(1-\tilde{E}^2)] \\
&-\frac{\tilde{L}^2}{r^2}\left[1-\frac{2{M_\odot}^2}{\tilde{L}^2}(2-\beta+2\gamma)\right]\Bigg\}^{1/2} dr
\end{aligned}
\tag{40.22}
$$

である．ここではポスト–ポスト Newton の補正は捨てられている．ポスト–ポスト Newton の補正を捨てるときには，$\tilde{E}$ は単位静止質量あたりの保存されるエネルギーであり，そして $\tilde{L}$ は単位静止質量あたりの角運動量であることを思い出せ（コラム 25.4 をみよ）．したがって大きさの程度の関係

$$
1-\tilde{E}^2 \sim (\text{試験物体の速度})^2 \sim M_\odot/r
$$

および

$$
(M_\odot/\tilde{L})^2 \sim (M_\odot/rv)^2 \sim M_\odot/r
$$

をもつ．(3) 軌道の形は“建設的な干渉の条件”，$\partial\tilde{S}/\partial\tilde{L}=0$ によって定まる．

$$
\begin{aligned}
\phi = \pm\int \Bigg\{ &-\frac{1-\tilde{E}^2}{\tilde{L}^2}+\frac{2M_\odot}{\tilde{L}^2 r}[1-(1+\gamma)(1-\tilde{E}^2)] \\
&-\frac{1}{r^2}\left[1-\frac{2{M_\odot}^2}{\tilde{L}^2}(2-\beta+2\gamma)\right]\Bigg\}^{-1/2} d(1/r)
\end{aligned}
$$

(4) この積分は三角関数によって容易に求められる．束縛軌道に対しては（$\tilde{E}<1$），積分は

$$
\phi = \left(1+\frac{\delta\phi_0}{2\pi}\right)\cos^{-1}\left[\frac{(1-e^2)a}{er}-\frac{1}{e}\right]
$$

である．ここに

$$
\begin{aligned}
a &\equiv \frac{M_\odot}{1-\tilde{E}^2}[1-(1+\gamma)(1-\tilde{E}^2)], \\
1-e^2 &\equiv \left(\frac{\tilde{L}}{M_\odot}\right)^2(1-\tilde{E}^2)\left[1+2(1+\gamma)(1-\tilde{E}^2)-2\left(\frac{M_\odot}{\tilde{L}}\right)^2(2-\beta+2\gamma)\right], \\
\delta\phi_0 &\equiv \frac{1}{3}(2-\beta+2\gamma)\,6\pi(M_\odot/\tilde{L})^2
\end{aligned}
\tag{40.23}
$$

(5) 簡明な操作によりこの結果から，式 (40.17) および (40.18) の形が導かれる.]

40.5　回転楕円体の太陽に対する近日点の移動

(a) 回転楕円体の太陽に対する Newton のポテンシャルは次の形となる.

$$U = \frac{M_\odot}{r}\left(1 - J_2 \frac{{R_\odot}^2}{r^2} \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right) \tag{40.24}$$

ここに J_2 は "四重極モーメントパラメータ" である．$J_2 \lesssim 3 \times 10^{-5}$ であることがわかっている．もし回転楕円体である太陽が PPN 座標系の原点に静止しているならば，周りの時空の計量 (39.32) は形

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left[1 - 2\frac{M_\odot}{r} - 2J_2\left(\frac{M_\odot {R_\odot}^2}{r^3}\right)\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right) + 2\beta\left(\frac{M_\odot}{r}\right)^2\right]dt^2 \\ &+ \left[1 + 2\gamma\frac{M_\odot}{r}\right][dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)] \\ &+ \text{ポスト–ポスト Newton の程度の補正} \end{aligned} \tag{40.25}$$

と表現されうることを示せ.

(b) 試験粒子が赤道平面内の束縛軌道を動いているとする．Hamilton–Jacobi の理論を用いて，試験粒子の軌道は 1 軌道あたり

$$\delta\phi_0 = \frac{2 - \beta + 2\gamma}{3}\frac{6\pi M_\odot}{a(1 - e^2)} + J_2 \frac{3\pi {R_\odot}^2}{a^2(1 - e^2)^2} \tag{40.26}$$

によって与えられる歳差をもつ歳差運動をする楕円 (40.17) であることを示せ．この結果の意味については，コラム 40.3 をみよ.

40.6　月の軌道における 3 体効果

[本章の残りはトラック–2 である．以前のトラック–2 の材料は本章の残りに対する準備として必要とされないが，しかし以下は有用であるだろう．(1) 6 章（加速される観測者），(2) 17.6 節（先験的な幾何学はない）および (3) 38 および 39 章（基礎のテスト，別な理論，PPN 形式）．本章の残りは任意の後の章に対する準備として必要とされない.]

これまで議論された相対論の効果はすべて太陽の外部の重力場の球状部分を含む．こうして PPN パラメータ β および γ と "優先された系" のパラメータ α_1，α_2，および α_3 のみを調べることができる．PPN パラメータを測定する別な試みは，3 体相互作用（ここで議論される)，慣性系の回転している物体による引きずり（40.7 節)，局所的に測定される重力定数における異常（40.8 節)，および惑星の軌道と月の軌道の測地線からのずれ（40.9 節）に集約することができる.

*27 地球–月軌道以上に3体相互作用を研究するよい場所は存在しない．地球，月，および太陽の引っ張りがすべて寄与する．地球および月の共通の重力中心周りの運動における摂動は，レーザー動作範囲を用いて（1970年初めには地球–月間で約10 cmまで測定可能），そして月の表面上の航空無線標識を用いて高精度で測定されうる（潜在的には空上の角度位置で0″.001以上に測定可能）．

*28 任意のNewtonの3体相互作用以上に，地球および太陽は，非線形の方法で互いに作用して，この技術の範囲内にかろうじて存在する，月の軌道における相対論の摂動を生み出すはずである．これらの効果はよく知られたパラメータ γ（空間曲率を測定する）および β［非線形の重ね合わせ，g_{00} における $(U_{\text{地球}}+U_{\text{太陽}})^2$ の総量を測定する］に依存する．さらに，これらの効果は，地球内部で作用する太陽のポテンシャル $U_{\text{太陽}}$ は，地球が太陽から近づいたり離れたり動くにつれて変化する地球の重力の，引っ張りの強さに影響を与える程度を規制する β_2 に依存する．これらの効果は，地球の軌道運動量および運動エネルギーにおける非等方性（太陽によって引き起こされる）が重力を及ぼす程度を規制する，ζ，Δ_1，および Δ_2 にも依存することが予期される．

Bromberg（1958），Baierlein（1967），およびKrogh and Baierlein（1968）は，地球–月軌道における3つの主要な3体効果を一般相対論およびDicke–Brans–Jordan理論を用いて計算した．これらの効果は非蓄積的であり ~ 100 cm，~ 20 cm，および ~ 10 cmの振幅をもつ．100 cm効果［それは本来de Sitter（1916）によって発見された］は γ のみに依存することが知られている．別な効果のPPNパラメータへの正確な依存性は知られていない．

*29 これらの効果を1970年代に測定する予想ははっきりしない．それらは相対論と関係しない月の軌道における特異性によって覆い隠されている．

40.7 慣性系の引きずり

これまで議論された実験は太陽系を通過する電磁波，宇宙船，惑星，および小惑星の運動を研究する．完全に異なる型の実験は地球の重力場内で動くジャイロスコープの方向づけにおける変化を測定する．この実験はとくに重要である．なぜならそれは地球の角運動量による“慣性系の引きずり”を直接測定できるからである．
*30

回転する地球に限定する前に，ポストNewtonの極限でジャイロスコープの歳差運動に対する一般的な表現を導くことは有用である（トラック–1の読者，および6章と39章を学習していない他の読者は，導出に伴う困難をもつかもしれない．問題でない．重要なのは答えである!）．

*31 S^α をジャイロスコープのスピン（すなわち，ジャイロスコープの角運動量ベクトル）と

*27 月の軌道における3体効果
*28 (1) 理論
*29 (2) 測定に対する予想
*30 ジャイロスコープの歳差運動
*31 (1) 一般的な解析

し，u^α をその 4–速度とする．スピンはつねに 4–速度に直交する，$S^\alpha u_\alpha = 0$（コラム 5.6 をみよ）．**ジャイロスコープに作用する任意の非重力的な力はその質量中心に適用されると仮定せよ．** したがってその固有基準系にはねじりモーメントは存在しない．そうするとジャイロスコープはそのスピンをその世界線に沿って "Fermi–Walker 移動する" だろう (6.5 節をみよ)．

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{S} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{S}), \qquad \boldsymbol{a} \equiv \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u} = 4\text{–加速度} \tag{40.27}$$

計算の目的は，ポスト Newton の極限におけるこの移動方程式を書き下ろしそして解析することである．

ジャイロスコープは PPN 座標格子に相対的に，速度 $v_j \equiv dx^j/dt \equiv dx_j/dt$ で動く．$v_j \lesssim \epsilon$ を仮定せよ．ここに ϵ はポスト Newton の展開パラメータ（$\epsilon^2 \approx M_\odot/R_\odot$）である．ジャイロスコープが動くにつれて，ジャイロスコープは自ら直交系 $\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}}$ を保持する．それは純粋な Lorentz ブーストと基底ベクトルの長さの再規格化によって PPN 座標系に関係している［変換式 (39.41)］．スピンはこの共運動系おいて純粋に空間ベクトルである ($S^0 = 0$)．その長さ $(S_j S_j)^{1/2}$ は固定されたままであり（角運動量の保存），そしてその方向は Fermi–Walker 移動則によって規制される．

共運動系の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}}$ はスピンと対照的に Fermi–Walker 移動**されない**．むしろ，基底ベクトルは純粋なブーストによって（回転は存在しない！）PPN 座標格子に結びついている．それは今度は太陽系から離れた慣性系に結びついており，"遠い星" に相対的に固定されていると予期する．こうして，共運動系に相対的なスピンの歳差運動

$$dS_{\hat{j}}/d\tau \equiv \epsilon_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}} \Omega_{\hat{k}} S_{\hat{l}} \tag{40.28}$$

を計算することによって，実際遠い星によって空上に固定されている系に相対的な，歳差運動のスピンの角速度 $\Omega_{\hat{j}}$ を計算する．

$dS_{\hat{j}}/d\tau$ を計算せよ．

$$\frac{dS_{\hat{j}}}{d\tau} = \nabla_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{e}_{\hat{j}}) = (\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{S}) \cdot \boldsymbol{e}_{\hat{j}} + \boldsymbol{S} \cdot (\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{e}_{\hat{j}}) = \boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{e}_{\hat{j}} \tag{40.29}$$

ここで $\nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{S}$ は $\boldsymbol{u}$ 方向にあり［式 (40.27)］，$\boldsymbol{e}_{\hat{j}}$ に直交するという事実が用いられている．量 $\boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{e}_{\hat{j}}$ は容易に PPN 座標系で求められる．求めるときには，計量係数として［式 (39.32)］表現

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + 2U + O(\epsilon^4), \qquad g_{jk} = \delta_{jk}(1 + 2\gamma U) + O(\epsilon^4), \\ g_{0j} &= -\frac{7}{2}\Delta_1 V_j - \frac{1}{2}\Delta_2 W_j + (\text{“優先される系の項”}) + O(\epsilon^4) \end{aligned} \tag{40.30}$$

を用いる．$\boldsymbol{e}_{\hat{j}}$ および $\boldsymbol{S}$［変換式 (39.41) によって得られる］の成分として表現

$$\begin{aligned} e_{\hat{j}}{}^0 = v_j + O(\epsilon^3), \qquad e_{\hat{j}}{}^k &= (1 - \gamma U)\delta_{jk} + \frac{1}{2} v_k v_j + O(\epsilon^4), \\ S^0 &= v_j S_{\hat{j}} + O(\epsilon^3 S_j), \\ S^k &= (1 - \gamma U) S_{\hat{k}} + \frac{1}{2} v_k v_j S_{\hat{j}} + O(\epsilon^4 S_j) \end{aligned} \tag{40.31}$$

をとる．そして関係

$$dv_j/d\tau = a_j + U_{,j} + O(\epsilon^2 U_{,j}) \tag{40.32}$$

を用いる．ここに a_j（$\lesssim U_{,j}$ と仮定される）は 4–加速度の成分である．スピンの歳差運動に対して結果

$$dS_{\hat{j}}/d\tau = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\nabla_u e}_{\hat{j}} = S_{\hat{k}}[v_{[j}a_{k]} + g_{0[k,j]} - (2\gamma+1)v_{[j}U_{,k]}]$$

を見出す（練習問題 40.6 をみよ）．**3 次元のベクトル形で書き直すとこの結果は**

*32

$$d\boldsymbol{S}/d\tau = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{S} \tag{40.33a}$$

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv -\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{g} + \left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{v}\times\nabla U \tag{40.33b}$$

$$\boldsymbol{g} \equiv g_{0j}\boldsymbol{e}_{\hat{j}} \tag{40.33c}$$

この最終の答えで，$\boldsymbol{\Omega}$ に入る 3–ベクトルが座標形で求められるか，あるいは共運動直交系で求められるかは問題でない．なぜなら $\boldsymbol{e}_{\hat{j}}$ と $\partial/\partial x_j$ は，次数 ϵ^2 の補正によってのみ異なるからである．

式 (40.33) は完全な一般性をもってポスト Newton 近似のレベルで，回転して遠い星に結びついている，共運動直交系に相対的なジャイロスコープのスピン $\boldsymbol{S}$ の歳差運動を記述する．

*33 陽子周りの軌道においてスピン $\boldsymbol{S}$ をもつ電子については，第 1 項，$-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}$ のみが存在する（重力は存在しない）．この項は Thomas 歳差運動に通ずる．それは原子スペクトルの微小構造で重要な役割を演ずる［たとえば，Ruark and Urey（1930）をみよ］．Thomas 歳差運動を導く別な方法については，練習問題 6.9 および 41.4 節をみよ．

Thomas 歳差運動は地球の表面上でジャイロスコープに対して作用し始める（$\boldsymbol{a}=$ 重力の Newton の加速度）が，しかし自由に動いている人工衛星内のジャイロスコープに対しては作用しない．

*34 もし地球の回転および優先された系の効果を無視し，そして PPN 座標系を地球の中心に対して静止して置くならば，g_{0j} はゼロになりそして $\boldsymbol{\Omega}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \boldsymbol{v}\times\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\nabla U\right]\\ &= \gamma\boldsymbol{v}\times\nabla U \qquad \text{(地球の表面上のジャイロスコープに対して)}\\ &= \left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{v}\times\nabla U \qquad \text{(軌道内におけるジャイロスコープに対して)}\end{aligned} \tag{40.34}$$

によって与えられる．一般相対論の項 $(\gamma+\frac{1}{2})\boldsymbol{v}\times\nabla U$ は，地球の曲がった，静的な時空幾何学を通してジャイロスコープの運動によって引き起こされる．ジャイロスコープの運

*32 (2) 歳差運動に対する一般的な PPN 形式
*33 (3) 特殊化：Thomas 歳差運動
*34 (4) 特殊化：加速度および地球の Newton のポテンシャルによる歳差運動

動は，電磁波の実験によってテストされるのと同じパラメータ γ のみに依存することに注意せよ．大きさの程度については，地球の近くの極軌道でのジャイロスコープに対して，

$$\Omega \approx \frac{3}{2}\left(\frac{M_E}{R_E}\right)^{1/2}\left(\frac{M_E}{R_E^2}\right) \approx 8 \qquad (1\text{ 年あたり }8\text{ 秒の弧}) \tag{40.35}$$

一般相対論の歳差運動 $\frac{3}{2}\boldsymbol{v}\times\nabla U$ は，太陽の周りに軌道を描く“地球–月ジャイロスコープ”に対して W. de Sitter によって導かれた（1916）．11 年後，L.H.Thomas（1927）は原子物理学への応用に対して特殊相対論の歳差運動 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}$ を導いた．

*35　地球の回転は PPN 計量において非対角線項 g_{0j} を生み出す（練習問題 40.7）．

$$\boldsymbol{g} = g_{0j}\boldsymbol{e}_{\hat{j}} = -\left(\frac{7}{4}\Delta_1 + \frac{1}{4}\Delta_2\right)\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{40.36}$$

ここに $\boldsymbol{J}$ は地球の角運動量である．これらの非対角線項は量

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{g} = \left(\frac{7}{8}\Delta_1 + \frac{1}{8}\Delta_2\right)\frac{1}{r^3}\left[-\boldsymbol{J} + \frac{3(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^2}\right] \tag{40.37}$$

をジャイロスコープの歳差運動に寄与する．この寄与は他の寄与と異なって，ジャイロスコープの線形速度に無関係であることに注意せよ．この寄与を以下のように考えることができる．

ジャイロスコープは回転的にその近傍の慣性系に相対的に静止している．ジャイロスコープおよび局所的な慣性系は角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で遠い銀河に相対的に回転する．なぜなら地球の回転は局所的な慣性系を自らとともに“引きずる”からである．北極および南極の近くでは局所慣性系は地球の回転と同じ方向に回転する（$\boldsymbol{\Omega}$ は $\boldsymbol{J}$ に平行である）が，しかし赤道の近くでは両者は反対方向に回転することに注意せよ（$\boldsymbol{\Omega}$ は $\boldsymbol{J}$ に反平行である，$\boldsymbol{\Omega}$ を地球の磁場と比較せよ!）．これは初めパラドックスのようにみえるかもしれないが，Schiff によって考案された類似はこのことをより理にかなったようにみせる*．回転している粘性流体内に浸されている固体球を考える．球が回転するにつれて，球は自らとともに流体を引きずるだろう．流体内の種々の点に小さい棒を置き，そして流体が流れ去るときに流体が棒をいかに回転させるかを観察せよ．両極の近くでは流体は明らかに棒を星が回転するのと同じ方向に回転させるだろう．しかし，赤道の近くでは，流体は大きい半径よりも小さい半径でより速く引きずられるから，球にもっとも近い棒の端は棒の端から離れた所よりも速く流体によって引きずられる．したがって，棒は球の回転と逆方向に回転する．

大きさの程度について，地球の回転によって引き起こされる歳差運動の角速度は

$$\Omega \sim J_E/R_E^3 \sim 1\text{ 年あたり弧の }0.1\text{ 秒} \tag{40.37$'$}$$

*36　である．この歳差運動，および地球の静的な場を通しての運動によるより大きな歳差運動

---

* この類似は数学的に厳密にすることができる．Thorne（1971）の p.255 上の脚注をみよ．また Mach の原理についての 21.12 節をみよ．

*35 （5）特殊化：地球の回転による歳差運動

*36 （6）歳差運動を測定することに対する見通し

(40.35) の両方とも 1970 年代に探知できるだろう．人工衛星の実験によってそれらを探知することを目的とする装置は今（1973 年）Stanford 大学で構成されつつある．Everitt, Fairbank, and Hamilton（1970）をみよ，また O'Connell(1972)*をみよ．

優先された系（もし存在するならば）に相対的な地球の運動によって生み出されるジャイロスコープの歳差運動は大きい関心をもつには小さすぎる．

[練習問題]

40.6　歳差運動の角速度

ポスト Newton の極限でジャイロスコープの歳差運動に対する式 (40.33) を導け．導出を式 (40.29)–(40.32) に基礎づけよ．

40.7　地球についての計量における非対角線項

地球を孤立した，角運動量 $\boldsymbol{J}$ で規則正しく回転している球として理想化せよ．式 (39.34b), (39.34c) および (39.27) を用いて（3 次元のベクトル記号で）地球の外部で，地球の PPN 静止系で

$$\boldsymbol{V} \equiv V_j \boldsymbol{e}_{\hat{j}} = \boldsymbol{W} \equiv W_j \boldsymbol{e}_{\hat{j}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{r}/r^3 \tag{40.38}$$

であることを示せ．これから，式 (40.36) を推測せよ．

40.8　スピン–曲率結合

曲がった時空を通って動いているスピンしている物体を考える（たとえば，地球あるいはジャイロスコープあるいは電子)．時空の曲率によって生み出される潮汐重力はスピンしている物体の要素的な部分に作用する．これらの力は各部分の物体の中心に相対的な位置に対してばかりでなく，それらの部分の相対的な速度にも依存するはずである．さらに，物体のスピン

$$\boldsymbol{S} \equiv \int (\rho \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) d(\text{体積}) \qquad (\text{共運動系において})$$

は，物体の部分の相対的な位置および速度の測度である．したがってスピンは潮汐重力に—すなわち，時空の曲率に—結合して測地線の運動からのずれを生み出す．一般相対論に対する 39 章の PPN 式の注意深い解［Papapetrou（1951), Pirani（1956)］は，このような結合が生じて，これが存在しないときにとるであろう経路からの世界線のずれを引き起こすことを明かす．こうして,

$$m\frac{Du^\alpha}{d\tau} = -S_\mu u_\nu \frac{D^2 u_\beta}{d\tau^2} \epsilon^{\alpha\mu\nu\beta} + \frac{1}{2}(\epsilon^{\lambda\mu\rho\tau} R^{\alpha\nu}{}_{\lambda\mu}) u_\nu S_\rho u_\tau \tag{40.39}$$

大きさの程度について，太陽系における惑星の軌道への補助項の効果を求めよ．

---

* 回転している物体による慣性系の引きずりは，重力物理学に関する他のところで，たとえば，重力を及ぼしている物体に対する角運動量の定義において（19.2 節)，およびブラックホール物理学において（33 章）重要な役割を演ずる．効果は Thirring and Lense（1918）によって初めて議論され計算された．効果が大きいかもしれない理想化された状況の Brill and Cohen（1966）によるより最近の計算は，効果の構成に大きな洞察を与えるだろう．また 21.12 節における Mach の原理の議論をみよ．

[答え：それらは探知されるにはあまりに小さすぎる．しかし，効果を探すべき2つの別な物質の場所が存在する．(1) 速くスピンしている中性子星，あるいはかなりの角運動量をもつブラックホールが別な中性子星あるいはブラックホールの強力な潮汐場に入るとき，(2) 個々の電子，あるいは“負のエネルギー状態のDiracの海”にある電子全体がさらに強力な潮汐場（重力崩壊の最終局面）に入るとき．このような潮汐場，あるいは曲率は，ちょうど電場が電荷の異なる2つの符号をもつ電子を逆方向に引っ張るように［“真空偏極”，Heisenberg and Euler (1936) をみよ]，異なる2つの方向のスピンをもつ電子を逆方向に引っ張る［Pirani (1956)，DeWitt (1962)，p.338, Schwinger (1963a,b)］．原理的に，電子のスピンを引っ張る潮汐場は“背景”時空曲率による必要はない．それは“生きている”ブラックホール（33章）のような，近傍にあるスピンしている重い物体に起因するだろう［“重力のスピン–スピン結合”，O'Connell (1972)］．

40.8　重力定数は定数であるか？

本節の題目と主題は混乱を引き起こしそうである．本書を通して幾何学化された単位，そこでは $G=c=1$ を用いている．したがって，重力定数が事象から事象へ変化するかどうかを尋ねることを禁止する観点に自らを閉じこめていた．

これは間違っている！ 質問の意味するものを明確にするならば，$G=c=1$ の状況において質問を完全によく尋ねることができる．

1.5 および 1.6 節で，c はセンチメートルと秒との間のある変換因子であると“定義された”．そして G/c^2 はグラムとセンチメートルとの間のある変換因子であると**定義された**．

*37 しかし，命令によるこれらの定義は，2つの物体間の引力を測定する Cavendish 実験*が

$$力 = -Gm_1m_2/r^2 = -m_1m_2/r^2$$

を与えるだろうことを保証しない．もし一般相対論が古典的な重力を正しく記述するならば，そしてもし変換因子 G および c の値が完全に正しく選ばれているならば，任意の Cavendish 実験は，宇宙のどこでも，“$力 = -m_1m_2/r^2$”を与える**だろう**．しかしもし Dicke–Brans–Jordan 理論，あるいはほとんど任意の別な計量理論が重力の正しい記述を与えるならば，Cavendish 実験における力は m_1，m_2，および r にと同じく，実験がどこ

---

* Cavendish 実験の記述に対しては任意の標準的な教科書をみよ．2個の分離された球が細い針金によってつるされた実験の最初の型式によって，Henry Cavendish (1978) は地球の質量したがって密度を推測した．彼は報告している．“初めて用いられた針金でなされた実験によって，地球の密度は水の密度よりも 5.48 倍大きいことがわかる．そして後の針金でなされた実験によって地球の密度は同じであることがわかる．そして…極端な結果は，平均から水の密度の 0.38 倍，あるいは全体の 1/14 以上に異ならない．” 今日 G を測定するもっとも正確な方法［Rose *et al.* (1969)］は，$G_C = (6.674 \pm .004) \times 10^{-8}\ cm^3/g\ sec^2$（1 標準的なずれ）を与える．

*37　“Cavendish 重力定数”，G_C が定義される

でそしていつ遂行されるかに依存するだろう．そうすると，Cavendish 実験を重力理論のテストとして議論するためには，新しい比例因子

$$G_{\mathrm{C}} \equiv G_{\mathrm{Cavendish}} \equiv (\text{“Cavendish 重力定数”}) \tag{40.40}$$

を導入しなければならない．この因子は Newton の力の法則

$$\text{力} = -G_{\mathrm{C}} m_1 m_2 / r^2 \tag{40.41}$$

に入る．この Cavendish 定数は一般相対論では 1 であるだろう．しかしたいていの別な計量理論では時空内で事象から事象へ変化するだろう．

*38 Dicke–Brans–Jordan のような，ある理論では，Cavendish 定数は宇宙における物質の分布によって定まる．結果として，宇宙の膨張は Cavendish 定数の値を変化する．

$$\frac{1}{G_{\mathrm{C}}}\frac{dG_{\mathrm{C}}}{dt} \sim -\left(\frac{0.1\ \text{から}\ 1\ \text{まで}}{\text{宇宙の年齢}}\right) \sim \frac{-1}{10^{10}\ \text{あるいは}\ 10^{11}\ \text{年}}$$

[たとえば，Brans and Dicke (1961) をみよ]．種々の観測はこのような時間変化に制限を置く．最後の 4.6 × 10 億年間の G_{C} における大きい時間変化は，地球，太陽，および全太陽系に著しい効果を生み出しているだろう．予期される地球物理学的な効果は Dicke and Peebles (1965) によって要約されそして観測と比較されている．含まれている地球物理学の複雑さのゆえに確固たる結論を引き出すことは難しい．しかしかなり確かな制限は

$$(1/G_{\mathrm{C}})(dG_{\mathrm{C}}/dt) \lesssim 1/10^{10}\ \mathrm{yr} \qquad (\text{地球物理学の}) \tag{40.42a}$$

である．結局，惑星の軌道運動の高精度の測定はよりよい限界を与えるだろう．現在は，惑星の観測は

$$(1/G_{\mathrm{C}})(dG_{\mathrm{C}}/dt) \lesssim 4/10^{10}\ \mathrm{yr} \qquad (\text{惑星の軌道}) \tag{40.42b}$$

を示す [Shapiro, Smith, *et al.* (1971)]．これらの限界は興味をもち始めるに足るほど確かだが，しかし任意のさもなければ実行可能な重力理論の誤りを立証するに足るほどにはいまだ確実ではない．

*39 もし G_{C} が宇宙内の物質の分布によって定まるならば，G_{C} は観測者が宇宙内でいつ存在するかとともにどこに存在するかに依存するはずである．とくに，観測者が太陽により近くそれからより遠く離れて，太陽系内で点から点へ動くにつれて，観測者は G_{C} が変化するのをみるはずである．実際これは一般相対論ではそうでないけれども，重力のたいていの計量理論で真実である．PPN 形式を用いた，Cavendish 実験の解析は

$$\Delta G_{\mathrm{C}} = -2G_{\mathrm{C}}(\beta + \gamma - \beta_2 - 1)U \tag{40.43}$$

によって与えられる G_{C} における空間変化を明らかにする [Nordtvedt (1970, 1971a), Will (1971b)]．

---

*38 G_{C} の時間変化

*39 G_{C} の空間変化

地球の楕円軌道に沿うこれらの変化の振幅は，もし $\beta+\gamma-\beta_2-1\sim 1$ であるならば，$\Delta G_{\mathrm{C}}/G_{\mathrm{C}}\sim 10^{-10}$ である．これは 1970 年代に直接測定するにはあまりに小さすぎる．偉大な独創性と努力にもかかわらず，G_{C} の値を測定するもっとも正確な実験は 1972 年には 10^4 分の 1 よりもよい精度をもっていない［Beams（1971）をみよ］．実際の値を測定せずに地球上で G_{C} について年間の変化を求める実験（"ヌル型実験"）は 10^4 分の 1 よりもよい精度で確かに遂行することができる．しかし 10^{10} 分の 1 に近づく精度をもたない．他方，太陽系における G_{C} の空間変化の**非直接的な**結果はほとんど確かに測定可能である（以下の 40.9 節をみよ）．

*40　重力の Ni 理論（コラム 39.1），および Ni 理論のような別な 2–テンソルあるいはベクトル–テンソル理論，そこでは先験的な幾何学が優先された"普遍的な静止系"を選び出す，においては，Cavendish 定数 G_{C} は優先された系に相対的な速度に依存できる．大きさに比べて大きい距離だけ離れた，2 個の等しい質量をもつ Cavendish 実験に対しては，G_{C} は

$$\Delta G_{\mathrm{C}}=G_{\mathrm{C}}\left[\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1)\boldsymbol{v}^2-\frac{1}{2}\alpha_2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^2\right] \tag{40.44}$$

のように変化する［Will（1971b）］．ここに $\boldsymbol{v}$ は，優先された系に相対的な Cavendish 装置の速度であり，そして $\boldsymbol{n}$ は 2 個の質量間の単位ベクトルである．1 つの物体は重い球（たとえば，地球）であり，別な物体は球の表面上の小さい物体であるような実験に対しては，G_{C} は

$$\begin{aligned}\Delta G_{\mathrm{C}}/G_{\mathrm{C}}=&\frac{1}{2}[(\alpha_3-\alpha_1)+\alpha_2(1-I/MR^2)]\boldsymbol{v}^2\\&-\frac{1}{2}\alpha_2(1-3I/MR^2)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^2\end{aligned} \tag{40.44$'$}$$

のように変化する［Nordtvedt and Will（1972）］．ここに M および R は球の質量および半径である．そして

$$I=\int(\rho r^2)4\pi r^2dr$$

は球の質量分布の第 2 モーメントのトレースである．惑星の軌道に対するこれらの効果の結果はいまだ詳しく説明されていない．しかし地球に束縛された実験に対する結果は詳しく説明されている．

*41　1 つの質量は地球であり，そして他の質量は地球の表面上の比重計である Cavendish 実験を考える．比重計は"局所的な重力加速度"に対する示度を与える．

$$g=G_{\mathrm{C}}m_{\text{地球}}/r_{\text{地球}}{}^2 \tag{40.45}$$

地球は回転する．したがって地球の中心と比重計間の単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ も回転するので G_{C} と，したがって g は，恒星で測定された 12 時間の周期と振幅

$$(\Delta g/g)_{\text{振幅}}=\frac{1}{4}\alpha_2\boldsymbol{v}^2\cos^2\theta_m$$

---

*40　G_{C} の速度依存性

*41　G_{C} における非等方性による，地球の潮汐での異常性

で揺らぐだろう．ここに θ_m は，地球が回転するときの，$\boldsymbol{v}$（一定のベクトル）と $\boldsymbol{n}$（回転しているベクトル）間の角度の最小値である（**注意**：われわれは地球に対して値 $I/MR^2 \simeq 0.5$ を用いている）．これらの揺らぎは月と太陽によって生み出されるのと同じ型の，地球における潮汐を生み出すだろう．1972 年において，地球の赤道近くの比重計測定は，約 10^{-9} までの恒星時間で 12 時間に対してどのような異常な効果の証拠も示さないだろう［Will (1971b)］．したがって，

*42
$$|\alpha_2|^{1/2} v\cos\theta_m = |\varDelta_2 + \zeta - 1|^{1/2} v\cos\theta_m \lesssim 6\times 10^{-5} \sim 20\,\mathrm{km/sec} \qquad (40.46\mathrm{a})$$

普遍的な静止系に相対的な地球の速度について $v \sim 200\,\mathrm{km/sec}$，および $\boldsymbol{v}$ と地球の赤道平面間の角度に対する $\theta_m \lesssim 60°$ という大ざっぱな見積りを用いて，大ざっぱな限界

$$|\alpha_2| = |\varDelta_2 + \zeta - 1| \lesssim 0.03 \qquad (40.46\mathrm{b})$$

を得る［この限界はコラム 39.1 における 3 つの理論に影響しない．それらの理論の中で Ni 理論のみが先験的な幾何学および普遍的な静止系をもつ．そしてこの理論は $\varDelta G_{\mathrm{C}}/G_{\mathrm{C}}$ における等方的な効果を予言する［式 (40.44)］．しかし非等方的な効果を予言しない．しかし，普遍的な静止系をもつ別な理論—たとえば，Papapetrou（1954a,b,c）の理論—はこの限界によって除外される．Ni（1972），Nordtvedt and Will（1972）をみよ］．

*43 重力の Whitehead 理論（それは Ni 理論と幾分異なる型の先験的な幾何学をもつ 2–テンソル理論である）は，銀河は G_{C} における速度に無関係な非等方性を生み出すはずであることを予言する．これらの非等方性は，今度は，恒星時間で 12 時間の周期と

$$\varDelta g/g \sim 2\times 10^{-7} \sim 100 \times (\text{このような振幅への実験的な限界})$$

の振幅をもつ地球の潮汐を生み出すだろう［Will（1971b)］．このような潮汐が存在しないことは Whitehead 理論が正しくないことを証明する．すべての赤方偏移，光の偏向，時間の遅れ，および近日点の移動の測定の力を越えた反証の功績（すべてのこれらの“標準的な実験”に対して Whitehead および Einstein の予言は同一である!)．

*44 式 (40.44′) は，地球が太陽の周りを動くにつれての，地球上での Cavendish 定数の周期的な年間の変化を予言する．

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}\text{太陽に相対的な}\\ \text{地球の速度}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{優先された系に}\\ \text{相対的な太陽の速度}\end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{w},$$

$$(\varDelta G_{\mathrm{C}}/G_{\mathrm{C}})_{\substack{\text{地球の表面にわたっ}\\ \text{て平均化される}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1\right)(\boldsymbol{w}^2 + \boldsymbol{v}_E{}^2 + 2\underbrace{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_E}_{\text{[1 年の周期で正弦曲線的に変化する]}}) \qquad (40.47)$$

この 1 年間の変化は，すべての PPN パラメータが 1 の程度であると仮定して，太陽の重力ポテンシャルを通して入ったり出たりする地球の運動によって生み出される変化よりも

*42 (1) α_2 の実験値

*43 (2) Whitehead 理論の実験的な反証

*44 G_{C} の速度依存性による地球の回転率における異常性

1,000 倍大きい [式 (40.43)]．この変化している Cavendish 定数に応じて，地球自らの重力の引っ張りは変化するはずである．そして地球は内方向へ（より大きな引っ張り）そして外方向へ（弱められた引っ張り）“呼吸する” はずである．地球の慣性モーメントに生ずる年間の変化は，地球の回転率 ω に年間の変化を生み出すはずである（原子時計によって測定されるときの “1 日の長さ” における変化）．

$$\delta\omega/\omega \sim 0.1\left(\frac{2}{3}\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1\right)\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_E$$

[Nordtvedt and Will（1972）.] 回転率の測定された 1 年間の変化との比較（そのすべてを地球物理学者は地球の大気の季節変化に帰する）は以下の限界を与える．

*45

$$\left|\frac{2}{3}\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1\right| = \lesssim 0.2 \tag{40.48}$$

[Nordtvedt and Will（1972）をみよ.] この限界は Ni の理論を含めて，いくつかの重力の優先された系の理論を除外する（コラム 39.1 および 39.2）．

実験結果 (40.21)，(40.46)，および (40.48) は，結合されると，普遍的な静止系をもつ任意の理論に対して，以下の非常に大ざっぱな制限を置く．

$$\begin{aligned}|\alpha_1| &= |7\Delta_1 + \Delta_2 - 4\gamma - 4| \lesssim 0.2,\\ |\alpha_2| &= |\Delta_2 + \zeta - 1| \lesssim 0.03,\\ |\alpha_3| &= |4\beta_1 - 2\gamma - 2 - \zeta| \lesssim 2\times 10^{-5}\end{aligned} \tag{40.49}$$

これらの限界は Will and Nordtvedt によって案出された理論を除いて，現在まで吟味されてきた優先された系をもつすべての理論の無効を完全に立証する [Ni（1972），Nordtvedt and Will（1972）をみよ]．

*46 重力のある理論では，Cavendish 実験の結果は試験物体の化学組成と内部構造に依存する（練習問題 40.9 および 40.10）．Kruezer（1968）はこのような効果に対する現在までのもっとも正確な探求を行った．彼は G_C はフッ素および臭素に対して

$$\left|\frac{G_C(\text{臭素}) - G_C(\text{フッ素})}{G_C}\right| \lesssim 5\times 10^{-5} \tag{40.50}$$

の精度まで同じであることを見出している．

[練習問題]

40.9　理想化された太陽に対する Cavendish 定数

太陽を，PPN 座標の原点に静止している完全流体の静的な球として理想化する．そうすると太陽の外部の重力場は，式 (40.4) によって与えられる $M_\odot$ をもつ形 (40.3) となる．したがって遠く離れた半径 r に位置する，質量 m の試験物体は，重力

*45　$\frac{2}{3}\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1$ の実験値
*46　G_C の化学組成への依存性

$$\text{力} = -mM_{\odot}/r^2 \tag{40.51a}$$

によって加速される．(a) 太陽の質量 M を，1 つの質量の球殻を別な球殻の上に内部から外部へ積み重ねることによって構成するのに要求されるエネルギーの量の意味で，計算せよ．[答え：

$$M = \underbrace{\int_0^{R_\odot} \rho_0(1+\Pi+3\gamma U)4\pi r^2 dr}_{\text{静止質量 + 内部エネルギー}} \underbrace{- \frac{1}{2}\int_0^{R_\odot} \rho_0 U 4\pi r^2 dr}_{\text{重力ポテンシャルエネルギー}}$$

$$= \int_0^{R_\odot} \rho_0 \left[1+\Pi+\left(3\gamma-\frac{1}{2}\right)U\right]4\pi r^2 dr] \tag{40.51b}$$

(b) ビリアル定理 (39.21b) を用いて式 (40.4) を

$$M_\odot = \int_0^{R_\odot} \rho_0 \left[1+\beta_3\Pi+\left(2\beta_2+\frac{1}{2}\beta_4\right)U\right]4\pi r^2 dr \tag{40.51c}$$

という形式に書き直せ．(c) 上式を太陽の外部遠く離れた r に対する Cavendish 定数の定義

$$\text{力} = -G_{\mathrm{C}} mM/r^2 \tag{40.51d}$$

と結びつけて

$$G_{\mathrm{C}} = \frac{\left(\begin{array}{l}\text{遠く離れた試験粒子の世界線を曲げるときに}\\ \text{その影響によって定義される太陽の質量}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l}\text{太陽の構成における各段階にエネルギー保存則を適}\\ \text{用することによって定義される質量–エネルギー}\end{array}\right)}$$

$$= 1 + \int(\rho_0/M_0)\left[(\beta_3-1)\Pi + \tfrac{1}{2}(4\beta_2+\beta_4-6\gamma+1)U\right]4\pi r^2 dr \tag{40.52}$$

を得る．$\beta_3=1$，および $4\beta_2+\beta_4-6\gamma+1=0$ (Einstein の理論では，もちろん，この通りである) でなければ，G_{C} は太陽の内部構造に依存するだろう！ 式 (40.52) を "重力の保存定理" (コラム 39.5) に特殊化して，結果はなぜ，式 (40.43) から予期するであろうものとなるかを説明せよ．

40.10 任意の物体に対する Cavendish 定数

練習問題 40.9 の解析を任意に圧力を加えられ，任意の形と内部速度 (ポスト Newton の近似の制限 $v^2 \ll 1$，$|t_{\hat{j}\hat{k}}|/\rho_0 \ll 1$，$U \ll 1$，$\Pi \ll 1$ を受ける) をもつ源に拡張せよ．

$$2\beta_1-\beta_4=1,\quad 4\beta_2+\beta_4-6\gamma=-1,\quad \beta_3=1,\quad \zeta=0,\quad \eta=0 \tag{40.53}$$

でなければ G_{C} は源の内部構造に依存することを示せ．もちろん，これらの PPN 制限はすべて Einstein の理論によって満たされる．

40.9 惑星および太陽は測地線上を動くか？

太陽系の実験にとって決定的なことは，太陽および惑星が時空の測地線上を動くかどうかという質問である．この質問は，動いている物体自身によってなされる時空曲率への寄与によって複雑化される．

*47 質問を解明するために—そして一般相対論の枠組み内で答えを得るために—“Einstein エレベーター” 型の議論を考える．考察している天文学的な物体は外部境界をもつ，そしてこの境界上の各点は世界線を記述する．これらの世界線は世界管を定義する．この世界管の外部のある距離は，20.6 節におけるように “緩衝帯” を構成する．その内部および外部の次元を，物体の質量およびモーメントおよび周りの空間の曲率（“外部重力場の潮汐を生み出す力の強さ”）によって，計量のこの緩衝帯における平坦さからのずれ ϵ（20.6 節を参照せよ）はせいぜい極値的に達成しうる値 $\epsilon_{極値}$（r における変化についての最小値，方向における変化についての最大値，言い換えれば，ミニマックス（minimax））の 2 倍に等しい値をとるような方法で合わせる．それから，$\epsilon_{極値}$ 程度の誤差を除いて，物体は漸近的に平坦な空間内で動いているとみなすことができる．全 4–運動量の保存則は成り立つ．それは物体が一様な速度で（局所的に）直線の中で動くことを保証する．次に，ちょうど緩衝帯の外部では精度 $\epsilon_{極値}$ まであるいはそれ以上によく実際の幾何学と一致する．しかし内部では Einstein の場の方程式の源に無関係な解である “背景幾何学” を考える．そうすると，$\epsilon_{極値}$ の大きさによって支配される精度まで，天文学的な物体が沿って動く局所的な直線はこの背景幾何学の測地線であるだろう．

*48 実際の運動のこの測地線からのずれに，任意のよく定義された意味を与えうる限り（背景幾何学が実際には存在しないという事実によって複雑化される仕事），このずれを PPN 形式あるいは，ある別な近似体系［たとえば，Taub (1965) をみよ］を用いることによっ
*49 て計算することができる．このずれは通常は相当な測度で，そしてときどき，ほとんど全体として，外部場の Riemann 曲率テンソルと天文学的な物体の多重極モーメント（回転と関係する角運動量，ずれと関係する四重極および高次のモーメント，たとえば，練習問題 40.8 および 16.4 をみよ）との間の結合から生ずる．この結合は地球–月系に対して重要である．しかしそれを計算するのに相対論を用いる必要はない．Newton 理論は必要とされるよりもはるかに大きい精度まで仕事をする．あるいは地球と月の内部を十分よく理解したならば，仕事をするであろう！ 惑星と太陽に対しては，効果は無視できる（練習問題：Newton 理論を用いてそれを証明せよ！）．

こうして，太陽系に適用されるときに一般相対論で，太陽，地球–月の質量中心，および相互の惑星の軌道を，自らの曲率効果が存在しない場合に存在するであろう “背景時空幾何学” の測地線として近似できる．これは一般相対論の背景で 40.5 節における惑星に対す

*47 一般相対論は惑星および太陽に対する測地線運動を予言する意味
*48 測地線運動からのずれ
*49 (1) 曲率結合による

る近日点の移動を解析するのに，およびポスト Newton の "多体運動方程式" を練習問題 39.15 で導くのに用いられる取り組み方法である．

重力のたいていの別な計量理論では，Dicke–Brans–Jordan 理論を含めて，測地線運動からの相当なずれが存在する．"Einstein のエレベーター" 議論はこれらの理論にはない．なぜなら時空は計量のみならず，重い，重力を及ぼしている物体に間接的に結合している（38.7 および 39.2 節を参照せよ）長い領域の場を与えられているからである．

*50 この現象は，Eötvös–Dicke 型の実験における基本的な定数の空間変化の影響についての Dicke の議論によってもっともよく理解される（38.6 節をみよ）．Cavendish 重力定数 G_{C} が位置に依存する理論では（一般相対論では位置に依存しないしそして依存しえないのに対して），重要な自らの重力のエネルギー $E_{\text{重力}}$ をもつ物体は完全に一様な外部の Newton の重力場内で，異常な加速度で落下しなければならない．

$$
\begin{aligned}
(\text{重い物体の加速度}) - (\text{試験物体の加速度}) &= \frac{1}{M}\left(\frac{\partial E_{\text{重力}}}{\partial G_{\mathrm{C}}}\right)\nabla G_{\mathrm{C}} \\
&= \frac{E_{\text{重力}}}{M G_{\mathrm{C}}}\nabla G_{\mathrm{C}}
\end{aligned}
\tag{40.54}
$$

[式 (38.15) をみよ.] Dicke–Brans–Jordan 理論では，G_{C} は本質的にスカラー場の相補的なものである．そしてそれは Newton のポテンシャル，U に比例する小さい部分を含む [コラム 39.2 からのパラメータの適切な値をもつ式 (40.43)]．結果として，太陽は試験物体の加速度よりも 10^6 分の 1 だけ小さい加速度で落下する．木星は 10^9 分の 1 だけ小さい加速度で落下する．そして地球は 10^{10} 分の 1 だけ小さい加速度で落下する．相対論の言葉に翻訳すると，スカラー場は，重い物体の重力の自己エネルギーに影響することによって，測地線運動からのずれを生み出す．

29 章の完全な PPN 形式を用いて重い物体の運動を重力の任意の計量理論で計算することができる．Nordtvedt（1968b）および Will（1971a）はこれを行った．彼らは一様な外場内で静止している重い物体は

$$
\frac{d^2 x_j}{dt^2} = E_{jk}\frac{\partial U}{\partial x_k}
$$

によって与えられる（Newton 型）PPN 座標の加速度を経験することを見出している．ここに E_{jk} は物体の構造に依存する量である．

$$
\begin{aligned}
E_{jk} &= \delta_{jk}\left\{1 - (7\Delta_1 - 3\gamma - 4\beta)\frac{E_{\text{重力}}}{m}\right\} - (2\beta + 2\beta_2 - 3\gamma + \Delta_2 - 2)\frac{\Omega_{jk}}{m}, \\
\Omega_{jk} &= -\frac{1}{2}\int \frac{\rho_0\rho_0'(x_j - x_j')(x_k - x_k')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} d^3x\, d^3x', \qquad E_{\text{重力}} = \Sigma\Omega_{jj}
\end{aligned}
\tag{40.55}
$$

ここに m は物体の全質量–エネルギーであり，Ω_{jk} は Chandrasekhar のポテンシャル–エネルギーであり，$E_{\text{重力}}$ は物体の自己重力エネルギーである［**注意**：異常な加速度 (40.54) を計算する Dicke の方法は "保守的" でない理論で破れる（コラム 39.5)］．

*50 (2) 重力定数の空間依存性による（Nordtvedt 効果）

一般相対論では，E_{jk} に現れる PPN 係数の結合はゼロになる．したがって $E_{jk}=\delta_{jk}$，そして物体は通常の加速度で落下する．すなわち，物体は測地線に沿って動く．しかし重力のたいていの別な理論では $E_{jk}\neq\delta_{jk}$，物体は測地線上を動かない，そして物体の加速度は Newton のポテンシャルの勾配と異なる方向にあることさえあるだろう！

*51 測地線運動からのこの予言されるずれは **"Nordtvedt 効果"** とよばれる．このような効果の可能性はついでに Dicke によって初めて言及された（1964c）．しかし Nordtvedt（1968a,b）によって独立に発見され，詳細に探求された．一般相対論と異なる理論における Nordtvedt 効果は，太陽系において潜在的に観測可能なたくさんの現象を生み出す［目録および文献については Nordtvedt（1971b）をみよ］．テストに対するもっとも適切な効果は，月が地球よりも大きい加速度で太陽に向かって落下するはずであるという事実による，地球–月軌道の "偏り" である．この "偏り" はつねに太陽を指し示し，そして振幅

$$\delta r = 840\left[3\gamma+4\beta-7\varDelta_1-\frac{1}{3}(2\beta+2\beta_2-3\gamma+\varDelta_2-2)\right]\text{cm} \tag{40.56}$$

$$\begin{aligned}&= 67\ \text{m} && \text{Ni 理論（コラム 39.1 および 39.2）において}\\ &= \frac{8.4}{2+\omega}\ \text{m} && \text{Dicke–Brans–Jordan 理論（コラム 39.1 および 39.2）において}\\ &= 0 && \text{Einstein の理論において}\end{aligned}$$

をもつ軌道における離心率を生ずる．

コラム 40.4　実験の目録

実験の型	実験の記述	議論されている場所
I. 一般相対論の基礎のテスト	1. 自由落下の一意性のテスト（Eötvös–Dicke–Braginsky）の実験	38.3 節，図 1.6，コラム 1.1
	2. 計量の存在に対するテスト（粒子崩壊の時間の膨張，粒子力学における Lorentz 群の役割等）	38.4 節
	3. 新しい，直接結合の，長い領域の場の探求（Hughes–Drever 実験，エーテル漂流実験）	38.7 節，図 38.3
	4. 重力による赤方偏移実験	38.5 節，図 38.1，および 38.2，7.2 および 7.3，7.4 節
	5. 非重力の物理定数の，空間および時間における一定性	38.6 節

*51　地球–月軌道における Nordtvedt 効果

II.	ポスト Newton の（“太陽系”）実験	1. 光および電波の太陽による偏向	40.3 節，コラム 40.1
		2. 太陽近くを通過するレーダービーム 1 周旅行時間における相対論による遅れ	40.4 節，コラム 40.2
		3. 惑星軌道における近日点の移動および周期的な摂動	40.5 節，コラム 40.3
		4. 月の軌道における 3 体効果	40.6 節
		5. ジャイロスコープの歳差運動（“測地線の歳差運動” および地球の回転による慣性系の引きずりによる歳差運動）	40.7 節
		6. 太陽系における Cavendish 重力定数の空間変化	40.8 および 40.9 節
		7. Cavendish 重力定数の重力を及ぼしている物体の化学組成への依存性	40.8 節
		8. 恒星周期をもつ地球の潮汐	40.8 節
		9. 地球の回転率における 1 年間の変化	40.8 節
		10. 測地線運動の破れによる地球–月間隔における周期性	40.9 節
III.	宇宙論の観測	1. 太陽系における Cavendish 重力定数の時間に伴う変化	40.8 節
		2. 宇宙の大きいスケールでの特徴（膨張，等方性，均質性，宇宙マイクロ波放射の存在と性質，…）	27–30 章，同様に 29 章
		3. 宇宙の年齢の種々な測度の一致（膨張からの年齢，もっとも古い星の年齢，太陽系の年齢）	29.7 節
IV.	重力波の実験	波の存在，伝播速度，偏りの性質，…	35–37 章，特に 37 章

1970 年代中頃までには，月のレーザーの射程をもつデータはおそらくこの偏りの振幅を 1 m あるいはそれ以上によい精度まで定めることができるだろう［Bender *et al.*（1971）をみよ，また図 40.4 をみよ］.

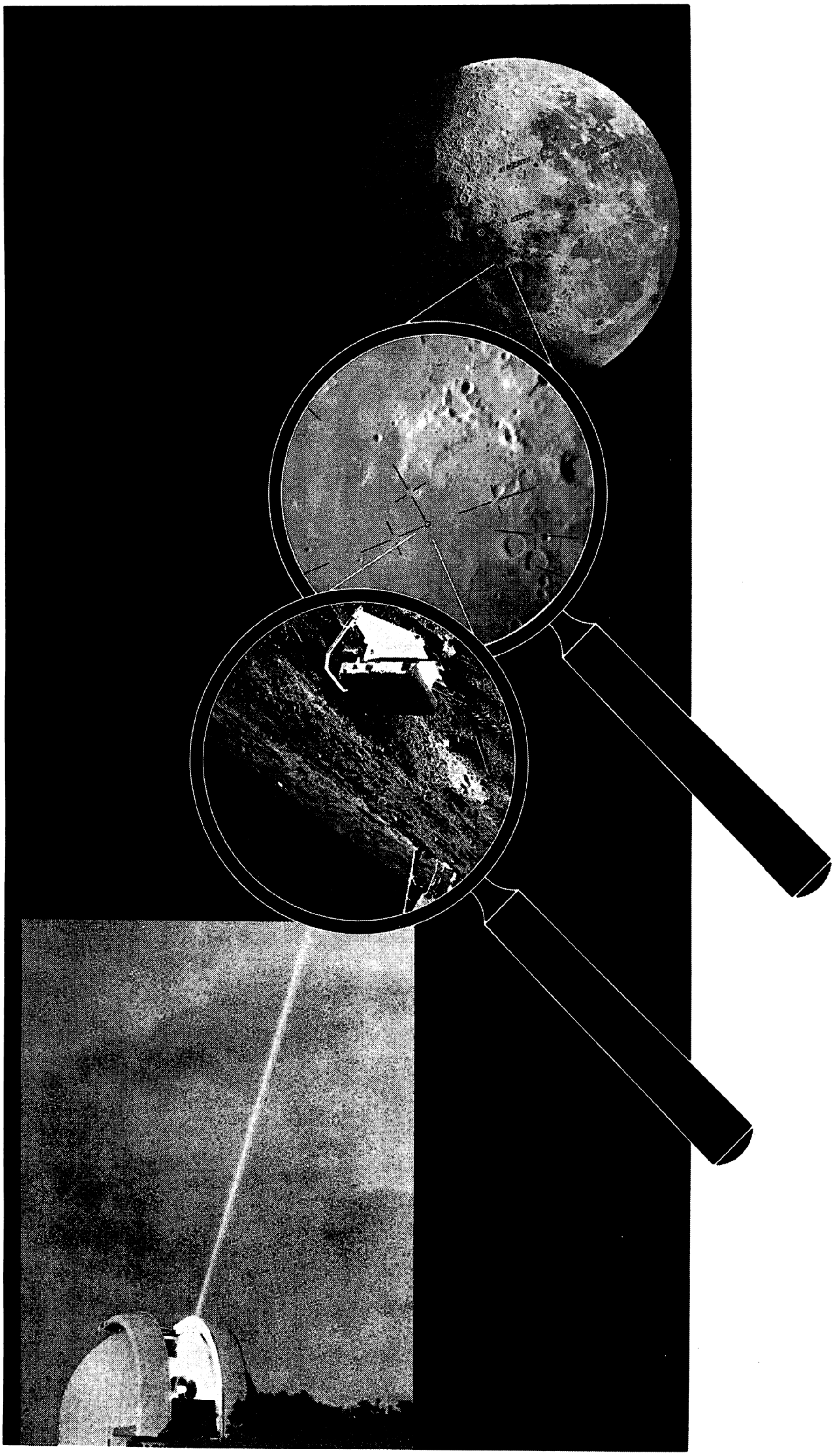


図 40.4（前のページ） 地球と月との間の距離を，地球上のレーザーからの光の放出と地球へのこの光の帰還との間の時間の遅れ（約 25 秒）を定めることによって測定すること．このプログラムにおける主要な要素は月上の反射器である．その 1 つは 1969 年 7 月 20 日アポロ（Apollo）11 号の搭乗員によって月上に設置された．1971 年 11 月には 3 個のこのような反射器が月上に存在した．2 個はアメリカでつくられアメリカ人によって設置された．そして 1 個はフランス人によってつくられソビエト人によって設置された．規則的に発射するルビー（ruby）レーザーは，El Paso の東 119 mile にある Locke 山上の Texas 大学の McDonald 観測所の 107 inch の反射望遠鏡からビームを射出する．このビームは約 3.2 km の直径をもつ光の領域を月の表面につくる．レーザー光は "レーザーの射程をもつ逆反射体"（LR^3）によって地球にまっすぐ逆にはね返される．おのおのの逆反射体は 46 × 46 cm のアルミニウム鏡板からなり，100 個のヒューズの付いた 3.8 cm の厚さのシリカ（silica）立方体が角に付いている．最初に設立された反射器は，司令船によって設置されたとき，近くの最初の挿入物内にある．反射器は月の地形に対して傾いている．写真は宇宙飛行士 Neil A. Armstrong and Edwin E. Aldrin, Jr. が，地球へと出発する少し前につくられた．2 番目の挿入物は，レーザーがアポロ 11 号の現場で発射されない間に，McDonald の 107 inch の望遠鏡の誘導接眼レンズの視界の中で D.G. Currie によってとられた写真である．基準目標をより明白な月面地形の特徴に調整することによって，望遠鏡を Tranguility 基地（小さい円）に導く．1971 年 11 月には LR^3 実験およびそれに続く飛行時間の測定は，NASA（米国航空宇宙局）および若干の研究センターからの代表者による月面反射実験チーム（Lunar Retroreflecting Ranging Team）の責任であった．このチームのメンバーの 1 人，Maryland 大学の Carrol Alley がこの合成写真に用いられた写真を提供してくれた親切に対してここに感謝する．この NASA の仕事のおかげで，地球上のレーザー源と月上の反射器との間の距離は現在 $\frac{1}{2}$ m 以上の精度で知られている．宇宙飛行士は月上に，LR^3 や地震計およびその他の装置ばかりでなく "すべての人類を代表して，平和のうちに来たれり" という銘板も残して置いてきたのである．

40.10 一般相対論の実験的なテストの要約

一般相対論はもはや "理論家の天国であり，実験家の地獄である" ということはない．それは今やすべてにとって天国である．コラム 40.4 に与えられている実験の要約を熟読することによってすぐにみることができるように．さらに，一般相対論はおのおののテストから無傷で現れた—Albert Einstein の 1915 年の天才への注目すべき 1973 年の賛辞である．

パート X

未開拓の領域

読者は—40 章（序文の他に）にわたって継続してきた多様な生活の中で，8 章は数学者であった．その間，4 度（1 度は古い友人によって）誘惑された 4 章は宇宙論者であり，そして 4 章はブラックホールの領土に夢中になった天体物理学者，そして最後に豊富な実験を引き継ぎ，真面目に生き，そして真の信者になった．—読者は，今や征服すべき新しい未開拓の領域を探求し冒険しながら進む．

41章
スピノール

[本章は完全にトラック–2 である．以前のトラック–2 の材料は本章に対する準備として必要とされない．そしてまた本章は後のすべての章に対する準備として必要とされない．]

41.1　反射，回転，および回転の組合せ

相対論におけるスピノールおよびその応用は，まず空間における，それから時空における“回転”の解析から生まれた．立方体（図 41.1）をとる．立方体を 1 つの軸の周りに 90 度だけ回転せよ．それから最初の軸に直角な別な軸をとる．その軸の周りに立方体を再び 90 度回転する．このようにして立方体は“最初の”と記された方向から“最後の”と記された方向へ運ばれる．いかにしてこの正味の変換をただ 1 つの段階で，ただ 1 つの回転でなしうるか？　言い換えれば，回転の組合せに対する法則は何であるか？

*1 もし回転がベクトルによって記述されるとするならば，ベクトルの結合法則を適用できるだろう．直角に交わる同じ大きさ（90 度）の 2 つのベクトルの和は，(1) 同じ平面内に存在し，そして (2) 大きさ $2^{1/2} \times 90$ 度 $= 127.28$ 度をもつただ 1 つのベクトルである．この予言はどちらも間違っている．立方体を最初の方向から最後の方向へただ 1 つの回転で回転するには，(1) 中心から頂点 A を通過する軸をとり，そして (2) 120 度だけ回転する．

どのような計算法がこれほど奇妙な回転の結合則を再現することができるだろうか？ 1843 年 10 月 16 日の夕方，William Rowan Hamilton が彼の妻とともに Dublin の王家の運河（Royal Canal）に沿って歩いていたとき，彼の心に長年の熟考の賜物であろう

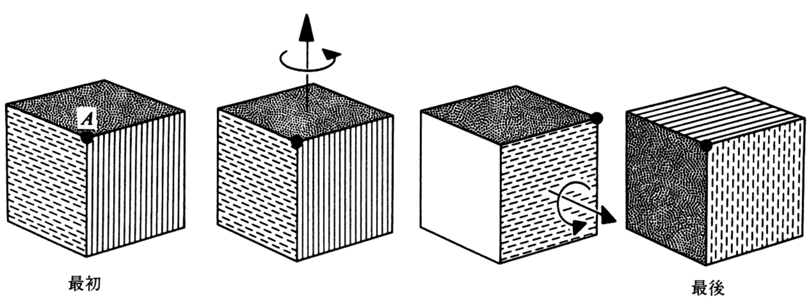


図 41.1　鉛直軸周りに 90 度回転し，その後水平軸周りに 90 度回転する．この回転は，角 A と中心を通る軸周りにただ 1 回 120 度回転することによって達成されうる．

---

*1　回転を結合する問題

答えが舞い降りた．彼はそのとき Brougham 橋上の石にナイフで公式*

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$$

を刻んだ．それは今日の記号，

$$\sigma_x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = i\boldsymbol{i}, \qquad \sigma_y = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix} = i\boldsymbol{j}, \qquad \sigma_z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = i\boldsymbol{k} \tag{41.1}$$

で

$$\begin{gathered} {\sigma_x}^2 = {\sigma_y}^2 = {\sigma_z}^2 = 1 \\ \sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z \quad (\text{および巡回置換}) \end{gathered} \tag{41.2}$$

が成立する．

*2 任意の回転に量（Hamilton の“四元数（quaternion）”，今日の“スピン行列”あるいは
*3 “スピノール変換”あるいは“回転演算子”）

$$R = \cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)(\sigma_x\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma) \tag{41.3}$$

が対応する．ここに θ は回転の角度であり，そして α，β，γ は回転軸と座標軸との間の角
*4 度である．R_1 と記述される回転に引き続いて R_2 と記述される回転を行うときは，ただ 1 つの回転

$$R_3 = R_2R_1 \tag{41.4}$$

と記述される正味の変化を与える．これは 2 つの回転の結合に対する Hamilton の公式である（1776 年に Euler によって段階が進められ，1819 年に Gauss によって導かれたが，彼によっては発表されていない）．

図 41.1 の例において，

$$\begin{gathered} R_1(z\text{ 軸周りに }\theta = 90\text{ 度の回転}) = (1 - i\sigma_z)/2^{1/2} \\ R_2(x\text{ 軸周りに }\theta = 90\text{ 度の回転}) = (1 - i\sigma_z)/2^{1/2} \end{gathered}$$

そして 2 つの積は

$$\begin{aligned} R_2R_1 &= (1 - i\sigma_x + i\sigma_y - i\sigma_z)/2 \\ &= \cos 60^\circ - i\sin 60^\circ(\sigma_x/3^{1/2} - \sigma_y/3^{1/2} + \sigma_z/3^{1/2}) \end{aligned}$$

* 1972 年 6 月 21 日同じ市で大統領 Eamon de Valera は著者の一人に，1916 年のある夜，翌朝銃殺されることになっていた牢獄内で，彼はそれほど好んだ公式，$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$ を書き下ろしたと話してくれた．

*2 回転演算子

*3 (1) 定義される

*4 (2) 回転を結合する際の道具として

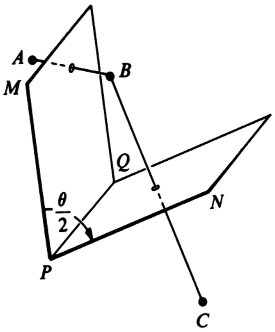


図 41.2　平面 MPQ における鏡映は A を B に運ぶ．平面 NPQ における鏡映は B を C に運ぶ．角度 $\theta/2$ によって分離されている 2 個の平面における 2 つの鏡映の結合は，線 PQ 周りに角度 θ の回転をさせたのと同じ最終結果（A から C への変換）を生み出す．

Hamilton の規則 (41.3) によれば，この結果は図 41.1 ですでにみたものと一致して，x 軸，y 軸，z 軸と等しい角度をつくる直線（立方体の中心から角 A を通過する回転軸）の周りに 120 度の正味の回転を意味する．

特別な例においてちょうどなしたものは一般的な場合においてもなしうる．式 $R_3 = R_2R_1$ の両辺で 4 個の Hamilton 単位 1，$-i\sigma_x$，$-i\sigma_y$，$-i\sigma_z$ の 4 個の係数を同一視することによって，正味の回転のパラメータ θ_3，α_3，β_3，γ_3 (4 個の未知数！) を得る．このようにして 2 個の回転の結合に対する Olinde Rodrigues (1840) の 4 個の四元数以前 (prequaternion) の公式に達する．

*5 なぜ角度の半分が顔を出すのか？　そして回転の結合則の背後に何が存在するのか？　両方の質問への答えは同じである．与えられた軸の周りに角度 θ だけの回転は，角度 $\theta/2$ でその軸に沿って合致する 2 つの平面（図 41.2）内での相次ぐ鏡映の結果として視覚化できるだろう．したがって 2 つの回転は 4 個の鏡映を意味する．しかし，鏡映 No.2 および鏡映 No.3 が同じ平面，2 つの回転軸を含む平面内で起こるように配列されうる．そうすると反射 No.3 は正確に反射 No.2 を元に戻す．結局鏡映 No.1 および鏡映 No.4 のみが残り，それらが一緒になって 1 つの回転：希望された正味の回転（図 41.3 および 41.4）を形成する．

*6 回転

$$R = \cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)(\sigma_x\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma) \tag{41.3}$$

は逆回転

$$R^{-1} = \cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)(\sigma_x\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma) \tag{41.3'}$$

によって元に戻される．こうして 2 つの回転演算子の積

$$RR^{-1} = R^{-1}R = 1 \tag{41.5}$$

---

*5　回転演算子に半分の角度が現れる幾何学的な理由

*6　回転演算子の代数的な性質

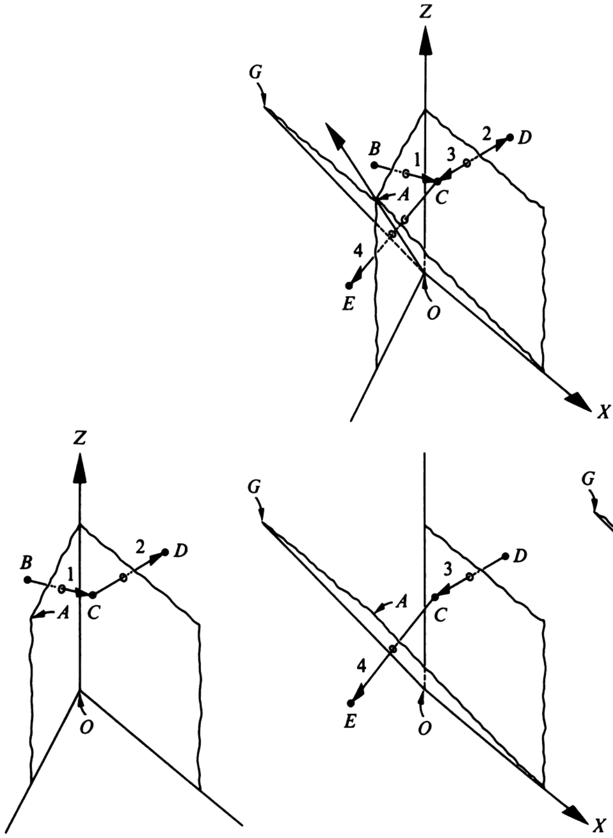


図 41.3 鏡映によってみられる 2 個の回転の合成．最初の回転（たとえば，図 41.3 の例の OZ の周りの 90 度回転）は鏡映 1 とそれに続く鏡映 2 によって表される（2 個の鏡映の平面は例のように $90°/2 = 45°$ 分離されている）．2 番目の回転は鏡映 3 および 4 の結果として現れる．しかし鏡映 2 および 3 は共通の平面 ZOX 内で生じる．したがって 1 つの鏡映は別な鏡映を元に戻す．こうして 4 個の操作の連続 1234 は 2 個の鏡映 1 および 4 に落ち着く．それらの位置への回転は，今度は軸 OA 周りのただ 1 個の回転によって遂行される．

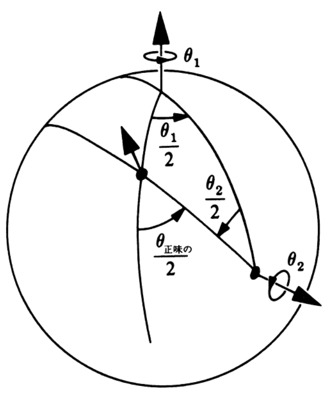


図 41.4 球面三角形によって要約されている回転の合成の法則，そこでは 3 個の重要な角度のおのおのは回転の角度の半分を表す．

は演算子，それが作用するすべてのものを不変にとどめる，単位演算子である．2 つの回転の結合 $R = R_2 R_1$ の逆 R^{-1} は

$$R^{-1} = R_1^{-1} R_2^{-1} \tag{41.5'}$$

（因子の順序が逆!），式 (41.5) への挿入によって確かめられる．

行列 M の共役置換 M^* は，行列のすべての要素の複素共役をとり，それから行と列を交換することによって得られる．行列表現 (41.1) を直接みることによって $\sigma_x{}^* = \sigma_x$，$\sigma_y{}^* = \sigma_y$，$\sigma_z{}^* = \sigma_z$ であることがわかる．このような行列は Hermite 共役であると言われる．2 つの行列の積 $M = PQ$ の共役置換はそれぞれの共役置換された行列を逆順に並べた積 $M^* = Q^* P^*$ である．上に書き下ろされた回転行列に対しては，$R^* = R^{-1}$ であることに注意せよ．このような行列はユニタリー（unitary）であると言われる．ユニタリー行列の行列式は絶対値 1 をもつことが以下の議論からわかるだろう．

$$\begin{aligned} 1 &= \det(\text{単位行列}) = \det(RR^{-1}) \\ &= \det(RR^*) = \det R \det R^* \\ &= |\det R|^2 \end{aligned} \tag{41.6}$$

実際回転スピン行列の行列式は以下の練習問題で示されているように必然的に 1 である（“ユニモジュラー（unimodular）行列”）．

[練習問題]

41.1　回転行列の基本的な特徴

式 (41.3) を

$$R(\theta) = \cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})$$

という形で書き表し，そして以下の性質を確立せよ．

(a) $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^2 = 1 \equiv$ 単位行列

(b) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) = 0$（tr は “トレース（trace）” を意味する．すなわち，対角要素の和）

(c) $\underbrace{[R, (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})]}_{\text{[交換子]}} \equiv R(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})R = 0$

(d) $$\frac{dR}{d\theta} = -\frac{i}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})R \tag{41.7}$$

[もし θ が $d\theta/dt = \omega =$ 一定である角速度 ω で増大すると考えるならば，この最後の式は

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{i}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\omega})R \tag{41.7'}$$

となる．ここに $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{n}$ であることに注意せよ．]

41.2 回転行列は単位行列式をもつ

練習問題 5.5 より，任意の行列 M に対して

$$d[\ln(\det M)] = \mathrm{tr}(M^{-1}dM)$$

であることを思い出し，これを用いて式 (41.7) における $\det R$ は一定であり，したがって $(\det R)_{\theta=0} = 1$ となることを示せ．

41.2 無限小回転

与えられた回転は，かわりに 2 分の 1 の大きさの回転を 2 度，4 分の 1 の大きさの回転
*7 を 4 度，8 分の 1 の大きさの回転を 8 度，等々を遂行することによって得ることができる．こうして極限においてスピン行列

$$R = 1 - (i/2)(\sigma_x\, d\theta_{yz} + \sigma_y\, d\theta_{zx} + \sigma_z\, d\theta_{xy})$$

あるいは

$$R = 1 - (i\, d\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) \tag{41.8}$$

によって記述される無限小回転の概念に到達する．ここに量

$$\begin{aligned} d\theta_{yz} &= -d\theta_{zy} = n^x d\theta = \cos\alpha\, d\theta, \\ d\theta_{zx} &= -d\theta_{xz} = n^y d\theta = \cos\beta\, d\theta, \\ d\theta_{xy} &= -d\theta_{yx} = n^z d\theta = \cos\gamma\, d\theta \end{aligned} \tag{41.9}$$

は, 3 個の指摘されている平面内での無限小回転の成分である．(x, y)–平面内での角度 $d\theta_{xy}$ だけの無限小回転は，ベクトル $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ を変化された成分 x' および y'，しかし変化されない成分 $z' = z$ をもつ新しいベクトルに変換する．より一般的に，この同じ “能動的な” 意味*で考慮された無限小回転 (41.8) は変換

$$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}'$$

ここに

$$\begin{aligned} x' &= x - (d\theta_{xy})y - (d\theta_{xz})z, \\ y' &= -(d\theta_{yx})x + y - (d\theta_{yz})z, \\ z' &= -(d\theta_{zx})x - (d\theta_{zy})y + z \end{aligned} \tag{41.10}$$

---

* **“能動的な”** 変換は 1 つのベクトルを別なベクトルに変化する，他方根底の基準系を不変にとどめる（もし 1 つの基準系が存在するならば）．対照的に，**“受動的な”** 変換はすべてのベクトルを不変にとどめる．しかし基準系を変える．本書の以前の章におけるすべての変換は受動的であった．

*7 無限小回転

を生み出す．

*8 スピノール計算法はベクトルへの前述の回転の効果を計算する別な（そして簡単な！）手段を与える．ベクトル $\boldsymbol{x}$ にスピン行列

$$X = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \tag{41.11}$$

を関係づけ，そしてベクトル $\boldsymbol{x}'$ に対応するスピン行列あるいは四元数 X' を関係づける．そうすると回転の効果は公式

*9
$$X \to X' = RXR^* \tag{41.12}$$

に要約される．この公式を一般的な無限小回転 (41.10) に対してテストする．それは

$$(\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{\sigma}) = [1 - (i\,d\theta/2)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n})](\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})[1 + (i\,d\theta/2)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n})]$$

あるいは，量 $d\theta$ について 1 次まで，

$$(\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + (i\,d\theta/2)[(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})] \tag{41.13}$$

となる．2 つの異なるベクトル $\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{b}$ からつくられるスピン行列 $A = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ および $B = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ の積は

$$AB = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = a^x b^x {\sigma_x}^2 + a^x b^y \sigma_x \sigma_y + \cdots$$

あるいは，式 (41.2) によれば，

$$AB = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + i(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{41.14}$$

である．この公式を用いて式 (41.13) の右辺を求める．角括弧内で，$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n})$ についての項は逆符号をもち相殺する．対照的に，$(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x})$ についての項は同じ符号をもつ．それらは結合して $(d\theta/2)$ の因子 2 を相殺する．示されるべきであったように，式 (41.10) と一致して

$$(\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + d\theta(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

あるいは

$$\boldsymbol{x}' = [1 + (d\theta)\boldsymbol{n}\times]\boldsymbol{x} \tag{41.15}$$

となる．

*10 与えられた軸周りの有限な回転は，その軸周りの無限小回転の合成と考えることができる．この合成をもっとも単純な形でみるために，一般的な無限小回転と関係しているスピン行列 (41.8) を

$$R(d\theta) = e^{-(i\,d\theta/2)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n})} \tag{41.16}$$

---

*8　スピン行列としての 3–ベクトルの表示

*9　スピン行列の言葉で記述される 3–ベクトルの回転

*10　無限小回転からの有限回転の構成

(べき級数展開によって定義される指数関数) と書き直す．$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})$ は (a) 単位行列と交換し，(b) 自らと交換し，そしてさらに (c) 大きさが 1 であることに注意する．したがって指数関数の計算はスピン行列に対して，ここでは，日常の代数と何の相違もなく進む．不変軸周りの無限小回転に対するスピン行列の合成は指数を加えることによって進み，

$$R(\theta) = e^{-i(\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})} \tag{41.17}$$

を与え，それはまたただちに式 (41.7) から得られる．この表現はべき級数展開することによって別な形に述べられうる．こうして，

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \sum_{p=0}^{\infty}(1/p!)(-i\theta\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}/2)^p \\ &= \sum_{\text{偶数の } p}(1/p!)(-i\theta/2)^p + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\sum_{\text{奇数の } p}(1/p!)(-i\theta/2)^p \\ &= \cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) \end{aligned} \tag{41.18}$$

元々スピノール変換に対して与えられている表現 (41.3) と一致して，次から次へと引き続く無限小回転のあるベクトルへの効果は

$$X' = R(d\theta)\cdots R(d\theta)XR^*(d\theta)\cdots R^*(d\theta)$$

によって与えられる．結果として，有限の回転 $R = R(\theta)$ に対しても公式

$$X' = RXR^* \tag{41.19}$$

を用いることは正しい．

[練習問題]

41.3 回転行列のさらなる性質

$X = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ に対して，交換関係

$$[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}), X] = 2i(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

をもつことを示せ．これを用いて形式 $X = RX_0R^*$ [ここに X_0 は一定であり，他方 $R(\theta)$ は式 (41.17) によって与えられる] における式 (41.19) から，公式

$$\frac{d}{d\theta}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

を得よ．なぜこれが角速度に対する標準的な定義

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}$$

に同等であるか？ 議論を逆にして式 (41.7′) が時間に依存する角速度 $\boldsymbol{\omega}(t)$ から生ずる回転 $R(t)$ を正しく定義することを示せ．たとえこの式の単純な解 $R = \exp[-\frac{1}{2}it(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\omega})]$ が，$\boldsymbol{\omega}$ が一定でないときには，もはや書かれえないとしても．

41.3 スピノール代数による Lorentz 変換

*11 空間内での2つの鏡映によって回転を生成するか？ そうすると時空内での2つの鏡映によってなぜ Lorentz 変換を生成しないのか？ もしこの目的のために鏡映の2つの平面間の実数の半分の角度から複素数の半分の角度へ変えなければならないならば，その展開には何の驚きもないだろう．そしてまた Lorentz 変換の効果を形

$$X \to X' = LXL^* \tag{41.20}$$

の行列のかけ算によって依然として表示できることも驚きでないだろう．ここに“Lorentz スピン変換行列” L は回転行列 R の一般化である．また“座標を生成するスピン行列” X は今や式 (41.11) から

$$X = t + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \tag{41.21}$$

あるいは

$$X = \begin{Vmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{Vmatrix} \tag{41.22}$$

へ一般化される．この行列は Hermite 共役であることが要求される．

$$X = X^* \tag{41.23}$$

そのときそしてそのときに限り，座標 (t, x, y, z) は実数である．変換されたスピン行列の共役変換はまた Hermite 共役でなければならない．そして

$$\begin{aligned}(X')^* &= (LXL^*)^* \\ &= (L^*)^*(X)^*(L)^* = LXL^* = X'\end{aligned} \tag{41.24}$$

である．したがって新しい座標 (t', x', y', z') は希望されるように，実数であることが保証される．この実数要求はスピン行列変換 (41.20) の形，L は X の左側に現れそして L^* は逆側に現れる，に対する根本的理由である．

Lorentz 変換は間隔を不変にとどめる条件によって定義される．

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{41.25}$$

*11　4–ベクトルおよびスピン行列の言葉での Lorentz 変換

上に書かれているように行列 X の行列式は値

$$\det X = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{41.26}$$

をもつことに注意せよ．したがって間隔の保存の要求は形

$$\det X' = \det X \tag{41.27}$$

あるいは

$$(\det L)(\det X)(\det L^*) = \det X \tag{41.28}$$

に述べられるだろう．この要求は

$$\det L = 1 \tag{41.29}$$

を要求することによって満たされる［ここで L のすべての要素を共通の位相因子 $e^{i\delta}$ によって掛ける．したがって $\det L$ を $e^{2i\delta}$ によって掛けることは有用な一般化でない．なぜならこの位相因子の正味の効果は公式 $X' = LXL^*$ においてゼロであるからである］．

*12 有限であろうとあるいは無限であろうと，回転と関係しているスピン行列はすでに条件 $\det L = 1$ を満たしている［練習問題 (41.2) で証明されている］．この条件は，代数的であるが，実数の角度 $d\theta_{yz}$，$d\theta_{zx}$，$d\theta_{xy}$ が，複素数の角度，$d\theta_{yz} + i\,d\alpha_x$，$d\theta_{zx} + i\,d\alpha_y$，$d\theta_{xy} + i\,d\alpha_z$ によって置き換えられるときも，成り立ち続けるだろう．スピン変換行列はこのようにして一般的な無限小 Lorentz 変換を記述するのに必要とされる 6 個のパラメータの全部を取得する．こうして一般的な無限小 Lorentz 変換に対するスピン行列は形

$$\begin{aligned} L &= 1 - (i/2)(\sigma_x\,d\theta_{yz} + \sigma_y\,d\theta_{zx} + \sigma_z\,d\theta_{xy}) \\ &\quad + (1/2)(\sigma_x\,d\alpha_x + \sigma_y\,d\alpha_y + \sigma_z\,d\alpha_z) \\ &= 1 - (i\,d\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{\sigma}\cdot d\boldsymbol{\alpha}/2) \end{aligned} \tag{41.30}$$

に述べられうる．この変換の座標への効果は公式

$$X \to X' = LXL^*$$

あるいは

$$\begin{aligned} t' + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}') &= [1 - (i\,d\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{\sigma}\cdot d\boldsymbol{\alpha}/2)] \\ &\quad \times [t + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})][1 + (i\,d\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{\sigma}\cdot d\boldsymbol{\alpha}/2)] \end{aligned} \tag{41.31}$$

から読み取られるべきである．$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})$ に対する式 (41.14) を用いて右辺を形

$$t + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{\sigma}\cdot d\boldsymbol{\alpha})t + d\theta(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\sigma} + (\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{\alpha})$$

に帰着せよ．さて式の両辺で 1，$\boldsymbol{\sigma}_x$，$\boldsymbol{\sigma}_y$，および $\boldsymbol{\sigma}_z$ の係数をそれぞれ比較して，

*12　無限小 Lorentz 変換

$$t' = t + (\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{\alpha})$$
$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + t\,d\boldsymbol{\alpha} + d\theta(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x}) \tag{41.32}$$

の変換は，無限小 Lorentz 変換あるいは速度 $d\boldsymbol{\alpha}$ の“ブースト”に対する慣習に合致した能動的な形での表現であり，それは示されるべき表現であることを見出せ．

*13 このような無限小 Lorentz 変換の合成は有限の Lorentz 変換を与える．しかし，結果は，すべての無限小変換が交換するときのみ容易に計算されうる．こうして $d\theta$ および $d\boldsymbol{\alpha}$ は一定の比で変化すると仮定する．したがって

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \boldsymbol{n}\frac{d\theta}{d\tau} \qquad \text{および} \qquad \boldsymbol{a} \equiv \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{d\tau}$$

は τ をパラメータにもつ定数であると仮定せよ．そうすると τ についての積分（無限小変換の合成）は有限の変換 $L = \exp[-\frac{1}{2}i\tau\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\omega} + i\boldsymbol{a})]$ を与える．$\tau = 1$，したがって $\theta\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\omega}\tau$，$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{a}\tau$ に対しては，これは

$$L = \exp[(\boldsymbol{\alpha} - i\theta\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{\sigma}/2] \tag{41.33}$$

となる．純粋なブースト（回転が存在しない，$\theta = 0$）の特別な場合には，指数関数は式 (41.18) に指摘されている方法に沿って求められる．結果は

$$L = \cosh(\alpha/2) + (\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma})\sinh(\alpha/2) \tag{41.34}$$

である．ここに $\boldsymbol{n}_\alpha = \boldsymbol{\alpha}/\alpha$ はブーストの方向への単位ベクトルである．対応する Lorentz 変換そのものは公式

$$X' = LXL^*$$

あるいは

$$\begin{aligned} t' + (\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{\sigma}) = {} & [\cosh(\alpha/2) + (\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma})\sinh(\alpha/2)][t + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})] \\ & \times [\cosh(\alpha/2) + (\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma})\sinh(\alpha/2)] \end{aligned} \tag{41.35}$$

から求められる．関係

$$\cosh^2(\alpha/2) + \sinh^2(\alpha/2) = \cosh\alpha,$$
$$2\sinh(\alpha/2)\cosh(\alpha/2) = \sinh\alpha$$

および

$$(\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma}) = 2(\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma}) - (\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{n}_\alpha)(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

を用いて単純化し，そして式の両辺で 1 および $\boldsymbol{\sigma}$ の係数を比較して

$$\begin{aligned} t' &= (\cosh\alpha)t + (\sinh\alpha)(\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}' &= [(\sinh\alpha)\boldsymbol{n}_\alpha t + (\cosh\alpha)(\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{n}_\alpha] \ (\text{“変換のブースト方向の成分”}) \\ &\quad + [\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n}_\alpha)\boldsymbol{n}_\alpha] \ (\boldsymbol{x}\ \text{の不変な垂直成分}) \end{aligned} \tag{41.36}$$

---

*13 無限小変換から有限の Lorentz 変換の構成

を見出す．このようにして量 α が関係

$$
\begin{aligned}
(1-\beta^2)^{-1/2} &= \cosh\alpha, \\
\beta(1-\beta^2)^{-1/2} &= \sinh\alpha, \\
\beta &= \tanh\alpha
\end{aligned}
\tag{41.37}
$$

によって速度そのものと結びついている，通常の "速度パラメータ" であることを確かめる．同じ方向での相次ぐブーストに対しての速度パラメータの加法は，スピン変換行列の表示 (41.33) において，もっとも明白に示される．

$$
\begin{aligned}
L(\alpha_2)L(\alpha_1) &= \exp[\alpha_2(\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{\sigma})/2]\exp[\alpha_1(\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{\sigma})/2] = \exp[(\alpha_2+\alpha_1)(\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{\sigma}/2)] \\
&= L(\alpha_2+\alpha_1)
\end{aligned}
\tag{41.38}
$$

この特別な場合から向きを変えて，そのおのおのは回転とブーストの混合である，2 つの任意の Lorentz 変換の結果をいかにして得るかを尋ねる．この質問に答えるには公式 (41.33) を式

$$L(\text{結果}) = L_2L_1 \tag{41.39}$$

とともに用いるのがもっとも単純である．

41.4 スピノール代数による Thomas 歳差運動

すべてのねじりモーメントを受けないが，加速度を受けてスピンしている物体は，この方向を慣性基準系で眺めるとき，その方向を変えることがわかる．これは Thomas 歳差運動である［練習問題 6.9 および式 (40.33b) における最初の項をみよ］．この歳差運動は原子の電子のスピンと軌道角運動量の結合の有効エネルギーにおける因子 2 を説明する．原子核ではこの歳差運動は核子のスピンと軌道の結合にわずかしか寄与しない．Thomas 歳差運動の計算は，いま考えているスピン行列法の例示を与える．

問題の歳差運動は角運動量あるいは運動している質量のいずれにもまったく関係なしに議
*14 論されうる．次の 2 つの特徴をもつ慣性基準系 $S(t)$ の連続を考えれば十分である．(1) どのような点にも運動は時間 t に質量をもち，その点には系 $S(t)$ の原点が位置している．(2) 次の相次ぐ瞬間における慣性系 $S(t+dt)$ は，回転がその慣性系の観測者によって観測されるとき，慣性系 $S(t)$ について回転を受けていない．しかし，回転が実験室の基準系で理解され定義されるとき，それは回転を受けている（"Thomas 歳差運動"）．"回転なし" が "回転" として現れるのはいかにして可能であるか？ 答えは次のことである．1 つの純粋なブーストが，別な方向の別な純粋なブーストによって引き継がれるときは，それは正味の結果として第 3 の純粋なブーストをもたない．代わりに，正味の結果はブーストに加えて回転である．このアイデアは特質として新しくない．図 41.1 は，z 軸周りの回転

*14 Thomas 歳差運動の起源：2 つのブーストの合成は純粋なブーストでない

に続いて x 軸周りの回転を行ったとき，x 成分および z 成分のみならず y 成分をももつ軸周りの回転が結果として得られることを例示している．回転について真実なるものはブーストについても真実なるものである．それらはベクトルの加法に対する法則を拒む．

*15 系 S_0 を実験室系と一致させる．そしてこの実験室系の原点を，動いている系が時間 t に存在する場所とする．$S(t)$ は時間 t にこの点とともに動いている Lorentz 系とする．1 つの純粋なブーストで実験室に相対的な速度を $\boldsymbol{\beta}$ から $\boldsymbol{\beta}+d\boldsymbol{\beta}$ へ上げる．生ずる最終的な形状は S_0 から純粋なブーストによって達せられえない．代わりに，まず実験室系に相対的な S_0 の向きを変えて（“Thomas 歳差運動と関係する回転 R”）それから S_0 を単純なブーストによって最終的な形状を得る．この回転の 1 つの選択のみが一致を生み出すべく正しいだろう．こうして，純粋なブーストに対するスピン行列と純粋な回転を文字 B および R によって区別すると，関係

$$B(\boldsymbol{\beta}+d\boldsymbol{\beta})R(\boldsymbol{\omega}\,dt) = \text{“}B(d\boldsymbol{\beta})\text{”}B(\boldsymbol{\beta}) \tag{41.40}$$

をもつ．ここで Thomas 歳差運動の角速度 $\boldsymbol{\omega}$ が見出される．“$B(d\boldsymbol{\beta})$” における引用符は二重の警告を伝える．(1) $S(t)$ を $S(t+dt)$ へブーストする変換の速度は $(\boldsymbol{\beta}+d\boldsymbol{\beta})-\boldsymbol{\beta}=d\boldsymbol{\beta}$ でない（ベクトルの加法—あるいは減法は速度に適用できない）．そして (2) “$B(d\boldsymbol{\beta})$” は実験室系で純粋なブーストとして現れない．それは共運動系においてのみ純粋なブーストとして現れる．

まず 2 番目の困難に注意する．それはただ，変換の結合に対する公式 $R_3=R_2R_1$ が 41.1 節に展開されているように，すべての操作 $R_1, R_2, \cdots$ が実験室系で定義され遂行されることを前提としているがゆえの困難である．対照的に量 “$B(d\boldsymbol{\beta})$” は，共運動系で定義され遂行されるとき純粋なブーストを意味すると理解される．このような操作は以下のように形式化することができる．(1) 物体がすでにもっている任意の速度を元に戻す．言い換えれば演算子 $B^{-1}(\boldsymbol{\beta})$ を適用する．そうすると物体は実験室系で静止している．それから必要な小さい純粋なブースト，$B(\boldsymbol{a}_{\text{共運動}}d\tau)$ を行う．ここに $\boldsymbol{a}_{\text{共運動}}$ は物体によって感知されるだろうときの加速度であり，そして $d\tau$ は物体によって感知されるだろうときの固有時間の経過である．この短い加速度の始まりには，物体は実験室に相対的に静止している．物体への純粋なブーストであるものは，実験室に対しても純粋なブーストである．それはまたスピン行列形式での純粋なブーストでもある．それから実験室から動いている系へ逆変換する．こうして関係

$$\text{“}B(d\boldsymbol{\beta})\text{”} = B(\beta)B(\boldsymbol{a}_{\text{共運動}}d\tau)B^{-1}(\boldsymbol{\beta}) \tag{41.41}$$

をもつ．Thomas 歳差運動を決定する式は今や

$$B(\boldsymbol{\beta}+d\boldsymbol{\beta})R(\boldsymbol{\omega}\,dt) = B(\boldsymbol{\beta})B(\boldsymbol{a}_{\text{共運動}}d\tau) \tag{41.42}$$

あるいはすべての未知数を左辺に置いて，

*15　スピン行列を用いた Thomas 歳差運動の導出

$$R(\boldsymbol{\omega}\,dt)B^{-1}(\boldsymbol{a}_{\text{共運動}}d\tau) = B^{-1}(\boldsymbol{\beta} + d\boldsymbol{\beta})B(\boldsymbol{\beta}) \tag{41.43}$$

となる．第1の仕事，速度変化（$d\boldsymbol{\beta}$）の不正確な値を正しい値（$\boldsymbol{a}_{\text{共運動}}d\tau$）によって置き換えることは，今や Thomas 歳差運動そのものの評価に沿う問題の部分となされる．

原理は確立している．計算は式 (41.43) におけるすべての 4 個の因子に対して適切な表現を挿入し，そして小さい量の 1 次まで式の両辺を評価することによって，以下のように進む．

$$\begin{aligned}1 - (i\,dt\boldsymbol{\omega} + d\tau\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{\sigma}/2 = {} & [\cosh(\alpha'/2) - (\boldsymbol{n}_{\alpha'}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sinh(\alpha'/2)] \\ & \times [\cosh(\alpha/2) + (\boldsymbol{n}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sinh(\alpha/2)]\end{aligned} \tag{41.44}$$

ここに α および $\boldsymbol{n}_\alpha$ は，速度パラメータおよび速度 $\boldsymbol{\beta}$ とともに進む単位ベクトルである．$\alpha' = \alpha + d\alpha$，および $\boldsymbol{n}_{\alpha'} = \boldsymbol{n}_\alpha + d\boldsymbol{n}_\alpha$ は，$\boldsymbol{\beta} + d\boldsymbol{\beta}$ とともに進む．$\alpha' = \alpha + d\alpha$ および $\boldsymbol{n}'_\alpha = \boldsymbol{n}_\alpha + d\boldsymbol{n}_\alpha$ を書き，そして積の微分に対する法則を適用して，式 (41.44) の右辺を計算し展開する．式の両辺上の $-\boldsymbol{\sigma}/2$ および $-i\boldsymbol{\sigma}/2$ の係数を等しく置く．こうして

$$\boldsymbol{a}_{\text{共運動}}d\tau = (d\alpha)\boldsymbol{n}_\alpha + (\sinh\alpha)d\boldsymbol{n}_\alpha \tag{41.45}$$

および

*16

$$\boldsymbol{\omega}\,dt = [2\sinh^2(\alpha/2)]d\boldsymbol{n}_\alpha \times \boldsymbol{n}_\alpha \tag{41.46}$$

を見出す．1 つの表現は共運動慣性系でみられたときの速度の変化を与える．別な表現は実験室系でみられたときの歳差運動を与える．低い速度に対しては Thomas 歳差運動に対する表現は

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\beta}/2 \tag{41.47}$$

に帰着する．ここに $\boldsymbol{a}$ は加速度である．速度 $\boldsymbol{\beta}$ に垂直な成分のみが歳差運動に対して重要である．

原子物理学における Thomas 歳差運動の重要性の基本的な説明に対しては，たとえば，Ruark and Urey（1930）をみよ．

41.5 スピノール

*17 立方体の各面に異なる色を塗る．それから立方体の各角を，弾性的な糸で部屋の対応する角に結びつける (図 41.5)．さて立方体を $2\pi = 360$ 度だけ回転する．糸はもつれる．なしうる何ものも糸のもつれを解かないだろう．すべての糸がその方向を直線に進めることは不可能である．さて立方体を同じ軸の周りにさらに 2π だけ回転させる．糸は依然さらにもつれる．しかし，わずかな作業が今や完全にもつれをまっすぐにする（図 41.6)．すべての糸は最初立方体の角から対応する部屋の角へ直線状であったように延びている．よ

*16 Thomas 歳差運動の角速度

*17 方位づけもつれの関係

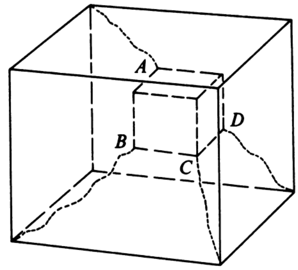


図 **41.5**　立方体と部屋の壁との間の “方位づけもつれ関係”．立方体の 360 度回転は糸をもつれさす．720 度回転は糸をさらに一層もつれさすと考えられるだろう．しかし代わりにそれは糸を完全にほぐすことを可能にする．

り一般的に $0, \pm 4\pi, \pm 8\pi, \cdots$ だけの回転は，立方体をその周りとの標準的な方位づけもつれ関係にとどめる．他方 $\pm 2\pi, \pm 6\pi, \pm 10\pi, \cdots$ は，立方体にその方位のみを回復し，そしてその周りとの方位づけもつれ関係を回復しない．明らかに方位の通常の概念に完全には考慮されていない方位の幾何学についての何かが存在する．したがって “方位づけもつれ関係” あるいは（より簡単な述語！）“形状（version）”（ラテン語のバーサ（**versor**），方向転換（turn））．物体の 2 つの同等でない形状に対して，物理学的に探知できる相違（たとえば，金属物体と金属からなる周りとの間の接触ポテンシャル）がまた存在するかどうかはわからない［Aharanov and Suskind（1967）］．

物体の 2 つの同等でない形状の間の区別と調和して，回転と関係するスピン行列

$$R = \cos(\theta/2) - i(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin(\theta/2) \tag{41.48}$$

は 2π の奇数倍だけの回転で符号を変える．この符号変化は公式

$$X \to X' = RXR^* \tag{41.49}$$

*18　に要約されているように（2 つの因子 R，おのおのにおける符号変化！），ベクトルの変換の法則にはけっして現れない．符号変化はベクトルから法則

$$\xi \to \xi' = R\xi \tag{41.50}$$

によって変換する 2–成分の量へ向かうときに現れる．このような量はスピノールとして知られる．スピノールは 360 度の回転で符号を変える．したがってスピノールは立方体の 2 つの同等でない形状の間の相違と接触を保つ合理的な手段を与える．より一般的に，立方体とその周りとの間のおのおのの方位づけもつれ関係とスピノール ξ の異なる値を関係づけることができる．さらにスピノールの概念の有用性は，回転に限られたものではない．また，ブーストおよび回転の一般的な結合に対して，

*19

$$\xi \to \xi' = L\xi \tag{41.51}$$

*18　スピノールが定義される
*19　スピノールの Lorentz 変換

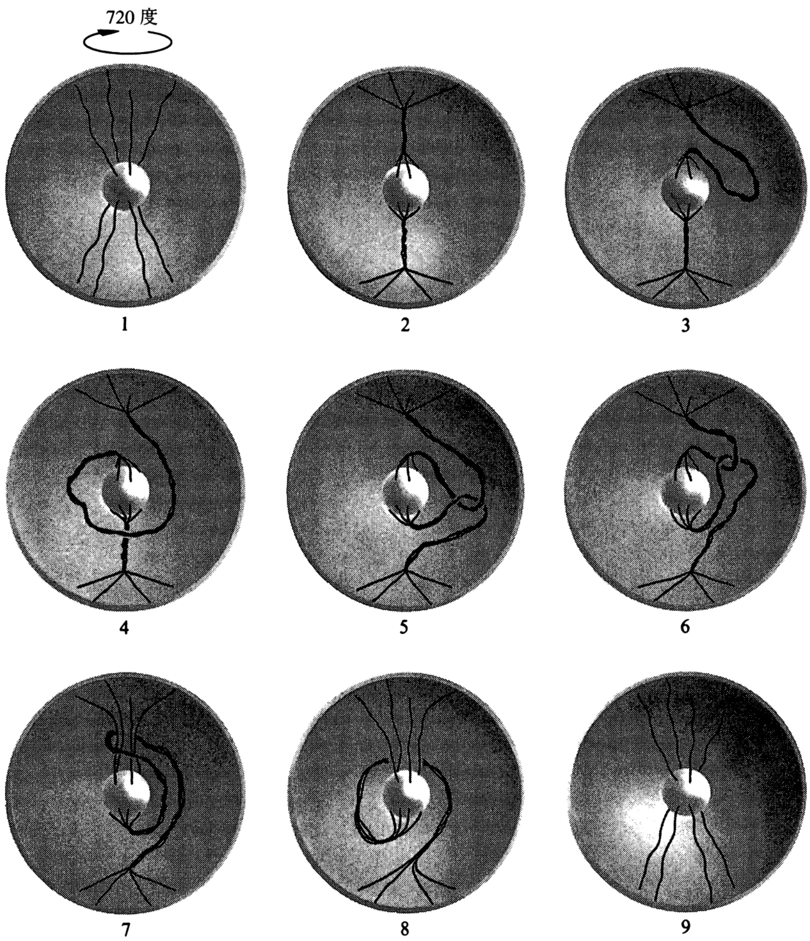


図 41.6 物体は図 41.5 におけるようにその周囲に弾性的な糸によって結びつけられている（8 個の糸がここに示されている．任意の数の糸が用いられうるだろう）．物体を 720 度だけ回転させ，そこから 2–8 番の図（物体は固定されたままとどまる）の手続きに従うと（Edward McDonald），結びつけている糸は 9 番の図（下部の右）におけるように，もつれがほどけているのがわかる．

と書くことができる．ブーストおよび回転はともに無限小であるときには，この変換の具体的な形は単純である．

$$\xi' = [1 - (i\,d\theta/2)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) + (d\boldsymbol{\beta}/2)\cdot\boldsymbol{\sigma}]\xi$$

あるいは，式 (41.1) によれば，

$$\begin{pmatrix}\xi'^1\\ \xi'^2\end{pmatrix} = \left\| \begin{matrix} 1+\frac{1}{2}(-i\theta_{xy}+\beta_z) & \frac{1}{2}(-i\theta_{yz}-\theta_{zx}+\beta_x-i\beta_y) \\ \frac{1}{2}(-i\theta_{yz}+\theta_{zx}+\beta_x+i\beta_y) & 1+\frac{1}{2}(i\theta_{xy}-\beta_z) \end{matrix} \right\| \begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix} \qquad (41.52)$$

任意の大きさのz 方向のブーストおよびz 軸周りの有限の回転の任意の結合に対しては，

$$\begin{pmatrix}\xi'^1\\ \xi'^2\end{pmatrix} = \left\| \begin{matrix} e^{-(1/2)\,i\theta_{xy}+(1/2)\,\beta_z} & 0 \\ 0 & e^{(1/2)\,i\theta_{xy}-(1/2)\,\beta_z} \end{matrix} \right\| \begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix} \qquad (41.53)$$

をもつ．スピノールの 2 成分を記録するには，値 1 および 2 をとる添字を導入することは好都合であり習慣的である（アルファベットのはじめの方の大文字のローマ字）．こうして式 (41.51) は

$$\xi'^A = L^A{}_B \xi^B \tag{41.54}$$

となる．

スピノールは，変換公式

$$X' = LXL^* \tag{41.55}$$

の半分を引き出したことを通して自らの意味を獲得した．この公式を回復しうるには，他の半分を同じく必要とする．それは Lorentz 変換の複素共役を含む．したがって法則 [*20]

$$\eta'^{\dot U} = \bar L^{\dot U}{}_{\dot V} \eta^{\dot V} \tag{41.56}$$

によって変換する別なスピノール η を導入する［$\dot U = \dot 1, \dot 2$; $\dot V = \dot 1, \dot 2$; 点およびアルファベットの終わりに近い大文字は Lorentz スピン行列の複素共役（置換でない!）によって変換する成分を区別するのに用いられる］.

41.6　ベクトルとスピノールとの間の対応

[*21] 逆にスピノールからベクトルへいくには，式 (41.55) においてスピン行列 X は形

$$X = t + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \begin{Vmatrix} (t+z) & (t-iy) \\ (x+iy) & (t-z) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} X^{1\dot 1} & X^{1\dot 2} \\ X^{2\dot 1} & X^{2\dot 2} \end{Vmatrix} \tag{41.57}$$

をもつことに注意せよ．ここで添字は，式 (41.55) で L^* あるいは L に結合するかに応じて，点を受けるかあるいは点を受けない．変換の方程式は

$$X'^{A\dot U} = L^A{}_B \bar L^{\dot U}{}_{\dot V} X^{B\dot V} \tag{41.58}$$

となる（置換は添字の順序づけによって自動的に得られる．こうして $\bar L^{\dot U}{}_{\dot V}$ であって，$L^{*\dot U}{}_{\dot V}$ でない）．この変換における係数は，“1 つの添字は点を受けないで別な添字は点を受ける，2 階のスピノール” の変換に対する法則

$$\xi'^A \eta'^{\dot U} = L^A{}_B \bar L^{\dot U}{}_{\dot V} \xi \eta^{\dot V} \tag{41.59}$$

における係数と同等である．この意味において，“4–ベクトルは 2 階のスピノールのように変換する” と言うことができる．4–ベクトルと 2 階のスピノールとの間のこの関係について完全に明白にするには，式 (41.57) から関係

---

*20　スピノールの 2 番目の型

*21　ベクトルは Hermite な 2 階のスピノールとみなされる

$$
\begin{aligned}
X^{1\dot{1}} &= x^0 + x^3, \\
X^{1\dot{2}} &= x^1 - ix^2, \\
X^{2\dot{1}} &= x^1 + ix^2, \\
X^{2\dot{2}} &= x^0 - x^3
\end{aligned}
\tag{41.60}
$$

に着目せよ．より簡潔な形で，

$$X^{A\dot{U}} = [t + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})]^{A\dot{U}} = x^\mu {\sigma_\mu}^{A\dot{U}} \tag{41.61}$$

をもつ．ここに σ_0 は単位行列である．この式は，4–ベクトル，あるいは“1–添字テンソル”の成分から，対応する“1,1–スピノール”（1 つは点を受けない添字であり，1 つは点を受ける添字である）の成分へいかに変換されるかをただちに告げる．

おのおのの実数の 4–ベクトル x^α に

$$X^{A\dot{U}} = \overline{X^{U\dot{A}}} \tag{41.62}$$

*22 の意味で **Hermite** である 1,1–スピノールが関係する．Hermite 1,1–スピノールの例は式 (41.61) によって与えられている．Hermite であることの概念は別な言葉で，そしてより一般的に述べられうる．

$$(\overline{\Phi})^{A_1 \ldots A_N \dot{U}_1 \ldots \dot{U}_N} = \overline{(\Phi^{U_1 \ldots U_N \dot{A}_1 \ldots \dot{A}_N})} \tag{41.63}$$

をもつ**複素共役スピノール** $\overline{\Phi}$ は成分 $\Phi^{A_1 \ldots A_N \dot{U}_1 \ldots \dot{U}_N}$ をもつ任意のN, N–スピノール Φ と関係している．N, N–スピノールはその複素共役に等しいときに Hermite であると言われる．

41.7 スピノール代数

式 (41.53) は，因子 $e^{(1/2)\beta_z}$ に比例するブーストで指数的に上昇するスピノールの成分
*23 ξ'^1，および指数的に落下する別な成分 ξ'^2 を示した．もし 2 つのスピノール ξ および ζ から，ブーストによって値を変えずに構成される何かの量があるはずならば，それは $\xi^1\zeta^2$ お
*24 よび $\xi^2\zeta^1$ のような積から構成されなければならない．この積の規則を別な言葉で述べ直すことができる．$\varepsilon^{12} = \varepsilon_{12} = 1$ および

$$\varepsilon^{AB} = -\varepsilon^{BA}, \qquad \varepsilon_{AB} = -\varepsilon_{BA} \tag{41.64}$$

であるような代わりの記号 ε^{AB} および ε_{AB} を導入する．ここで，唯一の別なゼロでない成分は $\varepsilon^{21} = \varepsilon_{21} = -1$ である．下つき添字のスピノール ξ_A を，上つき添字のスピノール ξ^A を用いて式

*22 N,N–スピノールと Hermite であること（Hermiticity）
*23 スピノール代数
*24 (1) ε^{AB}，ε_{AB} が定義される

*25
$$\xi_A = \xi^B \varepsilon_{BA} \qquad (41.65)$$

および逆

$$\xi^B = \varepsilon^{BC} \xi_C \qquad (41.66)$$

によって定義する．そうすると 1 つのスピノールと別なスピノールとのスカラー積は

*26
$$\xi_A \zeta^A \qquad (41.67)$$

として定義される．このスカラー積の値は，任意のブーストあるいは回転あるいはそれらの結合によって影響を受けない．

$$\begin{aligned} {\xi'}_A {\zeta'}^A &= {\xi'}^B \varepsilon_{BA} {\zeta'}^A \\ &= (L^B{}_D \xi^D) \varepsilon_{BA} (L^A{}_C \zeta^C) \\ &= (\det L) \xi^D \varepsilon_{DC} \zeta^C \\ &= \xi_C \zeta^C \end{aligned} \qquad (41.68)$$

証明は，表現 $L^B{}_D \varepsilon_{BA} L^A{}_C$ は（1）$D = C$ であるときゼロである．そして（2）$D = 1$，$C = 2$，あるいは $D = 2$，$C = 1$ であるときは，L の行列式（1!）あるいはその負に帰着する．スカラー積 $\xi^A \zeta_A$ はスカラー積 $\xi_A \zeta^A$ の負であることに注意せよ．スピノールと自分自身とのスカラー積の値は自動的にゼロである（“スピノールの本来的に備わっているヌル特性”）．

*27 上つき添字をもつベクトルの成分は，上つき添字をもつ 1,1–スピノールの成分を用いて表されている．

$$X^{A\dot{U}} = x^\mu \sigma_\mu{}^{A\dot{U}} \qquad (41.69)$$

そして類似の相関は下つき添字をもつベクトルと下つき添字をもつ 1,1–スピノールとの間に成り立つ．こうして，

$$X_{A\dot{U}} = x_\mu \sigma^\mu{}_{A\dot{U}} \qquad (41.70)$$

*28 ここに “関連する基礎的なスピン行列” は成分

$$\sigma^\mu{}_{A\dot{U}} = \eta^{\mu\nu} \sigma_\nu{}^{B\dot{V}} \varepsilon_{BA} \varepsilon_{\dot{V}\dot{U}} \qquad (41.71)$$

をもつ．あるいは明白に，

---

*25 （2）スピノール添字を上げ下げする

*26 （3）スピノールのスカラー積

*27 （4）ベクトルと 1,1–スピノール間の写像

*28 （5）σ^μ が定義され σ_μ に関係づけられる

$$\left\| \begin{matrix} {\sigma^\mu}_{1\dot{1}} & {\sigma^\mu}_{1\dot{2}} \\ {\sigma^\mu}_{2\dot{1}} & {\sigma^\mu}_{2\dot{2}} \end{matrix} \right\| = \begin{cases} -\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| & \mu = 0 \text{ に対して}, \\ -\left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\| & \mu = 1 \text{ に対して}, \\ +\left\| \begin{matrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{matrix} \right\| & \mu = 2 \text{ に対して}, \\ -\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\| & \mu = 3 \text{ に対して} \end{cases} \tag{41.72}$$

同じ型の積の法則がこれらの行列に対して成り立つ，$(\sigma^x)^2 = (\sigma^y)^2 = (\sigma^z)^2 = 1$, $\sigma^x\sigma^y = -\sigma^y\sigma^x = i\sigma^z$，…，式 (41.2) の行列 σ_x，σ_y，σ_z に対するように．“基礎的なスピン行列” σ_μ と，“関連する基礎的なスピン行列” σ^μ との間には，以下の直交性および規格化の関係が得られる．

$${\sigma_\mu}^{A\dot{U}}{\sigma^\mu}_{B\dot{V}} = -2\,\delta^A_B\,\delta^{\dot{U}}_{\dot{V}} \tag{41.73}$$

および

$${\sigma_\mu}^{A\dot{U}}{\sigma^\nu}_{A\dot{U}} = -2\,\delta^\nu_\mu \tag{41.74}$$

これらの関係を用いて，“1,1–スピノール（‘ベクトルのスピノール等価物’）として表される量から逆に，直接ベクトルとして表される同じ量（1 階のテンソル）を導く” ことができる．こうして，式 (41.61) の両辺に $-\frac{1}{2}{\sigma^\nu}_{A\dot{U}}$ を掛け，スピノールの添字にわたって和をとり，そして式 (41.74) を用いてベクトルの反変成分を見出す．

$$x^\nu = -\frac{1}{2}{\sigma^\nu}_{A\dot{U}}X^{A\dot{U}} \tag{41.75}$$

同様に式 (41.70) および (41.73) から共変成分

$$x_\nu = -\frac{1}{2}{\sigma_\nu}^{A\dot{U}}X_{A\dot{U}} \tag{41.76}$$

を見出す．

*29 N 添字テンソル T 自身を式 (41.61) あるいは式 (41.70) の一般化によってスピノールの言葉（“テンソルのスピノール等価物”）で表す．こうして，3 次の混合テンソルに対して，

$${T_{A\dot{U}}}^{B\dot{V}C\dot{W}} = {\sigma^\alpha}_{A\dot{U}}{\sigma_\beta}^{B\dot{V}}{\sigma_\gamma}^{C\dot{W}}{T_\alpha}^{\beta\gamma} \tag{41.77}$$

および逆関係

$${T_\alpha}^{\beta\gamma} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 {\sigma_\alpha}^{A\dot{U}}{\sigma^\beta}_{B\dot{V}}{\sigma^\gamma}_{C\dot{W}}{T_{A\dot{U}}}^{B\dot{V}C\dot{W}} \tag{41.78}$$

をもつ．コラム 41.1 は若干の単純なテンソルのスピノール表示を与える．

スピノール解析についてのある論文では，式 (41.78) のような式における因子 $(-\frac{1}{2})^N$ は以下の二重の処方によって除去される．(1) 行列 σ_μ および σ^μ に上に含まれていない因子

*29 (6) N 階のテンソルと N, N–スピノールとの間の写像

$1/\sqrt{2}$ を挿入する，そして (2) 標準的な計量に対して上のように対角線 $\eta_{\mu\nu} = (-1,1,1,1)$ でなく，$(1,-1,-1,-1)$ を用いる．この処置は，(1) 行列 σ_x，σ_y，σ_z における $1/\sqrt{2}$ の導入はそれらの行列を原子物理学および核物理学を通して長年用いられてきた Pauli 行列と一致しなくするから，そして (2) 空間的な超曲面内での正の計量は幾何力学の初期値問題の解析に対して，および 3–幾何学の意味するものの定義に対して最適の利点をもつからという理由で採用されなかった．因子 $(-\frac{1}{2})^N$ の代価はこれらの利益のためにここで支払われる．この代価を避ける慣習は幅広いスピノール計算に対して望ましい．たとえば，Pirani (1965) あるいは Penrose (1968a) をみよ．

コラム 41.1　局所 Lorentz 系におけるいくつかの単純なテンソルのスピノール表示

量	テンソルの言葉	スピノールの言葉
一般的な 4–ベクトル	x^α (4 個の複素数)	$X^{A\dot{U}}$ (4 個の複素数)
実数の 4–ベクトル (例：4–運動量)	$x^\alpha = \bar{x}^\alpha$ (4 個の実数)	$X^{A\dot{U}} = \overline{(X^{U\dot{A}})}$ (2 個の実数の成分，1 個の異なる複素数の成分)
ヌル 4–ベクトル	$\eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$	$\det X^{A\dot{U}} = 0$ [式 (41.57) をみよ]．したがって $X^{A\dot{U}} = \xi^A\eta^{\dot{U}}$ であるような 2 個のスピノール ξ^A および $\eta^{\dot{U}}$ が存在する．
未来を示す実数のヌル 4–ベクトル (光子の 4–運動量のようなもの)	$x^\alpha = \bar{x}^\alpha$ $\eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$ $x^0 > 0$	$X^{A\dot{U}} = \xi^A(\bar{\xi})^{\dot{U}}$ であるようなスピノール ξ^A (共通の掛けられる位相因子 $e^{i\delta}$ まで一意的な，2 個の複素数) が存在する．
過去を示す実数のヌル–4 ベクトル	$x^0 < 0$	$X^{A\dot{U}} = -\xi^A(\bar{\xi})^{\dot{U}}$.
実数のバイベクトルあるいは 2–形式 (Maxwell 場のような)	$F_{[\alpha\beta]}$ (下つき文字は $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ を意味する，6 個の異なる実数の成分)	$F_{A\dot{U}B\dot{V}} = \phi_{AB}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}} + \varepsilon_{AB}(\bar{\phi})_{\dot{U}\dot{V}}$ であるような 6 個の対称スピノール ϕ_{AB} が存在する (3 個の異なる複素数の成分 ϕ_{11}，ϕ_{12}，ϕ_{22})
上の実数 2–形式に双対な実数 2–形式	${}^*F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\gamma\delta}$	${}^*F_{A\dot{U}B\dot{V}} = -i\phi_{AB}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}} + i\varepsilon_{AB}(\bar{\phi})_{\dot{U}\dot{V}}$ (2–形式に対する双対はスピノール ϕ_{AB} に $-i$ を掛けたものに対応する)

Weylの共形曲率テンソルの対称性をもつ実数4–次のテンソル，すなわち，Riemann曲率テンソルの対称性をもち，そしてRicciテンソルがゼロとなるという付加的な要求を満たす（“空の空間”，“真空Riemannテンソル”）	$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{([\alpha\beta][\gamma\delta])}$ （最初の2個の添字について反対称，最後の2個の添字について反対称，第1の組と第2の組との交換に対して対称） $C^{\alpha}{}_{[\beta\gamma\delta]} = 0$ （Riemannテンソルに対するように，20個の代数的に異なる成分，さらなる真空条件によって10個に帰着される） $C^{\alpha}{}_{\beta\alpha\delta} = 0$	5個の異なる複素数の成分 ψ_{1111} ψ_{1112} ψ_{1122} ψ_{1222} ψ_{2222} をもつ完全に対称なスピノールψ_{ABCD}，が存在し， $C_{A\dot{U}B\dot{V}C\dot{W}D\dot{X}} = \psi_{ABCD}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}}\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}} + \varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\bar{\psi}_{\dot{U}\dot{V}\dot{W}\dot{X}}$ である．
完全に展開されたRiemann曲率テンソル（物質が存在する空間）	$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{[\alpha\beta]\gamma\delta}=R_{\alpha\beta[\gamma\delta]}=R_{([\alpha\beta][\gamma\delta])}$ $R_{\alpha[\beta\gamma\delta]}=0$ （20個の代数的に異なる成分）	完全に対称なスピノールψ_{ABCD}（曲率の“Weyl”あるいは“共形”部分，あるいは非局所的な原因の部分），およびスカラーΛ（局所的な源の曲率の部分のトレースの測度），およびスピノール$\Phi_{AB\dot{U}\dot{V}} = \Phi_{(AB)(\dot{U}\dot{V})} = (\bar{\Phi})_{AB\dot{U}\dot{V}}$（局所的な源の曲率のゼロトレース部分の測度，曲率テンソルの3個の既約部分の最後）が存在し， $R_{A\dot{U}B\dot{V}C\dot{W}D\dot{X}} = \psi_{ABCD}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}}\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}} + \varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}(\bar{\psi})_{\dot{U}\dot{V}\dot{W}\dot{X}} + 2\Lambda(\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}}\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}} + \varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\varepsilon_{\dot{U}\dot{X}}\varepsilon_{\dot{V}\dot{W}}) + \varepsilon_{AB}\Phi_{CD\dot{U}\dot{V}}\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}} + \varepsilon_{CD}\Phi_{AB\dot{W}\dot{X}}\varepsilon_{\dot{U}\dot{V}}$ である．

おのおのの物理量は幾何学的な物体によって記述される．すべての局所的な物理量は“固有 Lorentz 変換群 $L\uparrow_+$ の既約表現”としての固有局所 Lorentz 変換のもとで変換する数学的な量によって記述される．	おのおのの局所的な物理量はそれ自身の階と特別な対称性の性質をもつテンソルによって記述される．	局所的な物理量を表すために $L\uparrow_+$ の要求される有限の既約表現を与えるために，関係するスピノールは点のついていない添字のすべてについて完全に対称であり，そしてまたすべての点のついている添字について対称でなければならない [Gel'fand (1963)].

41.8　スピン空間とその基底スピノール

*30　基本的なスピノールの“空間”は 2 次元である．したがってその空間は，任意の 2 個の 1 次独立なスピノール λ_A および μ_A によって張りめぐらされる．さらに，可能な線形依存性，すなわち，形 $\mu_A =$ 定数 $\times\, \lambda_A$ の関係の存在に対する 1 対のスピノールを分析することは容易である．この事象で，μ_A の λ^A とのスカラー積は，λ_A と λ^A とのスカラー積 (41.67) のように自動的にゼロになる．したがってゼロでないスカラー積

$$\lambda_A \mu^A \neq 0 \tag{41.79}$$

は 2 個のスピノールの 1 次独立に対する必要十分な条件である．

一般的な 4–ベクトルは 4 個の基底ベクトルの 1 次結合として表される．同様に一般のスピノールは 2 個の基底スピノールの 1 次結合として表される．

$$\omega^A = \lambda \xi^A + \mu \eta^A \tag{41.80}$$

*31　ここで，“基底スピノール”という用語は，ξ^A および η^A が規格化の条件

$$\xi_A \eta^A = 1 \ (= -\eta_A \xi^A) \tag{41.81}$$

を満たすことを含むことが理解されている．この条件から式 (41.80) における展開係数の単純な表現を導く．

$$\begin{aligned} \lambda &= -\eta_A \omega^A \ (= \omega_B \eta^B) \\ \mu &= \xi_A \omega^A \ (= -\omega_B \xi^B) \end{aligned} \tag{41.82}$$

これらの展開係数を逆に式 (41.80) に挿入すると，任意に選ばれたスピノール ω^A を再現するだろう．言い換えれば，以下の式は ω_B の成分についての恒等式でなければならない．

*30　スピノールの 1 次独立性
*31　基底スピノールとスピノールの相棒

$$\omega^A = \varepsilon^{AB}\omega_B \equiv (\xi^A\eta^B - \eta^A\xi^B)\omega_B \tag{41.83}$$

この事情から，2 個の基底スピノールの成分は式

$$\xi^A\eta^B - \eta^A\xi^B = \varepsilon^{AB} \tag{41.84}$$

によって関係していることが導かれる．2 個の基底スピノール ξ^A および η^A が与えられると，2 個の等しくよい基底スピノールを，

$$\begin{aligned} \xi^A{}_{\text{新しい}} &= \xi^A, \\ \eta^A{}_{\text{新しい}} &= \eta^A + \alpha\xi^A \end{aligned} \tag{41.85}$$

ここに α は任意の実数の定数あるいは複素数の定数である，と書くことによって，式 (41.81) あるいは式 (41.84) への挿入によってただちに点検されるように，得ることができる．規格化の条件 (41.81) を満たす，与えられたスピノール ξ^A に対するもっとも一般的な “スピノールの相棒” は，この形 (41.85) をもつ．

41.9 旗竿と旗と方位づけもつれ関係とみなされるスピノール

*32 いかにしてスピノールを視覚化することができるか？ レーザーを向けよ．引き金を引け．100 万ジュールのパルスをここそして今（事象 $\mathcal{O}$）からそこそしてそのとき（事象 $\mathcal{P}$：空間的に $\mathcal{O}$ から 400,000 km，光の旅行時間で $\mathcal{O}$ から 400,000 km にあるクレーター Aristarchus の中心）に送れ．レーザーは，たんなる光の斑点でなく，光る矢を生み出すように設計されている．Roger Penrose に従って，ヌルベクトル $\mathcal{OP}$ を “旗竿” といい，光る矢を “旗” といおう．スピノール（図 41.7）は (1) ヌル旗竿，(2) 旗および (3) 旗とその周囲との間の方位づけもつれ関係のこの結合からなる．1 つの発射と次の発射の間で軸の周りにレーザーをわずかに回転して，レーザーを繰り返し発射することによって “旗を回転せよ”．旗が 360 度だけ回転して元の方向に戻ったときに，スピノールは符号を逆転している．旗を旗竿の周りに 2π の任意の偶数倍だけ回転するとスピノールは元の値に戻る．

スピノール ξ，すなわち 2 個の複素成分 ξ^1 および ξ^2 をもつ数学的な物体から出発して，
*33 旗竿と旗と方位づけもつれ関係の幾何学的な物体へ 2 段階で進む．まず竿，それから旗である．こうして，スピノール ξ^A から “竿” の実数のヌル 4–ベクトルへ公式

$$x^\alpha \to X^{A\dot{U}} = \xi^A(\bar{\xi})^{\dot{U}} \tag{41.86}$$

あるいは

*32 スピノールの幾何学的な表示
*33 (1) ヌルベクトル（旗竿），および

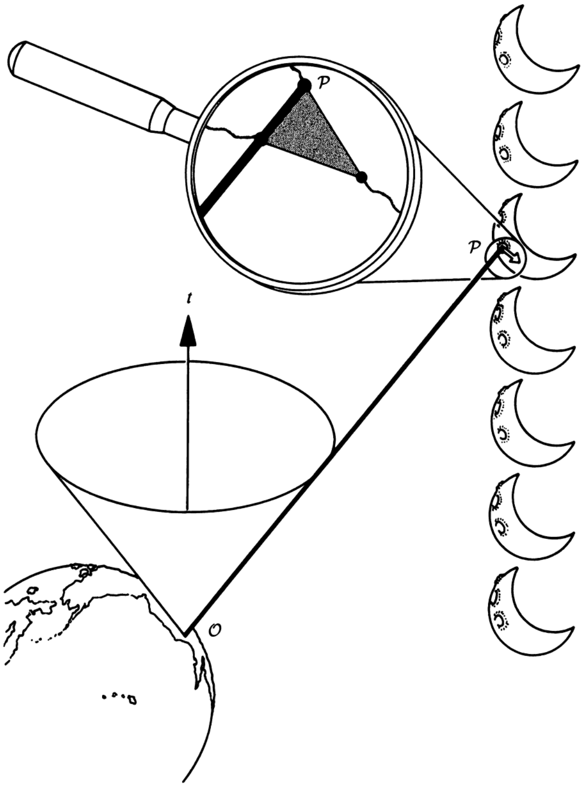


図 41.7　(1) “旗竿” [Penrose の術語，光のパルスの軌道，ヌルベクトル $\mathcal{OP}$] および (2) “旗” [レーザーパルスによって地球から月の表面に伝送された矢印 ($\mathcal{P}\Rightarrow$) あるいは，上部の挿入図において拡大された視野において，矢印を代用する旗そのもの] および (3) 旗とその周辺間の方位づけもつれ関係 [旗の角から周囲へ描かれた糸によって象徴されている] によって表示されるスピノール．スピノールそのものが因子 $\rho e^{i\sigma}$ によって掛けられるとき，ヌルベクトル（旗竿）は因子 ρ^2 によって掛けられ，旗は旗竿の周りに角度 2σ だけ回転される．

$$\left\|\begin{matrix}(t+z) & (x-iy)\\ (x+iy) & (t-z)\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\xi^1\bar\xi^{\dot 1} & \xi^1\bar\xi^{\dot 2}\\ \xi^2\bar\xi^{\dot 1} & \xi^2\bar\xi^{\dot 2}\end{matrix}\right\| \tag{41.87}$$

によって進む．右辺の行列の 1 行目と 2 行目は，因子 ξ^1/ξ^2 だけ違う．したがって右辺の行列の行列式はゼロになる．したがってまた左辺に対しても同じであり，4–ベクトル $\mathcal{OP}=(t,x,y,z)$ はヌルベクトルである．スピノール ξ^A にゼロでない複素数 $\lambda=\rho e^{i\sigma}$ (ρ, σ は実数である）を掛けるとき，このベクトルは因子 ρ^2 だけ “伸びる”．しかしベクトルは方向について不変である．4–ベクトルはまた角度 σ の選択によって不変である．言い換えれば，このヌル 4–ベクトルは一意的にスピノールによって固定される．しかしスピノールは 4–ベクトルによってまったく一意的に固定されない．与えられた 4–ベクトルに，スピノールの群が対応する．それらは形 $e^{i\sigma}$ (“旗因子”) によって位相因子だけ互いに異なる．

*34　旗因子の影響がはっきりみえるようにさらに目を向けて，スピノール ξ^A から生成される実数のベクトル（4 個の成分）から同じスピノールから生成される実数のバイベクトル

*34　(2) バイベクトル（旗）とその方位づけもつれ関係

(6 個の成分) に注意を向ける.

$$F^{\mu\nu} \to F^{AB\dot{U}\dot{V}} = \xi^A \xi^B \epsilon^{\dot{U}\dot{V}} + \epsilon^{AB}(\bar{\xi})^{\dot{U}}(\bar{\xi})^{\dot{V}},$$
$$\mu \to A\dot{U}, \qquad \nu \to B\dot{V} \tag{41.88}$$

この量が 6 個の異なる成分 ($F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$) 以上の成分をもたないことは, A を B とそして $\dot{U}$ を $\dot{V}$ と交換すること, そして式 (41.88) の右辺の符号における生ずる変化に注意することから導かれる. このバイベクトルの意味を明らかにするために, 符号が交互する因子 ε^{AB} のすべての出現に対する式 (41.88) の中をのぞく. このような因子が現れる場所にはどこにでも, 出発点であるスピノール ξ^A の言葉で, この因子に対する表現 (41.84) を挿入せよ. そして必要とされる付加的なスピノール η^A を ξ^A とともに, すべてのスピノールに対する基底を与えるために, 挿入せよ. このようにして,

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \to F^{AB\dot{U}\dot{V}} &= \xi^A\xi^B(\bar{\xi}^{\dot{U}}\bar{\eta}^{\dot{V}} - \bar{\eta}^{\dot{U}}\bar{\xi}^{\dot{V}}) + (\xi^A\eta^B - \eta^A\xi^B)\bar{\xi}^{\dot{U}}\bar{\xi}^{\dot{V}} \\ &= \xi^A\bar{\xi}^{\dot{U}}(\xi^B\bar{\eta}^{\dot{V}} + \eta^B\bar{\xi}^{\dot{V}}) - (\xi^A\bar{\eta}^{\dot{U}} + \eta^A\bar{\xi}^{\dot{U}})\xi^B\bar{\xi}^{\dot{V}} \\ &= X^{A\dot{U}}Y^{B\dot{V}} - Y^{A\dot{U}}X^{B\dot{V}} \to x^\mu y^\nu - y^\mu x^\nu \end{aligned} \tag{41.89}$$

を見出す. こうして ξ^A からつくられる 2,2–スピノールは 2 個の 4–ベクトル $\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{y}$ から構成されるバイベクトルを表す. これらの中で, 第 1 は "旗竿の実数ヌルベクトル" であり, すでにスピノール ξ^A によって一意的に定められるべくみられる. 第 2 のベクトル,

$$y^\alpha \to Y^{A\dot{U}} = \xi^A\bar{\eta}^{\dot{U}} + \eta^A\bar{\xi}^{\dot{U}} \tag{41.90}$$

はまた ξ^A によって定められるが, しかし一意的でない. なぜなら ξ^A への, "スピノール相棒" η^A は一意的でない. 相棒 η^A の 1 つの選択から新しい相棒の選択へは [式 (41.85)],

$$\eta^A{}_{\text{新しい}} = \eta^A + \alpha\xi^A \tag{41.91}$$

で移る. それから実数 4–ベクトル y^μ は新しい実数 4–ベクトルに移る.

$$y^\mu{}_{\text{新しい}} = y^\mu + (\alpha + \bar{\alpha})x^\mu \tag{41.92}$$

もし 4–ベクトル $\boldsymbol{y}$ が一意的であったならば, 旗竿から, 旗でなくて矢を射影するだろう. 実数定数 $(\alpha + \bar{\alpha})$ に対して開かれている値の領域は, 1 個の矢を多くの矢にするだろう. すべての矢は同一平面内にある. したがって Penrose の旗, 別な言い方をすれば, スピノール ξ^A の選択は個々の矢を固定するのではなく, 矢の集合の全体を固定する. こうして旗を一意的に指定する.

4–ベクトル $\boldsymbol{y}$ (それとともに $\boldsymbol{y}_{\text{新しい}}$) はヌル 4–ベクトル $\boldsymbol{x}$ に直交する.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = x_\beta y^\beta &= -\frac{1}{2}X_{A\dot{U}}Y^{A\dot{U}} \\ &= -\frac{1}{2}\xi_A\bar{\xi}_{\dot{U}}(\xi^A\bar{\eta}^{\dot{U}} + \eta^A\bar{\xi}^{\dot{U}}) = 0 \end{aligned} \tag{41.93}$$

そして空間的である，

$$\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} = -\frac{1}{2}(\xi_A\bar{\eta}_{\dot{U}} + \eta_A\bar{\xi}_{\dot{U}})(\xi^A\bar{\eta}^{\dot{U}} + \eta^A\bar{\xi}^{\dot{U}})$$
$$= -\frac{1}{2}(\xi_A\eta^A)(\bar{\eta}_{\dot{U}}\bar{\xi}^{\dot{U}}) - \frac{1}{2}(\eta_A\xi^A)(\bar{\xi}_{\dot{U}}\bar{\eta}^{\dot{U}}) = 1 \tag{41.94}$$

(“旗は単位長である”)．

*35 スピノール ξ^A に “旗因子” $e^{i\sigma}$ だけ掛けると，旗を旗竿の周りに角度 2σ だけ回転する．なぜなら ξ^A のスピノール相棒 η^A は，因子 $e^{-i\sigma}$ によって掛けられるからである［規格化の条件 (41.81) をみよ］．これらの変化はベクトル $\boldsymbol{y}$ を回転されたベクトル $\boldsymbol{y}_{\text{回転}}$ に変える．

$$y^\alpha_{\text{回転}} \to Y^{A\dot{U}}_{\text{回転}} = e^{2i\sigma}\xi^A\bar{\eta}^{\dot{U}} + e^{-2i\sigma}\eta^A\bar{\xi}^{\dot{U}}$$
$$= \cos 2\sigma(\xi^A\bar{\eta}^{\dot{U}} + \eta^A\bar{\xi}^{\dot{U}}) + \sin 2\sigma(i\xi^A\bar{\eta}^{\dot{U}} - i\eta^A\bar{\xi}^{\dot{U}})$$
$$\to y^\alpha\cos 2\sigma + z^\alpha\sin 2\sigma \tag{41.95}$$

ここに 4–ベクトル $\boldsymbol{z}$ はベクトル $\boldsymbol{y}$ と以下の性質を共有する．それは (1) 実数である，(2) 空間的である，(3) 単位長である，(4) 旗竿のヌル 4–ベクトル $\boldsymbol{x}$ に直交する，そして (5) $\boldsymbol{x}$ の付加的な実倍数 $(\alpha+\bar{\alpha})$ まで元のスピノール ξ^A によって一意的に指定される．さらに，$\boldsymbol{z}$ および $\boldsymbol{y}$ は直交する．こうして $\boldsymbol{y}$ および $\boldsymbol{z}$ は 2 次元空間における基底ベクトルを与える，その中で “旗の先端” が回転を受ける—図では過剰に表現した—．

*36 レーザーパルスに戻ることによって要約する．よく知られた天頂角 θ（z 軸との角度）および ϕ（x 軸からの z 軸周りの方位角）のような 2 個の数は飛行の方向を告げる．3 番目の数 r は，月までの距離，そしてまた光が月に達するまでの旅行時間を与える．4 番目の数，角度 ψ は月の表面に打たれた装飾された矢の方位角を告げる，この方位角は $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向（そこでは $\psi=0$）から旗竿の周りに右手向きに測定されるべきである．そうすると旗竿および旗（回転された矢）と関係するスピノールは，ここで採用された慣習［式 (41.87) をみよ］によれば

$$\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix} = (2r)^{1/2}\begin{pmatrix}\cos(\theta/2)e^{-i\phi/2+i\psi/2}\\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2+i\psi/2}\end{pmatrix} \tag{41.96}$$

である．このスピノールに対する相棒 η_A は，ξ^A の付加的な倍数まで一意的であり，

$$\begin{pmatrix}\eta^1\\ \eta^2\end{pmatrix} = (2r)^{-1/2}\begin{pmatrix}-\sin(\theta/2)e^{-i\phi/2-i\psi/2}\\ \cos(\theta/2)e^{i\phi/2-i\psi/2}\end{pmatrix} \tag{41.97}$$

である．ξ^A によって定まる旗竿の 4–ベクトルは式 (41.87) から見出される．

$$\begin{pmatrix}x^0\\ x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\\ r\sin\theta\cos\phi\\ r\sin\theta\sin\phi\\ r\cos\theta\end{pmatrix} \tag{41.98}$$

*35　旗竿周りの旗の回転
*36　スピノール，旗竿，および旗を関係づける式

旗自身を定めるために，x^α の他に，x^α に垂直であり，そして x^α の付加的な実倍数まで一意的な単位長の空間的な 4–ベクトル y^α を要求する．このベクトルは式 (41.90) を用いて求められる．そして形

$$\begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta\cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\psi \\ -\sin\theta\cos\psi \end{pmatrix} \tag{41.99}$$

をもつ．x^μ および y^μ に対するこれらの表現から，バイベクトル（“旗”）の成分 $F^{\mu\nu} = x^\mu y^\nu - y^\mu x^\nu$ を単純な算術によって計算する．

41.10　夜空の眺め：スピノールの応用

スピノールに含まれている情報のすべての 4 個の断片を抽出するところまでは注意を向けた．時間における分離（空間における分離に等しい），空間における方向，およびその方
*37 向周りの回転である．さて情報のすべてを必要としない応用に向かう．夜空を眺めて (1) 夜空の眺めをいかに記述するか，そして (2) いかにその眺めを変えるかを尋ねる．夜空の眺めを記述する 1 つの方法として，おのおのの星の方向を与えよ．星の距離についてのどのような関心をも，および旗竿周りの任意の回転 ψ についてのどのような関心をも放棄せよ．言い換えれば，ξ^1 および ξ^2 に共通な複素因子

$$(2r)^{1/2}e^{i\psi/2}$$

は注意から外れる．意味があるものとして残されるすべては，これらのスピノール成分の比 ζ

$$\zeta = \xi^2/\xi^1 = \tan(\theta/2)e^{i\phi} \tag{41.100}$$

である．空におけるおのおのの星に対する 1 個の複素数 ζ（“立体画法の座標”，図 41.8）を与えることは星のパターンの目録をつくることである．

観測者をして，彼の姿勢を変化させる．空の球は回転するようにみえる．あるいは観測者をして，現在の位置から北極星の方向に光の速度で突進させる．観測者にとって空の球のすべての部分は，拡大鏡を使ったように眼前に広がる．埋め合わせするために，残りの星はより小さい角度の範囲に包まれる．任意のこのような回転あるいはブーストあるいは回転とブーストの結合はスピノールの言葉で形

$$\xi^A \to \xi^A_{\text{新しい}} = L^A{}_B\xi^B \tag{41.101}$$

の変換によって記述されることは，形

$$\zeta \to \zeta_{\text{新しい}} = \frac{\xi^2_{\text{新しい}}}{\xi^1_{\text{新しい}}} = \frac{L^2{}_2\zeta + L^2{}_1}{L^1{}_2\zeta + L^1{}_1} \tag{41.102}$$

---

*37　夜空の眺めの “Lorentz 変換” を解析するために用いられるスピノール

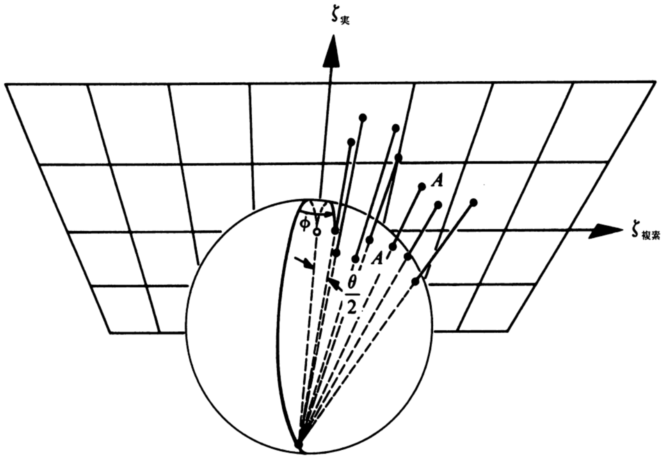


図 41.8　南極からの立体画法の射影による，複素 ζ（$\zeta =$ スピノール成分の比 ξ^2/ξ^1）平面内の点としての空間方向の表示（空の球上の点とみなされる，北斗七星の星の表示）．

の任意の与えられた星の複素数の立体画法の座標の変換を意味する．速度パラメータ α（速度 $\beta = \tanh\alpha$）で z 方向へのブーストという特別な場合には，非対角成分 $L^1{}_2$ および $L^2{}_1$ がゼロになる．頭上の空の拡大はそうすると単純な公式

$$\zeta_{新しい} = e^{\alpha}\zeta$$

あるいは

$$\phi_{新しい} = \phi$$
$$\tan(\theta_{新しい}/2) = e^{\alpha}\tan(\theta/2) \tag{41.103}$$

で表される．

この予言および偽りの予想に反して，その方向へ高速度で動いても北極星の周りの領域についての拡大はまったく達せられない．逆に，その方向にわずかにずれた星からわずかな横方向の運動量をもって入射する任意の光子は，新しい系でその横方向の運動量を保持する．しかし観測者に対する縦方向の運動量は観測者の運動によって増加する．こうして運動量の比は減少し，そして北極星に対する相対的な観測される角度もまた減少する．結果は拡大でなく，減少である（"望遠鏡の間違った端を通して眺めている"）．正しい公式は式 (41.103) でなくて

$$\tan(\theta_{新しい}/2) = e^{-\alpha}\tan(\theta/2) \tag{41.104}$$

である（α の符号が逆である）．この補正に対する理由はそれほど難しくない．スピノール解析はこれまで出ていく光のパルス，および正の時間成分をもつ 4–ベクトルを取り扱ってきた．その特徴はスピノールを 4–ベクトルに結合すべく採用された公式につくられた．

$$r\mathbf{1} + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \equiv X = \|\xi^A\bar{\xi}^{\dot{U}}\| \tag{41.105}$$

対照的に入射光子の原点に逆に達する 4–ベクトルは負の時間成分をもつ（あるいは，代わりに，符号–逆の空間成分）！ 負の時間成分をもつ任意のヌル 4–ベクトルに対して，式 (41.105) の代わりに公式

$$X = -\|\xi^A \bar{\xi}^{\dot{U}}\| \tag{41.106}$$

を用いる．式 (41.104) の α に対して変更された符号を与える詳細を通らずに，原理のこの点をここで述べれば十分である．今から，以前の計算法を保持するために，問題を変える．入射光子でなく，出ていく光子を取り扱う．受信用の望遠鏡をプラネタリウムの映写機によって置き換える．映写機は，北斗七星のおのおのの星や，そしてまた北極星自身への異なる光のビームを空間に射影する．観測者を正の z 方向に速度パラメータ α で動かせる．観測者の基準系ではビームは式 (41.103) と完全に一致して実際広がるだろう．

[*38] “拡大過程は北斗七星の大きさを変えるがその形を変えない．” この陳述は真実であると同時に偽りである．それは北斗七星について真実である．そして任意の他の星座について，その星座の角度の大きさが空の全空間に比べれば小さいと理想化されうる程度まで真実である．任意のよい球形に射影された星座は，地球について静止している観測者にとっていかに小さくみえようと，任意の十分に高い速度の観測者によって，つねに十分 “開かれている” ので，観測者が依然地球に近く存在しても，星座は空の大きい割合を包む，という意味で偽りである．

小さい物体の “Lorentz 変換で引き起こされる拡大” は物体の形を変えないことは 3 つの方法でみられうる．(1) 立体画法の射影（図 41.8）および “微小な線形変換” (41.102) はともにすべての角度を不変にとどめる［“共形不変” たとえば Penrose (1959) をみよ］ことが知られている．そしてすべての古い円を新しい円に変えることさえも知られている．(2) 星座内の与えられた星，M およびその星座の構成要素の総数の中でこの星のちょうど下および上のすぐ近傍の星，L および N を考える．M で向けられる旗竿およびまず M から L へ，次に M から N へ向けられる旗を考える．旗は旗竿の周りに角度 ψ だけ回転している．したがって 2 つの対応するスピノールは位相因子 $e^{i\psi/2}$ だけ異なる．それらは他の方法では異ならない．したがって空の球上での弧 ML および MN 間の角度は Lorentz 変換後も元の値 ψ にとどまる（再び空の球上でのパターンの共形不変!）．(3) さらにより基本的な計算により，単位の空の球上での増大する θ 方向の無限小の弧の長さと増大する ϕ 方向の無限小の弧の長さは同じ比率で増大され，弧と弧との間の角度を不変にとどめる（共形不変）．こうして，プラネタリウムの映写機から空の球上の点へ，地球に相対的に静止している観測者によってみられたときに，z 軸に傾角 θ で発射された光子を考える（“北斗七星のプラネタリウム版”）．Lorentz 変換における角度の変換の標準的な法則から（“逸脱”，コラム 2.4），変換された角度の正弦（sine）に対して

$$\sin\theta_{\text{新しい}} = \frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{1-\beta\cos\theta}\sin\theta \tag{41.107}$$

および［変換された角度の余弦（cosine）に対する表現を微分することによって］

---

*38 Lorentz 変換は空上の角度を不変に保持する（“共形不変性”）

$$d\theta_{\text{新しい}} = \frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{1-\beta\cos\theta}d\theta \tag{41.108}$$

をもつ．これらの表現から，変換された空の球上で，子午線に相対的な傾角は元の空の球上で，同じ子午線に相対的な方向に同一であることがただちに導かれる．

$$\tan(\text{新しい傾角}) = \frac{\sin\theta_{\text{新しい}}d\phi_{\text{新しい}}}{d\theta_{\text{新しい}}} = \frac{\sin\theta d\phi}{d\theta}$$
$$= \tan(\text{元の傾角}) \tag{41.109}$$

(再び共形不変!)．

基本的なスピノールおよびそれがヌルベクトルと関係するもの，空の球に向けられた“旗竿”と関係するもの，およびこのような旗竿周りの“旗”の回転と関係するものについては，これくらいで十分であろう．

41.11　重力理論における有力な道具としてのスピノール

*39　ベクトル，テンソル，および微分形式が平坦な時空から曲がった時空へ容易に一般化されるのとちょうど同じように，スピノールも一般化できる．

曲がった時空の各事象 $\mathcal{P}$ は接線空間をもつ．その接線空間にすべてのベクトル，テンソル，および $\mathcal{P}$ に位置している形式が内在し作用する．接線空間の幾何学は Lorentz 的である（“$\mathcal{P}$ の局所 Lorentz 幾何学”）．なぜなら $\mathcal{P}$ での任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ のスカラー積は $\mathcal{P}$ での直交系で表すと，

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}u^{\hat{\alpha}}v^{\hat{\hat{v}}}$$

である．こうして，$\mathcal{P}$ での接線空間と，平坦な時空との間には数学的な相違は存在しない．一方での数学的な取り扱いは，他方でもなされうる．とくに，**スピノールの全形式は，元々平坦な時空で展開されているが，曲がった時空における任意の事象 $\mathcal{P}$ での接線空間に変化なく持ち越されうる．**

それをやってしまおう．さて，スピノールは曲がった時空内のすべての事象に内在する．そして各事象でスピノールの言葉とテンソルの言葉との間で，41.6 および 41.7 節の式（直交系で成り立つ）を用いて前後に翻訳することができる．

*40　曲がった時空のスピノールは，半整数スピンの量子化された粒子（ニュートリノ，電子，陽子，…）に対する重力の影響を研究することを望むとき，不可欠の数学的な道具である．たとえば，ブラックホールは外部の物質にどのような長い領域の，弱い相互作用も及ぼすことができないという（すなわち，ブラックホールは弱い相互作用の髪をもたないという）Heartle の証明（1971）を考えよ．彼の証明は，曲がった時空におけるニュートリノ場はスピノール記述なしに機能しえないだろうということである．同様に小さいブラックホール

---

*39　曲がった時空におけるスピノール形式

*40　重力場における Fermion を解析するときに必要とされるスピノール

(重力半径 $\sim 10^{-13}$ cm) の重力場における電子の準束縛状態の Wheeler の解析 (1971b) に対して，Schwarzschild の曲がった時空幾何学におけるスピン $\frac{1}{2}$ 粒子に対する Dirac 方程式を解くことが要求される．曲がった時空における Dirac 方程式の詳細な議論については，たとえば Brill and Wheeler (1957) をみよ．

*41 スピノールの数学を用いるには，量子論あるいは半整数スピンの粒子を取り扱う必要がない．スピノール形式には整数スピンの物体 (スカラー，ベクトル，テンソル) のみが考慮されている．そして実際，スピノール形式は本書のこれまでの章に広く行き渡るテンソル形式に完全に同等である状況において完全に適用されうる．式 (41.77) および (41.78) は，ひとたび直交系が時空における各事象において選ばれているならば，1 つの形式から他の形式への変換を与える．

重力理論におけるある種の型の問題はテンソルの言葉でよりもスピノールの言葉ではるかによく取り扱いやすい．例は以下のようである．

(1) 幾何光学 (“測地線のヌル合同” の理論)

*42 ここではスピノールは焦点定理 (23.37) の導出で必要とされる長いテンソル代数をほとんど些細なものにする．そしてスピノールは，増大するアフィンパラメータとともにいかに光線の束がその大きさ (“膨張”)，その形 (“ずれ”)，およびその方位づけ (“回転”) を変えるかを議論し計算することに対して，優雅で，単純な形式を与える．たとえば，レビューおよび元の文献に対しては Sachs (1964)，Pirani (1965)，あるいは Penrose (1968a) をみよ．

(2) 曲がった時空における放射理論 (重力的，電磁気的の両方)

スピノールは放射場を球関数に分解したり，分解された成分を操作することに対して，すべての形式の中でもっとも強力である．たとえば，摂動された Schwarzschild ブラックホールはすべての放射しうる摂動を，それが電磁気的な摂動であれ，重力的な摂動であれ，あるいはスピン 17 の仮想的な場における摂動であれ，いかに放射し去るかについては，たとえば，Price の解析 (1972a,b) をみよ．同様に，Kerr ブラックホールの電磁気的な摂動の Fackerell and Ipser (1972) および Ipser (1971) による解析，および Kerr ホールの重力的な摂動の Teukolsky (1972) による解析をみよ．スピノールはまた源から漸近的に平坦な空間へ流れ出る放射場の “$1/r$” 展開の優雅で強力な解析を与える．その結果の中に “**皮むきの定理 (peeling theorem)**” があり，それは Riemann テンソルの $1/r$ 展開における係数の代数的な性質を記述する．たとえば，レビューおよび元の文献に対しては Sachs (1964) あるいは Pirani (1965) をみよ．

---

*41 スピノール形式とテンソル形式との同等性

*42 古典的な重力理論におけるスピノール形式の応用

(3) 曲率テンソルの代数的な性質

スピノール形式は，“共形曲率テンソルの Petrov–Pirani 代数的な分類” を導出することについて，および曲率テンソルの代数的な性質についての定理を証明することについて，どのような他の方法よりも強力な方法である．たとえば，レビューおよび文献についてはSachs（1964）あるいは Pirani（1965）あるいは Penrose（1968a）をみよ．

もちろん，スピノール形式は任意の形式のように，その制限をもつ．たとえば，重力理論の基本的な問題の多く，およびもっとも難しい問題の大きい割合は，テンソルの言葉でよりもスピノールの言葉の方が難しいだろう！ しかしあるクラスの問題に対して，とくにヌルベクトルが中心的な役割を演ずる問題に対しては，スピノールはもっとも貴重な道具である．

Cartan は世界の物理学および数学にスピノールを与えた．彼の教科書（米国での出版，1966）はこの題目への重要な文献である．

42章 Regge計算法

[本章は完全にトラック–2である．本章に対する準備として，21章（変分原理および初期値形式）が必要とされる．本章は43章（幾何学の力学）において有用であるだろうけれども，後のどの章に対する準備としても必要とされない．]

42.1 なぜRegge計算法か？

重力理論はより大きなそしてより複雑な状況が解析されなければならない時期に入りつつある．1965年頃までは中心的な関心の問題は，特別な対称性あるいは特別な単純性あるいはその両方の理想化によってたいてい論じられえた．束縛された物質の集合の崩壊，相対論的な星の振動，さもなければ平坦な空間内を伝播する弱い重力波を記述すべき，Schwarzschild幾何学およびその一般化，Friedmann宇宙論およびその一般化，Schwarzschild幾何学とFriedmann幾何学とを結合したものが重要な役割をする．すべてのこれらの問題および他の問題は基本的な手段によって解かれた．

*1 しかし今日対称性を欠きそして摂動理論に従わない事情を理解すべく強く求められているものがある．2個のブラックホールが衝突し合体するときにいかにそれらは形を変え，どれだけの重力放射を放出するか？ Penrose，Hawking，およびGerochの定理によって予言されている，重力崩壊の終点での特異点の構造および性質は何であるか？ 完全に混沌として始まる宇宙は不均質なミックスマスター（mixmaster）振動のような過程によって素早く滑らかになりうるか？

このような問題を解くには，新しい種類の数学的な道具を必要とする．そしてこの必要に応じて，新しい道具が展開されている．34章の“大域的な方法”が1組の道具を与える．Regge計算法は別な道具［Regge（1961），Wheeler（1964a），pp.467–500もみよ］を与える．

42.2 Regge計算法の要約

*2 稜と稜が結合され，そして頂点と頂点が結合されている多数の平坦な三角形からつくられている巨大なホールを覆う測地線のドームを考える．同様にRegge計算法では時空を，面と面が結合され，稜と稜が結合され，頂点と頂点が結合されている，平坦な空間の“単体”

*1 計算の道具としてのRegge計算法に対する必要性
*2 滑らかな幾何学の骨組み構造による近似

(4 次元までの項目の列：2 次元では，三角形; 3 次元では，四面体; 4 次元では，単体）からつくられているものとして想像せよ．稜の長さを指定することは，技師に屋根の形を知るために彼が必要とするすべてを与え，科学者に考察している時空の幾何学を知るために彼が必要とするすべてを与えることである．滑らかなホールの屋根は十分小さい三角形から構成されている測地線のドームによって任意に密接に近似されうる．滑らかな時空多様体は，十分小さい単体の互いに接着された集合によって任意の正確さで近似されうる．こうして Regge 計算法は，計量に対する通常の代数的な表現を越えて，非常に多くの状況がそうであるような，球対称を奪われた物理学的な状況，および全体としての対称性に欠けている系を解析する方法を与える．

もし設計者が屋根に彼が望む任意の形を与えうるならば，彼は時空の幾何学の地図をつ
*3 くる解析者以上の自由度をもつ．時空の幾何学がある空間的な薄片［よりよい名前がないためにそれを“現在（now）”とよぶことにする］まで与えられるならば，その瞬間から幾何学はまったく自由度をもたない．Einstein の幾何力学の法則は完全に決定論的である．Regge 計算法の言葉に翻訳すれば，Einstein の幾何力学の法則は，すでに過ぎ去った時間の単体の大きさから，新しい単体の稜の長さを計算する手段を与える．幾何学は決定論的には指定されるけれども，いかに幾何学は近似されるだろうかということは指定されない．元の空間的な超曲面（“現在”）は面と面が互いに結合された四面体の集合として近似される．しかしどれだけの四面体が存在するか，そしてそれらの頂点がどこに置かれるかということは解析者の選択である．解析者は，高い曲率の領域で低い曲率の領域でよりも高い密度で骨組みに骨格を与えて指定された数の点から最大の“正確さの利益”を得ることができる．骨格の長さに対する選択のこの自由度のいくつかは，過去から未来を計算するのに Regge（1961）によって与えられる形で幾何力学の法則を適用するときに保持される．この自由度は，プログラマーが彼自身の選択の付加的な条件を加えることによって，よい“正確さの利益”を与えるべく適応させるか，あるいは別に固定されるかのいずれかによって，すべての不確定性を取り除かなければ，書こうと試みた任意のコンピュータプログラムにとって悲惨であるだろう．

骨組み化された関心のある時空の部分内ですべての骨格の長さを決定したから，任意の選ばれた局所的な骨格の群を時空内でそしてそれら自身によって吟味できる．このようにして，その領域内の幾何学について学ばれるべく存在するすべてを見出すことができる．もちろん，発見物の精度は骨組み化が遂行される精密さに依存するだろう．しかし原理的に，古典物理学の背景内で作業する限り，それは精密さあるいはしたがって正確さへの制限でない．こうしておのおのの骨格の長さを示し，すべての骨格のカタログで終わる．そうすると，どのような空間的な面を望もうともその幾何学を吟味し，そしてさらに多くの他の問題を調べることができる．この目的に対しては重要な骨格を取り出しいかにそれらが互いに調和しているかをみさえすればよい．

---

*3 骨格構造の固定における Einstein の場の方程式の役割

42.3 単体および欠損角

図 42.1 は，滑らかに曲がった表面が平坦な三角形によっていかに近似されうるかを思い
*4 起こさせる．すべての曲率は頂点に集中している．最初の印象にかかわらず，1 つの三角
*5 形と次の三角形との間の稜に，曲率は存在しない．A から B および C を通って D に平行移動され，それから C および B を通ってその出発点に，三角形のこの複合体を平坦な表面上に置くことによってもっとも容易にわかるように，方向を変えずに別なルートによって逆に戻される．ルートが A，B，C および D に共通な頂点の周囲をとりまくことが許される場合に限り，ベクトルは正味の回転を経験する．回転の大きさは頂点に示されている欠損角 δ に等しい．欠損角のすべての頂点にわたる和は，元の滑らかな図形の全体にわたってとられた連続に分布されているスカラー曲率（半径 a の球に対しては ${}^{(2)}R = 2/a^2$）の半整数がもつのと同じ値 4π をもつ．

$$\sum_{\substack{\text{骨組みの}\\ \text{幾何学}}} \delta_i = \frac{1}{2}\int_{\substack{\text{実際の滑らかな}\\ \text{幾何学}}} {}^{(2)}R\, d(\text{表面}) = 4\pi \tag{42.1}$$

*6 2–幾何学の例から一般化して，Regge 計算法は，すべての曲率が集中している（コラム 42.1）$(n-2)$ 次元の領域によって結合されている滑らかに曲がっている n 次元 Riemann 多様体を n 次元ブロック（おのおのはどのような曲率もまったくもたない）の集合として近似する．一般相対論の 4 次元の時空に対しては，曲率が集中している “蝶番” は図 42.2 の最後に図式的に示されているように，三角形の形をもつ．そこで例示されている例において，10 個の四面体はその三角形を共有する．これらの四面体の一つと次の四面体の間に

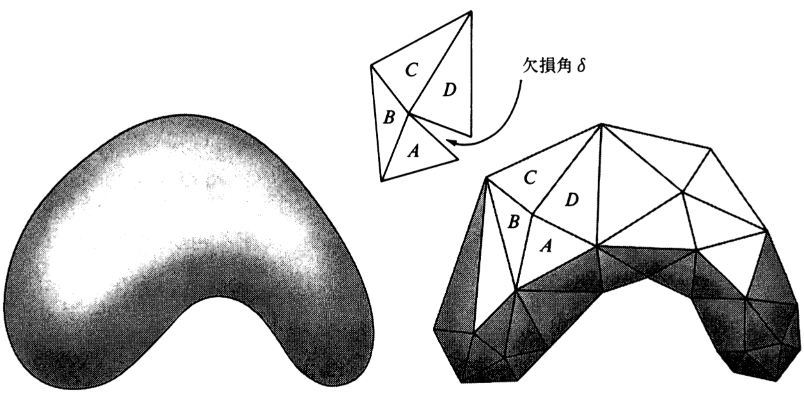


図 42.1 連続的に変化する曲率をもつ 2–幾何学は，三角形の数が十分に大きくされ，そしておのおのの大きさが十分に小さくさえあれば，三角形からつくられる多面体によって任意に密接に近似されうる．おのおのの三角形の幾何学は Euclid である．表面の曲率はおのおのの頂点での欠損角にみえる（平坦な面上で上部に広げられた多面体の部分 $ABCD$）．

*4 曲率の骨組み化された測度としての欠損角

*5 (1) 2 次元において

*6 (2) n（あるいは 4）次元において

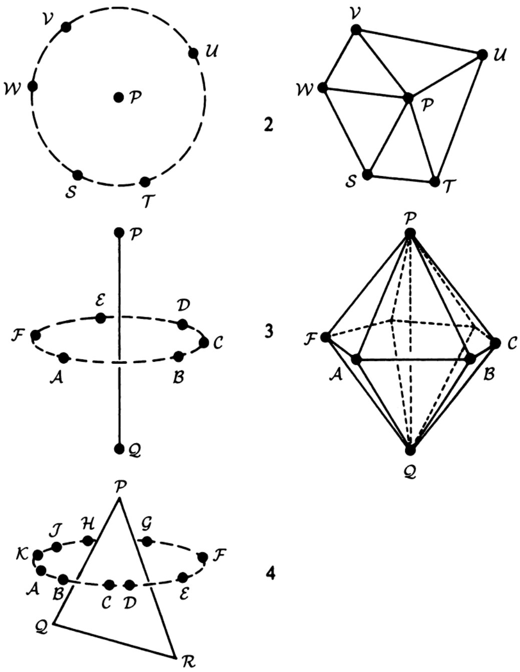


図 42.2　ただ 1 個の蝶番と関係するブロックのサイクル．上段，2 次元：左，頂点 $\mathcal{P}$ を "蝶番" とする頂点 $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ の図式の結合：右，同じであるが，しかし基本的な三角形が完全に示されている．中段，3 次元：左，図式的である：右，"蝶番" $\mathcal{PQ}$ で合う 6 個の四面体の遠近法による表示．下段，4 次元：図式的にのみ示されている．4 次元領域の 5 個の頂点 $\mathcal{PQRCD}$ は 1 つの単体に属する．平坦な内部空間をもつ 5 個の頂点 $\mathcal{PQRDE}$ は次の単体に属する，そして単体はサイクルをつくる．四面体 $\mathcal{PQRD}$ の 2 つの単体は境界領域とよばれ，四面体の内部の幾何は平坦である．その四面体と次の四面体，$\mathcal{PQRE}$ との間に "蝶番" $\mathcal{PQR}$ で張られるある超 2 面の角度 α が存在する．この角度の値は間に位置する単体 $\mathcal{PQRDE}$ の 10 個の稜の長さによって完全に固定される．この 2 面の角度，および蝶番 $\mathcal{PQR}$ でサイクルの別な単体によって張られる対応する 2 面の角度は，一般には 2π にならない．欠損，"がたがたの角度" あるいは欠損角 δ は蝶番 $\mathcal{PQR}$ に集中されている曲率の量を与える．サイクルを包括的な平坦な 4 次元空間にはめ込もうと試みるのでなければ，実際のがたがたあるいは適合のはずれは存在しない（図 42.1 における挿入物に示されているように，三角形の集合に "烙印を押し"，そしてそれらを欠損角だけ広げてみることの類似物）．

4 次元の単体がぴったり合う．この単体のすべての特徴は単体の 10 個の稜の長さによって定まる．特徴の 1 つは示されている四面体あるいは単体の "面" の 1 つと次の 1 つとの間の角度 α である．こうして α は蝶番におけるこの単体によって抱かれる角度を表す．与えられた蝶番 $\mathcal{PQR}$ で出会うすべての単体に対する角度 α を合わせ，そして 2π から引くと，その蝶番と関係する欠損角を得る．それから与えられた小さい n–体積における欠損角を適切な重みで加えることによって（コラム 42.1），元の滑らかな n–幾何学のスカラー曲率の体積分に等しい数を得る．コラム 42.2 をみよ．

コラム 42.1 骨格多様体における構成ブロック間の"がたがたの角度"内に曲率が集中する蝶番

多様体の次元	2	3	4
基本的な平坦な空間の構成ブロック	三角形	四面体	単体
ブロックを定義する稜の長さ	3	4	5
このようなブロックの一巡が欠損角あるいは"がたがたの角度" δ と交わる蝶番	頂点	稜	三角形
蝶番の次元	0	1	2
このような蝶番の"内容"	1	長さ l	面積 A
多様体の曲率への与えられた小さい領域内のすべての蝶番からの寄与	$\sum_{\text{その領域}} \delta_i$	$\sum_{\text{その領域}} l_i \delta_i$	$\sum_{\text{その領域}} A_i \delta_i$
同じ小さい領域にわたる積分として表された，この量の連続的な極限	$\frac{1}{2}\int {}^{(2)}R({}^{(2)}g)^{1/2}d^2x$	$\frac{1}{2}\int {}^{(3)}R({}^{(3)}g)^{1/2}d^3x$	$\frac{1}{2}\int {}^{(4)}R(-{}^{(4)}g)^{1/2}d^4x$

42.4 場の方程式の骨格形式

*7 Einstein の場の方程式を直接骨格計算法の言語に翻訳するよりもむしろ，Regge は Einstein の法則自身を導かせるような標準的な変分原理に向かう．それは以下のように述べる（21.2 および 43.3 節をみよ）．4–幾何学は境界上のある指定された条件を受け，次元をもたない積分（$\hbar$ の単位での作用 !），

*7 Einstein–Hilbert の変分原理が骨格形式に帰着される

$$I = (c^3/16\pi\hbar G)\int R(-g)^{1/2}d^4x \tag{42.2}$$

が極値となるように，4–幾何学を拡張された時空の領域で適応させる．この陳述は空間が物質および電磁場をもたないときにあてはまり，この陳述があまり拡張されないよう保つために以下の議論でなされる単純化である．さらにすべての長さが Planck の長さ

$$L^* = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.6\times10^{-33}\,\mathrm{cm} \tag{42.3}$$

の単位で表され，そして曲率積分が欠損角での表現によって近似されるとき，Regge は陳述 $\delta I = 0$（極値に対する条件！）は

$$(1/8\pi)\delta \sum_{\substack{\text{蝶番}\\ h=1}}^{H} A_h\delta_h = 0 \tag{42.4}$$

になることを示す．

コラム 42.2　Regge 計算法に対する流れ図

骨格 4–幾何学はそのすべての稜の長さによって完全に定まる．稜の長さから，4–幾何学におけるおのおのの蝶番に対して，以下の流れ図を追跡することによって積分された曲率を得る．

蝶番

↓

この蝶番につながる
ブロックのサイクル

↓

これらのブロックの一つ

↓

このブロックを，これらのブロックのサイクルの中で，そのサイクルの前後に，これらのブロックから分ける 2 個の四面体の“面”

↓

これらの 2 個の面の間の角度 α はブロックの $n(n-1)/2$ 個の稜の長さによって固定される

↓

与えられた蝶番での欠損角は
$\delta = 2\pi - \sum_{\text{その蝶番につながるブロック}} \alpha$

↓

積分された曲率への寄与（コラム 42.1）は，$\delta \times$(蝶番の面積）である

この解析を 2 つの方法のいずれかで適用するのが自然であることがわかる．1 番目，与えられた 4–幾何学（稜の長さの与えられた組！）を次の意味で探査できる．

稜の長さ

↓

曲率

2 番目－そしてこれが Regge 計算法の論理的基礎である－骨格計算法を用いてあらかじめ未知の 4–幾何学を Einstein の幾何力学の法則から，次の方向に進んで導き出すことができる．

初期条件が稜の長さのあるものについての情報に翻訳される

Einstein の方程式が曲率（おのおのの蝶番の欠損角）についての条件として表される

↓

稜の長さの残りを固定せよ（区域指定の精度についての当然な選択は別として）

この変分原理で意図されている変化で，ある稜の長さは固定されているものと考えられる．稜の長さは考察されている時空の領域の境界で指定される条件と関係がある．幸いに，これらの境界条件の正確な定式化に入ることはここでは必要でない．なぜならある原理の問題は一般相対論における境界条件の正確な定式化について依然明確にされるものとして残っているからである（21.12 節をみよ）．むしろ，重要であるものは，種々の蝶番での欠損角を増大したり減少したりするときの，解析されている領域内部のブロックの稜の長さにおける変化の結果である．Regge (1961) は彼の基礎的な論文で，代表的な欠損角 δ_h は多数の稜の長さ l_p の値に複雑な三角法で依存すると注意する．しかし，彼は“まったく注目すべきであるが，δ_h が定数であるかのように変分を遂行することができる”．こうして変分原理を形

$$(1/8\pi)\sum_{\substack{\text{蝶番}\\h=1}}^{H}\delta_k\delta A_h=0 \tag{42.5}$$

に帰着することを証明する（彼の論文の付録）．ここに h 番目の三角形の形の蝶番の領域における変化は，基本的な三角法により，

$$\delta A_h=\frac{1}{2}\sum_{p} l_p\,\delta l_p\cot\,\theta_{ph} \tag{42.6}$$

である．この式で θ_{ph} は三角形における p 番目の稜に向かい合う角度である．したがって，空の空間における Einstein の方程式は骨格幾何学で形

*8

$$\sum_{\substack{\text{与えられた稜 } p\\ \text{を共有する蝶番}}}\delta_h\,\cot\,\theta_{ph}=0 \qquad (p=1,2,\cdots) \tag{42.7}$$

に帰着する．時空の領域内部のおのおのの稜の長さに対する 1 つの方程式を解析すればよい．

42.5　格子構造の選択

2 つの質問が Regge 計算法の実際の応用に生ずる．そしてどちらもこの骨格解析の実際の応用に対して，もっとも好都合であるよう解決をこれまでに受けているとはいえない．どのような種類の格子を用いるべきか？　稜の長さの選択に存在する自由度をいかにもっともよく利用すべきか？　第 1 の質問はこの節で議論される．第 2 の質問は次の節で議論される．

*9 小さい，ほとんど長方形のブロックからつくられている格子を用いることはもっとも自
*10 然にみえるだろう．おのおののブロックの長方形からのずれは，局所的な曲率の量および方向性によって条件づけられる．しかし，このようなブロックは“柔軟”である．ある角度と稜の長さをともに指定することによってブロックに堅さを与えることができるだろう．しかしそうすると Regge の処方の均整さを失うだろう．それは，稜の長さを与え，そして稜の長さのみを与え，幾何学を定義するために，おのおのの稜の長さを自由にそして独立に与えるというものである．さらに，新しい角度の決定に対する新しい式を含めて，Regge 方程式を再導出しなければならないだろう．したがって $5\times4/2=10$ 個の稜の長さをもつ
*11 単体を支持して準三角形を廃棄する．これが決定されると，平坦な時空内でも単体はすべてが同一の稜の長さをもちえない．2 次元の平坦な空間は同一の正三角形で満たされうる．しかし 3 次元ですでに多様体を同一の正四面体で満たすことは不可能である．ダイヤモンド内の与えられた炭素原子はもっとも近い隣の炭素原子に四面体の絆で結びつけられている．しかしわずかな反射は，与えられた原子に帰属されうるセルは正四面体の形をもつことができないことを示す．

*8　Einstein の場の方程式は骨格形式に帰着される
*9　格子構造の選択
*10　(1) 柔軟性を避けること
*11　(2) 等しくない稜の長さに対する必要性

骨接ぎはブロックを結びつける自然な方法であるようにみえるだろう．初めに 1 次元構造をつくる，これらを 2 次元構造に集める，これらを 3 次元構造に集める，そしてこれら
*12 を最終の 4 次元構造に集める．1 次元構造は点，1, 2, 3,…からつくられており，交互に線要素，12, 23, 34,…をもつ．2 次元構造の構成を始めるには 2 番目の 1 次元構造をとる．その点を $1'$, $2'$, $3'$,…他とラベルをつけるのが自然なようにみえるだろう．しかし，そのラベルづけは 1 と $1'$ との間に，2 と $2'$ との間に等，はしごの様式にならって交差接続を意味するだろう．そうすると基本的なセルは準長方形であるだろう．それらは除外されるべき “柔軟性” をもつだろう．したがって 2 番目の 1 次元構造の点を $1\frac{1}{2}'$, $2\frac{1}{2}'$, $3\frac{1}{2}'$，他と再ラベルづけをする．言外の意味は，元の 1 次元構造の点 2 および 3 と $2\frac{1}{2}'$ を交差接続をする等である．希望通り，2 次元の背景で完全に堅い，橋の太い梁構造のような何かができ上がる．同じ構成は，拡張されると，平面を三角形ですっかり満たす．今や単純な，標準的な 2 次元構造をもつ．さらに前へ進んで 3 次元構造を容易に構成できると誤って結論するかもしれない．誤りは平坦な空間のトポロジーは必然的に正しいという暗黙の仮定に存在する．

たとえば，3–球のトポロジーをもつ 3–幾何学の時間発展を定めることを問題にする．この 3–球は長い波長の重力波によっておそらく強く理想的なものから変形される．点の正しい調整が直接ぜひほしいものである．したがって幾何学の波による変形（稜の長さの理想的なものからの変更）のどのような考察も当分無視する．完全な 3–球を 2 次元の面（sheet）にいかに分割するかを尋ねよ．ここでおのおのの面は次の面からある距離だけ分離されるべく理解されている．この点で 2 つの選択できる手段は略して “ブロック” および “球” とよぶことができると提案される．

*13 (1) **ブロック**：3–球は 5 個の同一の，四面体のような固体のブロック（5 個の頂点，これらの頂点の任意の一つを除外する 5 つの方法！）に分解されることに注意する．これらの “四面体” の 1 つを選ぶ．1 つの頂点を極点として選び他の 3 つの頂点を通る面を基底として選ぶ．その基底にすでに記述された 2 次元の格子構造を与える．基底の上に積み上げられた多数の付加的な面を導入して，等しい間隔の層が極点に達するようにする．おのおのの層はその前の層よりも少ない点をもつ．1 つの “四面体” 内部での 3–幾何学の分解はそれによって達成される．しかし，解かれていない質問が残る．この層状の構造を隣接する “四面体” における対応する構造に規則正しい方法でいかに結びつけるかという質問だけでなく，このような規則正しい接続がそもそも可能であるかどうかという質問が残る．同じ質問は 3–球を同一の “四面体” に分解する別な 2 つの方法について尋ねられうる [Coxeter (1948)，とくに pp.292, 293．8 個の頂点のすべてによって定義される 16 個の四面体あるいは 120 個の頂点のすべてによって定義される 600 個の四面体]．しかし到達できる精度に上限を置くという代価を払って，構造の接続の質問を単純な方法で除去することができる．述べられた数の頂点（5 あるいは 8 あるいは 120）を 3–幾何学の骨格化で用いられるであろう点の総数としてとる（さらなる細分割は要求されないかあるいは認められない）．

---

*12 (3) 2 次元構造の構成

*13 (4) “ブロックの方法” によって 2D 構造からつくられる 3D 構造

任意のコンピュータの記憶能力の限界を考慮して，探求の計算で 120 個の捜索点まで制限を予期することはそんなに馬鹿げてはいない．

*14　(2) **球**：3–球の “原子化” への択一的な手段は，3–球上に北極および南極および超球面角 χ（第 1 の極で $\chi = 0$，第 2 の極で $\chi = \pi$，赤道で $\chi = \pi/2$．コラム 27.2 をみよ）を導入することによって始まる．おのおのの 2 次元の層は一定の χ の表面上に存在させる（χ はある整数 × ある間隔 $\Delta\chi$ に等しい）．この 2–球の構造はすでに基本的な三角形に骨格化されているものとみなされるべきである（“十分に完全な Buckminster Fuller 測地線のドーム”）．したがって “面” あるいは三角形の数 F，稜の長さの数 E，および頂点の数 V は Euler の関係によって結びついていなければならない．

$$F-E+V = \left(\begin{matrix}\text{トポロジーに依存する}\\ \text{数あるいは “Euler 指標”}\end{matrix}\right) = \begin{cases} 2 & \text{（2–球に対して）} \\ 0 & \text{（2–トーラスに対して）}\end{cases} \tag{42.8}$$

この関係からおのおのの頂点が六角形の中心に存在することは不可能であることが導かれる（おのおのの頂点は 6 個の三角形の収束の点である）．これが真実であると，測地線のドームのパターンの詳細な調査は 5 個の三角形のみが出会う頂点があることを示しても驚かない．Euler の関係の要求を満たすためには，違ったすべての 6–三角形の頂点が存在するものの中で 12 個のこのような 5–三角形の頂点をもてば十分である．

$$\begin{array}{ll}
n & \text{5–三角形の頂点の数} \\
V - n & \text{6–三角形の頂点の数} \\
F = (V-n)(6/3) + n(5/3) & \text{三角形の数} \\
E = (V-n)(6/2) + n(5/2) & \text{稜の数} \\
V = (V-n)(6/6) + n & \text{頂点の数} \\
2 = F - E + V = n/6 & \text{Euler 指標} \\
n = 12 &
\end{array} \tag{42.9}$$

三角形の面をもつすべての図形の中で，20 面体はこの条件を満たすもっとも小さい数の面をもつ図形である（5–三角形の頂点のみ！）．

もしおのおのの 2–面が測地線ドームの頂点のパターンをもつならば，いかにして 1 つのドームが次のドームに結びつけられて堅い骨格の 3–幾何学がつくられるか？　もしドームが平坦な 3–幾何学にはめこまれるならば，堅さは何の問題でもないだろう．おのおののドーム自身すでに堅いだろう．しかし，3–幾何学は平坦であるべく与えられていない．2 個の 2–球間の空間の完全に決定論的な骨格化によってのみドームは曲がった空間の幾何学の背景内で堅さを与えられるだろう．(1) 1 つの表面の各頂点からのただ 1 つの接続子を次の表面内の対応する頂点へ走らせることによってでなく（“柔軟な構造” !）(2) 1 つの表面を移動させてその頂点のおのおのが “下” 表面内の三角形の中心の上，あるいはほとんど上にくるようにすることによってでなく，である．第 1 に，頂点の数と三角形の数は通

*14　(5) “球の方法” による 2D からの 3D 構造

常一致しないだろう．第2に，それらが一致するときでも，上の表面の頂点を下の三角形の3個の頂点に結びつけることは構造に必要な堅さを与えないだろう．間の空間はある四面体を含むだろう，しかしいたるところくまなく四面体に分解されることはないだろう．(3) 3–幾何学の骨格化への自然なそして実行可能な手段は，1つの表面内の各頂点から次の表面内の対応する頂点へ接続子を走らせることであるが，しかしこの接続を3–幾何学に堅さを与えるであろう付加的な構造で肉づけすることである．間に起こる頂点と接続子はコラム42.3に例示されている．

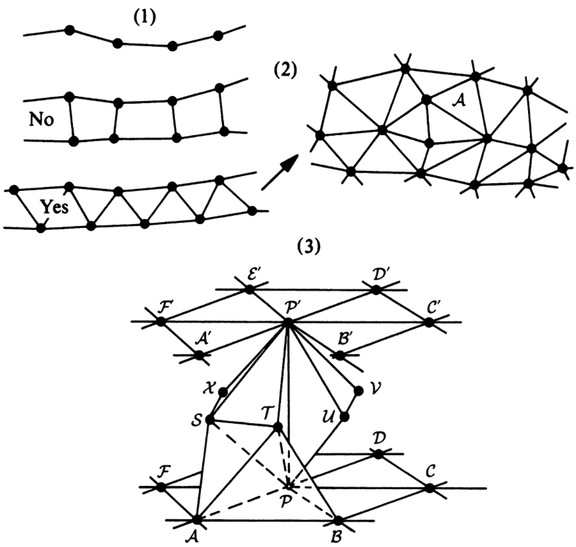
*15 3–幾何学の骨格化から4–幾何学の骨格化へ向かう際に，同様に進むことが自然である．(1) 2個の3–幾何学内の点の同一のパターンを用いる．(2) ただ1つの接続子によって対応する点を結びつける．(3) 2個の3–幾何学間の中途で，あるいはほとんど中途で頂点の全付加的なパターンを挿入する．これらの付加的な頂点のおのおのはすぐ上の3–幾何学内の四面体の中心に“双対”であり，そしてほとんど“下に”存在する．(4) おのおのの付加的な頂点をすぐ上の四面体の頂点に，すぐ下の四面体の頂点に，そして直接の近傍である別な付加的な頂点に結びつける．(5) この方法で4–幾何学を単体（堅く定義された長さのおのおの）に分割するに必要とされる稜の長さを得る．

コラム42.3 より低い次元の骨格幾何学からより高い次元の骨格幾何学の骨接ぎ

(1) 点と線分の交互な列としての1次元構造．(2) 2次元構造 (a)“柔軟な”（受け入れられない）および (b) 確定された（三角形の角度は稜の長さによって完全に定まる）．この構造が拡張されるとき，右にあるように，“標準的な”頂点はそれに蝶番でつながる6個の三角形をもつ．しかし，$\mathcal{A}$ で示されている型の少なくとも12個の5–三角形の頂点は，もし2–幾何学が2–球に閉鎖しうるならば内挿されるべきである．(3) 骨格3–幾何学は，骨格2–幾何学 $\cdots\mathcal{AB}\cdots\mathcal{FPC}\cdots\mathcal{ED}\cdots$ および同様の構造 $\cdots\mathcal{A'B'}\cdots\mathcal{F'P'C'}\cdots\mathcal{E'D'}\cdots$ の間を以下のように満たすことによって得られる．(a) 2個の2–幾何学における対応する点の間に $\mathcal{PP'}$ のような直接的な接続子を挿入する．(b) $\mathcal{STUVWX}$ のような“補足の頂点”の中間的な層を挿入する．これらの補足の頂点のおのおのは，その“上”の三角形の中心とその“下”の対応する三角形の中心との間のほぼ中央に存在する．(c) おのおののこのような“補足の頂点”を上，下，および同じ平面内の直接的なすぐ近くのものと結びつける．(d) すべての稜の長さを与える．(e) それから2個の2–幾何学の間の骨格3–幾何学が堅く指定される．それは5つの型の四面体から，以下のようにつくられる．(1) $\mathcal{PP'ST}$ のような“右に通るブロック”（$\mathcal{P}$ が正常な頂点であるときには $\mathcal{PP'}$ 上のこれらの蝶番の6個，$\mathcal{P}$ が右上の $\mathcal{A}$ によって示されているような，5重の頂点であるときには5個）．(2) $\mathcal{ABPT}$ のような，“下に面するブロック”．(3) $\mathcal{APST}$ のような下に束ねられているブロック．

*15 (6) 3D構造からつくられる4D構造

(4,5) 対応する“上に面するブロック”および上に束ねられている“ブロック”(示されていない). おのおのの種類のブロックの数は，2–幾何学の 2 つの極端な場合に対してここで適切にリストされている．それらは，(a) 平面内で無制限に広がる正常な六角形の格子および (b) 2–球への締めくくりを許すであろう 5 重の頂点（“型 $\mathcal{A}$ の頂点”）の極小の数からなる格子，の場合である．



上の（あるいは下の）面の 2–幾何学	三角形からなる六角形のパターン	三角形からなる 20 面体
そのトポロジー	無限の 2–平面	2–球
上の面上の頂点	V	12
これらの頂点の性質	6 重	5 重
上の面上の稜の長さ	$3V$	$\frac{5}{2}V = 30$
上の面上の三角形	$2V$	20
“補足の頂点” の数	$2V$	20
外に面するブロック	$2V$	20
外で束ねるブロック	$3V$	30
右に通るブロック	$6V$	60
内で束ねるブロック	$3V$	30
内に面するブロック	$2V$	20

42.6 稜の長さの選択

*16 4–幾何学の格子構造に対してはここまでとする．今や別な問題，稜の長さの選択に存在する自由度について考える．なぜもっとも単純な選択をしてすべての稜を光線にしないか？ なぜなら 4–幾何学はそうすると完全には定まらないだろうから．幾何学 $g_{\alpha\beta}(x^\mu)$ は幾何学 $\lambda(x^\mu)g_{\alpha\beta}(x^\mu)$ と異なる．たとえ 1 つの幾何学で光線によって結ばれる同じ点は別な幾何学でも光線によって結びつけられているとしてもである．

*17 もし稜のいずれもヌルでないならば，稜の長さのあるものを空間的に，あるものを時間的にとることは，それでもやはり自然である．したがって三角形の面積 A はある場合には実数であり，別な場合には虚数である．3–空間では 2 つのベクトル $\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{C}$ によって張られる平行四辺形（2 重の三角形）は 2 つのベクトルに**垂直な**ベクトル

$$2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$$

によって記述される．$\boldsymbol{A}$ の大きさを公式

$$4A^2 = \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{C}^2 - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})^2$$

から得る．4–空間で，$\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{C}$ を三角形の 2 つの稜とする．そうすると，3 次元におけるように，$2\boldsymbol{A}$ は，$\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{C}$ からつくられるバイベクトルに**双対**である．言い換えれば，もし $\boldsymbol{B}$ が t 方向に進み，そして $\boldsymbol{C}$ が z 方向に進むならば，$\boldsymbol{A}$ は (x, y) 平面内に存在するバイベクトルである．したがってその大きさ A は**実数**量と考えられるべきである．したがって面積 A に対する適切な公式は

$$4A^2 = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})^2 - \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{C}^2 \tag{42.10}$$

である（Tulio Regge）．量 A は欠損角 δ が実数であるときは実数である．こうして幾何学的に重要な積 $A\delta$ もまた実数である．

蝶番が (x, y) 平面内に存在するときには，他方，量 A は純粋に虚数である．その場合にはこの蝶番上を振動する単体のサイクル周りにとられる試験ベクトルは，z および t 成分においてのみ変化を受けている．すなわち，試験ベクトルは Lorentz ブーストを経験している．欠損角 δ もまた純粋に虚数である．したがってまた積 $A\delta$ は純粋に実数の量である．

*18 さて稜の長さの特徴から稜の長さの大きさに注意を向ける．基本的なブロックは大ざっぱに等しい基底上で異なる方向の空間曲率をふさぐことが望ましい．言い換えれば，長い針型のブロックやパンケーキ型の四面体および単体をもたないことが望ましい．この自然な要求は，時間についての前進が空間についてのサイドステップに匹敵すべきであることを意味する．このような要求を述べなければならないという事実そのものがすでに明白であったはずの 1 つの事情，“蝶番の方程式” を表現する．

---

*16 稜の長さの選択

*17 (1) あるものを時間的に，別なものを空間的に選ぶ

*18 (2) 空間的な長さに匹敵する時間的な長さを選ぶ

$$\sum_{\text{稜 } p \text{ を共有する蝶番 } h} \delta_h \cot\theta_{ph} = 0 \quad (p = 1, 2, \cdots) \tag{42.7}$$

それらは稜と同じ多数の式からなるけれども，すべての稜の長さを定めるべく適切である
*19 とみなされえない．必然的にこれらの方程式の間には関係があり，それらを独立であることから妨げる．方程式は必然的に大きく任意な骨格化過程の詳細をすべて定めることはできない．それらは一般相対論の場の方程式が座標系を定めることができる以上には何もすることができない．与えられたパターンの頂点で（コラム 42.3 における図形の 4 次元の一般化），依然として (a) 構造の相次ぐ層を互いにいかに密接にとるかという選択，および (b) 与えられた層上の空間内で与えられた数の点をいかに分布して精度が最大の報酬を達成するか（より大きな曲率の領域でより大きな点の密度）という選択をもつ．Regge 計算法に基づく実際的なコンピュータプログラムを準備するには，蝶番の方程式および初期条件のみならず，選択 (a) および (b) に内在するすべての任意性を取り除く明確な計算法をもつ機械を提供しなければならない．

*20 必要な超稜角 α および欠損角 δ をほかの何でもなく稜の長さによって定める，堅い幾何学および 4 次元の幾何学からの公式は Wheeler（1964a, pp.469, 470 および 490）および C.Y.Wong（1971）によって要約されている．Regge（1961）もまた Riemann 曲率テンソルそのものに対する，欠損角および与えられた方向に走る稜の数による公式を与える［また Wheeler（1964a, p.471）をみよ］．

42.7　Regge 計算法の過去の応用

*21 Wong（1971）は Regge 計算法を，時間発展のない，したがって幾何学は静的として取り扱うことができ，さらに球対称である問題に適用した．彼は Schwarzschild 幾何学および Reissner–Nordstrøm 幾何学を骨格化の方法によって定めた．引力の中心を取り巻く球の列を考える．Wong はおのおのを 20 面体として近似する．条件

$$^{(3)}R = 16\pi\,(\text{3–空間上のエネルギー密度})$$

（21.5 節）はおのおのの 20 面体の次元を 2 つの先立つ 20 面体によって定まる回帰関係を与える．厳密な幾何学の領域の骨格表示における誤りは，解析の方法，解析のもとでの量，および細分割の精密さに依存して，大ざっぱに 10%から 1%以下にわたる．

幾何学の骨格化は偏微分方程式を差分方程式としてたんに書き直すことと区別されるべ
*22 きである．時空を終始個々の単体のレベルまでばらばらにすることなしに骨格化を利用できる 3 つの例示を今までにもつ．第 1 の例示は Wong の仕事の最初の部分である，そこでは時間の次元が明白に現れない．したがってブロックは 3 次元のみである．第 2 は択一的

*19　(3) なぜある長さは任意に選ばれなければならないか
*20　稜の長さによる欠損角
*21　Regge 計算法の過去の応用
*22　部分的な骨格化

な取り扱いであって，またWongによって与えられており，θ および ϕ についての対称性を考慮するために t についての対称性を越える．それは空間を球殻に分割し，そのおのおのにおいて幾何学は紙の錐体の幾何学が平坦であるのとまったく同じ意味で“擬平坦”である．第3は球状の星の重力崩壊に対するMay and White (1966) による数値解であり，そこでは θ および ϕ について対称性は存在するが，r あるいは t について対称性は存在しない．この地区分けは r, t 平面内でのみ起こる．Regge計算法（おのおののブロック内で平坦な幾何学）に比べたときの相違はおのおのの殻に与えられる調整可能な“円錐形であること”(conicity) である．例は計算で幾何学を骨格化することについての決定は，通常“いずれか”でなくて“どれだけか”であることを示す．

42.8 Regge計算法の未来

*23 要約すると，Reggeの骨格計算法は，実際の項について正常な解析的な方法の力を越える計算問題の到達内で進む．それは考察している時空領域の十分精密な細分割によって任意の望ましい正確さのレベルを与える．その番号づけられたブロックによって，それはまたこのような計算の結果をみせる実際的な方法を与える．最後に，一般相対論を定式化するというReggeの真に幾何学的な方法はいつかEinsteinの場の方程式（Cartanの“回転モーメント”，15章をみよ）を鋭くそして明白に目立たせ，そしていわゆる“幾何力学の場の運動量”（Regge計算法における一般相対論の変分問題と関係する境界値問題の解析，21.12節をみよ）の幾何学的な意義を明らかにすることを希望できる．

*23 未来に対する希望

43章
超空間：幾何学の力学に対する競技場

旅人よ，道はない．
歩くことによって道はつくられる．

ANTONIO MACHADO（1940）

[本章は完全にトラック–2である．21章（初期値形式）は本章に対する準備として必要とされる．本章を読むとき42章（Regge計算法）は助けとなるだろう．本章は後のどの章に対する準備としても必要とされないが，44章（未来像）で有用となるだろう．]

43.1 空間，超空間，そして時空は区別される

*1 超空間 [Wheeler (1964a), p.459 ff] は幾何力学の競技場である．Einsteinの曲がった空間幾何学の力学は，粒子の力学が時空内で発展するように，超空間内でその経過をたどる．本章は超空間の1つの単純なバージョンを与え，また超空間の別なバージョンに対して，その印象を少し述べる．それは超空間における幾何学の古典力学をコラム25.3および25.4のHamilton–Jacobiの原理によって記述する．力学のどのようなバージョンも，古典力学から量子論への飛躍をより短くすることはない．こうして古典力学は超空間における波頭の伝播に対する原理（“Einstein–Hamilton–Jacobiあるいは EHJ方程式”），およびそれらの波頭がどこで建設的な干渉の古典的な等価物（“包絡面の形成”）を与えるかを見出すための原理を与える．このようにして，超空間を薄く切る鋭く，薄い“履歴の群葉”として表される3–幾何学の時間発展の足跡を見出す．量子原理はこの決定論的な記述を有限の厚さにぼやけた履歴の群葉で置き換える．したがって，量子揺らぎはPlanckの長さ，$L^* = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.6 \times 10^{-33}\,\mathrm{cm}$，およびそれ以下の程度の距離での領域を支配する空間の幾何学で起こる．曲がった空の空間の力学のみを考慮することによって，現在の概説は単純化される．源が存在し考慮されなければならないときは，補足の項が追加されなければならない．それに関するいくつかの文献がリストされている．

半世紀の過程において，古典的なおよび量子論的な幾何学の力学の，いくらかの理解に通じたすべての困難な研究において，もっとも困難な点はまたもっとも単純な点であった．
*2 力学的な対象は時空でない．それは空間である．空間の幾何学的な形状が時間とともに変化する．しかし変化する空間は3次元空間である（コラム43.1をみよ）．

---
*1 超空間は幾何力学に対する競技場である
*2 3–幾何学は力学的な対象である

コラム 43.1 幾何力学が粒子の力学と比較される

概念	粒子の力学	幾何力学
力学の実体	粒子	空間
瞬間的な形状の記述	x, t (“事象”)	${}^{(3)}\mathcal{G}$ (“3–幾何学”)
古典的な履歴	$x = x(t)$	${}^{(4)}\mathcal{G}$ (“4–幾何学”)
履歴は形状の貯蔵であるか？	ハイ．世界線上のすべての点は粒子の瞬間的な形状を与える	ハイ．${}^{(4)}\mathcal{G}$ を通してのすべての空間的な薄片は空間の瞬間的な形状を与える
力学の競技場	時空（すべての点 x, t の全体）	超空間 (すべての ${}^{(3)}\mathcal{G}$ の全体)

空間はここでは“閉集合”あるいは，数学的な言葉で，“コンパクト”（compact）として取り扱われるだろう，なぜなら物理学は Einstein の 2 次の微分方程式に必要で適切な境界条件として，閉包（closure）の要求を，追加するからである [Einstein（1934, p.52, 1950），Wheeler（1959, 1964c），Hönl（1962），また 21.12 節をみよ] あるいは，なぜならその要求は数学的な解析を単純化するからである，あるいはこれら両方の理由のためである．

*3 滑らかで，閉じた 3–幾何学は図 43.1 に図示されているように四面体からつくられる骨格 3–幾何学によって近似できる（Regge 計算法については 42 章をみよ）．この例では 98 個の稜の長さを指定して幾何学のすべての特徴を固定する．そして 98 次元の空間内でただ 1 つの点の位置を与えることによって，これらの 98 個の稜の長さを固定する．この 98 次元の多様体，この“切断された超空間”は，領域内の追跡点の密度を制限なく増大する理想化において超空間に移行する [Wheeler（1964a), pp.453, 459, 463, 495]．より数学的に詳細な超空間の説明は，DeWitt（1967a, b), Wheeler（1970），および Fisher（1970）によって与えられている．

切断された超空間内であれ，あるいは完全な超空間内であれ，代表点を 1 つの位置から近傍の位置へ動かす．そうするとすべての稜の長さは変わる．そして図 43.1 の 3–幾何学は生きているかのように動く．“空間の力学”について語るべく意味するものについて，それよりよい例示はなかなかない．

述語“3–幾何学”は古典論におけるのと同様に，量子幾何力学においても意味をなす．超空間も同様に意味をなす．しかし，時空は意味をなさない．3–幾何学を与え，そしてその時間変化率を与えよ．それは代表的な状況のもとで（21 章をみよ）幾何学の全時間発展を定めるのに十分である．言い換えれば，問題を古典物理学の内容で考えていさえすれば，全 4 次元時空の幾何学を定めるべく十分である．量子物理学の現実の世界では，しかし，力
*4 学変数とその時間変化率の両方を与えることはできない．不確定性原理が禁止する．ある

*3 有限次元の“切断された（truncated）超空間”

*4 時空の概念は量子原理と両立しない

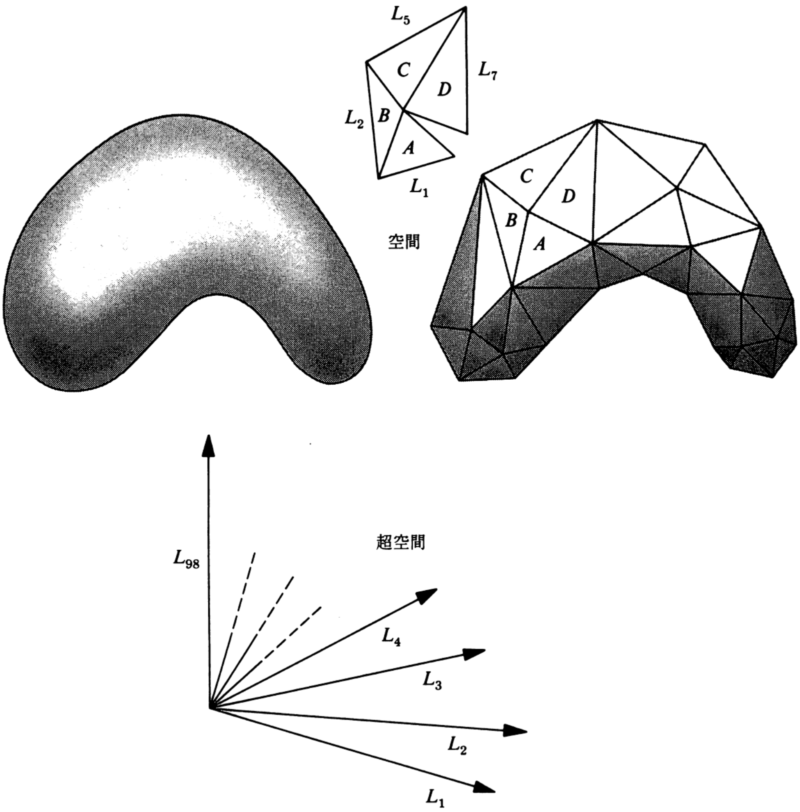


図 43.1　超空間の単純な近似．上部左は，空間（2 次元として描かれているが，実際には 3 次元）を表す．上部右は，空間の単純な近似を表す．近似は任意に繊細な分解の極限へいくことによって，任意によくなされうる．代表的な位置での曲率は欠損角によって測定される．この角度はその位置で交わる単体の稜の長さによって完全に定まる（図における $L_1, L_2, \cdots, L_8$）．幾何学の単純な表示において全部で 98 個の稜の長さが存在するときには，この幾何学は 98 次元空間内のただ 1 個の点によって完全に指定される（下部の図，“超空間”）．

瞬間に正確に 3–幾何学が与えられると，その瞬間の 3–幾何学の時間変化率をまた知ることができない．言い換えれば，幾何力学の場の座標が与えられると，幾何力学の場の運動量を知ることができない．もし内在的な 3–幾何学を指定するならば，外在的な曲率をも指定することはできない．

不確定性原理はこうして，“時間発展する空間の決定論的な履歴”をいかなる方法であれ予言するもの，あるいは履歴に意味を与えるものを許さない．**時空は予言できない．したがって，時空に意味はない．というのは量子論による評決である．**古典的な一般相対論のすべて，4 次元の時空幾何学に対する中心的な対象は，古典的な近似を除いて単純には存在しない．

これらの考察は，時空および時間の概念は物理学の理論の構造において，1 番目の概念でなくて 2 番目の概念であることを明らかにする．これらの概念は古典的な近似において成り立つ．しかし，それらは，量子幾何力学の効果が重要になる状況のもとで意味をもたないしまた応用ももたない．そうすると，すべての事象，過去，現在，あるいは未来が，おのおのの事象からその近傍の事象への永久に確立されている Einstein 間隔をもつ “時空”

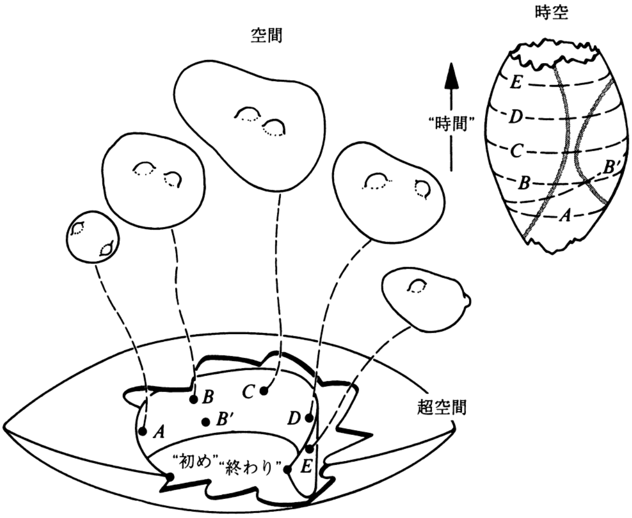


図 43.2 空間，時空，そして超空間．上部左：空間の膨張および再収縮の過程において空間が到達する 5 個の輪郭の見本，A, B, C, D, E．下：超空間およびこれら 5 個の輪郭の見本．おのおのは超空間内の点によって表現されている．上部右：時空．A のように，空間的な切り込みは，空間の瞬間的な輪郭を与える．注意を，時空を通して薄片の 1 個のパラメータの群 A, B, C, D, E に制限する強制は存在しない．“たくさんの指をもつ時間” という文は，薄片を 1 個の輪郭にさほど制限しないように告げるスローガンであり，そして B' はこの自由度の例である．3–幾何学 B' および A, B, C, D, E は，与えられた古典的な時空内のものは何であれ，すべての空間的な薄片によって得られるすべての 3–幾何学のように，超空間の空間的な時空の薄い断片を切り，図のように，履歴のただ 1 個の曲がった 1 葉の上に存在する．異なる時空，別な言葉では，Einstein の場の方程式の異なる解は，超空間を通して薄切りする履歴の（図に示されていない）異なる 1 葉を意味する．

とよばれる壮大な目録によって前もって決められているという自然観を差し控えなければならない．時空は存在しない，時間は存在しない，以前は存在しない，以後は存在しない．“次に” 起こるものという問題は意味をもたない．

時空は正しい方法でないということは，量子原理と一致した幾何学の力学を記述する正しい方法が**存在**しないということを意味しない．超空間は力学を記述する **1 つの**正しい方法への手段である（図 43.2 をみよ）．

43.2 $^{(3)}\mathcal{G}$ の超空間の言葉で記述される幾何学の力学

*5 時空が与えられると，それに対応して超空間を薄切りにした履歴の 1 葉を構成することができる．逆に，履歴の 1 葉が与えられると，時空を構成することができる．

通常 “からくり箱” として知られている子どもの玩具を考える．一番外の箱を開けると別な箱が出てくるだけである．2 番目の箱が開かれると，さらに別な箱が現れ，最終的に多数の箱が床の上に散乱されるまで続く．あるいは逆に箱は一緒に集められ，別な箱の中に 1 つの箱が収められ，元の詰め合わせを再現することができる．$^{(3)}\mathcal{G}$ の $^{(4)}\mathcal{G}$ への詰め合わせははるかに複雑である．自然は $^{(3)}\mathcal{G}$ の単純な順序づけを与えない．無作為にとられた，力学的に許される $^{(3)}\mathcal{G}$ の 2 個はしばしば，互いに一度あるいは何度も交差するだろ

*5 時空は超空間を薄切りする履歴の古典的な 1 葉である

う．$^{(4)}\mathcal{G}$ を揺り動かすときには，したがって途方もなく多数の $^{(3)}\mathcal{G}$ は想像以上に "床にわたって巻き散らされる．" 逆に，$^{(3)}\mathcal{G}$ のすべてを集めて履歴の 1 葉をつくるときには，予見しなかった堅さをもつ構造を得る．この堅さは明らかで，よく定義された $^{(3)}\mathcal{G}$ を互いに無限に豊かに綴じ込んだり交差したりすることから生ずる．

要約すると，(1) 古典的な幾何力学は原理的に，超空間を薄切りする履歴の 1 葉を計算しそして構成するための工夫，演算法，規則を構成する．(2) 履歴のこの 1 葉上に存在する $^{(3)}\mathcal{G}$ はもちろん 3–幾何学である．履歴のこの 1 葉上に存在しないより多数の $^{(3)}\mathcal{G}$ は 3–幾何学でない．(3) $^{(3)}\mathcal{G}$ は古典的な時空であり，$^{(4)}\mathcal{G}$ のブロックである．(4) これらのブロックの絡み合いおよび相互連結は $^{(4)}\mathcal{G}$ にその存在，その次元，その構造を与える．(5) この構造においてすべての $^{(3)}\mathcal{G}$ はそれ自身の堅く固定された位置をもつ．(6) この意味においておのおのの 3–幾何学の "多くの指をもつ時間" は非常に絡み合う構成自身によって指定されると言うことができる．Baierlein, Sharp and Wheeler (1962) は "時間の情報の保持者としての 3–幾何学" のこの概念について，少し詳しく述べている．

時空の教科書の概念といかに異なるか！ そこでは時空の幾何学は "事象" として知られる基本的な対象，あるいは点から構成されるものと考えられる．ここでは，対照的に，基本的な概念は，**抽象的に (in abstracto)** 3–幾何学であり，それから事象のアイデアが導かれる．こうして，(1) 事象はこれこれの $^{(3)}\mathcal{G}$ の交わりに存在する．そして (2) 事象はある別な $^{(3)}\mathcal{G}$ に時間的な関係（より以前のあるいはより以後のあるいは同時の）をもち，この $^{(3)}\mathcal{G}$ は今度は (3) すべての他の $^{(3)}\mathcal{G}$ の交差に由来する．

古典論から量子論へ向かうときには，半古典的な近似を除いて，時空の概念を断念する．したがって，通常非常に基本的とみなされる "事象" の概念を定義する，任意の直接的な可能性を，それが何であれ断念する．しかし，ここでも理論そのものは，どのような場合とも同じく [Bohr and Rosenfeld (1933)]，自ら，自分自身の自然な方法で，原理的に測定可能なすべての量を測定するための原理的な手続きを定義する．

*6　量子論は 3–幾何学であるものと 3–幾何学でないものとの間のはっきりした区別を揺るがす．量子論はおのおのの 3–幾何学にハイあるいはイイエでなく，確率振幅

$$\psi = \psi(^{(3)}\mathcal{G}) \tag{43.1}$$

を割り当てる．この確率振幅は古典的に予告される履歴の 1 葉の近くでもっとも高く，その 1 葉のいずれの側にもわずかに広がる有限の厚さの領域外で急速に小さくなる．

もし物理学的に重要な確率振幅関数の代わりに，重要な波動方程式の**代表的な**解をとるとするならば，古典的な幾何力学のような何か 1 つの足跡をみることは期待できないだろう．代表的な確率振幅関数はすべて超空間にわたって広がっている．驚くことは何もない！ 古典論においては，すでに超空間にわたって広がっている Hamilton–Jacobi 関数

$$S = S(^{(3)}\mathcal{G}) \tag{43.2}$$

を考慮に入れなければならなかった．さらに，古典的な幾何力学のこの "力学的な位相関

*6　3–幾何学に対する確率振幅

数" はただちに ψ の位相を，公式

$$\psi({}^{(3)}\mathcal{G}) = (\text{ゆるやかに変化する振幅関数})\, e^{(i/\hbar)S({}^{(3)}\mathcal{G})} \tag{43.3}$$

によって与える．これも ψ および S がともに局所化されていないことの十分なしるしである．

*7 十分に多くのこのような広がった確率振幅関数が重ね合わされて，コラム 25.3 および 25.4 の基本的な例におけるように，局所化された波束を形成するときに，力学は初めて明白に承認される．こうして，

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \cdots \tag{43.4}$$

建設的な干渉は，いくつかの個々の波の位相が一致する場合に起こる．

$$S_1({}^{(3)}\mathcal{G}) = S_2({}^{(3)}\mathcal{G}) = \cdots \tag{43.5}$$

これは 3–幾何学であるものと 3–幾何学でないものを区別する条件である．それは超空間内で履歴の 1 葉を構成するための道具である．それは幾何学の力学への手段である．さらに，それは量子原理について 1 つでない言葉を述べる式である．式 (43.5) における建設的な干渉の式が量子論から古典論への飛躍をもっとも短くすることは驚くにあたらない．

43.3 Einstein–Hamilton–Jacobi の方程式

もし Hamilton–Jacobi 関数 $S({}^{(3)}\mathcal{G})$ に対する微分方程式を書き下ろすべきであるならば，それを解き，それから解の性質を解析する？ 厳密な逆はもっと単純である．解の性質をみて，その調査から力学的な位相あるいは作用 S はどのような方程式を満足しなければならないかを見出す．

Hilbert の最小作用の原理は

$$I_{\text{Hilbert}} = (1/16\pi)\int {}^{(4)}R(-g)^{1/2}\, d^4x = \text{極値} \tag{43.6}$$

となる．被積分関数における完全微分を分離した後に，残されるものは ［式 (21.13) および (21.95) をみよ］

$$\begin{aligned}(1/16\pi)I_{\text{ADM}} = I_{\text{真の}} = (1/16\pi)\int\Big\{&\pi^{ij}\,\partial g_{ij}/\partial t + Ng^{1/2}R \\ &+ Ng^{-1/2}\left[\frac{1}{2}(\operatorname{Tr}\boldsymbol{n})^2 - \operatorname{Tr}(\boldsymbol{n}^2)\right] + 2N_i\pi^{ij}{}_{|j}\Big\}d^4x\end{aligned} \tag{43.7}$$

になる．式 (43.7) において，しかし式 (43.6) においてでない，g は 3 次元の計量テンソル g_{ij} の行列式を表し，そして R は 3–幾何学のスカラー曲率不変量を表す．添字 ${}^{(3)}$ は単純さのために省略されている．積分は (1) 3–幾何学が計量 $g_{ij}{}'(x, y, z)$ で与えられる空間

*7 波束は古典的な幾何力学を回復する

的な超曲面から，(2) 3–幾何学が計量 $g_{ij}''(x,y,z)$ で与えられる空間的な超曲面へ延長される．両者の間の時空の厚切りにおいて適合しうるものは何であろうと，今や積分を極値化するべく調整されると考えられるべきである．したがって積分 I_{ADM} の値は 2 つの超曲面上の計量の汎関数となり，それ以上でない．

次に，最初の超曲面上の計量 $g'_{ij}(x,y,z)$ を固定したまま，後の超曲面上の計量をわずかに変える．新しい変分問題を解いて I_{ADM} の新しい値を得る．さらにこのように進んで，おのおのの新しい g_{ij}'' に対して I_{ADM} の新しい値を得る．このように定義された計量の汎関数 I_{ADM} を，2 つの与えられた 3–幾何学を結ぶ "幾何学の履歴" の "Hamilton の主関数"，あるいは "作用" あるいは "力学的な経路の長さ*"，$S(g_{ij}(x,y,z))$ とよぶ．二重のダッシュはここでおよび今後記号を単純化するために g_{ij}'' から落とされている．力学の他の分野から，このように定義された量 $S(g_{ij})$ は，存在するときには，たとえそれが特解であっても，**つねに** Hamilton–Jacobi 方程式の解である．Jacobi はより一般的な解を探すことができたが，Hamilton はすでにその解をもっていた！

式 (43.7) が経過 N および移動成分 N_i の変分について極値であるためには，これらの 4 つの量の係数がゼロになるべきであることが必要であった．こうして，

$$g^{-1/2}\left[\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{n})^2-\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{n}^2\right]+g^{1/2}R=0 \tag{43.8}$$

および

$$\pi^{ij}{}_{|j}=0 \tag{43.9}$$

作用の極値に対する表現で，ただ 1 つの項，第 1 項が残される．

$$S(g(x,y,z))=I_{\mathrm{ADM,\,極値}}=\int_{g'_{ij}}^{g_{ij}}\{\pi^{ij}\,\partial g_{ij}/\partial t\}d^4x \tag{43.10}$$

したがって，上限での 3–計量のわずかな変化 δg_{ij} の効果は容易に読み取れる．

$$\delta S=\int \pi^{ij}(x,y,z)\delta g_{ij}(x,y,z)d^3x \tag{43.11}$$

"汎関数微分"［たとえば，Bogoliubov and Shirkov (1959) をみよ］という言葉は，積分よりもむしろ微分によって話すことを可能にする．

*8
$$\frac{\delta S}{\delta g_{ij}}=\pi^{ij} \tag{43.12}$$

"場の運動量" は単純な意味を得る．場の運動量は無限に連続的な "場の座標" $g_{ij}(x,y,z)$ についての作用の変化率を与える（ここに x, y, z は，i および j とともにたんなるラベルとして役立つ）．

---

*　実際には $S\equiv S_{\mathrm{ADM}}\equiv 16\pi S_{\text{真の}}=16\pi$（真の力学的な経路の長さ）．

*8　力学的な経路の長さの終点の超曲面の 3–幾何学についての変化率としての幾何力学の運動量

*9 位相関数 S はすべての 6 個の計量係数 g_{ij} に個々に依存するようにみえるけれども，位相関数は実際 3–幾何学に固定されている g_{ij} の結合のみに依存する．この点を確かめるには，特別な 3–幾何学 ${}^{(3)}\mathcal{G}$ を，1 組の座標 x^p による 1 つの局所的な座標の断片を通して，1 組の計量係数 g_{pq} によって表す．同じ 3–幾何学を小さい量 ξ^p だけ移動された座標 $\bar{x}^p$ によって表し直す．

$$\bar{x}^p = x^p - \xi^p \tag{43.13}$$

3–幾何学を同じに保つには，すなわち，1 つの座標から別な座標へ距離 ds を不変に保持するには，計量係数は次のように変化しなければならない．

$$\bar{g}_{pq} = g_{pq} + \xi_{p|q} + \xi_{q|p} \tag{43.14}$$

位相関数 S（あるいは量子力学においては，確率振幅 ψ）を計量係数 $g_{11}(x), g_{12}(x), \cdots$, $g_{33}(x)$ の汎関数として表されるべく考えよう．これらの係数における変化 $\delta g_{pq}(x)$ は H–J 位相関数および確率振幅を，汎関数微分の標準的な定義によって，量

$$\begin{aligned}\delta S &= \int (\delta S/\delta g_{pq})\delta g_{pq}\, d^3x,\\ \delta\psi &= \int (\delta\psi/\delta g_{pq})\delta g_{pq}\, d^3x\end{aligned} \tag{43.15}$$

だけ変える．したがって座標変化は力学的な経路の長さあるいは位相 S を

$$\begin{aligned}\delta S &= \int (\delta S/\delta g_{pq})(\xi_{p|q} + \xi_{q|p})d^3x\\ &= -2\int (\delta S/\delta g_{pq})_{|q}\xi_p\, d^3x\end{aligned} \tag{43.16}$$

だけ変化させる．この変化は，もし S が 3–幾何学のみに依存していて，3–幾何学が表されている座標に依存すべきでないならば，ゼロにならなければならない．そしてさらに，ξ_p の任意の選択に対してゼロにならなければならない．この条件から，

$$\left(\frac{\delta S}{\delta g_{pq}}\right)_{|q} = 0 \tag{43.17}$$

と結論する．同様に，波動関数 ψ 自身に関する 3 個の式を位相 $S/\hbar$ と異なるものと見出す．こうして，

$$\left(\frac{\delta\psi}{\delta g_{pq}}\right)_{|q} = 0 \tag{43.18}$$

しかし式 (43.17) は，式 (43.12) により，式 (43.9) と同等である．この意味で式 (43.9) は，真実でなければならなかったと，すでに知っていたことをたんに確認するだけだった．古典的な Hamilton–Jacobi 関数 S は（量子論の確率振幅関数 ψ のように）3–幾何学に依存し，個々の計量係数に依存しない．そして座標の選択に依存しない．

幾何力学のすべての力学的な内容は，唯一残っている式 (43.8) に要約されている．それは形

*9 作用は個々に計量係数にでなく，3–幾何学に依存する

*10
$$g^{-1/2}\left[\frac{1}{2}g_{pq}g_{rs}-g_{pr}g_{qs}\right]\frac{\delta S}{\delta g_{pq}}\frac{\delta S}{\delta g_{rs}}+g^{1/2}R=0 \tag{43.19}$$

をとる．これは Einstein–Hamilton–Jacobi の方程式である．幾何力学の Hamiltonian 定式化に関して Peres 自身および他の人たちによる以前の仕事を元に，Peres（1962）の文献内で初めて明確に与えられた．この式は一定の S の前面（“波頭”）が超空間内をいかに伝播するかを告げる．

1 個の EHJ 方程式 (43.19) は，Einstein の場の方程式のすべての 10 個の成分と同じだけの情報を含んでいるということは Gerlach（1969）によって証明されている．解析における中心点は建設的な干渉の原理である．そしてこの点の適当な取り扱いに対するおもな要求は，EHJ 方程式の完全にパラメータ化された解の概念である．

2 次元空間内で動いている粒子の問題は，コラム 25.3 および 25.4 で Hamilton–Jacobi 方法によって取り扱われているように，完全な解析に対して 2 つの異なる，そして独立に調整できるパラメータ，単位質量あたりのエネルギー $\tilde{E}$，および単位質量あたりの角運動量 $\tilde{L}$ を要求した．こうして

$$\begin{aligned}S(r,\theta,t;\tilde{E},\tilde{L})&=-\tilde{E}t+\tilde{L}\theta\\&+\int^{r}[\tilde{E}^2-(1-2M/r)(1+\tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}\frac{dr}{(1-2M/r)}+\delta(\tilde{E},\tilde{L})\end{aligned} \tag{43.20}$$

ここで付加的な位相 $\delta(\tilde{E},\tilde{L})$ は，もし粒子が指定された t 値および θ の指定された値で与えられた r 値に達するように要求される．式 (43.20) によって与えられる力学的な位相 S とそれぞれ，以下の 4 組の値 $(\tilde{E},\tilde{L})$, $(\tilde{E}+\Delta\tilde{E},\tilde{L})$, $(\tilde{E},\tilde{L}+\Delta\tilde{L})$，および $(\tilde{E}+\Delta\tilde{E},\tilde{L}+\Delta\tilde{L})$ をとるパラメータをもつ 4 個の確率振幅を，式 (43.4) におけるように，重ね合わせることを考える．建設的な干渉の原理は条件

$$\begin{aligned}\partial S/\partial\tilde{E}&=0,\\ \partial S/\partial\tilde{L}&=0\end{aligned} \tag{43.21}$$

に通ずる．これらの条件を満たす時空内の点 (r,θ,t) は世界線上の点である．これらの条件を満たさない点は世界線上にない．

EHJ 方程式 (43.19) の望ましい解は 2 個のパラメータ（およびこれら 2 個のパラメータに依存する付加的な位相 δ）ばかりでなく，無限個のパラメータ，および連続無限のパラメータさえも含む．こうしてパラメータは $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$, $\beta_1,\beta_2,\cdots$（不連続な添字によってラベルをつけられたパラメータ）と名づけられるべきでなく，

$$\alpha(u,v,w)$$

および

$$\beta(u,v,w)$$

（3 個の連続な添字 u, v, w によって“ラベルをつけられた” 2 個のパラメータ）と名づけられるべきである．偶然にこの無限のパラメータの 1 つを省くとしたらどうだろう？ EHJ

*10 超空間における波頭の伝播の法則

方程式の完全な解であるとされているものが実際には完全でないことを知ろうと希望することができるだろうか？ 幸いにも Gerlach は完全性に対するパラメータをテストする手続きを与える．

*11 完全性が認められるとして，Gerlach は進んで，建設的な干渉の条件，

$$\frac{\delta S({}^{(3)}\mathcal{G};\alpha(u,v,w),\beta(u,v,w))}{\delta\alpha}=0,$$
$$\frac{\delta S({}^{(3)}\mathcal{G};\alpha(u,v,w),\beta(u,v,w))}{\delta\beta}=0 \tag{43.22}$$

を満たす“超空間の履歴の 1 葉”あるいは 3–幾何学の集まりは，Einstein の幾何力学の法則の 10 個の成分によって与えられる履歴の 1 葉，あるいは同等な 4–幾何学と同一であることを示す．

基本的な力学の問題に対する Hamilton–Jacobi の方程式から，対応する Schrödinger 方程式へは短い飛躍があり，それは幾何力学においても同様である．Bryce DeWitt 以上に，この Einstein–Schrödinger 方程式の意味および結果を探求した者はいない［DeWitt (1967a, b)］．もっとも興味ある結果の一つは，スピン–ゼロの粒子に対する Klein–Gordon 波動方程式に現れる保存流

$$j_\mu=\frac{\hbar}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu}\right)$$

に類似した，超空間における保存流の存在である．

Einstein–Schrödinger 波動方程式が 2 階微分を含むことはこの波動方程式の不幸な特徴である．したがって超空間における別なところでこの状態関数の発展を予言しうるためには，超空間内での適切な“超曲面”上で，確率振幅と確率振幅の法線微分の両方を指定しなければならない．この状況から示唆される 1 つ方法は—それは少なくとも不便であり，おそらく現実的な困難である—Leutwyler（1968）によって提案されている．独立な解の数を 2 次方程式を特徴づける数から 1 次方程式を特徴づける数へ減らす自然な境界条件を課する．別な方法は Kuchař（21 章をみよ）によって提案された方法で，そこで生ずる方程式は時間に類似した変数について 1 次であり，まったく異なった力学を定式化することである．

量子幾何力学の探求は，幾何学の自由度の多くが，高度の対称性を課すことによって，凍結されたものとして取り扱うときに単純化される．そうすると 1，2，あるいは 3 自由度が残される（ミックスマスター宇宙論については，30 章をみよ），あるいは無限に多くの自由度さえもが残される．そして量子力学の取り扱い可能な問題に導かれるのである［Misner (1972a, 1973)］．

*11 建設的な干渉の条件が古典的な履歴の 1 葉あるいは時空を与える

43.4　幾何学における揺らぎ

第 2 次世界大戦以降の物理学のすべての注目すべき発展の中で，水素原子中の電子の運動に対する電磁場の真空の揺らぎの効果の予言および実証以上に印象的なものは存在しない（図 43.3）．その発展はすべての物理学を通してそして，少なくとも時空自身の幾何学においてこのような揺らぎの効果を見落とすことを不可能にした．

ただ 1 個の振動子のゼロ点揺らぎから電磁場の揺らぎへ，そして幾何力学の揺らぎへの進行は自然の順序である．

*12　基底状態の調和振動子は，その自然な古典的な平衡点から距離 x だけ変位されるとき

$$\psi(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-(m\omega/2\hbar)x^2} \tag{43.23}$$

の確率振幅をもつ．この意味で，調和振動子は広がりの領域

$$\Delta x \sim (\hbar/m\omega)^{1/2} \tag{43.24}$$

にわたる空間内での位置の間で “共鳴する” あるいは “揺らぐ” と言われるだろう．

電磁場は振幅 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ をもつ独立な “場の振動子” の無限大の集まりとして取り扱われうる．Maxwell 場はその最低のエネルギー状態にあるとき，確率振幅は—第 1 の振動子は振幅 ξ_1 をもち，そして同時に第 2 の振動子は振幅 ξ_2 をもち，第 3 は ξ_3 を，そして続く—おのおのの振動子に対して 1 つ，おのおのの振動子 (43.23) の関数の積である．おのおのの振動子に対する振幅のスケールが適切に規格化されるときには，生ずる無限個の積は形

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \cdots) = N \exp[-({\xi_1}^2 + {\xi_2}^2 + \cdots)] \tag{43.25}$$

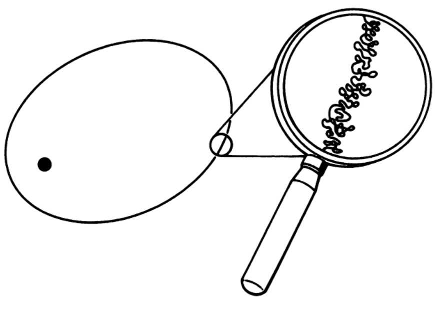


図 43.3　真空内の電場の揺らぎ（“真空” あるいは “基底状態” あるいは “ゼロ点揺らぎ”）によって影響を受ける水素原子の電子の運動の象徴的な表示．揺らぎに関係する電場，$E_x(t) = \int E_x(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$ は核そのものによって与えられる静電場を増す．付加的な場はもっとも基本的な近似で変位 $\Delta x = \int (e/m\omega^2)E_x(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$ をもたらす．平均はゼロになるが，2 乗平均の平方根 $\langle(\Delta x)^2\rangle^{1/2}$ はゼロにならない．したがって電子は予期される値 $V(x,y,z)$ から量

$$\Delta V(x,y,z) = \tfrac{1}{2}\langle(\Delta x)^2\rangle \nabla^2 V(x,y,z)$$

だけ変えられた有効原子ポテンシャルを感じる．非摂動運動に対するこの摂動の平均は，エネルギーレベルにおいて観測される Lamb–Retherford 変位 $\Delta E = \langle \Delta V(x,y,z)\rangle$ の主要な部分を説明する．逆に，予期される変位の観測は真空の揺らぎの実在性を免れなく明白にする．

*12　振動子に対するおよび電磁場に対する揺らぎ

をもつ．この表現は Fourier 係数 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ によって記述される磁場の形状 $\boldsymbol{B}(x,y,z)$ に対する確率振幅 ψ を与える．しかし，もし望むならこれらの Fourier 係数について述べずにすまし，そして式 (43.25) を直接磁場の形状自身によって書き直すことができる［Wheeler (1962)］．

$$\psi(\boldsymbol{B}(x,y,z)) = \mathcal{N} \exp\left(-\int\int \frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_1)\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_2)}{16\pi^3\hbar c r_{12}^2} d^3x_1 d^3x_2\right) \tag{43.26}$$

もはや“磁場”について語るのではなく，代わりにここでのように，電磁場が基底状態にある状況のもとでさえ，磁場が別な形状にありうることを語る［線形化された重力場の“基底状態”の汎関数に対する同様の表現に対しては Kuchař をみよ］．

最大確率の形状は $\boldsymbol{B}(x,y,z) = 0$ であることはこれらの事情のもとで十分妥当である．比較のために磁場が大きさ L の領域内を除いて再びいたるところゼロである配位を考える．場は，いつものように条件 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ を受け，大きさ ΔB の程度であるとする．この形状に対する確率振幅はゼロ形状に相対的に因子 $\exp(-I)$ だけ減少されるだろう．ここに指数における量 I は $(\Delta B)^2 L^4/\hbar c$ 程度である．I が 1 に比べて大きい配位は無視できる確率で起こる．I が 1 に比べて小さい配位は磁場ゼロの形状と実際同じ確率で起こる．この意味で，広がり L の領域で磁場についての揺らぎは大きさ

$$\Delta B \sim \frac{(\hbar c)^{1/2}}{L^2} \tag{43.27}$$

の程度である．言い換えれば，場は式 (43.27) によって与えられる重要性をもつ形状の範囲の一つの形状と別な形状との間で“共鳴する”．さらに，考察している空間の領域が小さいほど，感知しうる確率で起こる場の大きさは大きい．

電磁場の揺らぎについてなおよく知られた別な話し方が，幾何力学に重要な付加的な洞察を与える．大きさ L の領域内のすべての点での磁場を比較できる，測定機器を考える．種々の波長の電磁気的な攪乱のこの機器についての効果を求める．L に比べて短い波長の攪乱は検波器のある部分に力を 1 方向に働かせるだろう．対照的に，長い波長 λ の攪乱はいたるところ同じ方向に，しかし十分な効果をもつには低すぎる大きさの力を生み出す．こうして式

$$\begin{pmatrix}\text{体積 } \lambda^3 \text{ の領域内の波長} \\ \lambda \text{ の電磁波のエネルギー}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\text{波長 } \lambda \text{ の 1 量子} \\ \text{のエネルギー}\end{pmatrix}$$

あるいは

$$B^2\lambda^3 \sim \frac{\hbar c}{\lambda}$$

あるいは

$$B \sim \frac{(\hbar c)^{1/2}}{\lambda^2} \tag{43.28}$$

から評価される，場はもし λ が領域の大きさ L に比べて大きいならば非常に小さい．最大の効果は L そのものに匹敵される波長 λ の攪乱によって引き起こされる．この線の考察は［式 (43.28)］から直接標準的な揺らぎの公式 (43.27) に通ずる．

*13 同様の考察は幾何力学において当てはまる．幾何学における量子揺らぎは古典的で決定

*13　幾何学における揺らぎは距離の Planck スケールで支配的である

論的な一般相対論によって予言される大きいスケールのゆるやかに変化する曲率に重ね合わされそして共存する．こうして，局所 Lorentz 系で計量係数の正常な値が $-1, 1, 1, 1$ であるであるだろう大きさ L の領域で，これらの係数には

$$\Delta g \sim \frac{L^*}{L} \tag{43.29}$$

程度の揺らぎが起こるだろう．g_{ik} の 1 次微分には

$$\Delta \Gamma \sim \frac{\Delta g}{L} \sim \frac{L^*}{L^2} \tag{43.30}$$

程度の揺らぎが，そして空間の曲率における揺らぎは

$$\Delta R \sim \frac{\Delta g}{L^2} \sim \frac{L^*}{L^3} \tag{43.31}$$

の程度であるだろう．ここに

$$L^* = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} = 1.6\times 10^{-33}\,\mathrm{cm} \tag{43.32}$$

は，いわゆる Planck の長さである［Planck（1899）］．

大きさの程度を考察するのが適切である．地球内部および地球近くの空間の曲率は，古典的な Einstein 理論によれば，

$$\begin{aligned} R &\sim \left(\tfrac{G}{c^2}\right)\rho \sim (0.7\times 10^{-28}\,\mathrm{cm/g})(5\,\mathrm{g/cm^3}) \\ &\sim 4\times 10^{-28}\,\mathrm{cm^{-2}} \end{aligned} \tag{43.33}$$

の程度である．この量は非常に直接的な物理学的意味をもつ．それは，たとえば，自由落下するエレベーター内で，あるいは地球周りの自由軌道内の宇宙船で探知されるように，"重力場の潮汐を生み出す成分" を測定する．比較すれば，空間の曲率における量子揺らぎは 1 cm ほどの広がりの小さい観測の領域でさえ

$$\Delta R \sim 10^{-33}\,\mathrm{cm^{-2}} \tag{43.34}$$

に過ぎない．こうして空間の幾何学における量子揺らぎは毎日の状況のもとで完全に無視できる．

原子物理学および核物理学においてさえ，計量についての揺らぎは

$$\Delta g \sim \frac{10^{-33}\,\mathrm{cm}}{10^{-8}\,\mathrm{cm}} \sim 10^{-25}$$

および

$$\Delta g \sim \frac{10^{-33}\,\mathrm{cm}}{10^{-13}\,\mathrm{cm}} \sim 10^{-20} \tag{43.35}$$

と非常に小さいので，物理学は平坦な Lorentz 的な時空多様体で起こると理想化することはもっともである．

にもかかわらず，幾何学における量子揺らぎは，もし量子原理および Einstein の理論を信ずるならば避けられえない．量子揺らぎは古典的な一般相対論によって予言される幾何力学の発展と共存する．揺らぎは幾何学の古典的な履歴の超空間を通して切られた狭い刈り幅を広げる．言い換えれば，幾何学は観測の毎日のスケールでは決定論的のようにみえても，決定論的でない．代わりに，超顕微鏡的なスケールで幾何学は 1 つの形状と別な形状，別な形状との間で "共鳴する"．この術語は次のことを意味する．それ以上でもそれ以下でもない．(1) おのおのの形状 ${}^{(3)}\mathcal{G}$ はそれ自身の確率振幅 $\psi = \psi({}^{(3)}\mathcal{G})$ をもつ．(2) これらの確率振幅は，超空間を通して古典的な刈り幅のいずれの側上で限界 (43.29) の範囲内に含まれている 3–幾何学の全領域を通して類似の大きさをもつ．(3) 3–幾何学のこの領域は，任意の 1 つの 4–幾何学，あるいは任意の 1 つの古典的な幾何力学の履歴に調和するには，超顕微鏡的なスケール上では変化に富みすぎている．(4) これらの小さいスケールの揺らぎ ($\sim 10^{-33}\,\mathrm{cm}$) を見逃し，そして 3–幾何学のより大きいスケールの特徴を吟味するときのみ，これらの確率振幅は古典的な場の方程式と調和するような，ただ 1 つの時空多様体に調和するようにみえる．

これらの小さいスケールの揺らぎは，重力崩壊のような何かが空間内のいたるところで，そしてすべての時間に起こりつつあること，実際には，重力崩壊は不断になされたりなされなかったりすることを示し，さらに，宇宙の重力崩壊，および星の重力崩壊の他に，第 3 の，そして，持続的になされないでいるがゆえにもっとも重要である，Planck スケールの距離での重力崩壊のレベルをもまた取り扱わなければならないことを示す．

[練習問題]

43.1 非相対論的な力学における自由粒子に対する作用原理

作用原理として $I = \int L\,dt =$ 極値 を考える．ここで，2 つの端点で指定された x', t' および x'', t''，そして $L = \frac{1}{2}m(dx/dt)^2$ をもつ．(1) 極値化する履歴 $x = x(t)$ および (2) 力学的な経路の長さあるいはその両端に対する作用 $S(x'', t''; x', t') = I_{\text{極値}}$ の端点についての依存性を見出せ．また (3) この問題に対する Hamilton–Jacobi 方程式を書き下ろせ．そして (4) $S(x, t; x', t')$ がこの方程式を満たすことを確かめよ．最後に，Hamilton–Jacobi 方程式が知られていないとして，(5) この方程式を関数 S 自身のすでに知られている性質から導け．

43.2 調和振動子に対する作用

運動エネルギーは $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$ であり，ポテンシャルエネルギーは $\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ である．既述の練習問題の部分 (1)，(2)，(3)，(4) の解析を遂行せよ．答えの一部：

$$S = \frac{m\omega}{2}\frac{(x^2 + x'^2)\cos\omega(t - t') - 2xx'}{\sin\omega(t - t')}$$

$\partial S/\partial x$ は運動量を与え，そして $-\partial S/\partial t$ はエネルギーを与えることを確かめよ．

43.3　調和振動子に対する量子伝播関数

単純な調和振動子が x', t' から x'', t'' へ移行する確率振幅は

$$\langle x'', t''; x', t' \rangle = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin\omega(t''-t')} \right)^{1/2} \times \exp \frac{im\omega[(x''^2 + x'^2)\cos\omega(t''-t') - 2x''x']}{2\hbar \sin\omega(t''-t')}$$

である．そしてそれは自由粒子の場合には

$$\langle x'', t''; x', t' \rangle = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar (t''-t')} \right)^{1/2} \exp \frac{im(x''-x')^2}{2\hbar(t''-t')}$$

に帰着することを示せ．すべての調和振動子の波動関数を，公式

$$\langle x'', t''; x', t' \rangle = \sum_n u_n(x'') u_n{}^*(x') \exp iE_n(t'-t'')/\hbar$$

を用いて解から導くことができることを注意せよ．

43.4　自由な電磁場に対する量子伝播関数

平坦な時空で，空間的な超曲面 $t = t'$ 上でゼロ発散の磁場 $\boldsymbol{B}'(x,y,z)$ が与えられ，空間的な超曲面 $t = t''$ 上でゼロ発散の磁場 $\boldsymbol{B}''(x,y,z)$ が与えられている．Fourier 解析によって（この問題を既述の問題に帰着する），あるいはこれ以外の方法で t' での $\boldsymbol{B}'$ から t'' での $\boldsymbol{B}''$ への変化に対する確率振幅を見出せ．

43.5　Maxwell 電気力学の Hamilton–Jacobi 法による定式化

電磁気の 4–ポテンシャルの 4 成分 A_μ を基本的な量とみなす．それらを空間部分 A_i，およびスカラーポテンシャル ϕ に分ける．(1) 作用原理（平坦な時空で）

$$I = (1/8\pi) \int (E^2 - B^2) d^4x$$

から，適切な発散を分離し去ることによって，式 (43.7) に定性的に似た特徴をもつ表現を導け．(2) 初期の空間的な超曲面および最終の空間的な超曲面上で固定されるべき適切な量は実際に A_i 自身でなく，$\boldsymbol{B} = \operatorname{curl} \boldsymbol{A}$ によって定義される磁場である．(3) 超曲面 $\mathcal{S}$ の選択とその超曲面上の磁場 $\boldsymbol{B}$ の選択に依存する力学的な位相あるいは作用 $S(\boldsymbol{B}, \mathcal{S})$ に対する Hamilton–Jacobi の方程式

$$-\frac{\delta S}{\delta \Omega} = \frac{1}{8\pi}\boldsymbol{B}^2 + \frac{(4\pi)^2}{8\pi}\left(\frac{\delta S}{\delta \boldsymbol{A}}\right)^2$$

を導け．左辺の量は朝永の “泡 (bubble) 時間” 微分である [Tomonaga (1946)，またコラム 21.1 をみよ]．

44章
時間の終わりを越えて

“天はあなたの上で回転し，あなたに永遠の栄光をみせる．そして依然あなたは地上からそれを眺める”

DANTE

“世界は偉大な，永遠の謎としてわれわれの前に立っている”

EINSTEIN (1949a)

[本章は完全にトラック–2 である．既述のトラック–2 材料は本章に対する準備として必要とされない，しかし 43 章は有用であるだろう.]

44.1 すべての時間の物理学における最大の危機としての重力崩壊

宇宙はビッグバン (big bang) で始まり，最大の大きさまで膨張し，それから再収縮し崩壊する．これ以上に畏敬を鼓舞する予言はいまだなされていない．それは常識では理解できない．Einstein 自身，彼自身の予言を信ずることができなかった．Einstein および科学界に永遠に続く宇宙の概念を捨てさせるには，Hubble の観測を要した.

後に続く Tolman (1934a)，Avez (1960)，Geroch (1967)，および Hawking and Penrose (1969) の仕事は，結論を一般化する．Einstein の幾何力学の法則に従い，そしてどこにも負の質量–エネルギー密度をもたない，閉じた模型宇宙は必然的に特異点を展開する．誰も制限なしに増大する質量–エネルギー密度から逃れることはできない．幾何学の力学的な発展を一歩一歩前方へ計算するコンピュータは進むことができない点にくる．比喩的に述べれば，煙がコンピュータから流れ始める．依然として物理学は，たとえこれ以外の理由がなくても確かに進み続ける．物理学は定義により，現実の表面上の外観におけるすべてのぼんやりした変化にもかかわらず永遠の方向に進んでいくものである.

いつの日か扉は必ず開き，そのきらきら光る美しく単純な世界の中心的な構成を暴露するだろう．その日の到来に向かって，重力崩壊のパラドックス以上に希望を抱かせる展開は存在しない．なぜパラドックスか？ なぜなら Einstein の方程式は “これが終わりである” と述べ，物理学は “終わりは存在しない” と述べるからである．なぜ希望か？ なぜならパズルを証明するためのすべての範例の中で，パラドックス以上の約束で物理学は何も *1

1971 年 5 月 18 日，Newcastle–upon–Tyne 大学で J.A.W. によって与えられた Marchon 講義および 1971 年 7 月 19 日，Cambridge 大学で与えられた Nuffield 講義は，本章の内容に基づいていた.

*1 崩壊のパラドックス：物理学は止まる，しかし物理学は進まなければならない

のをも提供しないからである.

*2 1911年以上に大きなパラドックスを物理学はそれまで知らなかった（コラム44.1）. Rutherfordは，物質は局所化された正電荷および負電荷からつくられていると結論している．そのように構成されている物質は理論によれば，$\sim 10^{-17}$秒で電気的に崩壊を受けるべきである．観測は同様な物質は明確に安定であることをはっきりと示した．Bohr以上に深刻にパラドックスを取り上げた者はいない．Bohr以上のエネルギーで，いつも中心的な神秘の周りで仕事をした者はいない．大胆さと保守性の賢明な結合をBohr以上にもたらした者はいないし，また物理学の調和に対してBohr以上に深い感覚を維持すべくもたらした者はいない．調和の正反対，不協和音は，原子の構造について傷（'teen）をもつ文献から生ずる印象である．(1) 電荷間のCoulombの力の法則を変えるか？ (2) 加速された電荷は放射しなければならないという原理を断念するか？ これに対して抵抗はあまりなく，よく確立されたものについて，依然整理されない状況であった．対照的に，Bohrはこれら2つの原理を固く持続した．同時に彼は，物理学のまったく別な分野でPlanckによって固く確立されている，3番目の原理，量子原理の重要性を主張した．その鍵で彼は，原子の世界に扉を開いた．

1911年の危機は偉大であったように，今日重力崩壊はかつてない最大の危機として物理学に対峙する．物質のみならず宇宙自身の運命が問題となっている．崩壊の力学，あるいはむしろその逆，膨張の力学は，理論のみによってでなく，観測によっても立証されている．そして1つの観測によってでなく，多くの数の観測によって立証されており，越えられないほどの能力と完全さをもつ天文学者たちによって遂行されている．さらに，崩壊は宇宙の大きいスケールの力学に独特なのではない．白色わい星あるいは限界質量以上の中性子星はブラックホールへの重力崩壊を受けるべく予言される（32章および33章）．銀河核の中心の十分近くへ落下する十分多くの星は，太陽よりも10の何重乗も重いブラックホールに崩壊するべく予期される．活発な探求が，この銀河内のブラックホールに対する証拠を求めて進行中である（コラム33.3）．ブラックホールをつくる過程は，1つの差をもつ，宇宙自身の重力崩壊に対する実験的な模型を提供するべく予期されるが，一点違いがある．ブラックホールへの崩壊に対しては，観測者は2つの選択をもつ．(1) 地平線内で起こっていることの何ものも暴露しないだろう，安全な距離から観測すべきか，あるいは (2) 落下物質についていって，物質のみならず物質を取り巻く幾何学の無限に高い圧縮までの崩壊の最終段階をみるが，しかし観測者自身の初期の死亡という犠牲を払うべきか，のいずれかの選択である．閉じた模型宇宙の重力崩壊に対して，このような選択は観測者には利用できない．観測者の運命は知ることができない．無限に高い密度まで駆り立てられる物質および素粒子の運命もまたそうである．崩壊の危機における賭金に匹敵するものを見つけることは難しい．最大の物体，空間，および最小の物体，素粒子の力学，そしていかに両方が始まったか．

---

*2 電気的な崩壊の1911危機

コラム 44.1 古典論によって予言される宇宙の崩壊が，古典的に予言される原子の崩壊と比較され，対照される

系	原子（1911）	宇宙（1970）
力学的な実体	電子の系	空間の幾何学
古典的に予言される崩壊の性質	引力の中心点に向かう電子は有限の時間内で無限大のエネルギーに駆り立てられる	物質のみならず空間自身が有限の固有時間内で無限大の圧縮の条件に達する
1 つの受け入れられない“逃げ道”	Coulomb の力の法則を捨てる	Einstein の場の方程式を捨てる
受け入れられない“安易な逃げ道”としての別な提案	“加速された電荷は放射する必要がない”	“物質は，いかに圧力が大きくても，ある密度を越えて圧縮されえない”
この提案はいかに因果律の原理を破るか	点電荷の Coulomb 場は，電荷の速度の突然の変化に対して，無制限に大きい距離まで無限大の速度で自らを再調整できない	音速は光速を超えることができない．圧力は質量–エネルギーの密度を越えることができない
物理学を包括的に組織する原理として量子原理を認めることによって導入される主要な新しい考察	不確定性原理．引力中心にあまりに接近した結合は，ゼロ点運動エネルギーをポテンシャルエネルギーより大きくさせる．最低の量子状態は放射できない，なぜなら落ちるべく利用できるより低い状態が存在しないからである	不確定性原理．超空間内での代表的な波束の伝播は，空間の幾何学に対する特異な構成に決定論的に達しない．むしろ結果の確率分布を予期する．おのおのの結果は，異なる大きさ，粒子の質量の異なる組，粒子の異なる数，および膨張と再収縮に対して要求される時間の異なる長さをもつ宇宙を記述する

44.2 崩壊を予言する理論の評価

崩壊のパラドックス（“崩壊は物理学を終わらせる”，“崩壊は物理学を終わらせることができない”）について熟考する者は誰でも，“Einstein の幾何学的な重力理論の妥当性の限界は何であるか？” と尋ねざるをえない．同様の質問は 1911 年の危機においても生じた．2 個の電荷間に作用する力に対する Coulomb の法則はメートルおよびミリメートルの距離でテストされている．しかしそれは原子の大きさの 10^{-8} cm まで成り立つと信ずるべきどのような根拠が存在したか？ もちろん，ついにそれは原子のレベル，および原子核の 10^{-13} cm のレベルでのみならず，5×10^{-15} cm までさえ成り立つことがわかる [Barber, Gittelman, O'Neill, and Richter, and Bailey *et al.* (1968)，Farly (1969) および Brodsky and Drell (1970) によってレビューされているように]．それは Wigner (1960) が “自然科学における数学の法外な有効性” とよぶものの著しい例である．

Einstein の幾何力学以上に，単純性，美しさ，および適用範囲において Maxwell の電気力学に似ている理論は存在しない．物理学におけるいくつかの原理は，物理学が基づいている原理以上に揺るぎなく確立されている．特殊相対論の局所的な妥当性（2–7 章），等価原理（16 章），運動量およびエネルギーの保存（5，15，および 16 章），そして物理学を通しての 2 次の場の方程式の有効性（17 章）などである．それらの原理および “非本質的な場”（たとえば，Dicke のスカラー場）の非存在および “先験的幾何学の非存在”（17.6 節）に対する要求は，時空の幾何学は Riemann でなければならない．そして幾何力学の法則は Einstein の法則でなければならないという結論に達する．

*3 幾何学は Riemann であるということは，時空内における任意の場所で，任意の 2 つの近傍の事象 C および D 間の間隔は，時空内におけるまったく別な点での 2 つの近傍の基準的な事象の間隔 AB を使って，相互比較のルートに無関係に値 CD/AB をもつということである（13 章およびコラム 16.4）．1,000 個のルートが存在する．この根絶し難い予言によって，Einstein の理論はこうして 1,000 通りの方法で崩壊にさらされる（コラム 16.4）．

幾何力学は別な方法でも同様に誤りを立証されようとしている．幾何学は粒子および場の力学に与える支配について選択をもたない（20 章）．理論はコンパクトな星の平衡形状および脈動についての予言をする（23–26 章）．幾何力学は宇宙の膨張の減速に対して，質量–エネルギーの密度に対して，空間曲率を増大する力に対して公式を与える（27–29 章），それらのテストは遠くはない．幾何力学は重力崩壊，およびブラックホールの存在，およびこれらの対象に関係する豊かな物理学を予言する（31–34 章）．幾何力学は重力波を予言する（35–37 章）．適切な近似で，幾何力学は太陽系の力学に対する Newton の重力理論のすべてのよくテストされた予言を囲み，そして若干のすでに確認された効果を含めて，さらにテストできるポスト Newton の補正を予言する（38–40 章）．

原理の矛盾は Einstein の幾何学的な重力理論においていまだ発見されていない．理論に

---

*3　戦いで試された重力理論

反する意図された観測的な証拠は，いまだ時間のテストにもちこたえていない．比較できる単純さと適用範囲をもつ，物理学の別な受け入れ可能な説明はいまだ提案されていない．

一般相対論のこの評価を，中心的な問題，理論の妥当性の限界および重力崩壊の問題に
*4 ついての関連に戻る前に，もう少しばかり続ける．Einstein の幾何力学は，物理学の理解に何を寄与したか？

1 番目，Einstein の幾何力学は時空を，物質やエネルギーとの戦いより上位にあり，運命で定められている完全さをもつという位置づけから失脚させた．そして時空をこの争いに積極的に参加している新しい力学的な実体として印づけた．

2 番目，エネルギーと運動量を時空の曲率に結びつけることによって，Einstein の理論は，運動量とエネルギーの保存則を境界の境界はゼロであるという幾何学的な恒等式の自動的な結果と認めた（15 および 17 章）．

3 番目，Einstein の幾何力学は，重力を時空内にはめ込まれた無関係で "物理学的な" 何ものかとしてよりも，時空の幾何学の曲率の表示と認めた．

4 番目，一般相対論は "物理学は局所的である"．Einstein の幾何力学は与えられた事象での量をすぐ隣接した事象での量と結びつけるときに物理学の解析は単純になる，という見解を強化した．

5 番目，Einstein の幾何力学は量子原理に従順であり，時空および時間そのものは古典的な近似のレベルでのみ成り立つアイデアである，Einstein の幾何学の力学に対する固有の競技場は時空でなく，超空間であり，そしてこの力学は超空間を通して確率振幅の伝播によって量子原理と一致して記述される（43 章）．したがって，空間の幾何学は

$$\delta g \sim \frac{\text{Planck の長さ}, L^* = (\hbar G/c^2)^{1/2} = 1.6\times10^{-33}\,\text{cm}}{\text{(考察のもとにある領域の線形的な大きさ)}}$$

程度の計量係数についての量子揺らぎを受ける．

6 番目，標準的な Einstein の幾何力学は，Euclid 的なトポロジーが Euclid 的な幾何学
*5 に対するように，ほとんど完全である．多重連結トポロジーは，多重連結空間のトポロジー内にとらえられた電気力線として，電荷に対する自然な記述を提供する（図 44.1）．電気のどのような別な記述も，電荷が存在する位置で真空に対する Maxwell の場の方程式における崩壊を要求する，あるいは空間内に埋め込まれているある異質の "物理学的な" 電気的ゼリーの存在を要求する．あるいはその両方である．空間の幾何学における量子揺らぎは小さい距離で非常に大きいのでトポロジーをさえ揺らぎ，"ワームホール"（wormhole）をつくり，そして力線をとらえると述べることを除いて，これらの不幸な特徴をもたない電気を記述する方法を誰もいまだ，発見していない．これらの揺らぎは，粒子と結びつき，素粒子物理学と関連する距離のスケール（$\sim10^{-13}$ cm）としてでなく，全空間に充満しており（"幾何学の泡状の構造"），そして Planck 距離（$\sim10^{-33}$ cm）によって特徴づけられるものとしてみられなければならない．こうして 3 番目の型の重力崩壊は，空間内のいたる

---

*4 Einstein の幾何力学から出る自然の新しい概観

*5 空間のトポロジーにとらえられている力線としての電荷

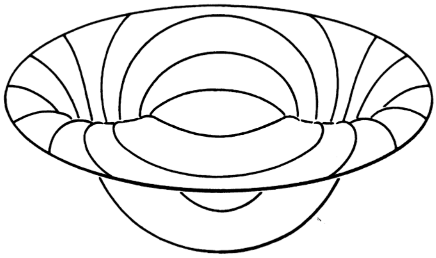


図 44.1　多重連結空間のトポロジーにとらえられた電気力線としてみられる電荷［この概念の歴史については Wheeler（1968a）の文献 36 をみよ］. ワームホールあるいは取り手は同じ空間内の 2 個の非常に異なる領域を結びつけていると想像される. ワームホール口の 1 つは, 解像力の低い観測者によって眺められるとき, 電荷の位置として現れる. 3–空間のこの領域から観測者は全 4π 立体角にわたって現れる力線を見出す. 観測者はこの電荷の周りに境界を構成し, この境界を通る束を定め, 間違って Gauss の定理を適用し“境界内部に”電荷が存在することを“証明する”. それは境界でない. その内部にとらえられたある者は—比喩的に述べると—ワームホールのその口に入り, 喉を通って別な口を出て, 取り巻く空間を通って戻り, 外部から彼の“監獄”をみることができる. 力線はどこでも終わらない. Maxwell の方程式はどこでも失敗しない. どこにも指を置いて, “ここにある電荷が存在する”と言うことができない. この古典的な型の電荷は量子化された電荷に何の直接的な関係をもたない. ワームホールを通る束については選択の自由が存在する. そして 1 つの電荷と別な電荷との間の関係については特質が存在する. それは素粒子物理学の電荷にまったく無関係である. 視覚化を容易にするために上図における空間次元の数は 3 から 2 に減らされている. 3 番目の次元は, 表面から離れて測定されるときには, 物理学的な意味をもたない. それはより好都合な図の表示のために表面をはめ込む余分の次元を与えるに過ぎない［これ以上の詳細については Wheeler（1962）に再掲されている, Misner and Wheeler（1957）をみよ］.

ところで絶えずなされたりなされないでいることに注目する. これは確かに星のレベルでの崩壊および宇宙のレベルでの崩壊の結果への道標である（コラム 44.2）.

コラム 44.2　重力崩壊の 3 つのレベル

1. 宇宙
2. ブラックホール
3. Planck スケールの距離での揺らぎ

宇宙の再収縮および崩壊は, すでに十分な証拠をもつ“ビッグバン”の一種の鏡像である.

ブラックホールをつくる物質の崩壊は, 2 つの異なるレベルでもっとも自然である. (a) 個々の星の高密度な白色わい星の中核の崩壊（その中核が臨界質量 $\sim 1M_\odot$ あるいは $\sim 2M_\odot$ を越えるとき, その臨界質量で中性子星はもはや崩壊に対して安定な終点とはなりえない）そして (b) 銀河核内での個々の星の融合が $10^6 M_\odot$ あるいは $10^9 M_\odot$ もの質量をもつブラックホールをつくる.

いずれの場合においても, ブラックホールに落下する物質についての原理の特徴で, 観測者がもつ選択ほどに興味深いものはない（挿入図における分岐する矢によって象徴される）. 観測者は落下する物質とともに進んでいくことができる. その場合においては観測者自身の命を犠牲にしてのみ, 観測者は崩壊の最終段階をみる. あるいは観測者は外部で安全にとどまることができる. その場合においては観測者は無限に長い

時間後でさえ，地平線へますますゆるやかに這いながら落下する物質とともに崩壊の最初の部分のみをみる．

閉じた模型宇宙の崩壊の最終段階において，存在するすべてのブラックホールは互いにとらえられ追いやられ，1つずつ融合する．安全に外部から事象をみるいかなる方法も存在しない．必然的に閉じた宇宙自身の中にとらえられる．



Planck スケールの距離での崩壊はいたるところで，そしてすべての時間，幾何学において，空間のトポロジーの量子揺らぎにおいて起こっていると信じられている．この意味において，崩壊は絶えずなされたりなされないで，宇宙自身の崩壊を元に戻す模型をつくり，術語“宇宙の再過程”に要約される（本文をみよ）．

44.3 真空の揺らぎ：その普遍性と最終的な優勢

もし Einstein の理論がこうして物理学の残りに光を投げるならば，物理学の残りもまた幾何力学に光を投げる．空の空間は空でないということ以上に中心的な点はない．空の空間はもっとも激しい物理学の舞台である．電磁場は揺らぐ（43章）．電子と陽電子の仮想的な対は，実際，絶えず生成され消滅される．そして μ 中間子の対，バリオンの対，そして別な粒子の対も同様である．すべてのこれらの揺らぎは空間の幾何学およびトポロジーにおける量子揺らぎと共存する．*6 これらの揺らぎはそれらの幾何力学のゼロ点擾乱に付加されるものであるか，あるいはこれらの揺らぎは，ある意味で，今日よく理解されていないものの，幾何力学のゼロ点擾乱のたんなる表れでないのか？

質問を別な言葉で述べる．Clifford を思い出せ．彼は Riemann によって鼓舞されて，1870年2月21日，Cambridge 哲学協会に対して，“物質の空間理論について”［Clifford (1879), pp.244, 322,（1882），p.21］を発表した．それは，“(1) 空間の小さい部分は，実際，平均して平坦な面上の小さい丘に類似した自然の部分であるということ．すなわち，幾何学の通常の法則は空間の小さい部分で成り立たないということ．(2) この曲がっている，あるいはひずんでいるという性質は波の振る舞いにならって空間の1つの部分から別な部分へ絶えず通過されているということ．(3) この空間の曲率の変化はわれわれが評価できようと，あるいはえもいわれぬものであろうと，**物質の運動**とよぶ現象において現に起こりつつあるものであるということ．(4) 物理学の世界においては，（おそらく）連続の法則に従うこの変化以外に何ものも起こらないということ”等である．粒子は幾何学から構成されていると述べることができるかどうかを尋ねる．あるいは質問を現状に即した言葉で言い直す．“粒子は幾何力学の励起子であるか？”“粒子を幾何学自身を除いて構成する何かが他に存在するか？”そして量子原理を除いてこのような物体に不連続性を与える何かが他に存在するか？

物質の Clifford–Einstein の空間理論は近年においても忘れられていない．“結論とし

*6 物質は幾何学からつくられているか？

て"，著者の 1 人は 10 年前に書いているように [Wheeler (1962)]，物理学に対する純粋に幾何学的な基礎についての Riemann，Clifford，および Einstein の考え方は，今日より高い展開の状態に達し，そしていまだかつて以上により豊かな展望を与える—そしてより深い問題を提供する—．量子作用はこの幾何力学の新しい特徴を増す．そのもっとも著しいものはすべての空間を通してワームホール型の揺らぎの存在である．もしこの実質的な泡状の構造と物理学の真空との間に，量子電気力学を通して知られるようになったように，何らかの対応がそもそも存在するならば，これらのワームホールを '裸の電子' と同一視することから逃れるすべは存在しないようにみえる．これらの '裸の電子' と完全に異なるものは，すべての利用できる証拠によれば，実験物理学の電子および他の粒子である．これらの粒子に対しては幾何力学の描像は固体における異なる種類のフォノン (phonon)，あるいは励起子に類似した実質的な泡状の真空における集団的な擾乱の模型を暗示する．

*7 "核密度 $\sim 10^{14}\,\mathrm{g/cm^3}$ と真空における場の揺らぎのエネルギー密度 $\sim 10^{94}\,\mathrm{g/cm^3}$ との間の巨大な因子は，素粒子が，真空を特徴づける局所的に激しい条件において比率的にほとんど完全に無視できる変化を呈示すると主張する ['雲 ($10^{-6}\,\mathrm{g/cm^3}$) が空 ($10^{-3}\,\mathrm{g/cm^3}$) の物理学に対して小さな意味しかないのと同じように，粒子 ($10^{14}\,\mathrm{g/cm^3}$) は真空 ($10^{94}\,\mathrm{g/cm^3}$) の物理学に対して小さな意味しかもたない']．言い換えれば，素粒子は自然の記述に対する本当に基礎的な出発点を形成しない．代わりに，素粒子は真空の物理学への 1 次補正を呈示する．仮想的な光子および仮想的な正–負の対および仮想的なワームホールの巨大な密度をもつ，あの真空，問題のあのゼロ次の状態は，適切な摂動論的な解析に対する基本的な出発点をもつ前に適切に記述されなければならない．"

真空のエネルギー密度についてのこれらの結論，真空の複雑なトポロジー的特徴，および真空に進んでいく物理学の豊かさは，量子電気力学が真空について述べなければならないことと明白な矛盾はない．代わりに '小さい距離' の解析 (10^{-33} cm)—スケッチ的であるけれど—および '大きい距離' の解析 (10^{-11} cm) からの結論はもっとも自然な方法で互いに他を強化 [しうる] ようにみえるだろう．

"幾何力学の模型の現在の状態のもっとも明白な短所は，一般にスピン $\frac{1}{2}$ の素粒子に対して，そしてとりわけニュートリノに対して，幾何力学はいかなる完全に自然な場所を与えられないということである．"

Einstein の標準的な幾何力学においてスピン $\frac{1}{2}$ の素粒子に対する自然な場所を見つける試み (コラム 44.3) は，古典的な微分幾何学の状況内では連結性における変化が起こる自然な方法が存在しないがゆえに失敗する．

核分裂を受けるウラン核は，あるトポロジーで始まり，そして別のトポロジーで分裂を終える．にもかかわらず，それは完全に連続な方法でのこの推移を古典的な微分幾何学とする．

*7　真空の物理学の豊かさ

*8 法律家には2種類いるといわれる．1人の法律家は依頼人になすべきでないことを告げる．別な法律家は依頼人がなすべきことに傾聴し，彼にいかにそれをなすべきかを告げる．第1の法律家，古典的な微分幾何学から，依頼人は落胆して離れ去り，依然空間の連続性における量子揺らぎを記述すべき自然な方法を探す．この方法でのみ彼は空間のトポロジーにとらわれている電気力線として電荷を記述することを希望できる．この方法でのみ彼は重力崩壊の第1段階を理解し，そして解析しうるべく期待する．彼の問題を熟考して，彼は扉の上に“幾何学以前”という名前を掲げた第2の法律家の事務所にくる．希望に満ちて，彼はノックして入る．幾何学以前は何であるべきか，そして何と言うべきであるか？希望と必要の結合から生まれて，哲学，物理学，数学および論理の結合から生まれて，幾何学以前はこの執筆で終わらないが，しかし現在までの展開の出来事で満ちた物語を告げるだろう．

コラム 44.3 Einstein の標準的な幾何力学におけるスピン $\frac{1}{2}$ に対する自然な場所を見出す試みの困難

“スピン $\frac{1}{2}$ に対する場所をもたない素粒子のいかなる記述も受け入れることは“不可能である” [Wheeler (1962)]．そうすると，一般にスピン $\frac{1}{2}$ の説明に何がどのようにして純粋に幾何学的な記述ができるか？ 特別に，そしてより重要に，質量がゼロで光速で動くニュートリノの純粋な場である半整数スピンの唯一の実体に対する量子幾何力学にどのような場所が存在するか？ 明白なあるいは満足のいく答えは，今日この質問に対して知られていない．答えが手に入らなければそして手に入るまでは，**純粋な幾何力学は素粒子物理学に対する基礎として不完全と判断されなければならない．**”

後の出版 [Wheeler (1968a)] はこの問題を再び取り上げ，“新しい世界は量子幾何力学における解析に対して開かれると指摘する．新しい中心概念は1つの泡状の構造と別な泡状の構造との間で共鳴する空間である．超顕微鏡的な距離での空間のこの多重連結性に対する自然の1つの特徴は電荷にもっとも強く現れる．しかし少なくとも電荷のように印象的なのは素粒子の世界を通して広く行き渡っているスピン $\frac{1}{2}$ である．”

“スピン $\frac{1}{2}$ に対する場所をもたない素粒子のどのような記述も受け入れることは不可能である”という陳述を繰り返して，論文は議論に新しい指摘，“幸いにも，スピン多様体の概念は，少なくとも John Milnor の仕事を通して明るみに出た [Lichnerowich (1961a,b,c) および (1964), Milnor (1962), (1963), および (1965a,b), Hsiang and Anderson (1965), Anderson, Brown, and Peterson (1966a,b), および Penrose (1968a) をみよ]．この概念は，**‘スピン構造’を与えられており，他の点では同一の 3–幾何学に対する確率振幅に結びついている非古典的な 2 価性** [Pauli のスピンに対する標準的な術語，たとえば，Pauli (1947) をみよ] として，量子幾何力学の共鳴する

*8 トポロジーの変化に対して幾何力学における場所は存在しない．したがって幾何学以前 (pregeometry) に向かう

顕微鏡的なトポロジーの状況内で**スピノール場の新しい解釈**を提案する”．より明確に“物理学的に閉じた方向づけできる 3–多様体は，そのトポロジー，その微分構造，およびその計量だけでは，完全には分類できない．物理学の 3–多様体はどのようなスピン構造をもっているかを告げなければならない”［3–球のトポロジーをもつ 3–幾何学について三つ組（triad）（3 個の直交ベクトルからなる三つ組）の連続場を与えることができる．三つ組の任意の別な連続場は小さい再調整の連続によって最初の場に変形されうる．3–球はただ 1 つの“スピン構造”，まさしく“三つ組構造”とよばれているものに対する潜在的に誤解を招く標準的な言葉，を認めると言う．対照的に，n 個の取り手あるいはワームホールをもつ 3–球は，小さい再調整が何であろうとその任意の連続な一続きのもとで互いに同等でなく，そして n 個の“記述子” $w_1, w_2, \cdots, w_k, \cdots, w_n$ によって任意の好都合な方法で互いに他から区別される 2^n 個の“スピン構造”（三つ組の連続な場）を認める］．“記述子 $w_k = +1$ をもつ 3–幾何学に対してと，記述子 $w_k = -1$ をもつこれ以外に同等な 3–幾何学に対して，異なる確率振幅を予期することは量子幾何力学において自然である．この状況は量子幾何力学は一般にスピン $\frac{1}{2}$ の場およびとりわけニュートリノ場を記述するために必要とするすべての機構を提供することを意味するか？ …それが Einstein の一般相対論および Planck の量子原理の枠内でこれまでに生じた唯一の方法である．これは正しい経路であるか？ ‘すべてのものを幾何学として’ということの基準のもとに，これ以上に決定的な質問はない．”

なぜこれらの概念を詳しく説明して，それらを実際に応用し，それらをすでに知っているスピン $\frac{1}{2}$ の場の振る舞いと比較しないのか？　この計画には中心的な困難が存在する．それは 3–幾何学のトポロジーはある接続から別の接続へと自由に変化できるべきであるということを物理学の基礎として仮定し要求する．対照的に，古典的な微分幾何学は実際次のように述べる“一度 1 つのトポロジーならば，つねにそのトポロジーである”．次のような質問を試みよ．新しい取り手が展開し記述子の数が 1 つだけ上がるときには，“超空間におけるどのような境界条件が最初のトポロジーの 3–幾何学に対する確率振幅 ψ を新しいトポロジーの 2 つのスピン構造に対する確率振幅 ψ_+ および ψ_- と結びつけるか？”．古典的な微分幾何学はこの質問に答えるのに何の助けも与えないばかりでない．それは尋ねることすら禁止する．言い換えれば，トポロジーにおいて要求される変化を記述する自然な数学的方法の必要に対する“道筋上での”企てすら得ることができない．3–幾何学は“宇宙の物質を築き上げる魔法”であるというアイデアは，したがってここではそして現在見捨てられている．対照的に，幾何学以前（本文をみよ）は，任意の凍結されたトポロジーを与えられるどころか，任意の次元をもつことすらないとみなされるべきである．

コラム 44.4 “ちりのバケツ”—幾何学以前の概念を定式化する初期の試み [Wheeler (1964a)]

“どのような筋道の思考が 4 次元に—あるいはそもそも任意の次元に—より基本的な考察から**到達する**ものとして想像されうるだろうか？ 原子の場合には，系の量子力学を解析することによってナトリウム（sodium）D 線の黄色を導くが，色という属性にわずかでも似ている何ものかが与えられている系の部分は存在しない.” 同様に時空の 4 次元性の任意の導出は，次元のアイデアで**始める**ことはきっとできない.

Borel 集合という概念を思い出そう．簡単に述べれば，Borel 集合は任意の次元の多様体にいまだ集められていない点の集まり（ちりのバケツ）である．…量子原理の普遍的な支配を思い出して，Borel 集合内の点がこれ，それ，および他の次元をもつ点に集められる確率振幅を想像することができる．…点が 5 次元の配列に集められるときには，これらの同じ点が 2 次元のパターンに配列されるときよりもより多くの条件が与えられた数の点に課されなければならない—どの点がどの点をもっとも近い近傍としてもつかについて—．こうしておのおのの次元について次の**より高い**次元よりもはるかに高い統計的な重みをもつものと考えることができる．他方，1，2，および 3 次元をもつ多様体に対して，幾何学は興味ある何かを与えるにはあまりに初歩的であると想定することができる．こうして Einstein の場の方程式は，非常に低い次元の多様体に適用されると，平坦な空間を要求する．次元が 4 のときにのみ実際に興味ある可能性が生ずる．したがって，4 のみが任意の実際の物理学を与えるに足るだけ十分大きく，そして同時に大きい統計的な重みをもつには十分低い一意的な次元であると考えられうるか？

“このようなアイデアを適当な判断基準で探求するという，思索の領域で，これまでに十分な誤りをしていると考えるのは行き過ぎである.”

幾何学の取り手を考える．取り手を点までの長さに沿って半分の細さにする．言い換えれば取り手を 2 つの曲がったとがった器具に分解して点に接触させる．これらのとがった器具を分離して短くする．この過程で 2 点は一度すぐ近傍であった仲間を分ける．“変化は古典論ではいかに突然であっても，量子論では古典的に禁止された領域内で確率振幅関数が減少する．言い換えれば，表向きに非常に離れている点の間にある連結が残っている（1 つのとがった器具の下，1 つの ‘先端’ から進んで，これらのとがった器具が結びつけられているより大きい空間を通って，別なとがった器具の上，別な先端まで進む）．しかし，たまたま議論に入ってきた 2 点について原理的に区別できる何ものも存在しない．こうして連結が…**すべての**点とすべての別な点との間に存在しなければならないようにみえるだろう．これらの条件のもとで近傍という概念はもはや意味をなさないようにみえるだろう．こうして次元の定義をあいまいにするとともに，次元について明確に語る道具は姿を消す.”

44.4 物質を構成する魔法としての幾何学ではない，幾何学以前

前の概説（コラム 44.4）は，幾何学が，任意の特別な次元をもたない，より基礎的な要素から量子原理の助けで構成されうるかどうかを尋ねた．

この 1964 年の議論における注意の焦点は，“次元なしの次元” であった．しかし，幾何学以前を熟考すべき主要な圧力は，素粒子物理学のすべての部分から強力にはっきり述べられる自然の 2 つの特徴，スピン $\frac{1}{2}$ および電荷であったし，そしてあり続ける．

幾何学以前について新鮮な概観は，一般相対論の新鮮な評価から生じる．“幾何力学は見かけほど重要でない，あるいは単純でない．幾何力学を，もとに横たわる単純さを探すときの出発点とするな．素粒子物理学で，さらに深く眺めよ．” これは Sakharov [**the**
*9 Sakharov]（1967）によって提案され，そしてコラム 17.2 における見出し，“空間の計量弾性としての重力” のもとで要約された，興味ある新しい考察の趣旨である．要するに，弾性が原子物理学に対するように—Sakharov の見解では—重力は素粒子物理学に対している．弾性の変形のエネルギーは，原子と原子間の結合に変形によってもたらされるエネルギー以外の何ものでもない．空間を曲げるのに要するエネルギーは，Sakharov によれば，場の真空エネルギーおよび粒子において，曲率によってもたらされる摂動以外の何ものでもない．変形に対して要求されるエネルギーは，ある場合には 2 個の弾性定数によって支配され，別な場合には 1 個の弾性定数（Newton の重力定数）によって支配される．しかし両方の場合に，Sakharov は推論する．定数は多数の複雑な個々の効果の結合によって生じ，空の石板に対する勇気ある明白な一撃によって生じるわけではない．

重力の Sakharov の見解は今日，すべてのより好意的な歓迎を受ける．なぜなら 1915 年には知らなかったけれども，真空は物理学においていかに充実しているかを知っているからである．Einstein の時代の 10 年間に，平坦な時空の理想的な神に与えられた Lorentz の完全な理論から曲がった時空の理論が生まれた．これまで物理学の上につねに立っていた幾何学の世界に，1 個の物理定数を割り当てることは勇気を要した．真空は長い間，回
*10 転している圧延機から現れる 1 枚のガラスのように，構造がないとみえていた．陽電子の発見で［Anderson (1933)］，熱は “空の” 空間内で解凍されるという生活をわずかに認めるようになった．発見されたおのおのの新しい粒子および放射が真空に新しく豊かな物理学を与えた．舗装道路は滑らかにみえる．しかしブルドーザーは表面下のすべての複雑さを暴露するには道路を通してただ 1 つの溝を掘り起こすだけでよい．

粒子は空間の幾何学からつくられていると考える．粒子は “幾何力学の励起子” と考える？　模型—それは Sakharov の評価から得られるようにみえるだろう—は，原子が弾性からつくられていると考えることを除いて，自然との調和においてかなりの評価を得るだろう！弾性は原子を説明しなかった．原子は弾性を説明した．もし，同様に，粒子が Einstein の

*9　Sakharov：“重力は空間の計量弾性” である
*10　空間の層形成

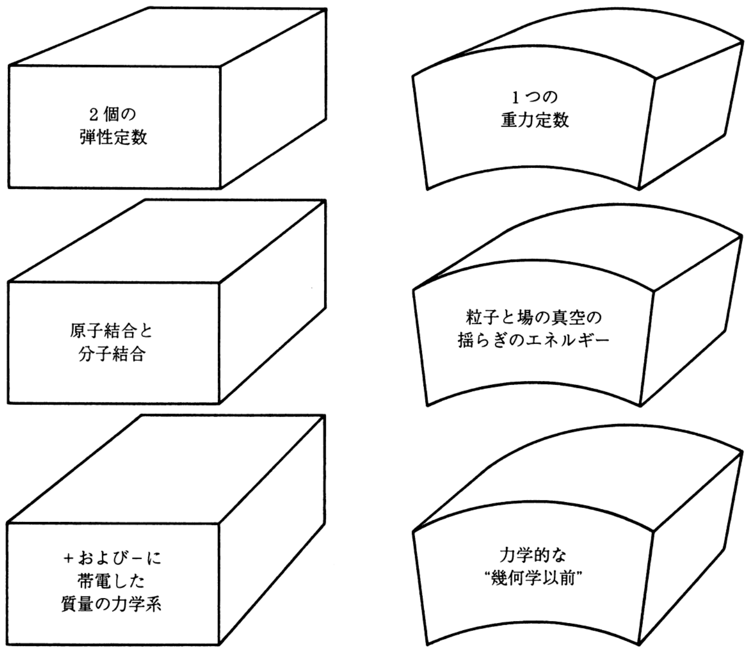


図 44.2 解析の 3 つのレベルで眺めたときの弾性と幾何力学．弾性の 100 年間の研究は分子の存在を明かさなかった．そして分子化学の 100 年間の研究は Schrödinger 方程式を明かさなかった．発展は図で下向きでなく，上向きに進んだ．

幾何力学の法則における定数を固定するならば（Sakharov），幾何力学の法則が粒子を説明すると考えることは理にかなっていないことはないだろうか？

*11 幾何学と弾性との間の比較を 1 段階深める（図 44.2）．混合された固体内では数百の異なる結合（bond）が存在し，そのすべてが弾性定数に寄与する．あるものは van der Waals の力から生じ，あるものはイオン結合から生じ，あるものは共有結合の連結から生ずる．それらの弾性定数はとても多様な強さをもっている．しかしそれらのすべては，量子力学の法則に従う正および負に荷電された質量の系のような途方もなく単純な何かに起源をもつ．無数の結合の化学および物理学のおのおのの複雑さを，対応する原理の複雑さとどのような方法を使ってでも調和させるということは，要求されなかったし，あるいは正しくなかった．結合の強さよりも深い解析のレベルにいくことによって，法則の理解は明るい世界に現れたであろう．そこでは単純と統一以外の何ものもみられるべきでなかったであろう．

幾何学と比較する．真空は異なる場のゼロ点活動および多数の異なる粒子で生き生きしている．それらのすべては，Sakharov によれば，Newton の G，“計量の弾性定数”に寄与する．あるものは弱い力によって，あるものは電磁気力によって，そしてあるものは強い力を通して相互作用する．これらの相互作用はいろいろな種類の強度をもつ．しかしすべてのこれらの粒子および相互作用は，それらの起源を何か途方もなく単純なものにもっ

*11 ありふれた弾性との比較

てはいけないか？　そしてこの何ものか，この“幾何学以前”は，電子の量子力学が弾性からはるかに離れているほど，幾何学からはるかに離れていてはいけないか？

もし一度，一般相対論を幾何力学以前の発見への指標と考えるならば，物理学のより古い領域とのこの比較以上に落胆させるようにみえるものはないだろう．誰も量子力学の原理を明るみに出すために弾性の法則を研究することを夢みないだろう．また誰も原子物理学を学ぶために金属の加工強化を探求しないだろう．理解の順序は

$$\text{加工強化}\ (1\,\text{cm}) \to \text{転位}\ (10^{-4}\,\text{cm}) \to \text{原子}\ (10^{-8}\,\text{cm})$$

と推移しないで，正反対に推移した．

$$\text{原子}\ (10^{-8}\,\text{cm}) \to \text{転位}\ (10^{-4}\,\text{cm}) \to \text{加工強化}\ (1\,\text{cm})$$

転位について理解するために原子について知らなければならなかった．そして加工強化を理解するために転位について知らなければならなかった．同様に“幾何学の弾性”から素粒子物理学の理解へいき，そして素粒子物理学から幾何学以前を明るみに出すことにいくことは見込みがあるのではないか？　進行の順序はまた正反対であってはならないか？　そして幾何力学―そして幾何力学のみならず幾何学自身―を前方へびっこを引いて歩くときに頼るべき松葉杖として断念することで，経験する明白な指針の欠如はいかなる落胆の根源ではないか？　しかしこの自然な見方が正しいことが非常に多いので，この見方を真摯に受け取りその結果を探求しなければならない．今日以上に幾何学以前を探求すべき動機をもつことはけっしてない．

44.5　命題の計算法としての幾何学以前

部屋の床を白い紙で張り，それを 1 フィート平方に区切る．手とひざを床について，第 1 の区画内に宇宙の物理学を支配できると考えられる 1 組の方程式を書く．一晩中さらに考える．翌日第 2 の区画によりよい方程式の組を記入する．もっとも尊敬される仲間を招待して別な区画に記入してもらう．これらの作業の終わりには扉に及ぶまで仕事をしているだろう．立ち上がり，すべてのそれらの方程式を回顧する．あるものはおそらく別なもの以上に希望がもてる．指を堂々と上げ，そして“飛べ”と命令する！　それらの方程式の 1 つは翼を身につけて，離陸し，あるいは飛ぶことはない．しかし宇宙は“飛ぶ”．

*12　一意的に正しく，そして一意的に単純なある原理は，それを知るときには，宇宙はこれこれの方法でつくられ，そしてつくられなければならない，そしておそらくそれ以外ではありえないだろうということは明白であることを強く求める．しかしいかにしてその原理を発見することができるだろうか？　もし加工強化や転位の研究から原子物理学を理解することの見込みがなかったならば，宇宙の基礎的な作用原理（幾何学以前，もしくはよびたいようによばれる）を一般相対論および素粒子物理学の多くの研究によって，理解することは等しく見込みがないだろう．

*12　幾何学以前の中心的な原理を探求する

Thomas Mann（1937）は，Freudについての彼の随筆で，Niels Bohrが確かに偉大な真実とよんだであろうもの（“偉大な真実はその逆もまた偉大な真実であるような真実である”）についてこう述べている．“科学が前進することを哲学が支持し勇気づけるまでは科学はけっして前進しない”，もし等価原理（16章）およびMachの原理（21.9節）が一般相対論の哲学的な名づけ親であったならば，それらの原理が意味するもの，および意味すべきものはEinsteinの理論自身の研究そして再研究によってのみ明白になることもまた真実である．したがって幾何学以前が哲学的でもありそして説得力もある原理から生ずるという探求の主要な指針であると予期することは，理にかなっているようにみえるだろう．しかしまたおそらく近いうちにその内容あるいはその意味するものが完全に明らかにされる予定はない．

科学の世界から列挙できるすべての原理の中で，**単純さ**以上に強要的なものを考えることは困難である．そして力学そして生活そして運動のすべての単純さの中で**2要素からなる選択**，ハイ–イイエあるいは真実–偽り以上に飾らないものはない［Werner（1969）］．出発の原理に対するこの選択はどのような方法でも正しいということにはならない．しかしPauliの“非古典的な2価性”あるいは素粒子物理学の世界を支配する“スピン”において，この選択が便利であることは若干の慰めを与える．

*13 幾何学以前を試験的に構成することは1つのはじまりである．しかしいかに進むか？　いかに進むべきでないかは図44.3によって例示されている．“ミシン”は，ハイ–イイエ2進符号における入力テープ上で受け取る命令によって，1つあるいは別な明確な次元あるいは混合した次元の物体をつくる．この模型によって，あるいは1ダースの別な模型の1つによって，2要素上の構造をつくることの困難のいくつかはただちに目につく．(1) なぜ$N = 10{,}000$が単位か？　なぜ異なるNでないのか？　そしてもし出発で1つのこのような任意の数を供給するならば，なぜより多くの特徴を“手で”固定しないのか？　自然な停止点は明白でないし，またこのような停止点を固定するだろうどのような原理も明白でない．このような任意性は単純さの原理と矛盾し，そして模型を除外する．(2) 量子力学は外部から付加され，内部から（模型そのものから）生成されない．この点についてもまた単純さの原理は模型に反する．(3) 幾何学以前から幾何学への移行はあまりにも想像力に乏しい方法でなされ，粒子および場がその方法に沿って現れる必要性がない．別な機会でBohrによって用いられた言葉で，模型は“馬鹿げているが，しかし正しくあるほどには十分馬鹿げていない”．

*14 これらの困難に注意して，それらから解放されているかどうかをみるために，幾何学以前の模型の後に模型を実りなく試みて，ハイ–イイエあるいは真実–偽りの要素の結合に対する仕組みは考案されるべきでないことを突然理解する．模型はすでに存在する．自らに問う，幾何学以前は命題の計算法以外の何でありうるか？（コラム44.5）

*13　2要素からなる選択の原理の上に建設された幾何学以前の最初の試み

*14　より理にかなった状況：幾何学以前は命題の計算法である

44.6 ブラックボックス：宇宙の再構成

どれほどの探求もこれまで重力崩壊から“安価な解決方法”を露呈していない，はるか以前に探求は，原子の崩壊から安価な解決方法を明かした．以前の危機において物理学者は，最後に革命的なピストル，“何ものも理解しない，あるいは量子原理を受け入れる”ことに直面した．今日の危機はより大きな革命を押しつける．幾何学は失敗し，そして幾何学以前が，重力崩壊の最終段階を通して次に起こるものについて物理学的な説明をする役割となる，と言う以外に代わるべき手段をみない．思い切った領域にまで適用される，単純さの原理以外にこの未知の方法への指標は明白でない．

再膨張が始まりそして力学が正常に戻りうる前に，全宇宙が Planck の長さ，あるいはおよそその程度まで圧縮されるかどうかは，考慮したい質問のいくつかに対して無関係で
*15 あるだろう．物理学は，何が途中で起こるかを無視して，何が入り何が出ていくかに集中したい状況を象徴するために，“ブラックボックス”を長らく用いてきた．

電気的な崩壊の危機の始まりには，電子が引力の中心点に向かう決定的な経路上で正面衝突すると考えた．そして不幸にも有限時間内に無限大の運動エネルギーの状態に達するべく運命づけられていると考えた．量子力学の出現後は，引力の中心と電子との間の相互作用を“ブラックボックス”に要約することを学んだ．1方向に進む電子の波連を発射して，この，あの，そして別な方向にこの，あの，そして別なよく定められた確率振幅で出てくる電子を得る（図 44.4）．さらに，これらの確率振幅を定量的にそして正しく予言するには，古典論の Hamiltonian を波動力学の言葉に翻訳して生ずる波動方程式，ブラックボックスへの鍵を解けば十分であった．

*16 重力崩壊に対する同様の“ブラックボックス”の観点は，“結果の確率分布”を予期するべく導かれる．しかし，ここでは，1つの結果は電子の散乱の角度のようなただ1つのパラメータによってでなく，多くのパラメータによって別な結果から区別されることを予想しなければならない．それらは最大膨張時での系の大きさ，この新しいサイクルの出発から崩壊で終わる瞬間までの時間，存在する粒子の数，そして 1,000 個の他の特徴のような量を支配すると予見される．これらの結果の“確率”は，(1) 電子に対する Schrödinger 波動方程式，あるいは，別なブラックボックス問題を引用するための，(2) 導波管の接合部で，異なる導波管に進む電磁波を互いに結合させる Maxwell 方程式，に類似した力学的な法則によって支配されるだろう．しかし，必要な力学的な法則が単純になぜなら幾何力学は，古典的なバージョンおよび量子バージョンの両方で，標準的な微分幾何学の上につくられているから，という理由で一般相対論の Hamilton–Jacobi 方程式（43章）を Schrödinger 方程式に翻訳してすぐに得られると予期することはほとんど理にかなっていない．あの標準的な幾何学は，小さい距離で避けられない，したがってまた，重力崩壊の最終段階で避けられないようにみえる，連結性における量子揺らぎの何ものに対しても，余地を残さな

*15　物理学におけるブラックボックスの役割
*16　崩壊の結果の確率分布

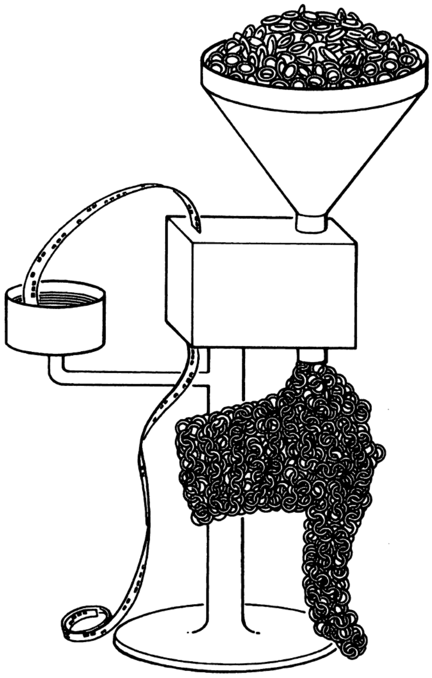


図 44.3 “1 万個の環”，あるいは幾何学以前と幾何学との連結を考える方法のこの例は，間違っている．なぜならそれはあまりにも想像力に乏しいからである．そして本文で詳しく説明されている別な理由のためでもある．（イスラム教国の）大臣［Wheeler による物語，Kilmister（1971）* によって言及されている］は述べる．“$N = 10{,}000$ 個の真鍮の環をとる．自動装置を考え，環を切り開いて，その環を別な環を通して輪につなぎ接合点を再びはんだづけする．真鍮の環をホッパー（hopper，じょうご形の貯蔵槽）に注ぎこの機械に送る．$N(N-1)/2$ ビットを表すに足るだけ細長い命令紙をとる．この命令テープ上の（jk）番目の位置における命令をみる（$j, k = 1, 2, \cdots, N$; $j < k$）．その位置でのビットがゼロであるときには，それは j 番目の環を k 番目の環から不連続のまま残す信号である．それが 1 であるときには，それはその特別な環の対を結びつける命令である．テープを機械に通して出発ボタンを押す．騒音が始まる．一連の 10,000 個の環の連結された長さが出てくる．それがテーブル上に落ち，機械が止まる．別な 10,000 個の環を注ぎ，新しい命令テープを供給し，再びボタンを押す．今度は現れるのは 1 次元の構造でなくて，2 次元の構造である：Crusader の鎖かたびら，襟と袖が完璧に仕上がっている．さらに別なテープをテープの図書館からとりそして繰り返す．より小さいバージョンの鎖かたびら，今度は固い網状組織の環，3 次元構造で内部が満たされている，がテーブル上にどさっと落ちる．今度は図書館の先を行き，自らの命令テープ，0 と 1 のでたらめの糸，をつくる．それに導かれて，留め具（fastener）は “クリスマスツリーの飾り”，1 次元の鎖，2 次元の面，3 次元の実体，4 次元の実体，5 次元の実体，およびさらに高次元の実体，あるものは互いに結びつけられ，あるものは自由に漂っている，部分の集合を生み出す．さてテープによって決定的に固定される構造から，10,000 個の環からつくられている構造に対する可能性の全領域にわたって定義される，複素数の確率振幅，

$$\psi(\text{テープ}) = \psi(n_{12}, n_{13}, \cdots, n_{N-1,N}) \qquad (n_{ij} = 0, 1) \tag{1}$$

に向かう．これらの確率振幅がでたらめに指定されないようにする．代わりに，ただ 1 個の環の破れによって互いに異なる構造に対して，すべての環を同じ土台で取り扱う 1 次公式によって振幅を互いに連結する．異なる ψ は，もはや完全には独立でなく，依然として “クリスマスツリーの飾り” に対してゼロでない確率振幅を与えるだろう．これらの “手に負えない” 構造の部分以上に大きい直接的な関心の中でより滑らかな部分について以下の質問がある．(1) どのような種類の構造に大部分の確率が集中しているか？ (2) これらの構造の主要な次元は，適切な対応原理の極限で何であるか？ (3) この半古典的な極限で，幾何学の展開の力学法則によってとられる形は何であるか？” 単純性の原理以上に明白に幾何学以前に対するこの模型を除外する原理は存在しない（本文をみよ）．

---

* （イスラム教国の）大臣についておよび大臣が超空間について言わなければならなかったことについての Wheeler の話は，1970 年 5 月 18 日，一般相対論についてのトポロジーの振る舞いについての Gwatt セミナーで述べられた．Kilmister（1971）の出版された論文は，出版されていないこの話に言及しているが，しかし実際にはこの話の内容を含まない．

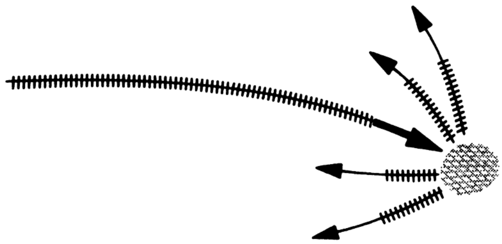


図 44.4 (1) 引力中心による電子の散乱にそして (2) 宇宙自身の崩壊に適用される “ブラックボックス模型”．古典論の決定論的な電子の世界線は量子論では確率振幅によって置き換えられる，確率振幅の波頭は図で概要的に例示されている．古典論の破滅は量子論では出力の確率分布によって置き換えられる．同じ図は本文で言及されている重力崩壊の “ブラックボックス記述” を例示する．図の競技場はもはや時空でなくて，超空間である．入射の矢印はもはや時空を通しての電子の古典的な世界線でなくて，超空間を通して薄片にする古典的な “群葉の幾何学の履歴” を印づける (43 章)．波頭はもはや時空を通して伝播する電子の波動関数でなくて，超空間を通して伝播する幾何力学の波動関数である．十字の陰影をつけられた領域はもはや一体ポテンシャルが無限大にいく領域でなくて，空間の曲率が無限大にいく重力崩壊の領域である．出ていく波はもはや散乱された電子の新しいコースに対する択一的な方向でなくて，現在のサイクルを終わらせる崩壊と “再過程” 後の宇宙自身に対する択一的な新しい歴史の始まりを記述する．

コラム 44.5　“命題の計算法としての幾何学以前”

論理学の標準的な教科書からほとんどでたらめに選ばれた見本の命題は次のように書いてある [Kneebone (1963)，p.40]．

$$[X\to((X\to X)\to Y)]\ \&\ (\bar{X}\to Z)\ \mathrm{eq}\ (\bar{X}\vee Y\vee Z)\ \&$$
$$(\bar{X}\vee Y\vee \bar{Z})\ \&\ (X\vee Y\vee Z)\ \&\ (X\vee \bar{Y}\vee Z)$$

記号は以下の意味をもつ．

$\bar{A}$	A でない,
$A\vee B$	A または B，あるいは両方 (“A *vel* B”),
$A\,\&\,B$	A および B,
$A\to B$	A は B を意味する (“もし A ならば，B である”),
$A\leftrightarrow B$	B は A に同等である (“A である場合に限り B である”)

命題的な公式 $\mathcal{A}$ は，$\mathcal{A}\leftrightarrow\mathcal{B}$ が同語反復である場合に限り，命題的な公式 $\mathcal{B}$ に同等である (“eq”) と言われる．文字 A，B，… は 1 つの命題を別な命題と “針金で互いに結ぶ” 接続子としての任務を果たす．このように続けて無限に長い命題を構成することができる．

切替え回路 (switching circuit) は命題に同形である [たとえば，Shannon (1938) あるいは Hohn (1966 をみよ)]．

短い命題あるいは基本的な切替え回路を分子の衝突に比較する．熱は分子衝突の表

示であるという，Daniel Bernoulli (1733) のアイデア以上に非常識であるようにみえるアイデアはない．さらに，3 体遭遇は取り扱いが難しい，4 体衝突はさらに難しい，そして 5 個のあるいはより以上の分子系は本質的に手に負えない．にもかかわらず，力学は分子の数が非常に大きい極限で，そして位相空間における密度の概念を用いることができる極限で，新しい単純さの要素を獲得する．この極限における統計力学から温度およびエントロピーのような概念が現れる．温度がよく定義されているとき，系のエネルギーはよく定義された概念でない．そしてエネルギーがよく定義されているとき，温度はよく定義されていない．この不確定性は主題の原理に避けられずに埋め込まれている．指をマッチの炎に入り込ませ，そして天あるいは地球上以外の何ものでもないような感覚を経験する．しかし先程の検討にもかかわらず，起こるものはすべて分子衝突の結果である．

任意の個々の命題は，それが長いときには知性が感知するのは難しい．命題群の場合には，内容は理解するにはさらにより難しい．にもかかわらず，命題の数が大きくそして命題の多くが長い極限では命題の計算法の統計的な解析をする．パラメータが，(1) ある小さい測度で統計力学の温度とエントロピーに類似しているが，しかし (2) それだけより多数の，そして特徴においてありふれた力学的であるので，パラメータがありふれた物理学を再現する．この解析における注意に自らを強制するかどうかを尋ねる．

少し考えるだけで，自然が命題の計算法のように希薄な基礎の上につくられているという考えほど非常識にみえるものはないだろう．しかし，単純さの原理によって勧められるこの方向の向こう側に，二つの魅力が存在する．第 1 に，ありのままの骨格の量子力学は驚くほど自然な方法で命題の計算法の言葉における定式化に適する．証拠としては Jauch の本 (1968) だけでない．もし量子原理がこのようにすでに幾何学以前に対する提案された模型に自動的に含まれていなかったならば，そしてもし対照的に量子原理が外部から導入されなければならなかったならば，その証拠そのものによって，模型は単純さの原理を破壊してしまっていると結論するだろう，そして模型を除外しなければならないだろう．第 2 に，現実性の追求はつねに現実から切り離されるようにみえる．あるものを今や時空の幾何学の曲率による重力としてこれほどまでに記述することを誰が想像しただろう？ そして後にこの幾何学が力学として認められるようになったとき，誰が幾何力学が超空間のような軽やかな競技場で展開することを夢想しただろうか？ したがって，もし自然の記述が最後に論理，数学の中心にある砦に導かれるならば，わずかな驚きもあるはずがない．もし信じられているように，すべての数学が論理の数学に帰着するならば，そしてすべての物理学が数学に帰着するならば，すべての物理学が論理の数学に帰着する以外にどのような選択肢が存在するか？ 論理は“自らについて考え”うる数学の唯一の分野である．

“物理学と何の関係ももたない論理の問題”は，“平行線はけっして交わらない”という公理について古くから多数の人による論争の的であった．その公理は Euclid 幾何学

の別な公理から出るかあるいは Euclid 幾何学と無関係であるか？“無関係である”，と Bolyai および Lobachevsky が証明した．このことおよび Gauss の仕事を出発として，Riemann 幾何学を創造するにいたった．幾何学について見出すべく，Euclid でなく自然を研究する，Riemann はそう忠告した．そして Einstein はその忠告を取り入れ幾何学を物理学の一部分とするべく進んだ．

“物理学と何の関係ももたない論理の問題”は Gödel（1931），Cohen（1966），および他の人たちによって発見された，論理についての驚くべき制限の自然な最初の評価である［レビューについては，たとえば，Kac and Ulam（1968）をみよ］．正反対は，もし現実の物理学の世界の現実の幾何学以前が，実際命題の計算法と同等であることがわかるというものでなくてはならない．

“論理の明示としての物理学”あるいは“命題の計算法としての幾何学以前”はいまだ［Wheeler（1971a）］アイデアでなくて，アイデアのためのアイデアである．それは進歩の順序は

物理学→物理学以前

でないかもしれず

物理学以前→物理学

であるかもしれないと，暗示することによって，少し理解を進めるために提案されている．

い．幾何学でなくて，幾何学以前が，重力崩壊のブラックボックスを満たさなければならない．

*17 ブラックボックスの内部組織をほとんど知らないように，起こっているものの次の状況から逃れられない．宇宙は変換する，あるいは変質する，あるいは遷移する，あるいは崩壊の時期に 1 つのサイクルの履歴から別なサイクルの履歴へ確率的に**再構成される**．

どんなに率直にそして避けられない，宇宙の再構成のこの状況は，一般相対論の主要な特徴および量子原理，20 世紀物理学の 2 つの支配的な原理から出るようにみえるだろうけれども，にもかかわらず熟慮するには異様である．いかにして信じられないほど巨大な系の力学が，10^{11} 年続いた 1 つのサイクルから 10^6 年だけ続くであろうサイクルへ転じられうるのか．そして確率の気まぐれで転じられうるか？ 最初は，系がこの力学の過程で信じられないほど小さい距離まで圧縮される状況のみが系をそれほど信じられない変換に調和させる．そうすると山の傾斜の逆様にされた地層，あるいは以前にみられていない鳥を眺めて，この宇宙は何なんだと驚く．

種の変化，

岩の変形，

---

*17　宇宙を“再構成すること”

化学変換，

核の自発的な変換，

粒子の放射崩壊，

宇宙自身の再過程

もし岩が数千 m そして数百度上げられたり下げられたりしうることを知るべく地質学に新しい光を投げるならば，ときどき“ふし穴を通して圧縮され”，強烈に“再過程され”そして新たな力学的サイクルに出発する宇宙について物理学が考えることは何を意味するか？ 上の 3 つの考察はすべて注意を払うよう自らを押しつけ，次の文言で表されている．

崩壊においてすべての運動定数は破壊され，

“崩壊の気象学の氷結した部分”としての，

粒子，物理“定数”そのものが存在し，

“物理定数は生物学的に選択される”

*18 星，あるいは星の集団の，ブラックホールへの重力崩壊は，質量と電荷と角運動量を除いて系のすべての詳細を消滅させる（32 および 33 章をみよ）．物質あるいは反物質あるいは放射からつくられていようと，多くのエントロピーあるいはわずかなエントロピーを与えられていようと，滑らかな運動状態にあるかあるいは混沌とした動乱状態にあろうと，崩壊している系は，すべての兆候によれば，外部から眺めたときに同じ標準的な状態で終わる．バリオン数およびレプトン数の保存則は超越される［33 章，また Wheeler (1971b)］．知られている手段は何であれ，ブラックホールが同じ質量，電荷，および角運動量をもっている限り，多くの異なる起源のブラックホール間を区別しないだろう．しかし閉じた宇宙に対しては，これらの定数さえも舞台から消滅する．全電荷は自動的にゼロである．なぜなら力線は電荷以外に終わるべき場所をもたないからである．全質量および全角運動量は，閉じた宇宙に対しては定義可能な意味すらもたない．この結論はとくに，試験粒子を周期と歳差運動を定めるために，Kepler 軌道に置くことができる外部の漸近的に平坦な空間が存在しないから出るのである．

物理学のすべての原理の中で，電荷，レプトン数，バリオン数，質量，および角運動量の保存則はもっとも確かに確立された原理である．しかし重力崩壊とともにこれらの保存則の内容もまた崩壊する．確立されているものは確立されなくなる．宇宙のサイクルからサイクルへ値を変えずに継続しうるであろうどのような運動の決定要素も残されない．さらに，もし粒子が力学的に構成されるのであるならば，そしてもし粒子質量のスペクトルがしたがって起源において力学的であるならば，質量スペクトル自身が，“宇宙が結び目の穴を通して圧縮される”時間に再構成されると結論する以外に，どのような選択も残されないようにみえるだろう．この 1 枚の紙の分子は数年前に木の内での光化学合成からの
*19

*18 すべての保存則は宇宙の崩壊において超越される

*19 3 つの階層の化石：分子，核，粒子

“化石” である．この空気内の酸素の核は数十億（10^9）年前に星の内ではるかに高温度での熱核燃焼からの化石である．粒子はすべての，重力崩壊のもっとも激しい事象からの化石以外に何でありうるか？

1 つの地質学の層は驚くほど直線的な構造をもつ．何マイルもの長い傾斜をもち，別な層は別な傾斜をもつことは，構成を理解するまでは，すべての通行人によって当然な陳腐なものと思われるか，あるいは奇跡であるかのいずれかである．ここでの電子はあそこでの電子と同じ質量をもつということはまた，些細なことであるかあるいは奇跡である．それは量子電気力学においては些細なことである．なぜならそれは導かれるよりもむしろ仮定されているからである．しかし，宇宙がときどき “再構成される” とみなすどのような見解上でもそれは奇跡である．もし粒子質量のスペクトルが宇宙の 1 つのサイクルと別なサイクルとの間で異なるならば，いかにして電子は宇宙の現在のサイクルにおける異なる時間と場所で同じ質量をもちうるか？

*20 1 つの型の粒子の内部を検査し，そして内部を並外れて拡大すると，その内部に全宇宙の 1 つの展望をみる［Leibnitz（1714）の単位の概念に匹敵する．“単位は何ものも入ったりあるいは去ったりできる窓をもたない”］．そして同じ型の別な粒子に対しても同様にする．同じパターンの粒子は，同じ宇宙の同一パターンの概念を与えるから，宇宙の任意の 1 つのサイクルで同一のパターンであるだろうか？ 同じ型の粒子の驚異的な同一性に対する受け入れ可能な説明は提案されていない．その同一性は物理学の些細なこととしてでなく，物理学の中心的な神秘としてみなされなければならない．

*21 粒子質量のスペクトルのみでなくて，物理 “定数” 自身は，1 つのサイクルから別なサイクルへ再構成されると考えるのはもっともである．何に相対的に再構成されるのか？ たとえば，Planck 単位系に相対的に，

$$L^* = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.6\times10^{-33}\,\mathrm{cm},$$

$$T^* = (\hbar G/c^5)^{1/2} = 5.4\times10^{-44}\,\mathrm{sec},$$

$$M^* = (\hbar c/G)^{1/2} = 2.2\times10^{-5}\,\mathrm{g}$$

唯一の単位系．Planck（1899）は，自由に，黒体放射自身のように，固体物理学のすべての複雑さの中で，分子結合，原子の構成，および素粒子の構造，およびもっとも単純でもっとも普遍的な物理学の原理についての背景のみに対するデッサン，重力および黒体放射の法則を指摘した．Planck 単位に相対的に，物理学のすべての別な部分におけるすべての定数は純粋な数として表される．

$\hbar c/e^2 = 137.0360$ 以上に印象的な物理学における純粋な数は存在しない，そしていわゆる “大きい数”［Eddington（1931, 1936, 1946），Dirac（1937, 1938），Jordan（1955, 1959），Dicke（1959b, 1961, 1964b），Hayakawa（1965a,b），Carter（1968b）］，

---

*20　同じ種類の粒子の質量において同等性に対する理由
*21　物理定数の再過程

$$\sim 10^{80} \text{ 個の宇宙内の粒子}^*,$$

$$\sim 10^{40} \sim \frac{10^{28}\,\mathrm{cm}}{10^{-12}\,\mathrm{cm}} \sim \frac{(\text{最大膨張での宇宙の半径})^*}{(\text{素粒子の“大きさ”})},$$

$$\sim 10^{40} \sim \frac{e^2}{GmM} \sim \frac{(\text{電気力})}{(\text{重力})},$$

$$\sim 10^{20} \sim \frac{e^2/mc^2}{(\hbar G/c^3)^{1/2}} \sim \frac{(\text{素粒子の“大きさ”})}{(\text{Planck の長さ})},$$

$$\sim 10^{10} \sim \frac{(\text{宇宙内の光子の数})}{(\text{宇宙内のバリオンの数})}$$

これらの数の間の関係のいくらかは理解が得られている［Carter（1968b)］．それらの並外れた大きさに対してはどのような説明も現れていないし，もし宇宙を再過程することがまた物理定数を再過程するという概念が正しいならば，またいつまでも現れないだろう．その概念に基づくこれらの定数は物理学の法則の部分でない．それらは初期値のデータの部分である．このような数は宇宙膨張のおのおのの新しいサイクルに対して新しく与えられる．“大きな数”に対する物理学的な説明を探すことはこうして間違っている質問に対して正しい答えを探しているようにみえるだろう．

1つの嵐と次の嵐の間の週内で，天候の多くの特徴は絶えず変化している．しかし風のある特別なパターンはその週の間続く．もし述語“気象学の凍結された特徴”がそれらのパターンに対して適切であるならば，宇宙の1つの再構成と別な再構成の間のサイクルにおける大きな数，物理定数，および粒子の質量のスペクトルに対しては，それはより適切にみえるだろう．

*22 Carter（1968b）によれば，“定数”の1つ，$\hbar c/e^2$ における1%あるいはそれくらいの変化は，すべての星が赤い星になる原因となるだろう．そして類似の変化はあべこべにすべての星を青い星にするだろう．いずれの場合にも太陽のようなどんな星も可能でないだろう．彼は，もし物理定数の決定要素が宇宙のこのサイクルを特徴づける物理定数から本質的に異なったならば，生命が進化してきただろうかという質問を提起する．

Dicke（1961）は概念の正しい順序は存在しないかもしれないと指摘している．ここに宇宙が存在する，したがって人間は何でなければならないか．しかしここに人間が存在する，したがって宇宙は何でなければならないか？ 言い換えれば，(1) 宇宙であると気付くことなしに，宇宙に何の意味があるというのか？ しかし (2) 認識は生命を要求する．(3) 生命は水素よりも重い元素の存在を要求する．(4) 重い元素の生成は熱核燃焼を要求する．(5) 熱核燃焼は一般に星の中で数十億年料理される必要がある．(6) 数十億年の時

* コラム 27.4 の“代表的な宇宙模型”に基づいた値．天体物理学の距離の決定の現在の状態において，大きい不確定性を受ける．もっとも少なくなく，なぜならこれらの数における自由裁量は開いた宇宙と比較できるに十分でさえあるからである．

*22 生活に対する可能性に関連づけられるときの物理定数の値

間は，一般相対論によれば，あの宇宙の最大膨張時の半径が数十億光年あるいはそれ以上でなければ，閉じた宇宙においては利用できないだろうし，そして利用できない．したがってこの考えに立てば宇宙はなぜ現在のように大きいか？　なぜならその場合に限り人間はここに存在しうるからである！

要するに，Carter および Dicke の意見は “物理定数の生物学的な選択” の概念を掲げているようにみえるだろう．しかし，“選択する” ことは両者の間で選択する自由が存在しなければ不可能である．厳密にこのような選択の自由は，**宇宙の再構成の幾何学以前のブラックボックス模型**を，今日いかに提案するかをみるという宇宙の重力崩壊の唯一の大域的な状況によって初めて提供されるようにみえるだろう．

あらゆる用心をして未踏の領域に進んでも，それにもかかわらず，到達しつつある結論と解析の与えられた段階での質問は，より以上の洞察力の必要な質問とさらにより注目すべき状況へいく途中での踏石に過ぎないかもしれないということを知っておかなければならない．“再構成と選択” について語ることは Leibniz が考えたように，機構の世界としてでなく，関係の世界として宇宙を考える方向の道筋の中間点であるに過ぎないかもしれない．以前のサイクルから “再構成” によって現在の状態にもたらされているどころか，宇宙はある異常な意味で関係するものの関与によって “生ぜしめられている” かもしれない？この考えに立つと “サイクル” という概念はまったく間違っているようにさえみえるだろう．代わりに肝心な行為は関与という行為である．“関与するもの” は量子力学によって与えられる明白な新しい概念である．関与するものは，古典論の述語 “観測者”，厚いガラスの壁の背後に安全に立って，参加せずに起こっているものを見守る者を打ち倒す．それはできないと，量子力学は述べる．目立たない電子についてさえ，その位置あるいはその運動量に対してどのような意味であれ与えうる前に関与しなければならない．この固く確立されている結果は巨大な氷山の一角であるか？　宇宙はその意味を “関与” から導くか？　われわれは次の偉大な前進をなしうる前に，“確立以前の調和”（“Leibniz の論理ループ”）という Leibniz の偉大な概念に戻るべく運命づけられているか？

*23 重力物理学について，中性子星から宇宙論へ，そしてポスト Newton の天体力学から重力波へ，という探求に対しては豊かな期待が開かれている．Einstein の幾何力学は，数多くの戦線に基づき，そして 1,000 個の予言により，破壊に身をさらす．以前のテストを受けているどの予言も，ブラックホールの形成と性質についての予言以上に魅了させるものでない．どのような分野も重力崩壊以上に未来について意義深いものはない．崩壊のパラドックス，すべての時間の物理学の最大の危機を熟考することから生ずる見解以上に人間および宇宙にとって，革命的な見解はない．深刻に考慮するべく駆り立てられている見解をもたない．

*23　宇宙の崩壊に対する “実験室” 模型としてのブラックホール

これらの努力のすべては，存在は完全に調和のとれた構造をもつべきであるという信念に基づいている．今日われわれはこのすばらしい信念を手放さなければならない理由はない．

EINSTEIN（1934）



今証明されているものは，かつては
想像されただけのもの．
——WILLIAM BLAKE

(Georges Brasseus の歌 “あなたとランデヴー” する空間について)

宇宙がいかに単純であるかを
われわれはまず理解するだろう
宇宙がいかに不思議であるかを
われわれが理解するときに．
——ANON

宇宙を統一された観点から
理解できる者にとっては，
唯一の真実と必然性として
すべての創造は現れるだろう．
——J. D'ALEMBERT

ヨーホー，それは熱い・・・
太陽はわれわれが住めるところでない
しかしこの地球上では
太陽が与える光なしに生きものは存在しないだろう．
——H. ZARET

確からしい——可能である，私の黒い雌鳥，
彼女は卵を相対的なときに産む．
彼女は卵を確実な今産まない
なぜなら彼女はどうするかを仮定できないから．
——F. WINSOR

双極子放射
それはわれわれに対してでないことを人は承知している
それは Maxwell に対してである，そう，しかし Maxwell 自身は
それを気にしていない
すべては結局，相対的である

人が想像する論旨
すべてを述べるべき Synge の論旨
われわれは四重極子を告げる
すべては結局，相対的である

準星の源
ホールの中に入るように消滅する
Schwarzschild のときに，そう，しかし Schwarzschild 自身は
それを気にしていない
すべては結局，相対的である

特異性をもつ解に
人はそちらの方を好む，しかもはるかに
いたるところ規則正しい計量
すべては結局，相対的である

核物理学者たち
彼らと同じようにわれわれは非常に好む
すべての金はそこにある，そう，しかし金そのものはそれを問題にしていない
すべては結局，相対的である

Weber の実験
ジャイロスコープ，そのための費用がかかる
思考の人はより安価である
すべては結局，相対的である

——M. A. TONNELAT

"Omnibus ex nihil ducendis sufficit unum!"
(無からすべてを創造するのに十分である！)
——GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ

Arthur Evans がこの発掘を始めたときには
彼が未知の世界を見つけるかもしれないということを
彼自身もまた他の誰も知らなかった.
——PAT (Mrs. Hypatia Vourloumis at Knossos (1971))

("ブロンドの娘のそば" の空間について)

Asnières 庭園の中で
再び花開く科学
世界のすべての学者
彼らの著書を提示する

> くり返し：
> われわれの波動のそばに
> 誰が気持ちがよい，気持ちがよい，気持ちがよい
> われわれの波動のそばに
> 誰が気持ちがよい夢を見る

世界のすべての学者
彼らの著書を提示する
重力の法則
エネルギーのテンソルなしに

重力の法則
エネルギーのテンソルなしに
心を奪う模型から
宇宙論のために

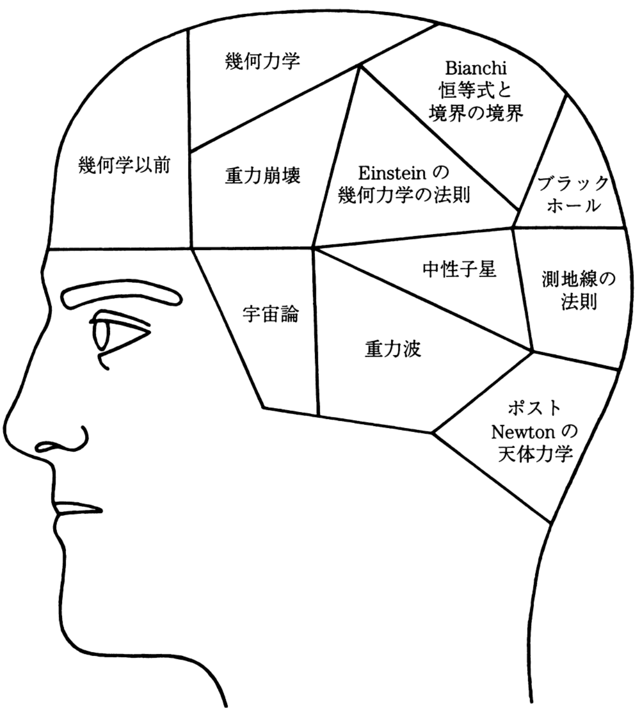
見事な模型から
宇宙論にとって
私にはほとんど必要でない
なぜなら私には愉快なことがあるから

私にはほとんど必要でない
なぜなら私には愉快なことがあるから
私はそのことで頭がいっぱいになっている
ここに私の原稿がある

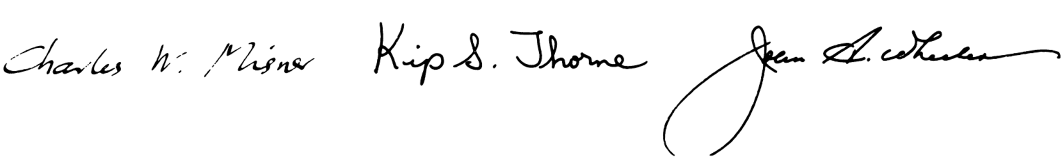
分野はペンを与える
空間–時間の隆起に
そこからいくつかの隆起を取る
運動を叙述するために

——C. CATTANEO, J. GÉHÉNIAU
M. MAVRIDES, and M. A. TONNELAT
Reprinted with the kind permission of the authors.

そうして想像力が
この世にないものの形を造り出すと，詩人のペンは
それらの姿をいきいきと描きだし，空なるものに
存在する場所と名前を与える.
——SHAKESPEARE



われわれの忍耐強い読者に対して感謝とお別れを.



訳者あとがき

Charls W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler, GRAVITATION を翻訳して——

著者の一般相対性理論および物理科学全般についての学識の深さに驚きと尊敬の念を禁じえません．とりわけ物理学の内容について，工夫を凝らした明解な文章と独創的な図を駆使しての解説は，日本のすべての学生，研究者に対して，分野の如何を問わず，自然科学への関心と研究意欲を大いに高めることと思います．この訳書が日本の自然科学の研究，発展に少しでも役立つならば，私の望外の幸せです．

この邦訳の出版にあたりまして，技術的な援助を温かく，正確に指導していただいた京都大学名誉教授 冨田博之君と，出版までの過程において，惜しみない援助，指導をくださいました，丸善出版株式会社企画編集部の方々に心からの感謝を述べさせていただきます．

2011 年 3 月

若 野 省 己

文献および人名索引

この文献目録は，Synge (1960b) のそれと同じく，抱括的にリストするにはきわめて膨大である文献への要点を与えるだけである．ある分野の文献についてのより広範囲の目録については，たとえば，Lecat (1924)，Boni, Russ, and Laurence (1960)，Chick (1960, 1964)，および Combridge (1965) をみよ．引用は，ときどき，きわめて初期の出版物についてでなく，後の，より手に入れやすい資料とした．参照を容易にするために，会議録や夏の学校の議事録については，編集者の名前やよりよく知られた場所の名 (Brandeis, Les Houches, Varenna, 他) で引用されている．人物名も，明白な文献の引用なしにテキストで，ここに掲載されている．アメリカ合衆国のたいていの学位論文は Michigan 州 Ann Arbor にある University Microfilms, Inc. から利用できる．この文献の最初の形を準備してくれたことに対しては Gregory Cherlin に，後に続く数々の修正に対しては Niegel Coote に感謝します．そして同僚に感謝します．彼らの助けなしには，これらの文献のもっとも理解しにくい，そしてもっとも重要ないくつかは見つけられなかったであろう．

Adler, R., M. Bazin, and M. Schiffer, 1965, *Introduction to General Relativity,* McGraw-Hill, New York. [endpapers]

Aharonov, Y., and L. Susskind, 1967, "Observability of the sign change of spinors under 2π rotations," *Phys. Rev. 158,* 1237-1238. [§41.5]

Ahrens, L. H., F. Press, and S. K. Runcorn, eds., 1964, *Physics and Chemistry of the Earth,* Pergamon Press, London. *Cited under* Bolt 1964.

al Bīrūnī, Abū Raihān, *cited by name in* Box 27.7.

Aldrin, E. E., Jr., *cited by name in* Fig. 40.4.

Alfvén, H., 1971, "Plasma physics applied to cosmology," *Phys. Today 24* (Feb. 1971), 28-33. [§§27.10, 27.11, 28.4]

Alfvén, H., and O. Klein, 1962, "Matter-antimatter annihilation and cosmology," *Ark. Fys. 23,* 187-194. [§§27.10, 27.11, 28.4, Box 27.7]

al Khazini, 1115, *Book of the Balance of Wisdom,* partially edited and translated by N. Khanikoff in *J. Am. Oriental Soc. 6* (1860), 25-38. [§1.7]

Allen, C. W., 1963, *Astrophysical Quantities,* University of London, Athlone Press, London. [§36.6, Box 25.1, endpapers]

Allendoerfer, C., and A. Weil, 1943, "The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra," *Trans. Am. Math. Soc. 53,* 101-129. [Box 15.3]

Alley, C. O., *cited by name in* Fig. 40.4. *See also* Bender *et al.* 1971.

Alpher, R. A., *cited by name in* Box 27.7.

Alpher, R. A., and R. C. Herman 1948a, "Evolution of the universe," *Nature 162,* 774-775. [§28.1]

Alpher, R. A., and R. C. Herman, 1948b, "On the relative abundance of the elements," *Phys. Rev. 74,* 1737-1742. [§28.1]

Alpher, R. A., and R. C. Herman, 1950, "Theory of the origin and relative-abundance distribution of the elements," *Rev. Mod. Phys. 22,* 153-213. [§28.1]

American Ephemeris and Nautical Almanac for 1964, 1962, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C. [Fig. 25.1]

Ames, W. L., and K. S. Thorne, 1968, "The optical appearance of a star that is collapsing through its gravitational radius," *Astrophys. J. 151,* 659-670. [§32.3]

Anderson, C. D., 1933, "The positive electron," *Phys. Rev. 43,* 491-494. [§44.4]

Anderson, D. W., E. H. Brown, Jr., and F. P. Peterson, 1966a, "Spin cobordism," *Bull. Am. Math. Soc. 72,* 256-260. [Box 44.3]

Anderson, D. W., E. H. Brown, Jr., and F. P. Peterson, 1966b, "SU-cobordism, KO-characteristic numbers, and the Kervaire invariant," *Ann. Math. 83,* 54. [Box 44.3]

Anderson, J. D., 1973, "Lectures on physical and technical problems posed by precision radio tracking," in Bertotti 1973. [§40.1]

Anderson, J. D., P. B. Esposito, W. L. Martin, and D. O. Muhleman, 1971, "Measurements of the general relativistic time delay with data from Mariners 6 and 7," in Davies 1971, pp. 111-135. [Box 40.2]

Anderson, J. L., 1967, *Principles of Relativity Physics,* Academic Press, New York. [§17.6, endpapers]

Anderson, J. L., 1970, "Relativistic Boltzmann theory and the Grad method of moments," in Carmeli, Fickler, and Witten 1970, pp. 109-124. [Ex. 22.7]

Anonymous, source of quotation at end of Chapter 44: found on beach at Rincon, Puerto Rico, March 21, 1973.

Aristotle, *ca.* 330 B.C., *Physics,* ed. by W. D. Ross, Clarendon Press, Oxford (1950). [Box 1.2] *See also* Guthrie 1939, Warrington 1956.

Armstrong, N. A., *cited by name in* Fig. 40.4.

Arnett, W. D., 1966, "Gravitational collapse and weak interactions," *Can. J. Phys. 44,* 2553-2594. [§32.7]

Arnett, W. D., 1967, "Mass dependence in gravitational collapse of stellar cores," *Can. J. Phys. 45,* 1621-1641. [§32.7]

Arnold, V. I., and A. Avez. 1968, *Ergodic Problems of Classical Mechanics,* W. A. Benjamin, New York. [§8.2]

Arnowitt, R., *cited by name in* §§21.1, 35.8, Box 17.2.

Arnowitt, R., S. Deser, and C. W. Misner, 1962, "The dynamics of general relativity," in Witten 1962, pp. 227-265. [§§21.1, 21.4, 21.5, 21.6, 21.7, 21.8, 35.4]

Arp, H., 1971, "Observational paradoxes in extragalactic astronomy," *Science 174,* 1189-1200. [Box 28.1]

Ash, M. E. *See* Shapiro, Ash, *et. al.* 1971, Shapiro, Smith, *et. al.* 1971, Shapiro *et. al.* 1972.

Auslander, L., and R. E. MacKenzie, 1963, *Introduction to Differentiable Manifolds,* McGraw-Hill, New York. [Box 8.1]

Auslander, L., and L. Markus, 1959, *Flat Lorentz 3-Manifolds,* American Mathematical Society, Providence, R.I. [Box 27.2]

Avez, A., 1960, "Propriétés globales des espace-temps périodiques clos," *Acad. des Sci., Paris, Comptes Rend. 250,* 3583-3587. [§44.1]

Avez, A., 1964, "Le ds^2 de Schwarzschild parmi les ds^2 stationnaires," *Ann. Inst. Henri Poincaré A1,* 291-300. [§23.1]

Avez, A. *See also* Arnold and Avez 1968.

Avicenna, *cited by name in* Box 27.7.

Baade, W., 1942, "The Crab Nebula," *Astrophys. J. 96,* 188-198. [Box 24.1]

Baade, W., 1952, Report to Commission 28 of I.A.U., Rome, September 1952. [Box 27.1]

Baade, W., 1956. "The period-luminosity relation of the cepheids," *Pub. Astron. Soc. Pacific, 28,* 5-16. [Box 27.1]

Baade, W., *cited by name in* Box 27.7.

Baade, W., and F. Zwicky, 1934a, "Cosmic rays from supernovae," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 20,* 259-263. [Box 24.1]

Baade, W., and F. Zwicky, 1934b, "On supernovae," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 20,* 254-259. [Box 24.1]

Baade, W., and F. Zwicky, 1934c. "Supernovae and cosmic rays," *Phys. Rev. 45,* 138. Abstract of paper presented at Stanford meeting of Amer. Phys. Soc., Dec. 15-16, 1933. [Box 24.1]

Bacon, R., 1268, *Opus Majus,* J. H. Bridges, ed., Clarendon Press, Oxford, Eng. Vols. 1 and 2, 1897; vol. 3, 1900. [Box 27.7]

Bahcall, J. N., W. L. W. Sargent, and M. Schmidt, 1967, "An analysis of the absorption spectrum of 3C191," *Astrophys. J. 149,* 11-15. [§38.6]

Bahcall, J. N., and M. Schmidt, 1967, "Does the fine-structure constant vary with cosmic time?" *Phys. Rev. Lett. 19,* 1294-1295. [§38.6]

Baierlein, R. F., 1967, "Testing general relativity with laser ranging to the moon," *Phys. Rev. 162,* 1275-1288. [§40.6]

Baierlein, R. F., *cited by name in* §21.1. *See also* Krogh and Baierlein 1968.

Baierlein, R. F., D. H. Sharp, and J. A. Wheeler, 1962, "Three-dimensional geometry as carrier of information about time," *Phys. Rev. 126,* 1864-1865. [§§21.9, 43.2]

Bailey, J. *See* Farley *et al.* 1966.

Bailey, J., W. Bartl, G. von Bochmann, R. C. A. Brown, F. J. M. Farley, H. Jostlein, E. Picasso, and R. W. Williams, 1968, "Precision measurement of the anomalous magnetic moment of the muon," *Phys. Lett. 28B,* 287-289. [§44.2]

Bardeen, J. M., 1968, "General relativistic collapse of charged dust (abstract)," *Bull. Am. Phys. Soc. 13,* 41. [§34.6, Fig. 34.4]

Bardeen, J. M., 1970a, "Kerr metric black holes," *Nature 226,* 64-65. [§33.8, Boxes 33.3, 33.5]

Bardeen, J. M., 1970b, "A variational principle for rotating stars in general relativity," *Astrophys. J. 162,* 71-95. [Ex. 33.3]

Bardeen, J. M. *See also* Press and Bardeen 1971.

Bardeen, J. M., B. Carter, and S. W. Hawking, 1973, "The four laws of black-hole mechanics," *Commun. Math. Phys.,* in press. [Box 33.4]

Bardeen, J. M., and W. H. Press, 1972, "Radiation fields in the Schwarzschild background," *J. Math. Phys. 14,* 7-19. [§35.14, Ex. 32.11]

Bardeen, J. M., W. H. Press, and S. A. Teukolsky, 1972, "Rotating black holes: locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation," *Astrophys. J. 178,* 347-369. [§33.7, Ex. 33.3, 33.14]

Bardeen, J. M., K. S. Thorne, and D. W. Meltzer, 1966, "A catalogue of methods for studying the normal modes of radial pulsation of general-relativistic stellar models," *Astrophys. J. 145,* 505-513. [Box 26.1]

Bardeen, J. M., and R. V. Wagoner, 1971, "Relativistic disks, I: Uniform rotation," *Astrophys. J. 167,* 359-423. [Box 24.1]

Barger, R. L. *See* Evenson *et. al.* 1972.

Bargmann, V., and E. P. Wigner, 1948, "Group theoretical discussion of relativistic wave equations," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 34,* 211-222. [Box 32.2]

Barnes, J. A., 1971, "A non-mathematical discussion of some basic concepts of precise time measurement," in *Tracor on Frequency 2,* No. 2 (Tracor Industrial Instruments, Austin, Texas). [Box 1.4]

Barschall, H. H. and W. Haeberli, 1971. "The Madison convention," pp. xxv-xxix in *Polarization Phenomena in Nuclear Reactions,* Univ. of Wisconsin Press, Madison. [§37.7]

Bartl, W. *See* Bailey *et al.* 1968.

Barton, D., S. R. Bourne, and J. P. Fitch, 1970, "An algebra system," *Comput. J. 13,* 32-39. [Box 14.3]

Barton, D., and J. P. Fitch, 1971, "General relativity and the application of algebraic manipulative systems," *Comm. Assoc. Comput. Machinery 14,* 542-547. [Box 14.3]

Battelle Rencontres, Seattle 1967. *See* DeWitt and Wheeler 1968.

Baym, G., 1969, *Lectures on Quantum Mechanics,* W. A. Benjamin, New York. [Box 22.4]

Baym, G., H. A. Bethe, and C. J. Pethick, 1971, "Neutron star matter," *Nuclear Phys A. 175,* 225-271. [§24.2]

Bazin, M. *See* Adler, Bazin, and Schiffer 1965.

Beall, E. F., 1970, "Measuring the gravitational interaction of elementary particles," *Phys. Rev. D 1,* 961-978. [§1.3, Box 1.2]

Beams, J. W., 1971, "Finding a better value for G," *Phys. Today 24* (May 1971), 35-40. [§40.8]

Beams, J. W. *See also* Rose *et al.* 1969.

Beckedorff, D. L., and C. W. Misner, 1962, unpublished; see D. L. Beckedorff's A. B. Senior Thesis, Princeton University. [§32.4]

Bekenstein, J., 1972a, "Nonexistence of baryon number for static black holes," *Phys. Rev. D 5,* 1239-1246. [Boxes 25.2, 32.2, 33.1]

Bekenstein, J., 1972b, "Nonexistence of baryon number for static black holes, II," *Phys. Rev. D 5,* 2403-2412. [Boxes 25.2, 32.2, 33.1]

Bel, L., 1958, "Sur la radiation gravitationelle," *Acad. Sci., Paris, Comptes Rend. 247,* 1094-1096. [Ex. 15.2]

Bel, L., 1959, "Introduction d'un tenseur du quatrième ordre," *Acad. Sci., Paris, Comptes Rend. 248,* 1297-1300. [Ex. 15.2]

Bel, L., 1962, "La radiation gravitationelle," in CNRS 1962, pp. 119-126. [Ex. 15.2]

Belasco, E. P., and H. C. Ohanian, 1969, "Initial conditions in general relativity: Lapse and shift formulation," *J. Math. Phys. 10,* 1503-1507. [§21.9]

Belinfante, F., 1940, "On the current and the density of the electric charge, the energy, the linear momentum, and the angular momentum of arbitrary fields," *Physica 7,* 449-474. [§21.3]

Belinsky, V. A. *See also* Ryan 1972b.

Belinsky, V. A., and I. M. Khalatnikov, 1969a, "On the nature of the singularities in the general solution of the gravitational equations," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 56,* 1700-1712. English translation in *Sov. Phys.—JETP 29,* 911-917. [§34.6]

Belinsky, V. A., and I. M. Khalatnikov, 1969b, "General solution of the gravitational equations with a physical singularity," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 57,* 2163-2175. English translation in *Sov. Phys.—JETP 30,* 1174-1180 (1970). [§34.6]

Belinsky, V. A., and I. M. Khalatnikov, 1970, "General solution of the gravitational equations with a physical oscillatory singularity," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 59,* 314-321. English translation in *Sov. Phys.—JETP 32,* 169-172. [§§30.6, 34.6]

Belinsky, V. A., I. M. Khalatnikov, and E. M. Lifshitz, 1970, "Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology," *Usp. Fiz. Nauk 102,* 463-500. English translation in *Advances in Physics 19,* 525-573. [§30.6, Box 30.1]

Belinsky, V. A., E. M. Lifshitz, and I. M. Khalatnikov, 1971, "Oscillatory mode of approach to a singularity in homogeneous cosmological models with rotating axes," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 60,* 1969-1979. English translation in *Sov. Phys.—JETP 33,* 1061-1066 (1971). [§§30.7, 34.6]

Bell, C. C., R. L. Forward, L. R. Miller, T. D. Beard, and T. M. Baran, 1969, "Static gravitational gradient field detection with a rotating torsional gradiometer," in NASL 1969. [Box 16.5]

Bell, C. C., R. L. Forward, and H. P. Williams, 1970, "Simulated terrain mapping with the rotating gravity gradiometer, in W. T. Kattner, ed., *Advances in Dynamic Gravimetry,* Instrument Society of America, Pittsburgh, 115-129. [Box 16.5]

Bell, S. J., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Hewish *et al.* 1968.

Beltran-Lopez, V. B. *See* Hughes, Robinson, and Beltran-Lopez 1960.

Bender, P. L., R. H. Dicke, D. T. Wilkinson, C. O. Alley, D. G. Currie, J. E. Faller, J. D. Mulholland, E. C. Silverberg, H. E. Plotkin, W. M. Kaulla, and G. J. F. McDonald, 1971, "The lunar laser-ranging experiment," in Davies 1971. [§40.9]

Bennett, A. S., *cited by name in* Box 27.7.

Bentley, R., *cited by name in* Box 27.7.

Berger, B. K., D. M. Chitre, V. E. Moncrief, and Y. Nutku, 1972, "Hamiltonian formulation of spherically symmetric gravitational fields," *Phys. Rev. D 5,* 2467-2470. [§21.10]

Berger, M., 1966, "Sur les spectres d'une variété Riemannienne," *Acad. Sci Paris, Comptes Rendus 263,* 13-16. [Box 17.2 part 6]

Berger, M., P. Gauduchon, and E. Mazet, 1971, *Le Spectre d'une variété riemannienne,* Springer, Berlin and New York. [Box 17.2 part 6]

Bergmann, P. G., 1942, *Introduction to the Theory of Relativity,* Prentice-Hall, New York. [endpapers]

Bergmann, P. G., 1968, "Comments on the scalar-tensor theory," *Int. J. Theor. Phys. 1,* 25-36. [§38.2]

Bern, Switzerland, 1955, Jubilee of Relativity Theory, conference held July 11-16, 1955; *see* Mercier and Kervâire 1956.

Bernoulli, D., 1733, *Hydrodynamica,* chapter 10, Archives of Academy of Science, Leningrad; summarized in C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography,* Scribners, New York, vol. 2, 1970. [Box 44.5]

Bers, L., 1952, "Singularities of minimal surfaces," in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950,* American Mathematical Society, Providence, R.I. [§33.2]

Bers, L., *cited by name in* Box 8.5.

Bertotti, B., 1959, "Uniform electromagnetic field in the theory of general relativity," *Phys. Rev. 116,* 1331-1333. [Ex. 32.1]

Bertotti, B., ed., 1973, proceedings of Course 56 of the International School of Physics Enrico Fermi, dealing with experimental tests of relativistic gravitation theories, Academic Press, New York, in press.

Bertotti, B., D. R. Brill, and R. Krotkov, 1962, "Experiments on gravitation," in Witten 1962. [§38.5, Box 40.1]

Bessel, F. W., *cited by name in* Box 27.7.

Bethe, H. A., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Baym, Bethe, and Pethick 1971.

Birkhoff, G. D., 1923, *Relativity and Modern Physics,* Harvard University Press, Cambridge, Mass. [§32.2]

Birkhoff, G. D., 1943, "Matter, electricity and gravitation in flat spacetime," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 29,* 231-239. [§39.1]

Bishop, R. L., and S. I. Goldberg, 1968, *Tensor Analysis on Manifolds,* Macmillan, New York. [Box 8.1, Ex. 21.8]

Bisnovatyi-Kogan, G. S., and K. S. Thorne, 1970, "Relativistic gas spheres and clusters of point masses with arbitrarily large central redshifts: Can they be stable?" *Astrophys. J. 160,* 875-885. [Ex. 25.28]

Bisnovatyi-Kogan, G. S., and Ya. B. Zel'dovich, 1969, "Models of clusters of point masses with great central redshift," *Astrofizika 5,* 223-234. English translation in *Astrophys. 5,* 105-109. [Ex. 25.28]

Blackman, R. B., and J. W. Tukey, 1959, *The Measurement of Power Spectra, from the Point of View of Communications Engineering,* Dover, New York. [§37.8]

Blake, W., *quoted at end of* Chapter 44

Blaton, J., 1950, "On a geometrical interpretation of energy and momentum conservation in atomic collisions and disintegration processes," *Kgl. Danske Videnskab. Sels., Mat.-fys. Medd. 24,* no. 20. [§2.10]

Blatt, J. M., and V. F. Weisskopf, 1952, *Theoretical Nuclear Physics,* Wiley, New York. [§37.7]

Blumenthal, L. M., 1953, *Theory and Applications of Distance Geometry,* Clarendon Press, Oxford, England. [Box 13.1]

Bochmann, G. von. *See* Bailey *et al.* 1968.

Bogoliubov, N. N., and D. V. Shirkov, 1959, *Introduction to the Theory of Quantized Fields,* Interscience (now a division of Wiley), New York. [§43.3]

Bogorodskii, A. F., 1962, *Uravneniya Polya Einsteina i ikh Primeneniye v Astronomii* (*Einstein's Field Equations and Their Application in Astronomy*), Kiev Univ. Press, USSR. [Ex. 25.22]

Bohr, A., and B. R. Mottleson, 1969, *Nuclear Structure, Vol. I: Single-Particle Motion,* W. A. Benjamin, New York. [§23.4]

Bohr, N., 1918, "On the quantum theory of line spectra," *Mém. Acad. R. Sci. & Lett. Danemark 4,* no. 1, parts 1-2; part 1 reprinted in Van der Waerden 1967, pp. 95-137. [Box 17.1]

Bohr, N., *cited by name in* Preface, §§44.1, 44.5, Box 17.1

Bohr, N., and L. Rosenfeld, 1933, "Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrössen," *Kgl. Danske Videnshab. Sels. Mat.-fys. Medd. 12,* no. 8. [§43.2]

Boissonade, J. F. *See* Westerman and Boissonade 1878.

Bolt, B. A., 1964, "Recent information of the earth's interior from studies of mantle waves and eigenvibrations," in Ahrens, Press, and Runcorn 1964, pp. 55-119. [Ex. 37.14]

Bolton, J. G., *cited by name in* Box 27.7.

Bondi, H., 1947, "Spherically Symmetrical Models in General Relativity," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 107,* 410-425. [§30.6]

Bondi, H., 1957, "Plane gravitational waves in general relativity," *Nature 179,* 1072-1073. [Ex. 18.5, Fig. 18.1]

Bondi, H., 1961, *Cosmology,* 2d ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. [Box 27.1]

Bondi, H., 1965, "Some special solutions of the Einstein equations," in Trautman, Pirani, and Bondi 1965, pp. 375-459, esp. p. 431. [Ex. 18.5]

Bondi, H., *cited by name in* §21.10, Boxes 27.7, 34.2. *See also* Trautman, Pirani, and Bondi 1965.

Bondi, H., and T. Gold, 1948, "The steady-state theory of the expanding universe," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 108,* 252-270. [§28.4]

Bondi, H., and W. H. McCrea, 1960, "Energy transfer by gravitation in Newtonian theory," *Proc. Cambridge Phil. Soc. 56,* 410-413. [Ex. 18.5]

Bondi, H., F. A. E. Pirani, and I. Robinson, 1959, "Gravitational waves in general relativity, III: Exact plane waves," *Proc. R. Soc. London A 251,* 519-533. [§35.9]

Boni, N., M. Russ, and D. H. Laurence, 1960, *A Bibliographical Check List and Index to the Published Writings of Albert Einstein,* Pageant Books, Paterson, N.J., cited in preface of present bibliography; based on earlier bibliography of M. C. Shields in Schilpp 1949.

Born, M., 1971, *The Born-Einstein letters: Correspondence Between Albert Einstein and Max and Hedwig Born from 1916 to 1955 with Commentaries by Max Born,* translated by Irene Born, Walker, New York. [Box 1.11]

Born, M., *cited by name in* Box 17.2

Boughn, S. P., D. M. Fram, and R. B. Partridge, 1971, "Isotropy of the microwave background at 8-millimeter wavelength," *Astrophys. J. 165,* 439-444. [§§27.1, 27.2, 30.8]

Bourbaki, N., *cited by name in* Box 8.2; pseudonym for an organization of French mathematicians who, since 1939, have nearly completed the first ten *Books* of a projected larger work: *Éléments de Mathématique,* Hermann, Paris.

Bourne, S. R. *See* Barton, Bourne, and Fitch 1970.

Boyer, R. H., and R. W. Lindquist, 1967, "Maximal analytic extension of the Kerr metric," *J. Math. Phys. 8,* 265-281. [§33.2, Box 33.2, Ex. 33.8]

Braginsky, V. B., 1965, "Gravitational radiation and the prospect of its experimental discovery," *Usp. Fiz. Nauk 86,* 433-446. English translation in *Sov. Phys.—Uspekhi 8,* 513-521. [Box 36.3]

Braginsky, V. B., 1970, *Fizicheskie Eksperimenti s Probnimi Telami* (*Physics Experiments With Test Bodies*), Nauka, Moscow, Russia. English translation published as NASA-TT F-762, available from National Technical Information Service, Springfield, Va. [§37.8]

Braginsky, V. B., A. B. Manukin, and M. Yu. Tikhonov, 1970, "Investigation of dissipative ponderomotive effects of electromagnetic radiation," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 58,* 1549-1552, English translation in *Sov. Phys.—JETP 31,* 829-830. [§37.8]

Braginsky, V. B., and M. B. Menskii, 1971, "High-frequency detection of gravitational waves," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. Pis'ma 13,* 585. English translation in *Sov. Phys.—JETP Lett. 13,* 417-419. [§37.9, Box 37.6]

Braginsky, V. B., and V. S. Nazarenko, 1971, "On the detection of gravitational radiation from some astronomical sources with the heterodyne detector," in Davies 1971, pp. 45-46. [§37.3]

Braginsky, V. B., and V. I. Panov, 1971, "Verification of the equivalence of inertial and gravitational mass," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 61,* 873-879. English translation in *Sov. Phys.—JETP 34,* 464-466. [§§38.3, 40.9, Box 1.2]

Braginsky, V. B., Ya. B. Zel'dovich, and V. N. Rudenko, 1969, "Reception of gravitational radiation of extraterrestrial origin," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. Pis'ma 10,* 437-441. English translation in *Sov. Phys.—JETP Lett. 10,* 280-283. [§37.3, Fig. 37.2]

Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics: 1964, *see* Trautman, Pirani, and Bondi 1965; 1968, *see* Chrétian, Deser, and Goldstein 1969.

Brans, C., *cited by name in* §§40.1, 40.6, 40.9.

Brans, C., and R. H. Dicke, 1961, "Mach's principle and a relativistic theory of gravitation," *Phys. Rev. 124,* 925-935. Reprinted in Dicke 1964b. [§§17.6, 28.4, 38.2, 39.2, 40.8, Boxes 38.3, 39.1]

Brasseur, Georges, *quoted in* Fig. 44.5.

Brault, J. W., 1962, *The Gravitational Redshift in the Solar Spectrum,* doctoral dissertation, Princeton Univ. Abstract, "Gravitational Redshift of Solar Lines," in *Bull. Amer. Phys. Soc. 8,* 28 (1963). [§38.5, Fig. 38.2]

Brehme, R. W. *See* DeWitt and Brehme 1960.

Bressanone, Italy: 1970 summer school sponsored by Centro Interzionale Matematico Estivo. *See* Cattaneo 1971.

Brill, D. R., 1959, "On the positive definite mass of the Bondi-Weber-Wheeler time-symmetric gravitational waves," *Ann. Phys.* (*USA*) *7,* 466-483. [§21.10]

Brill, D. R., 1961, *General Relativity: Selected Topics of Current Interest,* report SUI61-4, Physics Department, State University of Iowa, Iowa City, Iowa (multilithed); summarized in DeWitt and DeWitt 1964b, pp. 431-432; published as Brill 1964. [§21.10]

Brill, D. R., 1964, "General relativity: selected topics of current interest," *Suppl. Nuovo Cimento 2,* 1-56. *See* Brill 1961.

Brill, D. R. *See also* Bertotti, Brill, and Krotkov 1962, Cohen and Brill 1967 *and* 1968, *and* Graves and Brill 1960.

Brill, D. R., P. L. Chrzanowski, C. M. Pereira, E. D. Fackerell, and J. R. Ipser, 1972, "Solution of the scalar wave equation in a Kerr background by separation of variables," *Phys. Rev. D 5,* 1913-1915. [Ex. 33.14]

Brill, D. R., and J. M. Cohen, 1966, "Rotating masses and their effect on inertial frames," *Phys. Rev. 143,* 1011-1015. [§§21.12, 40.7, Ex. 26.1]

Brill, D. R., and J. B. Hartle, 1964, "Method of self-consistent field in general relativity and its application to the gravitational geon," *Phys. Rev. B 135,* 271-278. [§§21.12, 35.13]

Brill, D. R., and J. A. Wheeler, 1957, "Interaction of neutrinos and gravitational fields," *Rev. Mod. Phys. 29,* 465-479. [§§27.10, 41.11]

Brillouin, L., 1970, *Relativity Reexamined,* Academic Press, New York. [Ex. 25.21]

Brodetsky, S. *See* Dobson and Brodetsky 1947.

Brodsky, S. J., and S. D. Drell, 1970, "The present status of quantum electrodynamics," in *Ann. Rev. Nuclear Sci. 20,* 147-194. [§44.2]

Bromberg, V. A., 1958, "Relativistic corrections in the theory of the motion of the moon," *Bull. Inst. Theor. Astron., Akad. Nauk SSSR 6,* 733-756. [§40.6]

Bronshtein, M. P., *cited by name in* §29.2.

Brown, E. H., Jr. *See* Anderson, Brown, and Peterson 1966a *and* 1966b.

Brown, R. C. A. *See* Bailey *et al.* 1968 *and* Farley *et al.* 1966.

Bruhat, Y., 1962, "The Cauchy problem," in Witten 1962. [§§21.11, 21.13]

Bruhat, Y. *See also* Choquet-Bruhat, Y., and Fourès-Bruhat, Y.

Bruno, G. *See* Singer 1950.

Bunsen, R. W., *cited by name in* Box 38.2.

Burbidge, E. M., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Burbidge and Burbidge 1969a *and* 1969b *and* Hoyle *et al.* 1964.

Burbidge, G. R., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Hoyle *et al.* 1964.

Burbidge, G. R., and E. M. Burbidge, 1969a, "Red-shifts of quasi-stellar objects and related extragalactic systems," *Nature 222,* 735-741. [Ex. 27.14]

Burbidge, G. R., and E. M. Burbidge, 1969b, "Quasi-stellar objects—a progress report," *Nature 224,* 21-24. [Ex. 27.14]

Burke, W. L., 1970, "Runaway solutions: remarks on the asymptotic theory of radiation damping," *Phys. Rev. A 2,* 1501-1505. [§20.6]

Burke, W. L., 1971, "Gravitational radiation damping of slowly moving systems calculated using matched asymptotic expansions," *J. Math. Phys. 12,* 402-418. [§36.8]

Burke, W. L., *cited by name in* §22.5.

Burnett, D. S. *See* Wasserburg and Burnett 1968.

Cairns, S. S., ed., 1965, *Differential and Combinatorial Topology,* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.

Cairns, S. S. *See also* Morse and Cairns 1969.

Callaway, J., 1953, "The equations of motion in Einstein's new unified field theory," *Phys. Rev. 92,* 1567-1570. [§20.6]

Callippus, *cited by name in* Box 27.7.

Caltech-JPL conference on experimental tests of gravitational theories, November 1970. *See* Davies 1971.

Cameron, A. G. W., 1970, "Neutron stars," *Ann. Rev. Astron. & Astrophys. 8,* 179-208. [§24.2]

Cameron, A. G. W., *See also* Langer and Cameron 1969, *and* Truran and Cameron 1971.

Cameron, A. G. W., and J. Truran, 1971, *work cited by* Peebles 1971. [Box 33.3]

Campbell, D. B. *See* Shapiro, Ash, *et al.* 1971 *and* Shapiro *et al.* 1972.

Campbell, L., and Garnett, W., 1882, *Life of James Clerk Maxwell,* Macmillan, London. [Box 4.6]

Campbell, W. W., and R. J. Trumpler, 1928, "Observations made with a pair of five-foot cameras on the light-deflections in the sun's gravitational field at the total solar eclipse of September 21, 1922." *Lick Obs. Bull. 13,* 130-160. [Box 40.1]

Carmeli, M., S. I. Fickler, and L. Witten, 1970, *Relativity,* Plenum, New York. [§40.7]

Carroll, L. *See* Dodgson, C. L.

Cartan, É., 1901, "Sur quelques quadratures dont l'élément différentiel contient des fonctions arbitraires," *Bull. Soc. Math. France 29,* 118-130. [Box 8.2]

Cartan, É., 1922a, "Sur les équations de la gravitation de Einstein," *J. Math. Pures Appl. 1,* 141-203. [§21.1]

Cartan, É., 1922b, "Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion," *Acad. Sci., Paris, Comptes Rend. 174,* 593-595. [§§38.2, 39.2]

Cartan, É., 1923, "Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité generalisée (premiére partie)," *Ann. École Norm. Sup. 40,* 325-412. [§§8.2, 12.1, 12.2, 38.2, 39.2]

Cartan, É., 1924, "Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité generalisée (suite)," *Ann. École Norm. Sup. 41,* 1-25. [§§8.2, 8.3, 12.1]

Cartan, É., 1925, *La Géométrie des Espaces de Riemann,* Memorial des Sciences Mathématiques, Fascicule IX, Gauthier-Villars, Paris, France. [§14.5]

Cartan, É., 1928 and 1946, *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann,* Gauthier-Villars, Paris, France. [§§14.5, 15.3, Box 8.2, Ex. 21.4, endpapers]

Cartan, É., 1935, *La Méthode du Repère Mobile, la Théorie des Groupes Continus et les Espaces Generalisées,* Hermann, Paris, France. [§6.4]

Cartan, É., 1945, "Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques," *Exposés de Géométrie 14,* Hermann, Paris, France. [§4.1]

Cartan, É., 1946. *See* Cartan 1928.

Cartan, É., 1966, *Theory of Spinors,* M.I.T. Press, Cambridge, Mass. [§41.11]

Cartan, É., *cited by name in* §§9.1, 13.1, 13.4, 15.1, Boxes 10.1, 12.3, Ex. 12.7, 12.8.

Cartan, H., 1970, *Formes Différentiels,* Hermann, Paris, France. [§4.1]

Carter, B., 1966a, "Complete analytic extension of the symmetry axis of Kerr's solution of Einstein's equations," *Phys. Rev. 141,* 1242-1247. [Box 33.2]

Carter, B., 1966b, "The complete analytic extension of the Reissner-Nordstrom metric in the special case $e^2 = m^2$," *Phys. Lett. 21,* 423-424. [Fig. 34.4, Ex. 31.8, 34.3]

Carter, B., 1968a, "Global structure of the Kerr family of gravitational fields," *Phys. Rev. 174,* 1559-1571. [§33.5, Box 33.2, Ex. 33.7]

Carter, B., 1968b, "Large numbers in astrophysics and cosmology," unpublished preprint, Institute of Theoretical Astronomy, Cambridge, Eng. [§44.6]

Carter, B., 1968c, "Hamilton-Jacobi and Schrodinger separable solutions of Einstein's equations," *Commun. Math. Phys. 10,* 280-310. [§33.5]

Carter, B., 1970, "An axisymmetric black hole has only two degrees of freedom," *Phys. Rev. Lett. 26,* 331-333. [Box 33.1]

Carter, B., 1973, "Properties of the Kerr metric," *in* DeWitt and DeWitt 1973. [Box 33.1]

Carter, B., *cited by name in* Box 34.3. *See also* Bardeen, Carter, and Hawking 1973.

Cattaneo, C., ed., 1971, *Relativistic Fluid Dynamics,* proceedings of a summer school sponsored by Centro Internazionale Matematico Estivo, Bressanone, Italy, June 1970, Edizione Cremonese, Rome. [§22.3]

Cattaneo, C., *quoted at end of* Chap. 44.

Cauchy, A. L., *cited by name in* Box 17.2.

Cavendish, H., 1798, "Experiments to determine the density of the Earth" (read June 21, 1798), *Phil. Trans. R. Soc. London, Part II* (1798), pp. 469-526. [§40.8]

Caves, C. M., *cited by name in* §26.1.

Chadwick, J., 1932, "Possible existence of a neutron," *Nature 129,* 312. [Box 24.1]

Chandrasekhar, S., 1931a, "The density of white dwarf stars," *Phil. Mag. 11,* 592-596. [Box 24.1]

Chandrasekhar, S., 1931b, "The maximum mass of ideal white dwarfs," *Astrophys. J. 74,* 81-82. [Box 24.1]

Chandrasekhar, S., 1964a. "Dynamical instability of gaseous masses approaching the Schwarzschild limit in general relativity," *Phys. Rev. Lett. 12,* 114-116 and 437-438. [§26.1, Boxes 24.1, 26.2]

Chandrasekhar, S., 1964b, "The dynamical instability of gaseous masses approaching the Schwarzschild limit in general relativity," *Astrophys. J. 140,* 417-433. [§26.1, Boxes 24.1, 26.2]

Chandrasekhar, S., 1965a, "The post-Newtonian equations of hydrodynamics in general relativity," *Astrophys. J. 142,* 1488-1512. [§39.3, Box 39.3, Ex. 39.14]

Chandrasekhar, S., 1965b, "The post-Newtonian effects of general relativity on the equilibrium of uniformly rotating bodies, I: The Maclaurin spheroids and the virial theorem," *Astrophys. J. 142,* 1513-1518. [§39.3, Box 39.3]

Chandrasekhar, S., 1965c, "The stability of gaseous masses for radial and non-radial oscillations in the post-Newtonian approximation of general relativity," *Astrophys. J. 142,* 1519-1540. [§39.3, Box 26.2]

Chandrasekhar, S., 1968, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability,* Clarendon Press, Oxford. See especially §108. [Box 32.3]

Chandrasekhar, S., and G. Contopolous, 1967, "On a post-Galilean transformation appropriate to the post-Newtonian theory of Einstein, Infeld, and Hoffmann," *Proc. R. Soc. London A 298,* 123-141. [§39.3, 39.9]

Chandrasekhar, S., and F. P. Esposito, 1970, "The $2\frac{1}{2}$-post-Newtonian equations of hydrodynamics and radiation reaction in general relativity," *Astrophys. J. 160,* 153-180. [§36.8, Box 39.3]

Chandrasekhar, S., and N. R. Lebovitz, 1968, "The pulsations and the dynamical stability of gaseous masses in uniform rotation," *Astrophys. J., 152,* 267-291. [Ex. 39.7]

Chandrasekhar, S., and Y. Nutku, 1969, "The second post-Newtonian equations of hydrodynamics in general relativity," *Astrophys. J. 158,* 55-80. [Box 39.3]

Chapel Hill 1957, Conference on the Role of Gravitation in Physics, Jan. 18-23, 1957. *See* DeWitt 1957.

Chase, D. M., 1954, "The equations of motion of charged test particles in general relativity," *Phys. Rev. 95,* 243-246. [§20.6]

Cherlin, G., *cited by name in introduction to this bibliography.*

Chern, S.-S., 1955, "On curvature and characteristic classes of a Riemann manifold," *Hamburg Abh. 20,* 117-126. [Box 15.3]

Chern, S.-S., 1960, *Geometric Structures on Manifolds,* colloquium lectures, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. [§2.2]

Chern, S.-S., 1962, "Geometry of a quadratic differential

form," *J. Soc. Indust. & Appl. Math. 10,* 751-755, also in *H. P. Robertson January 27, 1903-August 26, 1961, In Memoriam,* Soc. Indust. and Applied Math., Philadelphia 1963, pp. 13-17. [Box 15.3]

Chern, S.-S., 1966, "The geometry of G-structures," *Bull. Am. Math. Soc. 72,* 167-219. [§2.2]

Chern, S.-S., 1971, "Differential geometry: its past and its future," in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Nice, September 1970,* Gauthier-Villars, Paris, pp. 41-53. [§2.2]

Chern, S.-S., and C. Chevalley, 1952, "Élie Cartan and his mathematical work," *Bull. Am. Math. Soc. 58,* 217-250. [Box 8.2]

Chevalley, C. *See* Chern and Chevalley 1952.

Chick, H. J., 1960, *Theory of Gravitation 1920-Present (Bibliography),* Report LMS-2328 of Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico, cited in preface of present bibliography.

Chick, H. J., 1964, *Theory of Gravitation 1959-1963 (Bibliography),* Report LMS-3099 of Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico, cited in preface of present bibliography.

Chinnapared, R. *See* Newman *et al.* 1965.

Chitre, D. M., 1972a, *Investigations of the Vanishing of a Horizon for Bianchi Type IX (Mixmaster) Universe,* doctoral dissertation, Univ. of Maryland. [§30.8]

Chitre, D. M., 1972b, "High-frequency sound waves to eliminate a horizon in the mixmaster universe," *Phys. Rev. D 6,* 3390-3396. [§30.8]

Chitre, D. M. *See also* Berger *et al.* 1972.

Chiu, H.-Y., and W. F. Hoffman, eds., 1964, *Gravitation and Relativity,* W. A. Benjamin, New York.

Choquard, P., 1955, "Traitement semi-classique des forces générales dans la représentation de Feynman," *Helv. Phys. Acta 28,* 89-157. [Box 21.1, Fig. 13.2]

Choquet-Bruhat, Y., 1968a, *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs,* Monographies Universitaires de Mathématiques no. 28, Dunod, Paris, France. [§4.1]

Choquet-Bruhat, Y., 1968b, "Espace-temps Einsteiniens généraux, chocs gravitationels," *Ann. Inst. Henri Poincaré 8,* 327-338. [§21.13]

Choquet-Bruhat, Y., 1969, "Construction de solutions radiatives approchées des équations d'Einstein," *Commun. Math. Phys. 12,* 16-35. [§35.13]

Choquet-Bruhat, Y., 1972, "Problème des contraintes sur une variété compacte," *Acad. Sci. Paris, Comptes Rend. A 274,* 682-684; fuller account in "Global solutions of the equations of constraint in general relativity, on open and closed manifolds," *Gen. Rel. & Grav.* 1973, in press. [§21.1]

Choquet-Bruhat, Y. *See also* Bruhat, Y., *and* Fourès-Bruhat, Y.

Chrétien, M., S. Deser, and J. Goldstein, eds., 1969, *Brandeis Summer Institute 1968, Astrophysics and General Relativity,* Gordon and Breach, New York.

Christodolou, D., 1970, "Reversible and irreversible transformations in black-hole physics," *Phys. Rev. Lett. 25,* 1596-1597. [§33.8, Box 33.4]

Christodolou, D., 1971, *Investigations in Gravitational Collapse and the Physics of Black Holes,* doctoral dissertation, Princeton Univ. [§35.8, Boxes 33.3, 33.4, Fig. 33.3]

Christodolou, D., and R. Ruffini, 1971, "Reversible transformations of a charged black hole," *Phys. Rev. D 4,* 3552-3555. [§33.8, Boxes 33.4, 33.5]

Chrzanowski, P. L., and C. W. Misner, 1973, "Geodesic synchrotron radiation in the Kerr geometry by the method of asymptotically factorized Green's functions," technical report of the Dept. of Physics and Astronomy, University of Maryland. [§33.8]

Chrzanowski, P. L. *See also* Brill *et al.* 1972.

Cincinnati 1969, Relativity Conference in The Midwest, June 2-6, 1969, Cincinnati, Ohio. *See* Carmeli, Fickler, and Witten 1970.

Clark, G. *See* Eddington and Clark 1938.

Clarke, C. J. S., 1970, "On the global isometric embedding of pseudo-Riemannian manifolds," *Proc. Roy. Soc. London A 314,* 417-428. [§23.8]

Clayton, D., 1968, *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis,* McGraw-Hill, New York. [§28.1]

Clemence, G. M., 1943, "The motion of Mercury, 1765-1937," *Astron. Papers Am. Ephemeris 11,* 1-221. [Box 40.3]

Clemence, G. M., 1947, "The relativity effect in planetary motions," *Rev. Mod. Phys. 19,* 361-364. [Box 40.3]

Clemens, R. *See also* Fletcher *et al.* 1967.

Clemens, R., and R. Matzner, 1967, Technical Report no. 635 of the Univ. of Maryland Department of Physics and Astronomy. [Box 14.3]

Clifford, W. K., 1879, *Lectures and Essays,* L. Stephen and F. Pollock, eds., Macmillan, London, I, 244 and 322. [§44.3]

Clifford, W. K., 1882, *Mathematical Papers,* R. Tucker, ed., Macmillan, London. [§44.3]

CNRS, 1962, *Les Théories relativistes de la gravitation,* Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, France. *Same as* Royaumont 1959.

Cocke, W. J., 1965, "A maximum-entropy principle in general relativity and the stability of fluid spheres," *Ann. Inst. Henri Poincaré A 2,* 283-306. [§26.1]

Cocke, W. J., H. J. Disney and D. J. Taylor, 1969, "Discovery of optical signals from pulsar NP0532," *Nature 221,* 525-527. [Box 24.1]

Codazzi, D., *cited by name in* §21.5.

Cohen, J. M., 1968, "Angular momentum and the Kerr metric," *J. Math. Phys. 9,* 905-906. [Ex. 26.1]

Cohen, J. M. *See also* Brill and Cohen 1966.

Cohen, J. M., and D. Brill, 1966, "Rotating masses and their effect on inertial frames," *Phys. Rev. 143,* 1011-1015. [§21.12]

Cohen, J. M., and D. R. Brill, 1968, "Further examples of 'Machian effects' of rotating bodies in general relativity," *Nuovo Cim. 56B,* 209-219. [Ex. 26.1]

Cohen, J. M., and R. M. Wald, 1971, "Point charge in the vicinity of a Schwarzschild black hole," *J. Math. Phys. 12,* 1845-1849. [Box 33.1]

Cohen, P., 1966, *Set Theory and the Continuum Hypothesis,* W. A. Benjamin, New York. [Box 44.5]

Cole, J., 1968, *Perturbation Methods in Applied Mathematics,* Ginn-Blaisdell, Waltham, Mass. [§22.5]

Coleman, C. J., 1971, "A simple relativistic theory of gravitation," *J. Phys. A 4,* 611-616. [§40.5]

Coleman, J. A., 1967, *Early Theories of the Universe,* New American Library, New York. [§1.7]

Colgate, S. A., 1967, "Stellar coalescence and the multiple-supernova interpretation of quasi-stellar sources," *Astrophys. J. 150,* 163-192. [§24.5, Box 33.3]

Colgate, S. A., and R. H. White, 1966, "The hydrodynamic behavior of supernovae explosions," *Astrophys. J. 143,* 626-681. [§32.7]

Collins, C. B., and S. W. Hawking, 1973, "Why is the universe isotropic?" *Astrophys. J. 180,* 317-334. [Box 34.3]

Collins, R. A., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Hewish *et al.* 1968.

Combridge, J. T., 1965, *Bibliography of Relativity and Gravitation Theory 1921-1937,* Kings College, London, cited in preface of present bibliography.

Comte, A., 1835, *Cours de philosophie positive,* Paris. [Box 27.7].

Conklin, E. K., 1969, "Velocity of the Earth with respect to the cosmic background radiation," *Nature 222,* 971-972. [§30.8]

Contopolous, G. *See* Chandrasekhar and Contopolous 1967.

Coote, N., *cited by name in introduction to this bibliography.*

Copenhagen 1971, Sixth International Conference on General Relativity and Gravitation, held in Copenhagen, July 1971; portions of the proceedings appear as articles in *Gen. Rel. Grav.,* especially vol. 3, 1972.

Copernicus, N. *See* Dobson and Brodetsky 1947.

Corben, H. C., and P. Stehle, 1960, *Classical Mechanics,* 2d ed., Wiley, New York. [Ex. 33.7]

Cornell University, 1965, Summer Seminar on Applied Mathematics, arranged by the American Mathematical Society. Proceedings (vols. 8-10 in Lectures in Applied Mathematics series) published as Ehlers 1967.

Cornford, F. M., 1937, *Plato's Cosmology: The Timaeus of Plato,* Humanities Press, New York. [Box 27.7]

Corson, E. M., 1953, *Introduction to Tensors, Spinors, and Relativistic Wave-Equations,* Hafner, New York. [§21.3]

Couch, W. E. *See also* Newman *et al.* 1965.

Couch, W. E., and E. T. Newman, 1972, "Generalized Lienard-Wiechart fields," *J. Math. Phys. 13,* 929-931. [§36.1]

Couch, W. E., R. J. Torrence, A. I. Janis, and E. T. Newman, 1968, "Tail of a gravitational wave," *J. Math. Phys. 9,* 484-496. [§§35.8, 35.14]

Courant, R., 1937, "Plateau's problem and Dirichlet's principle," *Ann. Math. U.S. 38,* 679-724. [§33.2]

Coxeter, H. S. M., 1963, *Regular Polytopes,* 2d ed., Macmillan, New York. [§42.5, Box 27.2]

Curott, D. R., 1966, "Earth deceleration from ancient solar eclipses," *Astron. J. 71,* 264-269. [Fig. 1.8]

Currie, D. G., *cited by name in* Fig. 40.4. *See also* Bender *et al.* 1971.

Curtis, H. D., *cited by name in* Box 27.7.

Cusanus, N. *See* Heron 1954.

Dabbs, J. W. T., J. A. Harvey, D. Paya, and H. Horstmann, 1965, "Gravitational acceleration of free neutrons," *Phys. Rev. B 139,* 756-760. [§1.3]

D'Alembert, J., *quoted at end of* Chap. 44.

Danielson, B. L. *See* Evenson *et al.* 1972.

Dante Alighieri, *Paradiso,* translated by Philip H. Wicksteed, 1921, Dent, London, England. [Epigraph to Chap. 44]

Danziger, I. J., 1970, "The cosmic abundance of helium," *Ann. Rev. Astron. Astrophys., 8,* 161-178. [§28.1]

Darboux, G., 1941, *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces, Part I,* Gauthier-Villars, Paris, France. [§33.2]

Darmois, G., 1927, *Les équations de la gravitation einsteinienne,* Mémorial des sciences mathematiques XXV, Gauthier-Villars, Paris. [§21.13]

Darwin, C., 1959, "The gravity field of a particle, I," *Proc. R. Soc. London A 249,* 180-194. [§25.5, Fig. 25.7]

Darwin, C., 1961, "The gravity field of a particle, II," *Proc. R. Soc. London A 263,* 39-50. [§25.5, Fig. 25.7]

Datt, B., 1938, "Über eine Klasse von Lösungen der Gravitationsgleichungen der Relativität," *Z. Physik 108,* 314-321. [§30.6, Ex. 32.8]

Davenport, W. B., and W. L. Root, 1958, *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise.* McGraw Hill, New York, [§37.8]

Davies, R. W., ed., 1971, *Proceedings of the Conference on Experimental Tests of Gravitational Theories, November 11-13, 1970, California Institute of Technology,* J.P.L. Technical Memorandum, 33-499.

Davis, M., R. Ruffini, W. H. Press, and R. H. Price, 1971, "Gravitational radiation from a particle falling radially into a Schwarzschild black hole," *Phys. Rev. Lett. 27,* 1466-1469. [§§33.7, 36.5, Box 33.3, Fig. 36.2]

Davis, W. R., 1970, *Classical Theory of Particles and Fields and the Theory of Relativity,* Gordon and Breach, New York. [§21.3, endpapers]

Day, G. W. *See* Evenson *et al.* 1972.

de Broglie, M. *See* Einstein 1912.

Debye, P. J. W., *cited by name in* §22.5.

De Chéseaux, P. L., 1744, *Traité de la comète qui a paru en décembre 1743,* Paris; the relevant material is in the Appendix. [Box 27.7]

De Felice, F., 1968, "Equatorial geodesic motion in the gravitational field of a rotating source," *Nuovo Cimento B 57,* 351-388. [Box 33.5]

Defoe, D., 1722, *The Fortunes and Misfortunes of the Famous Moll Flanders,* reprinted by Fine Editions Press, Cleveland, 1953. [epigraph to Part X]

De Groot, S. R. *See* Kluitenberg and de Groot 1954.

De Hoffmann, F., and E. Teller, 1950, "Magneto-hydrodynamic shocks," *Phys. Rev. 80,* 692-703. [§22.2, Box 22.2]

De la Cruz, V., and W. Israel, 1967, "Gravitational bounce," *Nuovo Cimento A 51,* 744-760. [§34.6, Fig. 34.4]

De Lange, F. G. *See* Refsdal, Stabell, and de Lange 1967.

Dempster, J. R. H., 1963, *Feynman Quantization in Field Theory: Topology of Commutators and Functional Representation of States,* doctoral dissertation, Princeton University. [Box 21.1]

De Rham, G., 1955, *Variétés Différentiables,* Herman, Paris. [§§4.1, 22.4]

Deser, S., 1970, "Self-interaction and gauge invariance," *Gen. Rel. & Grav. 1,* 9-18. [§§7.1, 18.1, Box 17.2 part 5]

Deser, S., *cited by name in* §§21.1, 35.8, Box 17.2, part 2′. *See also* Arnowitt, Deser, and Misner 1962 *and* Chrétien, Deser, and Goldstein 1969.

Deser, S., and K. W. Ford, eds., 1965, *Lectures on General Relativity; 1964 Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics I,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. *Same as* Trautman, Pirani, and Bondi 1965.

De Sitter, W., 1916, "On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 77,* 155-184 and 481. [§§40.6, 40.7]

De Sitter, W., 1917a, "On the relativity of inertia: Remarks concerning Einstein's latest hypothesis," *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 19,* 1217-1225. [§27.11]

De Sitter, W., 1917b, "On the curvature of space," *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 20,* 229-243. [§27.11]

De Sitter, W., *cited by name in* §30.3, Box 27.7.

Deutsch, A. J., and W. B. Klemperer, eds., 1962, *Space Age Astronomy,* Academic Press, New York.

De Valera, E., *cited by name in* §41.1.

De Vaucouleurs, G., 1971, "The large-scale distribution of galaxies and clusters of galaxies," *Astron. Soc. Pacific Publ. 83,* 113-143. [§27.11]

DeWitt, B. S., 1953, "Pair production by a curved metric," *Phys. Rev. 90,* 357. [§30.5]

DeWitt, B. S., 1962, "The quantization of geometry," in Witten 1962. [Ex. 40.8]

DeWitt, B. S., 1967a, "Quantum theory of gravity, I," *Phys. Rev. 160,* 1113-1148. [§§21.1, 43.1, 43.3]

DeWitt, B. S., 1967b. "Quantum theory of gravity, II; The manifestly covariant theory." *Phys. Rev. 162,* 1195-1239. [§§43.1, 43.3]

DeWitt, B. S., 1967c, "Quantum theory of gravity, III; Application of the covariant theory," *Phys. Rev. 162,* 1239-1256. [Box 17.2 part 6h]

DeWitt, B. S., 1971, *Lectures on Relativity—Stanford, Fall 1971* (unpublished manuscript). [§36.7]

DeWitt, B. S., *cited by name in* Ex. 35.20. *See also* DeWitt and DeWitt 1964a, 1964b, and 1973.

DeWitt, B. S., and R. W. Brehme, 1960, "Radiation damping in a gravitational field," *Ann. Phys.* (*U.S.A.*) *9,* 220-259. [§35.8, Ex. 35.14]

DeWitt, C., ed. 1957, *Conference on the Role of Gravitation in Physics, Proceedings,* W.A.D.C. Technical Report 57-216; ASTIA Document No. AD118180, Wright Air Development Center, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio.

DeWitt, C. *See also* Morette, C.

DeWitt, C., and B. S. DeWitt, 1964a, "Falling charges," *Physics 1,* 3-20. [§35.8]

DeWitt, C., and B. S. DeWitt, eds., 1964b, *Relativity, Groups, and Topology,* Gordon and Breach, New York. [§38.2]

DeWitt, C., and B. S. DeWitt, eds., 1973, *Black Holes,* Proceedings of 1972 session of Ecole d'été de physique theorique, Gordon and Breach, New York. [§33.1]

DeWitt, C., E. Schatzman, and P. Veron, eds., 1967, *High-Energy Astrophysics, Vol. III,* Gordon and Breach, New York. [§24.4]

DeWitt, C., and J. A. Wheeler, eds., 1968, *Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics,* W. A. Benjamin, New York.

Dicke, R. H., 1954, "Coherence in spontaneous radiation processes," *Phys. Rev. 93,* 99-110. [Box 38.3]

Dicke, R. H., 1957, "Coherence and the quantum," *J. Opt. Soc. Am. 47,* 527. [Box 38.3]

Dicke, R. H., 1959a, "Dirac's cosmology and the dating of meteorites," *Nature 183,* 170-171. [§38.6]

Dicke, R. H., 1959b, "New research on old gravitation," *Science 129,* 621-624. [§§38.6, 40.9, 44.6]

Dicke, R. H., 1961, "Dirac's cosmology and Mach's principle," *Nature 192,* 440-441. [§§38.6, 44.6, Box 38.3]

Dicke, R. H., 1962, "Mach's principle and invariance under transformation of units," *Phys. Rev. 125,* 2163-2167. Reprinted in Dicke 1964b. [Box 39.1]

Dicke, R. H., 1964a, "The sun's rotation and relativity," *Nature 202,* 432-435. [Box 38.3]

Dicke, R. H., 1964b, *The Theoretical Significance of Experimental Relativity,* Gordon and Breach, New York; also in DeWitt and DeWitt 1964a. [§§38.2, 38.7, 44.6, Box 40.1]

Dicke, R. H., 1964c, "Remarks on the observational basis of general relativity," in Chiu and Hoffman 1964, pp. 1-16. [§40.9]

Dicke, R. H., 1968, "Scalar-tensor gravitation and the cosmic fireball," *Astrophys. J., 152,* 1-24. [§28.4]

Dicke, R. H., 1969, *Gravitation and the Universe,* American Philosophical Society, Philadelphia. [§§38.6, 40.9]

Dicke, R. H., *cited by name in* §§10.1, 38.3, 38.5, 40.1, 40.6, 40.9, Box 27.7. *See also* Bender *et al.* 1971, Brans and Dicke 1961, *and* Roll, Krotkov, and Dicke 1964.

Dicke, R. H., and H. M. Goldenberg, 1967, "Solar oblateness and general relativity," *Phys. Rev. Lett. 18,* 313-316. [Boxes 38.3, 40.3]

Dicke, R. H., and P. J. E. Peebles, 1962a, "Significance of spatial isotropy," *Phys. Rev. 127,* 629-631. Reprinted in Dicke 1964b. [§38.7]

Dicke, R. H., and P. J. E. Peebles, 1962b, "Cosmology and the radioactive decay ages of terrestrial rocks and meteorites," *Phys. Rev. 128,* 2006-2011. [§38.6, Box 38.3]

Dicke, R. H., and P. J. E. Peebles, 1965, "Gravitation and space science," *Space Sci. Rev. 4,* 419-460. [§40.8]

Dicke, R. H., P. J. E. Peebles, P. G. Roll, and D. T. Wilkinson, 1965, "Cosmic-black-body radiation," *Astrophys. J. 142,* 414-419. [§§27.2, 28.1]

Dieter, N. H., E. E. Epstein, A. E. Lilley, and M. S. Roberts, 1962, "A radio and optical investigation of extragalactic redshifts," *Astron. J. 67,* 270-271. [§29.2]

Dieudonné, J., 1960, *Foundations of Modern Analysis,* Academic Press, New York. [§2.6]

Digges, T., *cited by name in* Box 27.7.

d'Inverno, R. A., 1969, "ALAM—Atlas Lisp algebraic manipulator," *Comput. J. 12,* 124-127. [Box 14.3]

Dirac, P. A. M., 1926, "On the theory of quantum mechanics," *Proc. R. Soc. London A 112,* 661-677. [Box 24.1]

Dirac, P. A. M., 1936, "Relativistic wave equations," *Proc. R. Soc. London A 155,* 447-459. [Box 32.2]

Dirac, P. A. M., 1937, "The cosmological constants," *Nature 139,* 323. [§§38.6, 44.6]

Dirac, P. A. M., 1938, "New basis for cosmology," *Proc. R. Soc. London A 165,* 199-208. [§§38.6, 44.6]

Dirac, P. A. M., 1959, "Fixation of coordinates in the Hamiltonian theory of gravitation," *Phys. Rev. 114,* 924-930. [§21.7]

Dirac, P. A. M. 1964, *Lectures on Quantum Mechanics,* Belfer Graduate School of Science Monograph Series Number Two, Yeshiva University, New York. [§21.7]

Dirac, Paul A. M., *Festschrift* on the occasion of his 70th birthday, Aug. 8, 1972. *See* Salam and Wigner 1972.

Dirac, P. A. M., *cited by name in* §§20.6, 21.1, Box 4.4.

Dirac, P. A. M., V. A. Fock, and B. Podolsky, 1932, "On quantum electrodynamics," *Phys. Z. Sowjetunion 2,* 468-479. [§21.8]

Dobson, J. F., and S. Brodetsky, 1947, *Nicolaus Copernicus's De Revolutionibus* (translation of Preface and Book I), Royal Astronomical Society, London. [Box 27.7].

Dodgson, C. L., 1871, *Through the Looking Glass,* Macmillan, London. [Epigraph to Chap. 32]

Doroshkevich, A. G., 1966, "Change of the angular momentum of a star during accretion," *Astron. Zhur. 43,* 105-107. Terrible English translation in *Sov. Astron.—A. J. 10,* 83-84. [Box 33.3]

Doroshkevich, A. G., V. N. Lukash, and I. D. Novikov, 1971, "Impossibility of mixing in the Bianchi type IX cosmological model," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 60,* 1201-1205. English translation in *Sov. Phys.—JETP 33,* 649-651. [§30.8]

Doroshkevich, A. G., Ya. B. Zel'dovich, and I. D. Novikov, 1965, "Gravitational collapse of nonsymmetric and rotating masses," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 49,* 170-181. English translation in *Sov. Phys.—JETP 22,* 122-130. [Box 33.3, Ex. 26.1]

Douglas, K. N., I. Robinson, A. Schild, E. L. Schücking, J. A. Wheeler, and N. J. Woolf, eds., 1969, *Quasars and High-Energy Astronomy,* Proceedings of the Second Texas Symposium on Relativistic Astrophysics, Gordon and Breach, New York.

Douglass, D. H., Jr., 1971, "Properties of 'hollow square' gravitational wave detectors," in Davies 1971. [§37.3, Fig. 37.2]

Douglass, D. H., Jr., *cited by name in* Ex. 37.13.

Douglass, D. H., Jr., and J. A. Tyson, 1971, "New class of gravitational-wave detectors," *Nature 229,* 34-36. [§37.3]

Drabkin, I. E., and S. Drake, 1960, *Galileo Galilei on Motion and on Mechanics,* translations with introductions and notes, University of Wisconsin Press, Madison, Wisc. [Box 1.2]

Drake, S. *See* Drabkin and Drake 1960.

Drell, S. D. *See* Brodsky and Drell 1970.

Drever, R. W., 1961, "A search for anisotropy of inertial mass using a free precession technique," *Phil. Mag. 6,* 683-687. [§38.7]

Dunford, N. and J. T. Schwartz, 1958, *Linear operators,* pp. 467-471, Interscience (now a division of Wiley), New York. *Cited under* Lefschetz 1949.

Durbin, R. P., H. H. Loar, and W. W. Havens, Jr., 1952, "The lifetimes of the pi-plus and pi-minus mesons," *Phys. Rev. 88,* 179-183. [§38.4]

Duyvendak, J. J. L., 1942, "Further data bearing on the identification of the Crab Nebula with the supernova of A.D. 1054, Part I: The ancient oriental chronicles," *Proc. Astron. Soc. Pacific 54,* 91-94. [Box 24.1]

Dyce, R. B. *See* Shapiro, Ash, *et al.* 1971 and Shapiro *et al.* 1972.

Dyson, F. J., 1954, *Advanced Quantum Mechanics,* multilithographed lecture notes, Physics Department, Cornell University. [Box 17.2 part 6]

Dyson, F. J., 1967, "Time variation of the charge of the proton," *Phys. Rev. Lett. 19,* 1291-1293. [§37.3, Fig. 37.2]

Dyson, F. J., 1969, "Seismic response of the Earth to a gravitational wave in the 1-Hz band," *Astrophys. J. 156,* 529-540. [§37.3, Fig. 37.2]

Dyson, F. J., 1972, "The fundamental constants and their time variation," in Salam and Wigner 1972. [§38.6]

Eardley, D., E. Liang, and R. Sachs, 1972, "Velocity-dominated singularities in irrotational dust cosmologies," *J. Math. Phys. 13,* 99-107. [§30.7]

Eckart, C., 1940, "The thermodynamics of irreversible processes, III: Relativistic theory of the simple fluid," *Phys. Rev., 58,* 919-924. [Ex. 22.7]

Ecphantus, *cited by name in* Box 27.7.

Eddington, A. S., 1922, *The Mathematical Theory of Relativity,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. [§§38.2, 39.3]

Eddington, A. S., 1924, "A comparison of Whitehead's and Einstein's formulas," *Nature 113,* 192. [Boxes 31.1, 31.2]

Eddington, A. S., 1931, "Preliminary note on the masses of the electron, the proton, and the universe," *Proc. Cambridge Phil. Soc. 27,* 15-19. [§44.6]

Eddington, A. S., 1936, *Relativity Theory of Protons and Electrons,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. [§44.6]

Eddington, A. S., 1946, *Fundamental Theory,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. [§44.6]

Eddington, A. S., *cited by name in* Box 27.7.

Eddington, A., and G. Clark, 1938, "The problem of *n* bodies in general relativity theory," *Proc. Roy. Soc. A 166,* 465-475. [Ex. 39.15]

Ehlers, J., 1961, "Contributions to the relativistic mechanics of continuous media," *Akad. Wiss. Lit. Mainz Abh. Math.-Nat. Kl.,* 793-837. [§22.3]

Ehlers, J., ed., 1967, *Relativity Theory and Astrophysics: I, Relativity and Cosmology; II, Galactic Structure; III, Stellar Structure,* American Mathematical Society, Providence, R.I.

Ehlers, J., 1971, "General relativity and kinetic theory," in Sachs 1971. [§22.6, Ex. 22.7, endpapers]

Ehlers, J. *See also* Jordan, Ehlers, and Sachs 1961.

Ehlers, J., P. Geren, and R. K. Sachs, 1968, "Isotropic solutions of the Einstein-Liouville equations," *J. Math. Phys. 9,* 1344-1349. [§27.2]

Ehlers, J., and W. Kundt, 1962, "Exact solutions of the gravitational field equations," in Witten 1962. [§§33.6, 35.9, Ex. 35.8, 35.9]

Ehlers, J., F. A. E. Pirani, and A. Schild, 1972, "The geometry of free-fall and light propagation," *in* O'Raifeartaigh 1972, pp. 63-84. [Boxes 10.2, 16.4]

Ehrenfest, P., 1916, "On the adiabatic changes of a system in connection with the quantum theory," *Amsterdam Acad., Proc. 19,* 576-597. [Box 22.4]

Einstein, A., 1905, "Zur elektrodynamik bewegter Körper," *Ann. Phys.* (*Germany*) *17,* 891-921. [Box 1.5]

Einstein, A., 1908, "Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen," *Jarb. Radioakt. 4,* 411-462. [§§7.4, 17.7]

Einstein, A., 1911, "Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes," *Ann. Phys.* (*Germany*) *35,* 898-908, English translation in Lorentz *et al.* 1923. [§§1.3, 7.2, 7.4, 10.1, 16.2]

Einstein, A. 1912, "Si l'on modifie la longueur du pendule . . . ," p. 450 in P. Langevin and M. de Broglie, eds., *La théorie du rayonnement et les quanta,* Gauthier-Villars, Paris, 1912. [Box 22.4]

Einstein, A., 1913a, "Zum gegenwärtigen Stand des Gravitationsproblems," *Phys. Z. 14,* 1249-1262, discussion 1262-1266. [Epigraph to Chap. 35]

Einstein, A., 1913b, letter to Ernst Mach dated June 26. [§21.12, Fig. 21.5]

Einstein, A., 1915a, "Zür allgemeinen Relativitätstheorie," *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber.,* 778-786 (published November 11). [§17.7]

Einstein, A. 1915b, "Zür allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag)," *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber.,* 799-801 (published November 18). [§17.7, Box 27.8]

Einstein, A., 1915c. "Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie," *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber. 47,* 831-839 (published November 25). [§17.7]

Einstein, A., 1915d, "Die Feldgleichungen der Gravitation," *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber.,* 844-847 (published December 2). [§17.7, Box 27.7]

Einstein, A., 1916a, "Ernst Mach," *Phys. Z. Sowjetunion 17,* 101-104. [Fig. 21.5]

Einstein, A., 1916b, "Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation," *Preuss, Akad. Wiss. Berlin, Sitzber.* 688-696. [§17.7]

Einstein, A., 1916c, "Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie," *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber.,* 1111-1116. [§17.7]

Einstein, A., 1917, "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie," *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber.* 142-152, reprinted in English in Lorentz *et al.* 1923. [§17.3, Boxes 27.1, 27.7]

Einstein, A., 1921, "Geometry and Experience," address to Prussian Academy of Sciences, Berlin, Jan. 27, 1921; published in *Sidelights on Relativity,* Mathuen, London, 1922. [Box 1.11]

Einstein, A., 1931, "Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie," *Preuss, Akad. Wiss. Berlin, Sitzber,* 235-237. [§27.11]

Einstein, A., 1934, *Essays in Science,* Philosophical Library, New York. Translated from *Mein Weltbild,* Querido Verlag, Amsterdam, 1933. [Epigraph to Chap. 17, §§21.12, 27.11, 27.12, 43.1, 44.6, Box 8.5]

Einstein, A., 1939, "On a stationary system with spherical symmetry consisting of many gravitating masses," *Ann. Math.* (*U.S.A.*) *40,* 922-936. [Ex. 25.29]

Einstein, Albert, *Festschrift,* in commemoration of his seventieth birthday, March 14, 1949; *Rev. Mod. Phys. 21* (July 1949), 343-540.

Einstein, A., 1949a, introduction to Schilpp 1949. [Preface, Epigraph to Chap. 44, §1.2]

Einstein, A., 1949b, "Reply to criticisms," in Schilpp 1949. [Epigraph to Chap. 27]

Einstein, A., 1950, *The Meaning of Relativity,* 3d ed., Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. [§21.12, 29.5, 43.1, Box 27.1, endpapers]

Einstein, A., 1954, preface to *Concepts of Space,* M. Jammer, ed., Harper, New York, p. xv. [§1.3]

Einstein, A., 1970, quoted by G. Gamow in *My World Line,* Viking Press, New York (1970), p. 44. [§§17.3, 27.8, Box 27.1]

Einstein, A., *cited by name in* §§1.1, 1.6, 7.1, 7.2, 7.4, 10.1, 12.1, 12.2, 17.3, 20.6, Boxes 12.2, 12.3, 27.7. *See also* Lorentz *et al.* 1923, Born 1971, Holton 1971, Klein 1971.

Einstein, A., and A. D. Fokker, 1914, *Ann. Phys.* (*Germany*), *44,* 321. [§17.6]

Einstein, A., and J. Grommer, 1927, "Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetze," *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys. Tech.* 2-13, 235-245. [§20.6]

Einstein, A., and M. Grossmann, 1913, "Entwerf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation," *Zeit. Math. Phys. 62,* 225-261. [§17.7]

Einstein, A., and M. Grossmann, 1914, "Kovarianzeigenschaften der Feldgleichungen der auf die verallgemeinerte Relativitätstheorie gegründeten Gravitationstheorie," *Zeit. Math. Phys. 63,* 215-225. [§17.7]

Einstein, A., L. Infeld, and B. Hoffmann, 1938, "The gravitational equations and the problem of motion," *Ann. Math. 39,* 65-100. [Ex. 39.15]

Eisenhart, L. P., 1926, *Riemannian Geometry.* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. [§§21.5, 21.12, Ex. 27.4, endpapers]

Ekers, R. D. *See* Muhleman, Ekers, and Fomalont 1970.

Eliot, T. S., 1920, "Tradition and individual talent," in *The Sacred Wood; Essays on Poetry and Criticism,* Methuen, London. [Box 27.7]

Eliot, T. S., 1942, *Little Gidding,* Faber and Faber, London. [§1.7]

Ellis, G. F. R., 1971, "Relativistic cosmology," in Sachs 1971. [§22.3, Ex. 22.6, 29.5]

Ellis., G. F. R., *cited by name in* Boxes 27.7, 34.3, Ex. 32.1. *See also* Hawking and Ellis 1968 *and* 1973, *and* Stewart and Ellis 1968.

Eötvös, R. V., 1889, "Über die Anziehung der Erde auf verschiedene Substanzen," *Math. Naturw. Ber. aus Ungarn 8,* 65-68. [Box 1.2]

Eötvös, R. V., *cited by name in* §§10.1, 38.3, 38.5, 40.9.

Eötvös, R. V., D. Pekár, and E. Fekete, 1922, "Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität," *Ann. Phys.* (*Germany*) *68,* 11-66. [§§10.1, 38.3, 40.9, Boxes 1.2, 38.2]

Epstein, E. E. *See* Dieter *et al.* 1962.

Ernst, F. J., 1968, "7090 FORMAC subroutines: Exterior calculus," report number PORS IIT-9, Illinois Institute of Technology. [Box 14.3]

Esposito, F. P. *See* Chandrasekhar and Esposito 1970.
Esposito, P. B. *See* Anderson *et al.* 1971.
ESRO Conference on Space Physics, Interlaken, Switzerland, September 4, 1969. *See* Ruffini and Wheeler 1971b.
Estabrook, F. B., 1969, "Post-Newtonian *n*-body equations of the Brans-Dicke theory," *Astrophys. J. 158,* 81-83. [Ex. 39.15]
Estermann, I., O. C. Simpson, and O. Stern, 1938, "The free fall of molecules," *Phys. Rev. 53,* 947-948. [§1.3]
Eudoxus, *cited by name in* Box 27.7.
Euler, H. *See* Heisenberg and Euler 1936.
Euler, L., 1760, "Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum esse summam quatuor quadratorum," *Novi Comment, Petrop. 5, 93, Opera 12,* 369ff. [§41.1]
Evenson, K. M., J. S. Wells, F. R. Petersen, B. L. Danielson, G. W. Day, R. L. Barger, and J. L. Hall, 1972, "Speed of light from direct frequency and wavelength measurements of the methane-stabilized laser", *Phys. Rev. Letters 29,* 1346-1349. [§1.5]
Everitt, C. W. F., 1970, "Maxwell as a student," preprint, Stanford University, Stanford, Calif. [Box 14.6]
Everitt, C. W. F., W. M. Fairbank, and W. O. Hamilton, 1970, "General relativity experiments using low-temperature techniques," in Carmeli, Fickler, and Witten 1970, pp. 145-159. [§40.7]
Exton, A. *See* Newman *et al.* 1965.
Fackerell, E. D., 1966, *Relativistic Stellar Dynamics,* unpublished Ph.D. thesis, University of Sydney. [Box 25.9]
Fackerell, E. D., 1968, "Relativistic stellar dynamics," *Astrophys. J. 153,* 643-660. [Box 25.8]
Fackerell, E. D. *See also* Brill *et al.* 1972.
Fackerell, E. D., and J. R. Ipser, 1972, "Weak electromagnetic fields around a rotating black hole," *Phys. Rev. D5,* 2455-2458. [§41.11]
Fackerell, E. D., J. R. Ipser, and K. S. Thorne, 1969, "Relativistic star clusters," *Comments Astrophys. & Space Phys. 1,* 134-139. [§24.6, Box 25.9]
Fadeev, L. D., 1971, "Symplectic structure and quantization of the Einstein gravitation theory," in *Actes du Congrés International des Mathématiciens, Nice 1-10 Septembre 1970,* Gauthier-Villars, Paris, III, 35-40. [Box 21.1]
Fairbank, W. M. *cited by name in* Ex. 37.13. *See also* Everitt, Fairbank, and Hamilton 1970, Witteborn and Fairbank 1967, *and* Witteborn, Knight, and Fairbank 1967.
Faller, J. E. *See* Bender *et al.* 1971.
Faraday, M., *cited by name in* §5.6.
Farley, F. J. M., 1969, "The status of quantum electrodynamics," *Nuovo Cimento 1,* Numero Speciale, 59-86. [§44.2]
Farley, F. J. M. *See also* Bailey *et al.* 1968.
Farley, F. J. M., J. Bailey, R. C. A. Brown, M. Giesch, H. Jöstlein, S. van der Meer, E. Picasso, and M. Tannenbaum, 1966, "The anomolous magnetic moment of the negative muon," *Nuovo Cimento 45,* 281-286. [§38.4]
Farnsworth, D., J. Fink, J. Porter, and A. Thomson, eds., 1972, *Methods of Local and Global Differential Geometry in General Relativity,* Springer, Berlin.
Faulkner, J., and J. R. Gribbin, 1968, "Stability and radial vibration periods of the Hamada-Salpeter white-dwarf models," *Nature 218,* 734-735. [§24.2, Boxes 24.1, 26.1]
Fejér, L., and S. Mikola, eds., 1918, "Báró Eötvös Loránd Füzet," *Matem. Fiz. Lapok 27,* Nos. 6-7, Oct.-Nov., kindly translated into English for use here by Rev. Stanley Jaki. [Box 38.2]
Fekete, E. *See* Eötvös, Pekar, and Fekete 1922.
Fermi, E., 1922, "Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria," *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. & Nat. 31,* 184-187, 306-309. [§6.3]
Fermi, E., 1932, "Quantum theory of radiation," *Rev. Mod. Phys. 4,* 87-132. [§21.12]
Fermi, E., 1949, "On the origin of the cosmic radiation," *Phys. Rev. 75,* 1169-1174. [Box 27.7].
Fermi, E., and A. Turkevich, 1950, unpublished work described in Alpher and Herman 1950, pp. 194ff. [§28.1]
Ferrari, A., and R. Ruffini, 1969, "Theoretical implications of the second time derivative of the period of the pulsar NP 0532," *Astrophys. J. Letters 158,* L71-L75. [Ex. 36.4]
Feynman, R. P., 1942. *The Principle of Least Action in Quantum Mechanics,* doctoral dissertation, Princeton University. [Boxes 17.2, 21.1]
Feynman, R. P., 1948, "Spacetime approach to nonrelativistic quantum mechanics," *Rev. Mod. Phys. 20,* 367-387. [Box 21.1]
Feynman, R. P., 1949, "Spacetime approach to quantum electrodynamics," *Phys. Rev. 76,* 769-789. [Box 21.1]
Feynman, R. P., 1951, "The concept of probability in quantum mechanics," in Neyman 1951, p. 533. [Box 21.1]
Feynman, R. P., 1955, "Slow electrons in polar crystals," *Phys. Rev. 97,* 660-665. [Box 21.1]
Feynman, R. P., 1963, *Lectures on Gravitation,* unpublished lecture notes prepared by F. B. Morinigo and W. G. Wagner, Calif. Institute of Technology. [§7.1, Box 7.1, §18.1]
Feynman, R. P., 1964, unpublished work cited in Fowler 1964. [Box 24.1]
Feynman, R. P. *See also* Wheeler and Feynman 1945 *and* Wheeler and Feynman 1949.
Feynman, R. P., and A. R. Hibbs, 1965, *Quantum Mechanics and Path Integrals,* McGraw-Hill, New York. [§21.1, Fig. 13.3, Boxes 17.2, 21.1]
Feynman, R. P., R. B. Leighton and M. Sands, 1964, *The Feynman Lectures on Physics,* Addison-Wesley, Reading, Mass. [§21.3, Box 16.3]
Fickler, S. I. *See* Carmeli, Fickler, and Witten 1970.
Field, G., 1973, "The origin of galaxies," in A. and M. Sandage, eds., *Stars and Stellar Systems, IX: Galaxies and the Universe,* Univ. of Chicago Press, Chicago (in press). [§30.1]
Fierz, M., and W. Pauli, 1939, "Relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field," *Proc. R. Soc. London A 173,* 211-232. [§§18.1, 18.3, 39.1, Box 7.1]
Fierz, M., and V. F. Weisskopf, 1960, *Theoretical Physics in the 20th Century: A Memorial Volume to Wolfgang Pauli,* Interscience, New York.
Fink, J. *See* Farnsworth *et al.* 1972.
Finkelstein, D., 1958, "Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle," *Phys. Rev. 110,* 965-967. [Box 31.2]

Fischer, A. E., and J. B. Marsden, 1972, "The Einstein equations of evolution—A geometric approach," *J. Math. Phys. 13,* 546-568. [§§21.5, 21.6]

Fischer, A. E., 1970, "The theory of superspace," in Carmeli, Fickler, and Witten 1970. [§43.1]

Fitch, J. P. *See* Barton and Fitch 1971 *and* Barton, Bourne, and Fitch 1970.

Flamm, L., 1916, "Beitrage zur Einsteinschen Gravitationstheorie," *Physik. Z. 17,* 448-454. [§23.8]

Flanders, H., 1953, "Development of an extended exterior differential calculus," *Trans. Am. Math. Soc. 75,* 311-326. [§14.5, Ex. 14.9, 14.10]

Flanders, H., 1963, *Differential Forms With Applications to the Physical Sciences,* Academic Press, New York. [§4.1, Boxes 4.4, 8.1]

Fletcher, J. G., 1966, "GRAD Assistant—a program for symbolic algebraic manipulation and differentiation," *Commun. Assoc. Comput. Machinery 9,* 552-553. [Box 14.3]

Fletcher, J. G., R. Clemens, R. Matzner, K. S. Thorne, and B. A. Zimmerman, 1967, "Computer programs for calculating general-relativistic curvature tensors," *Astrophys. J. Lett. 148,* L91-L92. [Box 14.3]

Fock, V. A., 1959, *The Theory of Space, Time, and Gravitation,* Pergamon, New York, translated by N. Kemmer. [Box 39.3, Ex. 39.15, Epigraph to Chap. 21, endpapers]

Fock, V. A., chief editor, 1968, *Abstracts, Fifth International Conference on Gravitation and the Theory of Relativity,* Publishing House of Tbilisi University, Tbilisi, USSR.

Fock, V. A. *See also* Dirac, Fock, and Podolsky 1932.

Fokker, A. D., 1965, *Time and Space, Weight and Inertia,* Pergamon Press, London. [endpapers]

Fokker, A. D. *See* Einstein and Fokker 1914.

Fomalont, E. B. *See* Muhleman, Ekers, and Fomalont 1970.

Ford, K. W. *See* Deser and Ford 1967.

Ford, K. W., and J. A. Wheeler, 1959a, "Application of semiclassical scattering analysis," *Ann. Phys. (U.S.A.) 7,* 287-322. [§25.6]

Ford, K. W., and J. A. Wheeler, 1959b, "Semiclassical description of scattering," *Ann. Phys. (U.S.A.) 7,* 259-286. [§25.6]

Forman, F. *See* Gittelman *et al.* 1968.

Forward, R. L., 1972, "Geodesy with orbiting gravity gradiometers," in *The Use of Artificial Satellites for Geodesy,* Geophysical Monograph Series, vol. 15, American Geophysical Union, Washington, 239-243. [Box 16.5]

Fourés-Bruhat, Y. *See* Bruhat, Y., *and* Choquet-Bruhat, Y.

Fowler, R. H., 1926, "Dense matter," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 87,* 114-122. [Box 24.1]

Fowler, W. A., 1964, "Massive stars, relativistic polytropes, and gravitational radiation," *Rev. Mod. Phys. 36,* 545-555 and 1104. [Boxes 24.1, 26.2]

Fowler, W. A., 1966, "The stability of supermassive stars," *Astrophys. J. 144,* 180-200. [§24.4, Box 26.2]

Fowler, W. A., 1967, *Nuclear Astrophysics,* American Philosophical Society, Philadelphia, Penn. [§28.1]

Fowler, W. A., 1972, "New observations and old nucleocosmochronologies," in Reines 1972. [§29.7]

Fowler, W. A. *Cited by name in* Box 27.7. *See also* Hoyle and Fowler 1963a *and* 1963b, Hoyle *et al.* 1964, *and* Wagoner, Fowler, and Hoyle 1967.

Fowler, W. A., and F. Hoyle, 1964, "Neutrino processes and pair formation in massive stars and supernovae," *Astrophys. J. Supp. 9,* 201-319. [§24.4]

Fram, D. M. *See* Boughn, Fram, and Partridge 1971.

Friedmann, A., 1922, "Über die Krümmung des Raumes," *Z. Phys. 10,* 377-386. [§§14.1, 27.9, 29.2, Boxes 14.5, 27.6]

Friedmann, A., *cited by name in* §§30.3, 42.1, Boxes 27.6, 27.7.

Frisch, D. H., and J. H. Smith, 1963, "Measurement of the relativistic time dilation using mu-mesons," *Am. J. Phys. 31,* 342-355. [§38.4]

Fröman, N., and P. O. Fröman, *JWKB approximation: contributions to the theory,* North-Holland, Amsterdam, 1965. [§22.5]

Fröman, P. O. *See* Fröman and Fröman 1965.

Fronsdal, C., 1959, "Completion and embedding of the Schwarzschild solution," *Phys. Rev. 116,* 778-781. [§23.8, Box 31.1]

Fujiwara, I., 1962, "The correspondence principle, I," in *Proceedings of the Physics Seminar in Trondheim,* no. 3, Nordita, Copenhagen, Denmark. [Box 21.1]

Fuller, R. W., and J. A. Wheeler, 1962, "Causality and multiply-connected space-time," *Phys. Rev. 128,* 919-929. [§31.6, Fig. 31.5]

Galilei, G., 1592, *De Motu,* unpublished work written at the University of Pisa, 1589-1592; translation in Drabkin and Drake 1961, p. 48. [Box 1.2]

Galilei, G., 1610, *Sidereus Nuncius,* Translated by E. S. Carlos, *The Sidereal messenger,* Rivingtons, London, 1880. [Boxes 1.9, 27.7]

Galilei, G., 1623, *Il Saggiatore,* Accademia dei Lincei, Rome. [epigraph, Chap. 13]

Galilei, G., 1632, *Dialogo dei due massimi sistemi del mundo,* Landini, Florence. Translation by S. Drake, *Galileo Galilei—Dialogue Concerning the Two Chief World Systems—Ptolemaic and Copernican,* Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1953. [Box 1.9]

Galilei, G., 1638, *Discorsi e dimostriazioni matematiche intorno a due nuove scienze,* Elzevir, Leiden. Translation by H. Crew and A. de Salvio, *Dialogues Concerning Two New Sciences,* Macmillan, New York, 1914; reprinted by Dover, New York, 1954. [Boxes 1.2, 1.9, 27.7]

Galilei, G., *cited by name in* §12.2, *quoted in* epigraph of Chap. 38.

Gamow, G., 1948, "The evolution of the universe," *Nature 162,* 680-682. [§28.1]

Gamow, G., 1967, "Electricity, gravity, and cosmology," *Phys. Rev. Lett. 19,* 759-761. [§38.6]

Gamow, G., 1970, *My World Line,* Viking Press, New York. [Box 27.7]

Gamow, George, March 4, 1904-August 20, 1968, Memorial volume. *See* Reines 1972.

Gaposchkin, S., 1958, "The eclipsing binaries," *Handbuch der Physik 50,* 225-242. [Box 36.3]

Gårding, L., 1945, "Relativistic wave equations for zero rest mass," *Proc. Cambridge Phil. Soc. 41,* 49-56. [Box 32.2]

Garnett, W. *See* Campbell and Garnett 1882.

Gauduchon, P. *See* Berger, Gauduchon, and Mazet 1971.

Gasiorowizc, S., 1966, *Elementary Particle Physics,* Wiley, New York. [Box 7.1]

Gauss, K. F., 1817, letter to Olbers in his *Werke,* VIII, 177. [Epigraph to Chap. 8]
Gauss, K. F., 1830, letter to Bessel in his *Werke,* VIII, 201. [Epigraph to Chap. 8]
Gauss, K. F., 1827, "Disquisitiones generales circa superficies curvas," in *Karl Friedrich Gauss Werke,* IV, 217-258; English translation by J. C. Morehead and A. M. Hiltebeitel, *General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825,* reprinted by Raven Press, New York, 1965. [§§5.9, 22.2, Boxes 5.3, 5.4, 14.1]
Gauss, K. F., *cited by name in* §41.1.
Géhéniau, J., *quoted at end of* Chap. 44.
Geren, P. *See* Ehlers, Geren, and Sachs 1968.
Gerlach, U., 1968, "The equation of state at supranuclear densities and the existence of a third family of superdense stars," *Phys. Rev. 172,* 1325-1330. [§24.2]
Gerlach, U., 1969, "Derivation of the ten Einstein field equations from the semiclassical approximation to quantum geometrodynamics," *Phys. Rev. 177,* 1929-1941. [§43.3, Box 17.2 part 4]
Geroch, R. P., 1967, *Singularities in the Spacetime of General Relativity: Their Definition, Existence, and Local Characterization,* doctoral dissertation, Princeton University. [§§32.7, 44.1, Epigraph to Chap. 34]
Geroch, R. P., 1968, "What is a singularity in general relativity?" *Ann. Phys. (U.S.A.) 48,* 526-540. [§34.6]
Geroch, R. P., 1971, "Spacetime structure from a global viewpoint," in Sachs 1971. [§34.1]
Geroch, R. P., *cited by name in* §§32.7, 42.1, Box 34.1.
Giacconi, R., *cited by name in* Box 27.7.
Gibbons, J. J., *cited by name in* Box 34.3.
Giesch, M. *See* Farley *et al.* 1966.
Gilbert, R. P., and R. Newton, 1970, *Analytic Methods in Mathematical Physics,* Gordon and Breach, New York. [Box 8.5]
Gillispie, C. C. *See* Bernoulli 1733.
Ginzel, F. K., 1882, "Astronomische Untersuchungen über Finsternisse, I: Über die zwischen 26 und 103 nach Chr. stattgefundenen Sonnenfinsternisse im Allgemeinen and die Finsterniss des Plutarch ins besonders," *Sitzber. Kais. Akad. Wiss. Wien Math.-Nat. Kl. 85II,* 663-747. [Fig. 1.8]
Ginzel, F. K., 1883, "Astronomische Untersuchungen über Finsternisse, II: Grundlagen aus historischen Sonnenfinsternissen zur Ableitung empirischer Correctionen der Mondbahn," *Sitzber. Kais. Akad. Wiss. Wien Math.-Nat. Kl. 88II,* 629-755. [Fig. 1.8]
Ginzel, F. K., 1884, "Astronomische Untersuchungen über Finsternisse, III: Ermittlung empirischer Correction der Bahn des Mondes," *Sitzber. Kais. Akad. Wiss. Wien Math.-Nat. Kl. 89II.* [Fig. 1.8]
Ginzel, F. K., 1899, *Spezieller Kanon der Sonnen- und Mondfinsternisse für das Landergebiet der Klassischen Altertumwissenschaften und den Zeitraum von 900 vor Chr. bis 600 nach Chr.,* Mayer, Berlin. [Fig. 1.8]
Godfrey, B. B., 1970a, "Mach's principle, the Kerr metric, and black-hole physics," *Phys. Rev. D 1,* 2721-2725. [Box 33.3]
Godfrey, B. B., 1970b, *A Survey of the Mathematical Properties of Static, Axisymmetric Vacuum Spacetimes,* doctoral dissertation, Princeton University. [§34.1]
Goebel, C. J., 1972, "Comments on the 'vibrations' of a black hole," *Astrophys. J. 172,* L95-L96. [Box 33.3]
Gödel, K., 1931, "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandte Systeme I," *Monatsh. Math. Phys. 38,* 173-198, English translation by B. Meltzer, *On Formally Undecidable Propositions,* with an introduction by R. O. Braithwaite, Basic Books, New York, 1962; outlined and discussed in Nagel and Newman 1958. [Box 44.5]
Gold, T., 1968, "Rotating neutron stars as the origin of the pulsating radio sources," *Nature 218,* 731-732. [Box 24.1]
Gold, T., 1972, oral remark to J. A. Wheeler. [Epigraph to Chap. 21]
Gold, T., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Bondi and Gold 1948.
Goldberg, S. I. *See* Bishop and Goldberg 1968.
Goldenberg, H. M. *See* Dicke and Goldenberg 1967.
Goldreich, P. and W. H. Julian, 1968, "Pulsar electrodynamics," *Astrophys. J. 157,* 869-880. [§24.3, Box 33.3]
Goldstein, H., 1959, *Classical Mechanics,* Addison-Wesley, Reading, Mass. [§§2.1, 9.7, 33.5, Ex. 33.7]
Goldstein, J. *See* Chrétien, Deser, and Goldstein 1969.
Gott, J. R., III, and J. E. Gunn, 1971, "The Coma Cluster as an X-ray source: Some cosmological implications," *Astrophys. J. Lett. 169,* 13-15. [§29.6]
Gowdy, R. H., 1971, "Gravitational waves in closed universes," *Phys. Rev. Lett. 27,* 826-829, and erratum p. 1102. [§30.6]
Gowdy, R. H., 1973, "Vacuum spacetimes with two-parameter spacelike isometry groups and compact invariant hypersurfaces: Topologies and Boundary conditions," University of Maryland technical report 73-089 (unpublished). [§§21.10, 30.6]
Gratton, L., ed., 1966, *High-Energy Astrophysics,* Academic Press, New York.
Graves, J. C., and D. R. Brill, 1960, "Oscillatory character of Reissner-Nordstrom metric for an ideal charged wormhole," *Phys. Rev. 120,* 1507-1513. [Fig. 34.4, Ex. 31.8]
Greenstein, G. S., 1968a, "Brans-Dicke Cosmology," *Astrophys. Letters, 1,* 139-141. [§28.4]
Greenstein, G. S., 1968b, "Brans-Dicke Cosmology, II," *Ap. Space Sci., 2,* 157-165. [§28.4]
Gribbin, J. R. *See* Faulkner and Gribbin 1968.
GR*n, International Conferences on General Relativity and Gravitation. See* Berne 1955 (GR0), Chapel Hill 1957 (GR1), Royaumont 1959 (GR2), Jablonna 1962 (GR3), London 1965 (GR4), Tbilisi 1968 (GR5), Copenhagen 1971 (GR6).
Grommer, J. *See* Einstein and Grommer 1927.
Grossmann, M. *See* Einstein and Grossman 1913 *and* 1914.
Gunn, J. E., 1967, "On the propagation of light in inhomogeneous cosmologies: I, Mean effects," *Astrophys. J. 150,* 737-753. [§29.5]
Gunn, J. E., 1971, "On the distances of the quasistellar objects," *Astrophys. J. Letters, 164,* L133-L118. [Box 28.1]
Gunn, J. E. *Cited by name in* Box 27.7. *See also* Gott and Gunn 1971, Ostriker and Gunn 1969.

Gupta, S. N., 1954, "Gravitation and electromagnetism," *Phys. Rev. 96,* 1683-1685. [§§7.1, 18.1]

Gupta, S. N., 1957, "Einstein's and other theories of gravitation," *Rev. Mod. Phys. 29,* 337-350. [§§7.1, 18.1]

Gupta, S. N., 1962, "Quantum theory of gravitation," in *Recent Developments in General Relativity,* Pergamon, New York, pp. 251-258. [§§7.1, 18.1]

Gurovich, V. Ts., 1965, "The gravitational field of rotating superdense configurations," *Astron. Zhur. 42,* 974-976. English translation in *Sov. Astron.—A.J. 9,* 750-751. [Ex. 26.1]

Gursky, H., *cited by name in* Box 27.7.

Guseynov, O. H. *See* Zel'dovich and Guseynov 1965.

Guthrie, W. K. C., trans., 1939, *Aristotle's On the Heavens,* Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass. [Box 27.7]

Haeberli, W. *See* Barschall and Haeberli 1971.

Hagedorn, R., 1964, *Relativistic Kinematics,* W. A. Benjamin, New York. [§2.10]

Hagihara, Y., 1931, "Theory of the relativistic trajectories in a gravitational field of Schwarzschild," *Japan. J. Astron. Geophys., 8,* 67-175. [§25.5]

Hall, D. B. *See* Rossi and Hall 1941.

Hall, J. L., 1972. *See* Evenson *et al.* 1972.

Halley, E., 1693, "Emendationes ac notal in vetustas Ablatenii observationes astronomicas cum restitutione tabularum lunisolarum," *Roy. Soc., London, Phil. Trans. 17,* 913. [§1.5]

Halley, E. 1720, "Of the infinity of the sphere of fix'd stars" and "Of the number, order, and light of the fix'd stars," *Roy. Soc. London, Phil. Trans. 31,* 22-24 and 24-26. [Box 27.7]

Hamilton, W. O., *cited by name in* Ex. 37.13. *See also* Everitt, Fairbank, and Hamilton 1970.

Hamilton, W. R., *cited by name in* §41.1 Boxes 17.2, 25.3.

Hamoui, A. *See* Papapetrou and Hamoui 1967 *and* 1968.

Hanni, R. S., and R. Ruffini, 1973, paper in preparation. [Box 33.2]

Hardy, E. *See* Sandage, Tamman, and Hardy 1972.

Harrison, B. K., 1959, "Exact three-variable solutions of the field equations of general relativity," *Phys. Rev. 116,* 1285-1296. [§14.1]

Harrison, B. K., K. S. Thorne, M. Wakano, and J. A. Wheeler, 1965, *Gravitation Theory and Gravitational Collapse,* Univ. of Chicago Press, Chicago. [§26.1, Fig. 24.2]

Harrison, B. K., and J. A. Wheeler, 1958, "The Harrison-Wheeler equation of state," first presented in *Onzième Conseil de Physique Solvay: La Structure et l'évolution de l'univers,* Editions Stoops, Brussels, 1959; presented in greater detail in Harrison *et al.* 1965. [§24.2, Fig. 24.2]

Harrison, G. H., 1970, "A Compact Method for Symbolic Computation of the Riemann Tensor," M. S. thesis, Tech. Report, Dept. of Physics and Astronomy, Univ. of Maryland, College Park. [Box 14.3]

Hartle, J. B., 1967, "Slowly rotating relativistic stars, I: Equations of structure," *Astrophys. J. 150,* 1005-1029. [Ex. 26.1]

Hartle, J. B., 1970, "Slowly rotating relativistic stars, IV: Rotational energy and moment of inertia for stars in differential rotation," *Astrophys. J. 161,* 111-118. [§20.5, Ex. 33.13]

Hartle, J. B., 1971, "Long-range neutrino forces exerted by Kerr black holes," *Phys. Rev. D 3,* 2938-2940. [§41.11, Boxes 25.2, 32.2, 33.1]

Hartle, J. B., 1972, "Can a Schwarzschild black hole exert long-range neutrino forces?" in Klauder 1972. [Boxes 25.2, 32.2, 33.1]

Hartle, J. B. *See also* Brill and Hartle 1964, Hawking and Hartle 1972.

Hartle, J. B., and D. H. Sharp 1965, "Variational principle for the hydrostatic equilibrium of a relativistic, rotating fluid," *Phys. Rev. Lett. 15,* 909-911. [Ex. 26.1]

Hartle, J. B., and K. S. Thorne, 1968, "Slowly rotating relativistic stars, II: Models for neutron stars and supermassive stars," *Astrophys. J. 153,* 807-834. [Box 36.1, Fig. 24.2]

Hartle, J. B., and K. S. Thorne, 1974, "Slowly rotating relativistic stars, VII: Emission of gravitational waves due to quasiradial pulsation," *Astrophys. J.,* in preparation. [Box 14.3]

Harvey, J. A. *See* Dabbs *et al.* 1965.

Hauser, W., 1970, "On the fundamental equations of electromagnetism," *Am. J. Phys. 38,* 80-85. [§4.1]

Havens, W. W., Jr. *See* Durbin, Loar, and Havens 1952.

Hawking, S. W., 1966a, "Singularities and the geometry of space-time" Adams Prize Essay, Cambridge University, Cambridge, England. [Box 34.3]

Hawking, S. W., 1966b, "The occurrence of singularities in cosmology," *Proc. R. Soc. London A 294,* 511-521. [Box 34.3]

Hawking, S. W., 1969, "On the rotation of the Universe," *Observatory 89,* 38-39. [Box 34.3]

Hawking, S. W., 1971a, "Gravitationally collapsed objects of very low mass," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 152,* 75-78. [Box 33.3]

Hawking, S. W., 1971b, "Gravitational radiation from colliding black holes," *Phys. Rev. Lett. 26,* 1344-1346. [§34.5, Boxes 33.1, 33.4, Ex. 34.4]

Hawking, S. W., 1972a, "Black holes in general relativity," *Commun. Math. Phys. 25,* 152-166. [§34.5, Boxes 33.1, 33.3, 33.4, 34.3, Ex. 34.4]

Hawking, S. W., 1972b, "Gravitational Radiation: The Theoretical Aspect," *Contemp. Phys. 13,* 273-282. [Box 34.3]

Hawking, S. W., 1973, "The Event Horizon," in DeWitt and DeWitt 1973. [§§34.1, 34.5]

Hawking, S. W., *cited by name in* §§32.7, 42.1, Box 27.7. *See also* Bardeen, Carter, and Hawking 1973 *and* Collins and Hawking 1973.

Hawking, S. W., and G. F. R. Ellis, 1968, "The cosmic blackbody radiation and the existence of singularities in our universe," *Astrophys. J. 152,* 25-36. [§28.3, Box 34.3]

Hawking, S. W., and G. F. R. Ellis, 1973, *The Large Scale Structure of Space-time,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. [§§34.1, 34.6, Box 33.1, endpapers]

Hawking, S. W., and J. B. Hartle, 1972, "Energy and angular momentum flow into a black hole," *Commun. Math. Phys. 27,* 283-290. [Box 33.3]

Hawking, S. W., and R. Penrose, 1969, "The singularities of gravitational collapse and cosmology., *Proc. R. Soc. London A 314,* 529-548. [§§34.6, 44.1]

Hayakawa, S., 1965a, "Cosmological interpretation of the weak forces," *Prog. Theor. Phys. 33,* 538-539. [§44.6]

Hayakawa, S., 1965b, "Atomism and cosmology," *Prog. Theor. Phys. Supp.,* special number, Yukawa thirtieth anniversary issue, 532-541. [§44.6]

Hazard, C., *cited by name in* Box 27.7.

Hearn, A. C., 1970, "A program for symbolic algebraic computation," in *Proceedings of SHARE XXXIV,* 4.470-4.481. [Box 14.3]

Heckmann, O. *See* Schücking and Heckmann 1958.

Heisenberg, W., and H. Euler, 1936, "Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons," *Z. Phys. 98,* 714-732. [Ex. 40.8]

Helmholtz, H. L. F., *cited by name in* Box 38.2.

Henderson, T., *cited by name in* Box 27.7.

Hepp, K., 1969, *Théorie de la renormalisation,* Springer, Berlin. [Box 17.2 part 6]

Herman, R. C. *See* Alpher and Herman 1948a,b *and* 1950.

Hermann, R., 1966, *Lie Groups for Physicists,* W. A. Benjamin, New York. [§8.2]

Hernandez, W. C., Jr., 1967, "Material sources for the Kerr metric," *Phys. Rev. 159,* 1070-1072. [§33.3]

Heron (Hero of Alexandria), 1899, *Heronis Alexandrini Opera Omnia,* Teubner, Leipzig; *also in* G. Sarton, *A History of Science,* Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1952, I, 73. [Box 13.1]

Heron, G., trans., 1954, *Nicolas Cusanus's Of Learned Ignorance,* Yale Univ. Press, New Haven, Conn. [Box 27.7]

Hertz, G. L., *cited by name in* Box 17.3.

Hewish, A., *cited by name in* Box 27.7.

Hewish, A., S. J. Bell, J. D. H. Pilkington, P. F. Scott, and R. A. Collins, 1968, "Observation of a rapidly pulsating radio source," *Nature 217,* 709-713. [Box 24.1]

Hey, J. S., *cited by name in* Box 27.7.

Hibbs, A. R., 1951, "Quantum mechanics," in M. Kac, *Probability and Related Topics in Physical Science,* Interscience, New York, pp. 205-221. [Box 21.1]

Hibbs, A. R. *See also* Feynman and Hibbs 1965.

Hicks, N. J., 1965, *Notes on Differential Geometry,* Van Nostrand, Princeton, N.J. [Box 8.1, endpapers]

Hilbert, D., 1915, "Die Grundlagen der Physik," *Konigl. Gesell. d. Wiss. Göttingen, Nachr., Math.-Phys. Kl.,* 395-407; see also *Math. Annalen 92* (1924), 1-32. [§§17.7, 21.2, Box 17.2]

Hilbert, D., 1917, "Die Grundlagen der Physik (Zweite Mitteilung)," *Konigl. Gesell. d. Wiss. Göttingen, Nachr., Math.-Phys. Kl.,* 53-76. [§17.7]

Hilbert, D., *cited by name in* §21.1.

Hill, H. A. *See* Turner and Hill 1964.

Hill, J. M., 1971, "A Measurement of the gravitational deflection of radio waves by the sun," *Mon. Not. R. Astron. Soc., 154,* 7P-11P. [Box 40.1]

Hill, T., 1967, unpublished work referred to in DeWitt 1967c. [Box 17.2 part 6]

Hiltebeitel, A. M. *See* Gauss 1827

Hipparchus, *cited by name in* Box 16.1.

Hlavatý, Václav, *Festschrift* on the occasion of his 70th birthday, Jan. 27, 1964. *See* Hoffmann 1966.

Hönl, H., 1962, "Allgemeine Relativitätstheorie und Machsches Prinzip," in *Physikertagung Wien,* Physik Verlag, Mosbach/Baden, Germany. [§§21.12, 43.1]

Hoffmann, B., ed., 1966, *Perspectives in Geometry and Relativity: Essays in Honor of Václav Hlavatý,* Indiana Univ. Press, Bloomington.

Hoffman, B. *See also* Einstein, Infeld, and Hoffman 1938.

Hoffman, W. F. *See* Chiu and Hoffman 1964.

Hohn F. E., 1966, *Applied Boolean Algebra: An Elementary Introduction,* 2d ed., Macmillan, New York. [§44.5]

Holden, D. J., 1966, "An investigation of the clustering of radio sources," *Mon. Not. R. Astron. Soc., 133,* 225-228. [§27.1]

Holdridge, D. B. *See* Ohandley *et al.,* 1969.

Holmes, A., *cited by name in* Box 27.7.

Holton, G., 1965, personal communication, London. [Preface]

Holton, G., 1971, *Einstein. The Life and Times, by R. W. Clark,* book review, *New York Times Book Review,* September 5, 1-20. [Box 1.11]

Holton, G. *See also* Kollros 1956.

Horstmann, H. *See* Dabbs *et al.* 1965

Hoyle, F., 1948, "A new model for the expanding universe," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 108,* 372-382. [§28.4]

Hoyle, F., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Fowler and Hoyle 1964 *and* Wagoner, Fowler, and Hoyle 1967.

Hoyle, F., and W. A. Fowler, 1963a, "On the nature of strong radio sources," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 125,* 169-176. [§24.5, Box 24.1]

Hoyle, F., and W. A. Fowler, 1963b, "Nature of strong radio sources," *Nature 197,* 533-535. [§24.5, Box 24.1]

Hoyle, F., W. A. Fowler, G. R. Burbidge, and E. M. Burbidge, 1964, "On relativistic astrophysics," *Astrophys. J. 139,* 909-928. [Box 33.3]

Hsiang, W.-C., and B. J. Sanderson, 1965, "Twist-spinning spheres in spheres," *Illinois J. Math. 9,* 651-659. [Box 44.3]

Hubble, E. P., 1920, "Photographic investigations of faint nebulae" (Ph.D. thesis), *Pub. Yerkes Obs., 4,* 69-85. [Box 29.5]

Hubble, E. P., 1925, "NGC 6822, a remote stellar system," *Astrophys. J. 62,* 409-433. [Box 29.5]

Hubble, E. P., 1926a, "A spiral nebula as a stellar system: Messier 33," *Astrophys. J. 63,* 236-274. [Box 29.5]

Hubble, E. P., 1926b, "Extra-galactic nebulae," *Astrophys. J. 64,* 321-369. [Box 29.5]

Hubble, E. P., 1929, "A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 15,* 169-173. [§§27.9, 29.2, Boxes 27.1, 29.5]

Hubble, E. P., 1934a, *Red-shifts in the spectra of nebulae* (Halley Lecture), Clarendon Press, Oxford, Eng. [Box 29.5]

Hubble, E. P., 1934b, "The distribution of extra-galactic nebulae," *Astrophys. J. 79,* 8-76. [§27.1, Box 29.5]

Hubble, E. P., 1936, "Effects of redshifts on the distribution of nebulae," *Astrophys. J. 84,* 517-554. [§27.1]

Hubble, E. P., *cited by name in* §17.3, Boxes 27.7, 29.5. *See also* Mayall 1970.

Hubble, E. P., and M. L. Humason, 1931, "The velocity-distance relation among extra-galactic nebulae," *Astrophys. J. 74,* 43-80. [Box 29.5]

Hughes, R. G., and M. S. Longair, 1967, "Evidence of the isotropy of faint radio sources," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 135,* 131-137. [§27.1]

Hughes, V. W., H. G. Robinson, and V. B. Beltran-Lopez, 1960, "Upper limit for the anisotropy of inertial mass from nuclear resonance experiments," *Phys. Rev. Lett. 4,* 342-344. [§38.7]

Hughston, L., 1969, "Multifluid cosmologies," *Astrophys. J. 158,* 987-989. [§27.9]

Humason, M. L. *See* Hubble and Humason 1931.

Huneke, J. C. *See* Wasserburg, Schramm, and Huneke 1969.

Hunter, C., 1967, "Fragmentation," in Ehlers 1967, pp. 169-194. [Boxes 32.2, 32.3]

Huygens, C., 1698, *Cosmotheoros,* The Hague. English translation, *The Celestial Worlds Discovered or, Conjectures Concerning the Inhabitants, Plants and Productions of the Worlds in the Planets,* London, also 1698. [Box 27.7]

Imshennik, V. S. *See* Ivanova, Imshennik, and Nadezhin 1969.

Infeld, Leopold, 1962, volume dedicated to him in connection with his 60th birthday, Feb. 8, 1958: *Recent Developments in General Relativity,* Pergamon Press, Oxford, and PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw.

Infeld, L., ed., 1964, *Conférence Internationale sur les théories relativistes de la gravitation,* Gauthier-Villars, Paris, France.

Infeld, L. *See also* Einstein, Infeld, and Hoffman 1938.

Infeld, L., and J. Plebanski, 1960, *Motion and Relativity,* Pergamon, New York. [§20.6, endpapers]

Infeld, L., and A. Schild, 1949, "On the motion of test particles in general relativity," *Rev. Mod. Phys. 21,* 408-413. [§20.6]

Ingalls, R. P. *See* Shapiro, Ash *et al.* 1971, Shapiro, Smith *et al.* 1971, Shapiro *et al.* 1972.

Ipser, J. R., 1969, "Relativistic, spherically symmetric star clusters, III: Stability of compact isotropic models," *Astrophys. J. 158,* 17-43. [Boxes 24.1, 25.9]

Ipser, J. R., 1970, "Gravitational radiation from slowly rotating, fully relativistic stars," *Astrophys. J. 166,* 175-196. [Ex. 36.4]

Ipser, J. R., 1971, "Electromagnetic test fields around a Kerr-metric black hole," *Phys. Rev. Lett. 27,* 529-531. [§41.11, Ex. 33.14, Box 33.3]

Ipser, J. R. *See also* Brill *et al.* 1972, Fackerell and Ipser 1972, *and* Fackerell, Ipser, and Thorne 1969.

Ipser, J. R., and K. S. Thorne, 1968, "Relativistic, spherically symmetric star clusters, I: Stability theory for radial perturbations," *Astrophys. J. 154,* 251-270. [Box 24.1]

Isaacson, R. A., 1968a, "Gravitational radiation in the limit of high frequency, I: The linear approximation and geometrical optics," *Phys. Rev. 166,* 1263-1271. [§35.13]

Isaacson, R. A., 1968b, "Gravitational radiation in the limit of high frequency, II: Nonlinear terms and the effective stress tensor," *Phys. Rev. 166,* 1272-1280. [§35.13, Ex. 35.14]

Isenberg, J. A., *cited by name in* Figure 25.7.

Israel, W., 1960, "Relativistic theory of shock waves," *Proc. Roy. Soc. A 259,* 129-143. [§22.2, Box 22.2]

Israel, W., 1966, "Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity," *Nuovo Cimento 44 B,* 1-14, and correction in *48 B,* 463. [§§21.5, 21.13]

Israel, W., 1967a, "Event horizons in static vacuum spacetimes," *Phys. Rev. 164,* 1776-1779. [Box 33.1]

Israel, W., 1967b, "Gravitational collapse and causality," *Phys. Rev. 153,* 1388-1393. [Ex. 21.27]

Israel, W., 1968, "Event horizons in static electrovac spacetimes," *Commun. Math. Phys. 8,* 245-260. [Box 33.1]

Israel, W., 1970, *Differential Forms in General Relativity,* Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, series A, no. 17. [§4.1]

Israel, W., 1971, personal communication. [Box 33.4]

Israel, W., 1972, "The relativistic Boltzman Equation," in O'Raifeartaigh 1972, pp. 201-241. [§22.6]

Israel, W., *cited by name in* Box 34.3. *See also* de la Cruz and Israel 1967.

Ithaca 1965. *See* Cornell University 1965 *or* Ehlers 1967.

Ivanova, L. N., V. S. Imshennik, and D. K. Nadezhin, 1969, "Investigations into the dynamics of supernova explosions," *Sci. Inf. Astron. Council USSR Acad. Sci. 13,* 3-93. [§32.7]

Jablonna 1962, *Relativistic Theories of Gravitation,* proceedings of a conference held in Warsaw and Jablonna, July 1962, edited by L. Infeld, Pergamon Press, Oxford, 1964.

Jackson, J. D., 1962, *Classical Electrodynamics,* Wiley, New York. [§2.1]

Jacobi, K. G. J., *cited by name in* Box 17.2.

Jaffe, J., 1969, "Collapsing objects and the backward emission of light," *Ann. Phys. U.S.A. 55,* 374-390. [§32.3]

Janis, A. I. *See* Couch *et al.* 1968.

Jauch, J., 1968, *Foundations of Quantum Mechanics,* Addison-Wesley, Reading, Mass. [Box 44.5]

Jeans, J., *cited by name in* Box 27.7.

Jones, B. T. J., and P. J. E. Peebles, 1972, "Chaos in Cosmology," *Comm. Astrophys. Space Sci. 4,* 121-128. [§30.1]

Jöstlein, H. *See* Bailey *et al.* 1968 *and* Farley *et al.* 1966.

Johnson, F. R., 1937, *Astronomical Thought in Renaissance England,* John Hopkins Press, Baltimore, [Box 27.7]

Jordan, P., 1955, *Schwerkraft und Weltall,* Vieweg und Sohn, Braunschweig. [§§38.6, 44.6]

Jordan, P., 1959, "Zum gegenwärtigen Stand der Diracschen kosmologischen Hypothesen," *Z. Phys. 157,* 112-121. [§§38.2, 38.6, 44.6, Box 39.1]

Jordan, P., *cited by name in* §§40.1, 40.6, 40.9.

Jordan, P., J. Ehlers, and R. Sachs, 1961, "Exact solutions of the field equations of general relativity, II: Contributions to the theory of pure gravitational radiation," (in German) *Akad. Wiss. Lit. Mainz Abh. Math.-Nat. Kl. 1,* 3-60. [§22.5]

Julian, W. H. *See* Goldreich and Julian 1968.

Jurgens, R. F. *See* Shapiro, Ash *et al.* 1971.

Kac, M., and S. Ulam, 1968, *Mathematics and Logic: Retrospect and Prospects,* Praeger, New York; abridged paperback edition by Pelican Books, Harmondsworth, Middlesex, 1971. [Box 44.5]

Kant, I., 1754, "Whether the earth has undergone an alteration of its axial rotation," *Wöchentliche Frag- und Anzeigungs-Nachrichten,* Kanter, Königsberg, mid-June issue [§1.5]

Kant, I., 1755, *Allgemeine Naturgeschichte und Theories des Himmels, oder Versuch von der Verfassung und dem Mechanischen Ursprunge des ganzen Welt gebäudes nach Newtonischen Grundsätzen Abgehandelt,* Petersen, Konigsberg and Leipzig. Translation by W. Hastie, with introduction

by M. K. Munitz, *Universal Natural History and Theory of the Heavens,* Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, 1969. [Box 27.7]

Kaplan, S. A., 1949a, "Sverkhplotnye' zvezdy ('Superdense' stars)," *Naukovy Zapiski* (*Sci. Notes Univ. Lwow*) *15,* 109-115. [Box 24.1]

Kaplan, S. A., 1949b, "O krugovykh orbitakh v teorii tyagoteniya Einshteina (On circular orbits in Einstein's theory of gravitation)," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 19,* 951-952. [Box 24.1]

Kasner, E., 1921a, "Geometrical theorems on Einstein's cosmological equations," *Am. J. Math. 43,* 217-221. [§30.2]

Kasner, E., 1921b, "Finite representation of the solar gravitational field in a space of six dimensions," *Am. J. Math 43,* 130-133. [§23.8]

Kasner, E., 1921c, "The impossibility of Einstein fields immersed in flat space of five dimensions," *Am. J. Math 43,* 126-129. [§23.8]

Kasner, E., *cited by name in* Boxes 27.7, 30.1.

Kaula, W. M. *See* Bender *et al.* 1971.

Keller, J. B., R. M. Lewis, and B. D. Seckler, 1956, "Asymptotic solution of some diffraction problems," *Commun. Pure & Appl. Math. 9,* 207-265. [§22.5]

Keller, L. V., *cited by name in* Box 27.6.

Kelley, J. L., 1955, *General Topology,* Van Nostrand, New York. [Box 34.2]

Kelvin. *See* Thomson, W., Lord Kelvin.

Kemble, E. C., 1937, *The Fundamental Principles of Quantum Mechanics,* McGraw-Hill, New York. Later editions available in paperback. [Box 25.3]

Keres, P. *See* Unt and Keres 1972.

Kepler, J., 1609, *Astronomia nova αιτιολογητος, seu Physica coelestis tradita comentariis de motibus stellae Martis,* Prague. [Box 27.7]

Kepler, J., 1619, *De Harmonice Mundi,* Augsburg. [Box 27.7]

Kerr, R. P., 1963, "Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics," *Phys. Rev. Lett. 11,* 237-238. [§§33.2, 33.6, Box 33.2]

Kerr, R. P., and A. Schild, 1965, "A new class of vacuum solutions of the Einstein field equations," in *Proceedings of the Galileo Galilei Centenary Meeting on General Relativity, Problems of Energy and Gravitational Waves,* G. Barbera, ed., Comitato Nazionale per le Manifestazione Celebrative, Florence, pp. 222-233. [§33.6]

Khalatnikov, I. M., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Belinsky and Khalatnikov 1969a, 1969b, *and* 1970, Belinsky, Khalatnikov, and Lifshitz 1970, Belinsky, Lifshitz, and Khalatnikov 1971, Lifshitz and Khalatnikov 1963a *and* 1963b, *and* Ryan 1972b.

Khalatnikov, I. M., and E. M. Lifshitz, 1970, "General cosmological solutions of the gravitational equations with a singularity in time," *Phys. Rev. Lett. 24,* 76-79. [§34.6, Box 30.1]

Khuri, N., 1957, unpublished calculation quoted in Lindquist and Wheeler 1957. [§25.5]

Killing, W., 1892, "Über die Grundlagen der Geometrie," *J. Reine Angew. Math. 109,* 121-186. [§25.2]

Kilmister, C. W., 1971, "More about the King and the Vizier," *Gen. Relativity & Grav. 2,* 35-36. [Fig. 44.3]

Kirchhoff, G.-R., *cited by name in* Box 38.2.

Kittel, C., 1958, *Elementary Statistical Physics,* Wiley, New York. [§23.4]

Klauder, J., ed., 1972, *Magic Without Magic: John Archibald Wheeler,* W. H. Freeman, San Francisco.

Klauder, L. T., Jr., M. Wakano, J. A. Wheeler, and R. Willey, 1959, "Kinematics of a spherical isotropic uniform universe," in *Onzième Conseil de Physique Solvay: La Structure et l'évolution de l'univers,* Éditions Stoops, Brussels, Belgium. [§29.5]

Klein, F., 1872, "Erlangerprogram: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrischen Forschungen," translation in *Bull. Amer. Math. Soc. 2,* 215-249, 1893. [§2.2]

Klein, M. J., 1971, *Einstein: The Life and Times, by R. W. Clark,* book review, *Science, 174,* 1315-1316. [Box 1.11]

Klein, O., 1966, "Boundary conditions and general relativity" in A. de-Shalit, H. Feshbach, and L. Van Hove, eds., *Preludes in Theoretical Physics in Honor of V. F. Weisskopf,* North Holland, Amsterdam, pp. 23-26. [Box 27.7]

Klein, O., 1971, "Arguments concerning relativity and cosmology," *Science 171,* 339-345. [§§27.10, 27.11, Box 27.7]

Klein, O. *See also* Alfvén and Klein 1962.

Klemperer, W. B. *See* Deutsch and Klemperer 1962.

Kline, M., 1954, "Asymptotic solution of linear hyperbolic partial-differential equations," *J. Rat. Mech. & Anal. 3,* 315-342. [§22.5]

Klüber, H. V., 1960, "The determination of Einstein's light-deflection in the gravitational field of the sun," *Vistas in Astronomy 3,* 47-77, London, Pergamon Press. [Box 40.1]

Kluitenberg, G. A., and S. R. deGroot, 1954, "Relativistic thermodynamics of irreversible processes, III," *Physica 20,* 199-209. [§22.2]

Kneebone, G. T., 1963, *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics: An Introductory Survey,* Van Nostrand, Princeton, N. J. [Box 44.5]

Knight, L. V. *See* Witteborn, Knight, and Fairbank 1967.

Kollros, L., 1956, *in* Carl Seelig, ed. *Helle Zeit- Dunkle Zeit—In Memoriam Albert Einstein,* Europa, Zurich. We thank Professor G. Holton for this quotation. [preface]

Kovács, S., *cited by name in* ex. 35.20.

Kraichnan, R. H., 1955, "Special-relativistic derivation of generally covariant gravitation theory," *Phys. Rev. 55,* 1118-1122. [§§7.1, 18.1]

Kramers, H. A., 1957, *Quantum Mechanics,* North Holland Pub. Co., Amsterdam, Holland. Translated from the German by D. ter Haar. [§21.1]

Krefetz, E., 1967, "The equilibrium of slowly rotating configurations in the post-Newtonian approximation: Corrections to Clairaut's equations," *Astrophys. J. 148,* 589-612. [Ex. 26.1]

Kretschmann, E., 1917, "Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, A. Einsteins neue und seine ursprungliche Relativitätstheorie," *Ann. Phys.* (*Germany*) *53,* 575-614. [§§12.5, 17.6]

Kreuzer, L. B., 1968, "Experimental measurement of the

equivalence of active and passive gravitational mass," *Phys. Rev. 169,* 1007-1012. [§40.8]

Krogh, C., and R. Baierlein, 1968, "Lunar laser ranging and the Brans-Dicke theory," *Phys. Rev. 175,* 1576-1579. [§40.6]

Krotkov, R. *See* Bertotti, Brill, and Krotkov 1962 *and* Roll, Krotkov, and Dicke 1964.

Kruskal, M. D., 1960, "Maximal extension of Schwarzschild metric," *Phys. Rev. 119,* 1743-1745. [§31.4, Box 31.1]

Kuchař, K., 1968, "Charged shells in general relativity and their gravitational collapse," *Czech J. Phys. B 18,* 435-463. [§21.13]

Kuchař, K., 1970, "Ground state functional of the linearized gravitational field," *J. Math. Phys. 11,* 3322-3334. [§43.4]

Kuchař, K., 1971a, "Canonical quantization of cylindrical gravitational waves," *Phys. Rev. D 4,* 955-986. [§§21.1, 21.10]

Kuchař, K., 1971b, "Gravitational action functional reexpressed by means of intrinsic and extrinsic curvature," unpublished lecture given in the course *Relativity* at Princeton University. [§§21.6, 21.11, Ex. 21.10]

Kuchař, K., 1972, "A bubble-time canonical formalism for geometrodynamics," *J. Math. Phys. 13,* 768-781. [§§21.1, 21.10, 21.11, Ex. 21.24]

Kuchař, K., *cited by name in* §21.1, Ex. 13.7, 21.10.

Kuhlthau, A. R. *See* Rose *et al.* 1969.

Kundt, W., 1971, "Cosmological density fluctuations during Hadron stage," in Sachs 1971, pp. 365-372. [§28.1]

Kundt, W. *See also* Ehlers and Kundt 1962.

Kundt, W., and E. T. Newman, 1968, "Hyperbolic differential equations in two dimensions," *J. Math. Phys. 9,* 2193-2210. [§§35.8, 38.8]

Künzle, H. P., 1971, "On the Spherical Symmetry of a Static Perfect Fluid," *Commun. Math. Phys. 20,* 85-100. [§23.1]

Kuper, C. G., and A. Peres, eds., 1971, *Relativity and Gravitation,* Gordon and Breach, New York.

Kursunoglu, B., 1962, *Modern Quantum Theory,* W. H. Freeman, San Francisco. [Box 21.1]

Kustaanheimo, P., 1966, "Route dependence of the gravitational red shift," *Phys. Lett. 23,* 75-77. [§39.1]

Lagrange, J. L., *cited by name in* Box 17.2.

Lamb, W. E., Jr., and R. C. Retherford, 1947, "Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method," *Phys. Rev. 72,* 241-243. [Fig. 43.3, Box 17.2 part 6]

Lambert, J. H., 1761, *Kosmologischen Briefe,* Augsburg; see his *The System of the World,* translated, with modifications, from the French by J. Jacque, London, 1800; reprinted in part in Munitz 1957. [Box 27.7]

Lanczos, K., 1922, "Bemerkung zur de Sitterschen Welt," *Phys. Z. 23,* 539-543. [§21.13]

Lanczos, K., 1924, "Flächenhafte Verteilung der Materie in der Einsteinschen Gravitationstheorie," *Ann. Phys. (Germany) 74,* 518-540. [§21.13]

Lanczos, K., 1970, *The Variational Principles of Mechanics,* Univ. of Toronto Press, Toronto, 4th ed. [Box 21.1]

Landau, L. D., 1932, "On the theory of stars," *Phys. Z. Sowjetunion 1,* 285-288. [Box 24.1]

Landau, L. D., and E. M. Lifshitz, 1959, *Fluid Mechanics,* Pergamon Press, London. [Ex. 22.7]

Landau, L. D., and E. M. Lifshitz, 1960, *Mechanics,* Addison-Wesley, Reading, Mass. [Box 22.4]

Landau, L. D., and E. M. Lifshitz, 1962, *The Classical Theory of Fields,* translated by M. Hamermesh, Addison-Wesley, Reading, Mass. [§§20.3, 20.5, 36.1, endpapers]

Landau, L. D. and E. M. Lifshitz, 1971, *The Classical Theory of Fields,* 3d rev. English ed., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, and Pergamon, London. [endpapers]

Langer, W. D., and A. G. W. Cameron, 1969, "Effects of hyperons on the vibrations of neutron stars," *Astrophys. & Space Sci. 5,* 213-253. [§24.3]

Lao-tzu, 3d century B.C. *Tao Tê Ching,* Poem 1. Translated as *The Way of Life,* R. B. Blakney, New American Library, 1955; translation revised by Janet Ten Broeck. [Epigraph to Chap. 18]

Langevin, P. *See* Einstein 1912.

Laplace, P. S., 1795, *Le Système du monde,* vol. II, Paris. Published in English as *The System of the World,* W. Flint, London, 1809. [Fig. 24.1, Box 24.1, Epigraph to chap. 33]

Laplace, P. S., *cited by name in* Box 17.2.

Lascoux, J., 1968, "Perturbation theory in quantum field theory and homology," in DeWitt and Wheeler 1968, 354–419. [Ex. 4.5]

Laurence, D. H. *See* Boni, Russ, and Laurence 1960.

Lawson, R. W., *cited by name in* Box 27.7.

Leavitt, H., *cited by name in* Box 27.7.

Lebovitz, N. R. *See* Chandrasekhar and Lebovitz 1968.

Lecat, M., 1924, *"Bibliographie de la relativité,"* Lamertine, Bruxelles, cited in preface of present bibliography.

Ledoux, P., and Th. Walraven, 1958, "Variable stars," *Handbuch der Physik 51,* S, Flügge ed., Springer-Verlag, Berlin, pp. 353-604. [Box 24.2]

Lefschetz, S. 1949, *Introduction to Topology,* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. For a fuller account of fixed-point theorems, see Dunford and Schwartz 1958. [§36.1]

Leibniz, G. W., 1714, *La Monadologie.* English translation available in several books; parts included in P. P. Wiener, ed., *Leibniz Selections,* Scribners, New York, 1951. [§44.6]

Leibniz, G. W., 1961, untitled essay in his *Philosophischen Schriften, vol. 7,* ed. by C. J. Gerhardt, Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, p. 200. [Epigraph to Chap. 21]

Leibniz, G. W., *quoted at end of* Chap. 44.

Leighton, R. B., 1959, *Principles of Modern Physics,* McGraw-Hill, New York. [§2.1]

Leighton, R. B. *See also* Feynman, Leighton, and Sands 1964.

Lemaître, G., 1933a, "Formation of nebulae in the expanding universe," *Acad. Sci., Paris, Comptes Rend. 196,* 1085-1087. [§30.6]

Lemaître, G., 1933b, "Spherical condensations in the expanding universe," *Acad. Sci., Paris, Comptes Rend. 196,* 903-904. [§30.6]

Lemaître, G., 1933c, "L'univers en expansion," *Ann. Soc. Sci. Bruxelles I A53,* 51-85. [Box 31.1]

Lemaître, G., 1949, cited in Schilpp 1949, p. 440. [Epigraph to Chap. 36]

Lemaître, G., *cited by name in* Box 27.7.

Lenin, V. I., 1927, *Materialism and Empiriocriticism: Critical Comments on a Reactionary Philosophy,* International Publications, New York, 2d English ed. of *Materializm' i Empiriokrititsizm': Kriticheskia Zametki ob' Odnoi Reaktsionnoi Filosofii,* Zveno Press, Moscow, 1909. [§21.12]

Lense, J. *See* Thirring and Lense 1918.

Les Houches, France, Ecole d'ete de physique theorique: 1963, *see* DeWitt and DeWitt 1964b; 1966, *see* DeWitt, Schatzman, and Veron 1967 (third volume of three); 1972, *see* DeWitt and DeWitt 1973.

Leutwyler, H., 1968, "Boundary conditions for the state functional in the quantum theory of gravity," in DeWitt and Wheeler 1968, pp. 309-317. [§43.3]

Lewis, R. M., 1958, "Asymptotic expansion of steady-state solutions of symmetric hyperbolic linear differential equations," *J. Rat. Mech. & Math. 7,* 593-641. [§22.5]

Lewis, R. M. *See also* Keller, Lewis, and Seckler 1956.

Liang, E. *See* Eardley, Liang, and Sachs 1972.

Lichnerowicz, A., 1944, "L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des *n* corps," *J. Math. Pures & Appl. 23,* 37-63. [§21.11]

Lichnerowicz, A., 1955, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme,* Masson, Paris. [endpapers]

Lichnerowicz, A., 1961a, "Anticommutateur du champ spinoriel en relativité générale," *Acad. Sci., Paris, Comptes Rend. 252,* 3742-3744. [Box 44.3]

Lichnerowicz, A., 1961b, "Anticommutateur pour le champ correspondant au spin 3/2 sur un espace d'Einstein," *Acad. Sci., Paris, Comptes Rend. 253,* 940-942. [Box 44.3]

Lichnerowicz, A., 1961c, "Théorie de Petiau-Duffin-Kemmeren," *Acad. Sci., Paris, Comptes Rend. 253,* 983-985. [Box 44.3]

Lichnerowicz, A., 1962, "Radiations en relativité générale," especially "Le tenseur de superénergie," in CNRS 1962, pp. 93-106. [Ex. 15.2]

Lichnerowicz, A., 1964, "Propagateurs, commutateurs, et anticommutateurs en relativité générale," in DeWitt and DeWitt 1964. [Box 44.3, Ex. 15.2]

Lichnerowicz, A., 1967, *Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics; Lectures on the Existence of Solutions,* W. A. Benjamin, New York. [§§22.2, 22.3, Box 22.2]

Lichnerowicz, A., 1971, "Ondes des choc, ondes infinitesimales et rayons en hydrodynamique et magnetohydrodynamique relativistes," in Cattaneo 1971, pp. 88-203. [§22.2, Box 22.2]

Lichtenberg, D. B., 1965, *Meson and Baryon Spectroscopy,* Springer-Verlag, New York. [§38.4]

Lifshitz, E. M., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Belinsky, Khalatnikov, and Lifshitz 1970, Belinsky, Lifshitz, and Khalatnikov 1971, Khalatnikov and Lifshitz 1970, *and* Landau and Lifshitz, 1959, 1960, 1962, and 1971.

Lifshitz, E. M., and I. M. Khalatnikov, 1963a, "Investigations in relativistic cosmology," in *Advances in Physics 12,* 185-249; translated from the Russian by J. L. Beeby. [§§30.6, 34.6]

Lifshitz, E. M., and I. M. Khalatnikov, 1963b, "Problems of relativistic cosmology," *Usp. Fiz. Nauk 80,* 391-438. English translation in *Sov. Phys.—Uspekhi 6,* 495-522, 1964. [§§30.6, 34.6]

Lifshitz, E. M., and I. M. Khalatnikov, 1970, "Oscillatory approach to singular point in the open cosmological model," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. Pis'ma., 11,* 200-203. English translation in *Sov. Phys.—JETP Lett. 11,* 123-125 (1971).

Lighthill, M. J., 1958, *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions,* Cambridge University Press, Cambridge, England. [§4.7]

Lilley, A. E. *See* Dieter *et al.* 1962.

Lin, C. C., L. Mestel, and F. H. Shu, 1965, "The gravitational collapse of a uniform spheroid," *Astrophys. J. 142,* 1431-1446. [Boxes 32.2, 32.3]

Lindquist, R. W., 1960, *The Two-Body Problem in Geometrodynamics,* doctoral dissertation, Princeton University, Princeton, N.J. [Ex. 32.1]

Lindquist, R. W., 1966, "Relativistic transport theory," *Ann. Phys. (USA) 37,* 487-518. [§22.6]

Lindquist, R. W. *See also* Boyer and Lindquist 1967.

Lindquist, R. W., and J. A. Wheeler, 1957, "Dynamics of a lattice universe by the Schwarzschild cell method," *Rev. Mod. Phys. 29,* 432-433. [§27.10, Box 25.2, Fig. 25.3, 27.3]

Liouville, J., 1837, "Second mémoire sur le développement des fonctions ou parties des fonctions en séries . . . . ," Liouville's *J. de Math. Pures et Appliquées 2,* 16-35. [§22.5]

Loar, H. H. *See* Durbin, Loar, and Havens 1952.

London 1965, International Conference on Relativistic Theories of Gravitation, King's College, University of London, July 1965. Proceedings multilithed in 2 volumes by King's College.

Longair, M. S. *See* Hughes and Longair 1967.

Lorentz, H. A., *cited by name in* §20.6 *and* Box 16.4.

Lorentz, H. A., A. Einstein, H. Minkowski, and H. Weyl, 1923, *The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs,* Methuen, London. Paperback reprint, Dover, New York.

Lowry, R. A. *See* Rose *et al.* 1969.

Lukash, V. N. *See* Doroshkevich, Lukash, and Novikov 1971.

Lurie, D., and N. Mukunda, eds., 1963, *Proceedings of Seminar on Unified Theories of Elementary Particles,* University of Rochester report URPA-11, Rochester, N.Y.

Lynden-Bell, D., 1967, "Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 136,* 101-121. [Box 33.3]

Lynden-Bell, D., 1969, "Galactic nuclei as collapsed old quasars," *Nature 223,* 690-694. [Box 33.3]

Lynden-Bell, D., and M. Rees, 1971, "On quasars, dust, and the galactic center," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 152,* 461-475. [Box 33.3]

Lynds, C. R., *cited by name in* Box 27.7.

MacCallum, M. A. H. *See* Penrose and MacCallum 1973.

MacDonald, G. J. F. *See* Bender *et al.* 1971 *and* Munk and MacDonald 1960.

Mach, E., 1912, *Die Mechanik in Ihrer Entwicklung Historisch-*

Kritisch Dargestellt, Brockhaus, Leipzig. English translation by T. J. McCormack, published in 1960 as *The Science of Mechanics* with an introduction by Karl Menger, Open Court, La Salle, Ill. [§§21.1, 21.12]
Mach, E., *cited by name in* Box 27.1.
Machado, A., 1940, "Proverbios y cantares XXIX," in his *Obras,* Editorial Seneca, Mexico, pp. 235-236. [Epigraph to Chap. 43]
MacKenzie, R. E. *See* Auslander and MacKenzie 1963.
Mackey, M. B., *cited by name in* Box 27.7.
Manasse, F. K., and C. W. Misner, 1963, "Fermi Normal Coordinates and Some Basic Concepts in Differential Geometry," *J. Math. Phys. 4,* 735-745. [§13.6]
Mandelstam, S. *See* Yourgrau and Mandelstam 1968.
Mann, T., 1937, *Freud, Goethe, Wagner,* Knopf, New York. Essay on Freud published originally as *Freud und die Zukunft* (*Vortrag Gehalten in Wien am 8 Mai 1936 zur Feier von Sigmund Freuds 80 Geburtstag*), Bormann-Fischer, Wien (1936). [§44.5]
Manukin, A. B. *See* Braginsky, Manukin, and Tikhonov 1970.
Marconi, G. W., *cited by name in* Preface.
Marinus of Naples, *cited by name in* Fig. 1.8.
Markus, L. *See* Auslander and Markus 1959.
Marle, C., 1969, "Sur l'établissement des équations de l'hydrodynamique des fluides relativistes dissipatifs, I et II," *Ann. Inst. Henri Poincare, 10,* 67-126 and 127-194. [§22.6, Ex. 22.7]
Marsden, J. B. *See* Fischer and Marsden 1972.
Martin, W. L. *See* Anderson *et al.* 1971.
Marzke, R. F., and J. A. Wheeler, 1964, in Chiu and Hoffman 1964. [Box 16.4]
Mathews, J. *See also* Peters and Mathews 1963.
Mathews, J., and R. Walker, 1965, *Mathematical Methods of Physics,* W. A. Benjamin, New York. [Box 26.1]
Matzner, R. A., 1968, "The present temperature of primordial black-body gravitational radiation," *Astrophys. J. 154,* 1123-1125. [§27.10]
Matzner, R. A. *See also* Clemens and Matzner 1967 *and* Fletcher *et al.* 1967.
Matzner, R. A., and C. W. Misner, 1972, "Dissipative effects in the expansion of the universe," *Astrophys. J. 171,* 415-432. [§§28.2, 30.4]
Maupertuis, P. L. M. de, 1746, "Recherche des loix du mouvement," *Acad. R. Sci. Berlin.* [Epigraph to Chap. 21]
Mavrides, M., *quoted at end of* Chap. 44.
Maxwell, J. C., *cited by name in* Preface, Box 4.6.
May, M., and R. H. White, 1966, "Hydrodynamic calculations of general-relativistic collapse," *Phys. Rev. 141,* 1232-1241. [§§32.7, 42.7, Box 33.3, Ex. 32.7]
May, M., and R. H. White, 1967, "Stellar dynamics and gravitational collapse," *Meth. Computat. Phys. 73,* 219-258. [§22.2, Boxes 22.2, 33.3]
Mayall, N. U., 1970, "Edwin Powell Hubble," *Biograph. Mem. Nat. Acad. Sci., 41,* 176-214. [Box 29.5]
Mayall, N. U., and Oort, J. H., 1942, "Further data bearing on the identification of the Crab Nebula with the supernova of 1054 A.D., part II: The astronomical aspects," *Proc. Astron. Soc. Pacific 54,* 95-104. [Box 24.1]
Mazet, E. *See* Berger, Gauduchon, and Mazet 1971.
McCrea, W. H., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Bondi and McCrea 1960.
McDonald, E., *cited by name in* Fig. 41.6.
McVittie, G. C., 1956, *General Relativity and Cosmology,* Chapman and Hall, London. [endpapers]
McWhirter, N., and R. McWhirter, 1971, *The Guinness Book of Records,* Guinness Superlatives, Ltd., Enfield, Middlesex [Chap. 12 epigraph]
Meer, S. van der. *See* Farley *et al.* 1966.
Meixner, J., and H. G. Reik, 1959, "Thermodynamik der irreversiblen Prozesse," *Handbuch der Physik, 3, Teil 2,* 413-505. [§22.2]
Meixner, J., and F. W. Schäfke, 1954, *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen,* Springer-Verlag, Berlin, Germany. [Ex. 33.14]
Melbourne, W. G. *See* Ohandley *et al.* 1969.
Meltzer, D. W. *See* Bardeen, Thorne, and Meltzer 1966.
Meltzer, D. W., and K. S. Thorne, 1966, "Normal modes of radial pulsation of stars at the end point of thermonuclear evolution," *Astrophys. J. 145,* 514-543. [Box 26.1]
Menger, Karl, 1949, see Schilpp 1949, pp. 466-467. [Epigraph to Chap. 2, Epigraph to Chap. 9]
Menskii, M. B. *See* Braginsky and Menskii 1971.
Mercier, A., 1953, *Analytical and Canonical Formalism in Physics,* North-Holland, Amsterdam, Holland. Paperback reprint, Dover, New York, 1963. [Box 21.1]
Mercier, A., and M. Kervaire, 1956, *Jubilee of Relativity Theory,* proceedings of a conference in Bern, Switzerland, July 11-16, 1955, Birkhäuser, Bern.
Merzbacher, E., 1961, *Quantum Mechanics,* Wiley, New York. [§16.3]
Messiah, A., 1961, *Quantum Mechanics,* translated from the French by G. M. Temmer, North-Holland, Amsterdam, Holland. [Ex. 3.12]
Mestel, L. *See* Lin, Mestel, and Shu 1965.
Mielnik, B., and J. Plebanski, 1962, "A study of geodesic motion in the field of Schwarzschild's solution," *Acta Phys. Polon. 21,* 239-268. [§25.5]
Mikola, S. *See* Fejér and Mikola 1918.
Milne, E. A., *cited by name in* Box 27.7.
Milnor, J., 1962, "A survey of cobordism theory," *Enseignement Math. 8,* 16-23. [Box 44.3]
Milnor, J., 1963, "Spin structures on manifolds," *Enseignement Math. 9,* 198-203. [Box 44.3]
Milnor, J., 1965a, "On the Stiefel-Whitney numbers of complex manifolds and of spin manifolds," *Topology 3,* 223-230. [Box 44.3]
Milnor, J., 1965b, "Remarks concerning spin manifolds," in Cairns 1965, p. 55. [Box 44.3]
Milton, J., 1665, *Paradise Lost,* Book V, Lines 623-625, in *The Complete Poems of John Milton,* Union Library Association of New York, 1936. [Epigraph to Chap. 25]
Minkowski, H., 1908, address delivered at the 80th Assembly of German Natural Scientists and Physicians, Cologne. English translation, "Space and time," in *The Principle of Relativity,* Dover, New York, 1923. [§1.5]
Minkowski, H. *See also* Lorentz *et al.* 1923.

Minkowski, R., 1942, "The Crab Nebula," *Astrophys. J. 96,* 199-213. [Box 24.1]
Minkowski, R., *cited by name in* Box 27.7.
Minkowski, R., and O. C. Wilson, 1956, "Proportionality of nebular redshifts to wave length," *Astrophys. J. 123,* 373-376. [§38.6]
Misner, C. W., 1957, "Feynman quantization of general relativity," *Rev. Mod. Phys. 29,* 497-509. [Box 21.1]
Misner, C. W., 1964a, "Differential geometry and differential topology," in DeWitt and DeWitt 1964b, pp. 881-929. [Box 8.1]
Misner, C. W., 1964b, "Waves, Newtonian fields, and coordinate functions," in Infeld 1964. [§35.8]
Misner, C. W., 1965, "Relativistic equations for spherical gravitational collapse with escaping neutrinos," *Phys. Rev. B137,* 1360-1364. [Box 23.1]
Misner, C. W., 1968, "The isotropy of the universe," *Astrophys. J. 151,* 431-457. [§§28.2, 30.3]
Misner, C. W., 1969a, "Gravitational collapse," in Chrétien, Deser, and Goldstein 1969, vol I. [§§12.1, 32.5, Boxes 8.1, 31.2, Ex. 31.8, endpapers]
Misner, C. W., 1969b, "Mixmaster universe," *Phys. Rev. Lett. 22,* 1071-1074. [§§21.10, 28.2, 30.6, 34.6, Box 30.1]
Misner, C. W., 1969c, "Absolute zero of time," *Phys. Rev. 186,* 1328-1333. [§§28.3, 34.6]
Misner, C. W., 1970, "Classical and quantum dynamics of a closed universe," in Carmeli, Fickler, and Witten 1970, pp. 55-79. [Box 30.1]
Misner, C. W., 1972a, "Minisuperspace," in Klauder 1972. [§43.3, Box 30.1]
Misner, C. W., 1972b, "Stability of Kerr black holes against scalar perturbations," *Bull. Am. Phys. Soc. (II) 17,* 472. [Ex. 33.14]
Misner, C. W., 1973, "A minsuperspace example: The Gowdy T^3 cosmology," Caltech Orange Aid Preprint. Submitted to *Phys. Rev.* [§43.3]
Misner, C. W., *cited by name in* §§21.1, 35.8, Boxes 17.2 part 2′, 17.3, 27.7. *See also* Arnowitt, Deser, and Misner 1962, Beckedorff and Misner 1962, Chrzanowski and Misner 1973, Manasse and Misner 1963, *and* Matzner and Misner 1972.
Misner, C. W., and D. H. Sharp, 1964, "Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse," *Phys. Rev. B 136,* 571-576. [§§21.13, 22.2, Ex. 32.7, Box 23.1]
Misner, C. W., and A. H. Taub, 1968, "A singularity-free empty universe," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 55,* 233. English original in *Sov. Phys.—JETP 28,* 122, 1969. [§§32.5, 34.6]
Misner, C. W., and J. A. Wheeler, 1957, "Classical physics as geometry: Gravitation, electromagnetism, unquantized charge, and mass as properties of curved empty space," *Ann. Phys. (U.S.A.) 2,* 525-603, reprinted in Wheeler 1962. [§§20.6, 21.8, 21.9, Fig. 44.1, Boxes 4.1, 4.4, 15.1, 21.2, Ex. 20.7]
Misner, C. W., and J. A. Wheeler, 1972, "Conservation laws and the boundary of a boundary," in Shelest 1972, pp. 338-351. [§15.3]
Moffet, A., *cited by name in* Box 40.1.
Møller, C., 1952, *The Theory of Relativity,* Oxford Univ. Press, London; 2d ed., 1972. [endpapers]
Møller, C., ed., 1962, *Evidence for Gravitational Theories,* Academic Press, New York.
Moncrief, V. E. *See* Berger *et al.* 1972.
Morduch, G. E. *See* Whitrow and Morduch 1965.
Morehead, J. C. *See* Gauss 1827.
Morette, C., 1951, "On the definition and approximation of Feynman's path integrals," *Phys. Rev. 81,* 848-852. [Box 21.1]
Morette, C. *See also* DeWitt, C.
Morgan, T., and K. S. Thorne, 1973, in preparation. [Box 32.3]
Morganstern, R. E., 1973, "Observational constraints imposed by Brans-Dicke cosmologies," *Phys. Rev. D 7,* 1570-1579. [§28.4]
Moritz, B. K., 1969, *A Study of the General Relativistic Dynamics of the Klein-Alfvén Cosmology,* doctoral dissertation, University of Maryland [§27.11, §28.4]
Morse, M., 1934, *The calculus of variations in the large,* American Mathematical Society, Providence, R.I. [Fig. 13.2]
Morse, M., and S. S. Cairns, 1969, *Critical Point Theory in Global Analysis and Differential Topology: an Introduction,* Academic Press, New York. [Fig. 13.2]
Moser, J. K. *See* Siegel and Moser 1971.
Mottleson, B. R. *See* Bohr and Mottleson 1969.
Muhleman, D. O. *See* Anderson *et al.* 1971.
Muhleman, D. O., R. D. Ekers, and E. B. Fomalont, 1970, "Radio interferometric test of the general relativistic light bending near the sun," *Phys. Rev. Lett. 24,* 1377-1380. [Box 40.1]
Muhlemann, D. O., and P. Reichley, 1964, "Effects of general relativity on planetary radar distance measurements," *JPL Space Programs Summary 4,* no. 37-29, p. 239. [§40.4]
Muhlemann, D. O., and P. Reichley, 1965, "General relativistic effects on radar propagation," *JPL Space Programs Summary 4,* no. 37-31, p. 342. [§40.4]
Mukunda, N. *See* Lurie and Mukunda 1963.
Mulholland, J. D. *See* Bender *et al.* 1971 *and* Ohandley *et al.* 1969.
Munitz, M. K., 1957, *Theories of the Universe,* Free Press, New York. [Box 27.7]
Munk, W. H., and G. J. F. MacDonald, 1960, *The Rotation of the Earth; a Geophysical Discussion,* Cambridge University Press, Cambridge, England. [Fig. 1.8]
Nadezhin, D. K. *See* Ivanova, Imshennik, and Nadezhin 1969.
Nagel, E., and J. R. Newman, 1958, *Gödel's Proof,* New York Univ. Press, New York.
NASL, 1969, *Proceedings of the 1969 Symposium on Unconventional Inertial Sensors (U) Vol. I,* Naval Applied Science Laboratory, Brooklyn, New York.
Nasr, H., 1964, *Three Muslim sages: Avicenna, Suhrawardi, Ibn Arabi,* Harvard University Press, Cambridge, Mass. [Box 27.7]
Navier, L., *cited by name in* Box 17.2 part 6.
Nazarenko, V. S. *See* Braginsky and Nazarenko 1971.
Ne'eman, Y., 1965, "Expansion as an energy source in quasi-stellar radio sources," *Astrophys. J. 141,* 1303-1305. [§34.3]
Nester, J. M., *cited by name in* §35.1.

Neugebauer, O., 1959, *Greek Horoscopes,* with H. B. van Hösen, American Philosophical Society, Philadelphia, Pa. [Fig. 1.8]

Neugebauer, P. V., 1927, "Zür astronomischen Chronologie," *Astron. Nachr. 230,* 57-64. [Fig. 1.8]

Neugebauer, P. V., 1929, *Astronomische Chronologie,* 2 vols, De Gruyter, Berlin. [Fig. 1.8]

Neugebauer, P. V., 1930, "Schoch Todesanzeige," *Astron. Nachr. 237,* 221-224. [Fig. 1.8]

Neugebauer, P. V., and C. Schoch, 1930, "Zür astronomischen Chronologie, II," *Astronomische Abhandlungen. Erganzungshefte zu den Astron. Nachrichten 8,* no. 2, 24-32. [Fig. 1.8]

Newman, E. T. *See also* Couch and Newman 1972, Couch *et al.* 1968, *and* Kundt and Newman 1968.

Newman, E. T., E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence, 1965, "Metric of a rotating, charged mass," *J. Math. Phys. 6,* 918-919. [§33.2]

Newman, E. T., and R. Penrose, 1965, "10 exact gravitationally-conserved quantities," *Phys. Rev. Lett. 15,* 231-233. [Ex. 32.11]

Newman, J. R. *See* Nagel and Newman 1958.

Newton, I., 1687, *Philosophiae naturalis principia mathematica,* 1st ed., Streater, London; final ed., in English translation by A. Motte, 1729, revised by A. Cajori, *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World,* Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1934; paperback, 1962. [Boxes 1.10, 21.1, 27.7]

Newton, I., 1730, *Opticks, or a Treatise of the Reflection, Refraction, Inflection, & Colours of Light,* 4th ed.; reprint, ed. by D. H. D. Roller, Dover, New York, 1952. [Box 1.10]

Newton, I., *cited by name in* §§1.1, 1.3, 12.1, 12.2, Boxes 1.2, 12.2, 12.3, 12.6, Ex. 12.7, 12.8, 13.4, 17.2 part 6.

Newton, R. *See* Gilbert and Newton 1970.

Neyman, J., 1951, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* Univ. of California Press, Berkeley, Calif.

Ni, W.-T., 1970, work reported by K. S. Thorne at the NASA-ESRO conference on experimental tests of gravitation theories, California Institute of Technology, November 1970; *see* Thorne, Ni, and Will 1971. [§39.2, Box 39.1]

Ni, W.-T., 1972, "Theoretical frameworks for testing relativistic gravity, IV: A compendium of metric theories of gravity and their post-Newtonian limits," *Astrophys. J. 176,* 769-796. [§§17.6, 38.2, 39.2, 40.1, 40.5, 40.8, Boxes 39.1, 39.2, 39.5]

Ni, W.-T. *See also* Thorne, Ni, and Will 1971.

Ni, W.-T., 1973, "Relativistic stellar stability: an empirical approach," *Astrophys. J. 181,* 939-956. [Box 39.5, Ex. 39.7]

Nicetas, *cited by name in* Box 27.7.

Nickerson, H. K., D. C. Spencer, and N. E. Steenrod, 1959, *Advanced Calculus,* Van Nostrand, Princeton, New Jersey. [§4.1]

Nijenhuis, A., 1952, "Theory of the geometric object," dissertation, Amsterdam. [§2.2]

Nizer, L., 1972, quoted in the *New York Times* February 7, 1972. [Epigraph to Chap. 40]

Noerdlinger, P. D., and V. Petrosian, 1971, "The effect of cosmological expansion on self-gravitating ensembles of particles," *Astrophys. J. 168,* 1-9. [§27.5]

Noonan, T. W. *See* Robertson and Noonan 1968.

Nordstrøm, G., 1913, "Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips," *Ann. Phys. (Germany) 42,* 533-554. [§17.6]

Nordstrøm, G., 1918, "On the energy of the gravitational field in Einstein's theory," *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 20,* 1238-1245. [Ex. 31.8]

Nordstrøm, G., *cited by name in* §§38.2, 42.7.

Nordtvedt, K., 1968a, "Equivalence principle for massive bodies, I: Phenomenology," *Phys. Rev. 169,* 1014-1016. [§§38.2, 40.9]

Nordtvedt, K., 1968b, "Equivalence principle for massive bodies, II: Theory," *Phys. Rev. 169,* 1017-1025. [§§38.2, 39.3, 40.9, Box 39.5]

Nordtvedt, K., Jr., 1969, "Equivalence principle for massive bodies including rotational energy and radiation pressure," *Phys. Rev., 180,* 1293-1298. [§§38.2, 39.3]

Nordtvedt, K., 1970, "Solar system Eötvos experiments," *Icarus 12,* 91-100. [§40.8, Box 39.5]

Nordtvedt, K., 1971a, "Equivalence principle for massive bodies, IV: Planetary bodies and modified Eötvos-type experiments," *Phys. Rev. D 3,* 1683-1689. [§§40.8, 40.9, Box 39.5]

Nordtvedt, K., 1971b, in Davies 1971, pp. 32-37. [§§39.5, 40.9, Box 39.5]

Nordtvedt, K., Jr. *See also* Will and Nordtvedt 1972.

Nordtvedt, K., Jr., and C. M. Will, 1972, "Conservation laws and preferred frames in relativistic gravity, II: Experimental evidence to rule out preferred-frame theories of gravity," *Astrophys. J. 177,* 775-792. [§§39.2, 40.5, 40.8, Box 39.5]

North, J. D., 1965, *The Measure of the Universe,* Clarendon Press, Oxford. [Box 27.7]

Novikov, I. D., 1963, doctoral dissertation, Shternberg Astronomical Institute, Moscow. [§31.4]

Novikov, I. D., 1964, "Delayed explosion of a part of the Friedmann universe, and quasars," *Astron. Zh. 41,* 1075-1083. English translation in *Sov. Astron.-Astron. J. 8,* 857-863. [§34.3]

Novikov, I. D., 1966a, "Change of relativistic collapse into anticollapse and kinematics of a charged sphere," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. Pis'ma 3,* 223-227. English translation in *Sov. Phys.—JETP Lett. 3,* 142-144. [§34.6, Fig. 34.4]

Novikov, I. D., 1966b, "The replacement of relativistic gravitational contraction by expansion, and the physical singularities during contraction," *Astron. Zh. 43,* 911-918. English translation in *Sov. Astron.—A. J. 10,* 731-737. [§34.6, Fig. 34.4]

Novikov, I. D. *See also* Doroshkevich, Lukash, and Novikov 1971, Doroshkevich, Zel'dovich, and Novikov 1965, *and* Zel'dovich and Novikov 1966, 1971, *and* 1974.

Novikov, I. D., and K. S. Thorne, 1973, "Astrophysics of black holes," in DeWitt and DeWitt 1973, pp. 343-450. [Box 33.3]

Nutku, Y. *See* Berger *et al.* 1972 *and* Chandrasekhar and Nutku 1969.

O'Connell, R. F., 1972, "Present status of the theory of the relativistic gyroscope experiment," *Gen. Rel. & Grav. 3,* 123-133. [§40.7, Ex. 40.8]

Ogorodnikov, K. F., 1965, *Dynamics of Stellar Systems,* ed. by A. Beer, Macmillan, New York. [§25.7]

Ohandley, D. A., D. B. Holdridge, W. G. Melbourne, and J. D. Mulholland, 1969, *J.P.L. Development Ephemeris No. 69,* J.P.L. Technical report 32-1465, Caltech Jet Propulsion Laboratory, Pasadena. [§40.1]

Ohanian, H. C. *See* Belasco and Ohanian 1969.

Olbers, H. W. M., 1826, "Über die Durchsichtigkcit des Weltraumes" *Bode Jahrbuch, 110;* substantially the same article in *Bibliothèque Universelle* for February 1826, and in *Edinburgh New Philosophical Journal* for April-October 1826, 141. [Box 27.7]

Omnes, R. L., 1969, "Possibility of matter-antimatter separation at high temperature," *Phys. Rev. Lett. 23,* 38-40. [§27.10]

O'Murchadha, N., and J. W. York, Jr., 1973, personal communication; *see also* O'Murchadha, N., "Existence and uniqueness of solutions of the Hamiltonian constraint of general relativity," doctoral dissertation, Princeton Univ., February 5, 1973. [§21.11]

O'Neill, B., 1966, *Elementary Differential Geometry,* Academic Press, New York. [Box 8.1]

Oort, J. H., 1958, "Distribution of galaxies and the density of the universe," in *Onzième Conseil de Physique Solvay: La Structure et l'évolution de l'univers,* Éditions Stoops, Brussels, Belgium. [§29.6]

Oort, J. H., 1970, "Matter far from the galactic plane associated with spiral arms," in *Spiral Structure of our Galaxy, Basel, Switzerland, 29 Aug.-4 Sep. 1969,* D. Reidel, Dordrecht, Netherlands. [§28.2]

Oort, J. H., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Mayall and Oort 1942.

Oppenheimer, J. R., and H. Snyder, 1939, "On continued gravitational contraction," *Phys. Rev. 56,* 455-459. [§§32.3, 32.4, 34.6, Fig. 24.1, Box 24.1]

Oppenheimer, J. R., and G. Volkoff, 1939, "On massive neutron cores," *Phys. Rev. 55,* 374-381. [§23.2, Fig. 24.1, Box 24.1, Ex. 23.10]

Oppolzer, Th. V., 1887, "Canon der Finsternisse," *Math.-Naturwiss. Cl. d. Akad. der Wiss. Denkschriften 52,* Wien. [Fig. 1.8]

O'Raifeartaigh, L., ed., 1972, *General Relativity, Papers in Honor of J. L. Synge,* Oxford Univ. Press, London.

Ostriker, J. P., and J. E. Gunn, 1969, "On the nature of pulsars, I: Theory," *Astrophys. J. 157,* 1395-1417. [§24.3, Ex. 33.13]

Pacini, F., 1968, "Rotating neutron stars, pulsars, and supernova remnants," *Nature 219,* 145-146. [§24.3]

Page, L., 1941, lecture at Dec. 17 meeting of the American Institute of Electrical Engineers, New York. [Epigraph to Chap. 3]

Palatini, A., 1919, "Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton," *Rend. Circ. Mat. Palermo 43,* 203-212. [§21.2]

Palatini, A., *cited by name in* §§21.1, 21.2.

Panov, V. I. *See* Braginsky and Panov 1971.

Paolini, F., R., *cited by name in* Box 27.7.

Papanastassiou, D. A., and G. J. Wasserburg, 1969, "Initial strontium isotopic abundances and the resolution of small time differences in the formation of planetary objects," *Earth & Planetary Sci. Lett. 5,* 361-376. [Box 29.3]

Papapetrou, A., 1951, "Spinning test-particles in general relativity, I," *Proc. R. Soc. London A 209,* 248-258. [§20.6, Ex. 40.8]

Papapetrou, A., 1954a, "Eine neue Theorie des Gravitationsfeldes, I," *Math. Nachr. 12,* 129-141. [§40.8]

Papapetrou, A., 1954b, "Eine neue Theorie des Gravitationsfeldes, II," *Math. Nachr. 12,* 143-154. [§40.8]

Papapetrou, A., 1954c, "Eine Theorie des Gravitationsfeldes mit einer Feldfunktion," *Z. Phys. 139,* 518-532. [§40.8]

Papapetrou, A., 1958, "Uber zeit abhängige Lösungen der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie," *Ann. Phys. (Germany) 2,* 87-96. [§35.8]

Papapetrou, A., and A. Hamoui, 1967, "Surfaces caustiques dégénerées dans la solution de Tolman: La singularité physique en relativité générale," *Ann. Inst. Henri Poincaré A 6,* 343-364. [Ex. 32.7]

Papapetrou, A., and A. Hamoui, 1968, "Couches simples de matières en relativité générale," *Ann. Inst. Henri Poincaré A 9,* 179-211. [§21.13]

Papapetrou, A., and H. Treder, 1959, "Das Sprungproblem erster Ordnung in der allgemeinen Relativitätstheorie," *Math. Nachr. 20,* 53-66. [§21.13]

Papapetrou, A., and H. Treder, 1962, "Shock waves in general relativity," in Infeld 1962, pp. 351-360. [§21.13]

Paris 1967, *Fluides et Champs Gravitationnel en relativité générale,* Colloques Internationaux du CNRS, no. 170, organizé au Collège de France, du 19 au 23 juin 1967, Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, 1969.

Parker, H. M. *See* Rose *et al.* 1969.

Parker, L., 1966, *Particle Creation in the Expanding Universe,* Ph.D. thesis, Harvard University, unpublished. [§30.5]

Parker, L., 1969, "Quantized fields and particle creation in expanding universes, I," *Phys. Rev. 183,* 1057-1068. [§30.5]

Parker, L., 1972, "Particle Creation in Isotropic Cosmologies," *Phys. Rev. Lett. 28,* 705-708. [§30.5]

Parsons, S. J., *cited by name in* Box 27.7.

Partridge, R. B., 1969, "The primeval fireball today," *Am. Sci. 57,* 37-74. [§27.2]

Partridge, R. B. *See also* Boughn, Fram, and Partridge 1971.

Pauli, W., 1921, "Relativitätstheorie," in *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* II, 539-775, Teubner, Leipzig, Germany. [Preface]

Pauli, W., 1934, "Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik," *Handbuch der Physik 24,* Part 1, 2d ed. [§16.3]

Pauli, W., 1947, *Exclusion Principle and Quantum Mechanics,* 1945 Nobel prize lecture, Editions Grisson, Neuchatel, Switzerland. Related discussion in Fierz and Weisskopf 1960. [Box 44.3]

Pauli, W., ed., 1955, *Niels Bohr and the Development of Physics,* McGraw-Hill, New York.

Pauli, W., 1958, *Theory of Relativity,* Pergamon Press, London. English translation by Gerard Field of Pauli 1921 with supplementary notes (1956) by the author. [endpapers]

Pauli, Wolfgang, Memorial volume. *See* Fierz and Weisskopf 1960.

Pauli, W., *cited by name in* Preface. *See also* Fierz and Pauli 1939.

Paya, D. *See* Dabbs *et al.* 1965.

Peebles, P. J. E., 1966, "Primordial He abundance and fireball, II," *Astrophys. J. 146,* 542-552. [§28.1]

Peebles, P. J. E., 1969, "Cosmology," *Proc. Roy. Astron. Soc. Canada, 63,* 4-31. [§30.1]

Peebles, P. J. E., 1971, *Physical Cosmology,* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. [§§27.1, 27.2, 28.1, 29.6, Box 27.7]

Peebles, P. J. E., 1972, "Gravitational collapse and related phenomena from an empirical point of view, or, black holes are where you find them," *Gen. Rel. & Grav. 3,* 63-82. [Box 33.3]

Peebles, P. J. E. *Cited by name in* Box 27.7. *See also* Dicke and Peebles 1962a, 1962b, *and* 1965, Dicke *et al.* 1965, *and* Jones and Peebles 1972.

Peebles, P. J. E., and J. T. Yu, 1970, "Primeval adiababic perturbation in an expanding universe," *Astrophys. J. 162,* 815-836. [§30.1]

Pekar, D. *See* Eötvös, Pekar, and Fekete 1922.

Penrose, R., 1959, "The apparent shape of a relativistically moving sphere," *Proc. Cambridge Phil. Soc. 55,* 137-139. [§41.10]

Penrose, R., 1964, "Conformal treatment of infinity," in DeWitt and DeWitt 1964b. [§34.2]

Penrose, R., 1965a, "Zero rest-mass fields including gravitation: Asymptotic behavior," *Proc. R. Soc. London A 284,* 159-203. [§34.2, Box 32.2]

Penrose, R., 1965b, "Gravitational collapse and space-time singularities," *Phys. Rev. Lett. 14,* 57-59. [§§32.7, 34.6, Box 34.2]

Penrose, R., 1966, "An analysis of the structure of spacetime," Adams Prize Essay. [Box 34.2]

Penrose, R., 1968a, "Structure of spacetime," in DeWitt and Wheeler 1968. [§§34.1, 34.4, 41.7, 41.11, Boxes 34.1, 34.2, 44.3]

Penrose, R., 1968b, "Twistor quantization and the curvature of spacetime," *Int. J. Theor. Phys. 1,* 61-99. [Box 34.2]

Penrose, R., 1969, "Gravitational collapse: The role of general relativity," *Nuovo Cimento 1,* special number, 252-276. [§33.7, Boxes 33.2, 33.4, 34.2]

Penrose, R., 1972, "Techniques of differential topology in relativity," in Farnsworth *et al.* (1972). [§34.1]

Penrose, R., *cited by name in* §§32.7, 41.9, 42.1, Box 27.7, Fig. 41.7. *See also* Hawking and Penrose 1969, Infeld 1964, Klauder 1964, Newman and Penrose 1965, *and* Walker and Penrose 1970.

Penrose, R., and M. A. H. MacCallum, 1973, "Twistor Theory: An approach to the quantization of fields and spacetime," *Physics Reports 6C,* no. 4, 242-315. [Box 34.2]

Penzias, A. A., *cited by name in* Box 27.7.

Penzias, A. A., and R. W. Wilson, 1965, "A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s," *Astrophys. J. 142,* 419-421. [§27.2]

Pereira, C. M. *See* Brill *et al.* 1972.

Peres, A., 1962, "On the Cauchy problem in general relativity, II," *Nuovo Cimento 26,* 53-62. [§43.3]

Peres, A., and N. Rosen, 1964, "Gravitational radiation damping of nongravitational motion," *Ann. Phys. (U.S.A.) 10,* 94-99. [§§36.1, 36.8]

Peters, P. C., 1964, "Gravitational radiation and the motion of two point masses," *Phys. Rev. B 136,* 1224-1232. [§§36.1, 36.7, Ex. 36.9]

Peters, P. C., and J. Mathews, 1963, "Gravitational radiation from point masses in a Keplerian orbit," *Phys. Rev. 131,* 435-440. [§36.6, Ex. 36.6]

Peterson, B. A., *cited by name in* Box 27.7.

Peterson, F. P. *See* Anderson, Brown, and Peterson 1966a *and* 1966b.

Peterson, F. R. *See* Evenson *et al.* 1972.

Pethick, C. J. *See* Baym, Bethe, and Pethick 1971.

Petrosian, V. *See* Noerdlinger and Petrosian 1971.

Petrov, A. Z., 1954, *Reports of the State University of Kazan 114,* book 8, 55. [§33.6]

Petrov, A. Z., 1969, *Einstein Spaces,* Pergamon, New York. [§33.6]

Petrov, Aleksei Zinoveivich, Memorial volume. *See* Shelest 1972.

Pettengill, G. H. *See* Shapiro, Ash *et al.* 1971, Shapiro, Smith *et al.* 1971, and Shapiro *et al.* 1972.

Philolaus, *cited by name in* Box 27.7.

Phillips, J. W., *cited by name in* Box 27.7.

Picasso, E. *See* Bailey *et al.* 1968 *and* Farley *et al.* 1966.

Piir, I. I., 1971, "Maxwell equations in the Schwarzschild gravitational field" (in Russian), *Izv. Akad. Nauk Estonian S. S. R., Fiz. Mat., 20,* 413-419. [Ex. 32.11]

Pilkington, J. D., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Hewish *et al.* 1968.

Pirani, F. A. E., 1956, "On the physical significance of the Riemann tensor," *Acta Phys. Pol. 15,* 389-405. [§20.6, Ex. 40.8]

Pirani, F. A. E., 1957, "Invariant formulation of gravitational radiation theory," *Phys. Rev. 105,* 1089-1099. [§§21.13, 33.6, Ex. 15.2]

Pirani, F. A. E., 1965, "Introduction to gravitational radiation theory," in Trautman, Pirani, and Bondi 1965, pp. 249-373. [§§41.7, 41.11, endpapers]

Pirani, F. A. E. *See also* Bondi, Pirani, and Robinson 1959, Ehlers, Pirani, and Schild 1972, *and* Trautman, Pirani, and Bondi 1965.

Pittsburgh 1970, Regional Conference on Relativity, July 13-17, 1970. *See* Farnsworth *et al.* 1972.

Planck, M., 1899, "Über irreversible Strahlungsvorgänge," *Sitzungsber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.—Phys. Tech.,* 440-480. [§§43.4, 44.6]

Plato. *See* Cornford 1937.

Plebanski, J. *See* Infeld and Plebanski 1960 *and* Mielnik and Plebanski 1962.

Plotkin, H. E. *See* Bender *et al.* 1971.

Plutarch, *cited by name in* Box 27.7.

Podolsky, B. *See* Dirac, Fock, and Podolsky 1932.

Podurets, M. A., 1964, "Asymptotic behavior of the optical luminosity of a star in gravitational collapse in terms of general relativity theory," *Astron. Zhur. 41,* 1090-1096, English translation in *Sov. Astron.—A. J. 8,* 868-873 (1965). [§32.3]

Podurets, M. A., 1966, "The character of the singularity in the gravitational collapse of a star," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*

167, 1025-1027. English translation in *Sov. Ph.—Doklady 11,* 275-276. [§34.6, Ex. 32.3]

Podurets, M. A. *See also* Zel'dovich and Podurets 1965.

Poincaré, H. *cited by name in* §§3.1, 12.3.

Poisson, S., *cited by name in* Box 17.2 part 6.

Polievktov-Nikoladze, N. M., 1969, "On the theory of the gravitational field," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 57,* 2010-2020. English translation in *Sov. Phys.—JETP 30* (1970), 1089-1095. [Box 17.2 part 6]

Polkinghorne, J. C., 1955, "On the Feynman principle," *Proc. R. Soc. London A 230,* 272-276. [Box 21.1]

Polubarinova-Kochina, P. Ya., 1963, "Alexander Alexandrovitch Friedmann (In memory of A. A. Friedmann)," *Usp. Fiz. Nauk, 80,* 345-352. English translation in *Sov. Phys.—Uspekhi, XX,* 467-472 (1964). [Box 27.6]

Pope, A., 1733, *Essay on Man,* London [Epigraph to Chap. 24]

Porter, J. *See* Farnsworth *et al.* 1972.

Pound, R. V., and G. A. Rebka, 1960, "Apparent weight of Photons," *Phys. Rev. Lett. 4,* 337-341. [§§7.2, 7.4, 38.5, Fig. 38.1]

Pound, R. V., and J. L. Snider, 1964, "Effect of gravity on nuclear resonance," *Phys. Rev. Lett. 13,* 539-540. [§§7.2, 7.4]

Pound, R. V., and J. L. Snider, 1965, "Effect of gravity on gamma radiation," *Phys. Rev. B 140,* 788-803. [§§7.2, 38.5, Fig. 38.1]

Power, E. A., and J. A. Wheeler, 1957, "Thermal geons," *Rev. Mod. Phys. 29,* 480-495. [§25.6]

Prakash, A. *See* Newman *et al.* 1965.

Press, F., 1965, "Resonant vibrations of the Earth," *Sci. American 213,* no. 5, 28-37. [Ex. 37.14]

Press, F. *See also* Ahrens, Press, and Runcorn 1964.

Press, W. H., 1970, unpublished work described in part in Press and Thorne 1972. [§37.3, Fig. 37.2, Box 37.2]

Press, W. H., 1971, "Long wave trains of gravitational waves from a vibrating black hole," *Astrophys. J. Lett. 170,* 105-108. [Box 33.3]

Press, W. H., 1972, "Time evolution of a rotating black hole immersed in a static scalar field," *Astrophys. J. 175,* 243-252. [Ex. 33.14, Box 33.3]

Press, W. H. *See also* Bardeen and Press 1972, Bardeen, Press, and Teukolsky 1972, *and* Davis *et al.* 1971.

Press, W. H., and J. M. Bardeen, 1971, "Nonconservation of the Newman-Penrose conserved quantities," *Phys. Rev. Lett. 27,* 1303-1306. [Ex. 32.11]

Press, W. H., and S. A. Teukolsky, 1972, "Floating orbits, superradiant scattering and the black-hole bomb," *Nature 238,* 211-212. [Box 33.3]

Press, W. H., and S. A. Teukolsky, 1973, "Perturbations of a rotating black hole, II: Dynamical stability of the Kerr metric," *Astrophys. J.,* in press. [Box 33.3, Ex. 33.14]

Press, W. H., and K. S. Thorne, 1972, "Gravitational-wave astronomy," *Ann. Rev. Astron. Astrophys. 10,* 335-374. [§§36.5, 37.4, 37.8, Box 37.5]

Price, R. H., 1971, *Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse,* doctoral dissertation, California Institute of Technology. [Ex. 32.10, Box 32.2]

Price, R. H., 1972a, "Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse, I: Scalar and gravitational perturbations," *Phys. Rev., D5,* 2419-2438. [§§35.14, 41.11, Ex. 32.10, Box 32.2]

Price, R. H., 1972b, "Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse, II: Integer-spin, zero-rest-mass fields," *Phys. Rev., D5,* 2439-2454. [§41.11, Box 32.2]

Price, R. H. *See also* Davis *et al.* 1971.

Pringle, J. E., and M. J. Rees, 1972, "Accretion disc models for compact X-ray sources," *Astron. Astrophys. 21,* 1-9. [Box 33.3]

Proclus of Athens, *cited by name in* Fig. 1.8.

Ptolemy, C. *See* Taliaferro 1952.

Ramsey, N. F., 1972, "History of atomic and molecular standards of frequency and time," *I.E.E.E. Trans. IM-21,* 90-98. [Box 16.3]

Rayleigh, Lord, 1912, "On the propagation of waves through a stratified medium, with special reference to the question of reflection," *Proc. R. Soc. London A 86,* 207-226. [§22.5]

Rayzer, Yu. P. *See* Zel'dovich and Rayzer 1967.

Reber, G., *cited by name in* Box 27.7.

Rebka, G. A. *See* Pound and Rebka 1960.

Rees, M. *See* Lynden-Bell and Rees 1971 *and* Pringle and Rees 1972.

Refsdal, S., 1964, "The gravitational lens effect," *Mon. Not. R. Astron. Soc. 128,* 295-306. [§25.6, Fig. 22.2, Box 33.3]

Refsdal, S., R. Stabell, and F. G. de Lange, 1967, "Numerical calculations on relativistic cosmological models," *Mem. Roy. Astron. Soc., 71,* 143-248. [§29.4, Box 29.4]

Regge, T., 1961, "General relativity without coordinates," *Nuovo Cimento 19,* 558-571. [§§42.1, 42.2, 42.4, 42.6]

Regge, T., and J. A. Wheeler, 1957, "Stability of a Schwarzschild singularity," *Phys. Rev. 108,* 1063-1069. [§25.5, Box 33.3]

Reichley, P. *See* Muhlemann and Reichley 1964 *and* 1965.

Reik, H. G. *See* Meixner and Reik 1959.

Reines, F., ed., 1972, *Cosmology, Fusion, and Other Matters,* Univ. of Colorado Press, Boulder.

Reissner, H., 1916, "Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie," *Ann. Phys. (Germany) 50,* 106-120. [Ex. 31.8]

Reissner, H., *cited by name in* §42.7.

Retherford, R. C. *See* Lamb and Retherford 1947.

Rhoades, C. E. J., 1971, *Investigations in the Physics of Neutron Stars,* doctoral dissertation, Princeton University. [§24.2]

Richelot, *cited by name in* Box 38.2.

Riemann, G. F. B., *achievements and picture in* Box 8.5; for collected works, see Weber 1953.

Riesz, M., 1949, "L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy," *Acta Math. 81,* 1-223. [§35.8]

Rindler, W., 1969, *Essential Relativity: Special, General, and Cosmological,* Van Nostrand, New York. [Box 27.7]

Robb, A. A., 1914, *A Theory of Time and Space,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. [Box 13.1]

Robb, A. A., 1936, *Geometry of Time and Space,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. Rev. ed. of Robb 1914. [Boxes 1.3, 13.1]

Robb, A. A., *quoted*, epigraph of Chap. 4.

Roberts, M. S., 1965, "21-cm. hydrogen measurements of NGC5668, a relatively distant galaxy," *Astrophys. J. 142,* 148-153. [§29.2]

Roberts, M. S. *See also* Dieter *et al.* 1962.

Robertson, H. P., 1935, "Kinematics and world structure," *Astrophys. J. 82,* 248-301. [Ex. 27.5]

Robertson, H. P., 1936, "Kinematics and world structure," *Astrophys. J. 83,* 187-201, 257-271. [Ex. 27.5]

Robertson, H. P., 1962, "Relativity and cosmology," in Deutsch and Klemperer 1962, pp. 228-235. [§§38.2, 39.3]

Robertson, H. P., *cited by name in* §30.3, Box 27.7.

Robertson, H. P., and T. W. Noonan, 1968, *Relativity and Cosmology,* W. B. Saunders, Philadelphia. [§27.11, Ex. 27.4, 29.6, endpapers]

Robinson, H. G. *See* Hughes, Robinson, and Beltran-Lopez 1960.

Robinson, I., 1959a, "A solution of the Maxwell-Einstein equations," *Bull. Acad. Polon. Sci. 7,* 351-352. [Ex. 32.1]

Robinson, I., 1959b, unpublished report at *Colloque Internationale sur les Théories Relativistes de la Gravitation,* Abbaye de Royaumont. [Ex. 15.2]

Robinson, I., 1961, "Null Electromagnetic Fields," *J. Math. Phys., 2,* 290-291. [§22.5]

Robinson, I., A. Schild, and E. Schücking, eds., 1965, *Quasi-stellar Sources and Gravitational Collapse,* The University of Chicago Press, Chicago.

Robinson, I. *See also* Bondi, Pirani, and Robinson 1959, Douglas *et al.* 1969.

Rohrlich, F., 1965, *Classical Charged Particles; Foundations of Their Theory,* Addison-Wesley, Reading, Mass. [§4.7]

Rohrlich, F., *cited by name in* §20.6.

Roll, P. G., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Dicke *et al.* 1965.

Roll, P. G., R. Krotkov, and R. H. Dicke, 1964, "The equivalence of inertial and passive gravitational mass," *Ann. Phys.* (*U.S.A.*) *26,* 442-517. [§§1.3, 10.1, 38.3, Fig. 1.6, Box 1.2]

Root, W. L. *See* Davenport and Root 1958.

Rose, R. D., H. M. Parker, R. A. Lowry, A. R. Kuhlthau, and J. W. Beams, 1969, "Determination of the gravitational constant *G, Phys. Rev. Lett. 23,* 655-658. [§40.8]

Rosen, Nathan, *Festschrift* on The occasion of his 60th birthday, March 22, 1969. *See* Kuper and Peres 1971.

Rosen, N. *See also* Peres and Rosen 1964.

Rosenfeld, L., 1940, "Sur le tenseur d'impulsion-énergie," *Mém. Acad. R. Belg. Sci. 18,* no. 6. [§21.3]

Rosenfeld, L. *See also* Bohr and Rosenfeld 1933.

Rossi, B., *cited by name in* Box 27.7.

Rossi, B., and D. B. Hall, 1941, "Variation of the rate of decay of mesotrons with momentum," *Phys. Rev. 59,* 223-228. [§38.4]

Royaumont 1959, *Les Théories relativistes de la gravitation,* Actes du Colloque International, organizé à Royaumont, du 21 au 27 juin 1959, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1962.

Ruark, A. E., and H. C. Urey, 1930, *Atoms, Molecules, and Quanta,* McGraw-Hill, New York. [§§40.7, 41.4]

Rudenko, V. N. *See* Braginsky, Zel'dovich, and Rudenko 1969.

Ruderman, M., 1972, "Pulsars: Structure and dynamics," *Ann. Rev. Astron. Astrophys. 10,* 427-476. [§24.3]

Ruffini, R. *See* Christodolou and Ruffini 1971; Davis *et al.* 1971; Ferrari and Ruffini 1969; *and* Hanni and Ruffini 1973.

Ruffini, R., and J. A. Wheeler, 1970, "Collapse of wave to black hole," *Bull. Am. Phys. Soc. 15,* 76. [§35.8]

Ruffini, R., and J. A. Wheeler, 1971a, "Introducing the black hole," *Phys. Today 24,* 30-36. [§33.7]

Ruffini, R., and J. A. Wheeler, 1971b, "Relativistic cosmology and space platforms," in *Proceedings of the Conference on Space Physics,* European Space Research Organization, Paris, France, pp. 45-174. [Boxes 33.2, 33.3, 33.5, 36.3, Fig. 24.3, Ex. 37.13, 37.14]

Runcorn, S. K. *See* Ahrens, Press, and Runcorn 1964.

Runge, J. *See* Sommerfeld and Runge 1911.

Russ, N. *See* Boni, Russ, and Laurence 1960.

Rutherford, E., *cited by name in* Preface, §44.1.

Ruzmaikin, A. A. *See* Ruzmaikina and Ruzmaikin 1969.

Ruzmaikina, T. V., and A. A. Ruzmaikin, 1969, "Quadratic corrections to the Lagrangian density of the gravitational field and the singularity," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. 57,* 680-685. English translation in *Sov. Phys.—JETP 30,* 372-374. [Box 17.2 part 6]

Ryan, M. P., Jr., 1971, "Qualitative cosmology: Diagrammatic solutions for Bianchi type IX universes with expansion, rotation, and shear, II: The general case," *Ann. Phys. 68,* 541-555. [§30.7]

Ryan, M. P., Jr., 1972a, *Hamiltonian Cosmology,* Springer, Berlin, Germany. [§30.7, Box 30.1]

Ryan, M. P., Jr., 1972b, "The oscillatory regime near the singularity in Bianchi type-IX universes," *Ann. Phys.* (*U.S.A.*) *70,* 301-322. (Includes a report of work by V. A. Belinsky and I. M. Khalatnikov. [§30.7, Box 30.1]

Sachs, R. K., 1961, "Gravitational waves in general relativity, VI: The outgoing radiation condition," *Proc. R. Soc. London A 264,* 309-338. [§22.5]

Sachs, R. K., 1964, "Gravitational radiation," in DeWitt and DeWitt 1964. [§§21.5, 21.13, 33.6, 41.11, Ex. 22.14, endpapers]

Sachs, R. K., ed., 1971, *General Relativity and Cosmology,* proceedings of course 47 of the International School of Physics "Enrico Fermi", Academic Press. [§§27.2, 34.1, 40.7]

Sachs, R. K. *See also* Eardley, Liang, and Sachs 1972, Ehlers, Geren, and Sachs 1968, *and* Jordan, Ehlers, and Sachs 1961.

Sakharov, A. D., 1967, "Vacuum quantum fluctuations in curved space and the theory of gravitation," *Doklady Akad. Nauk S.S.S.R. 177,* 70-71. English translation in *Sov. Phys. Doklady 12,* 1040-1041 (1968). [§44.4, Box 17.2 part 6]

Sakharov, A. D., 1969, unpublished work cited by Braginsky and Nazarenko 1971. [§37.3, Fig. 37.2]

Salam, A., and E. P. Wigner, eds., 1972, *Aspects of Quantum Theory,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng.

Salpeter, E. E. and R. V. Wagoner, 1971, "Structure of relativistic disks," *Astrophys. J. 164,* 557-568. [Box 24.1]

Sandage, A., 1958, "Current problems in the extragalactic distance scale," *Astrophys. J. 127,* 513-526. [Box 27.1]

Sandage, A., 1968, "The time scale for creation," in L. Woltjer, ed., *Galaxies and the Universe,* Columbia Univ. Press, New York, pp. 75-112. [§29.7]

Sandage, A., 1970, "Main-sequence photometry, color-magnitude diagrams, and ages for the globular clusters M3, M13, M15, and M92," *Astrophys. J. 162,* 841-870. [§29.7]

Sandage, A., 1972a, "Distances to galaxies: the Hubble constant, the Friedmann time, and the edge of the world," in *Proceedings of the Symposium on the Galaxy and the Distance Scale,* Essex, England, in press. [§§27.1, 29.3, 29.4, Box 29.4]

Sandage, A., 1972b, "The redshift-distance relation, I. Angular diameter of first-ranked cluster galaxies as a function of redshift: the aperture correction to magnitudes," *Astrophys. J. 173,* 485-500. [§29.5, Box 29.4]

Sandage, A., 1972c, "The redshift-distance relation, II. The Hubble diagram and its scatter for first-ranked cluster galaxies: a formal value for q_o," *Astrophys. J. 178,* 1-24. [§29.4, Box 29.4]

Sandage, A., 1972d, "The redshift-distance relation, III. Photometry and the Hubble diagram for radio sources and the possible turn-on time for QSO's," *Astrophys. J. 178,* 25-44. [§29.4, Boxes 28.1, 29.4]

Sandage, A., *cited by name in* Boxes 27.7, 29.5.

Sandage, A., G. A. Tamman, and E. Hardy, 1972, "Limits on the local deviation of the universe from a homogeneous model," *Astrophys. J. 172,* 253-263. [§27.1]

Sanders, R., 1970, "The effects of stellar collisions in dense stellar systems," *Astrophys. J. 162,* 791-809. [§§24.5, 24.6, Box 33.3]

Sanderson, B. J. *See* Hsiang and Sanderson 1965.

Sands, M. *See* Feynman, Leighton, and Sands 1964.

Sard, R. D., 1970, *Relativistic Mechanics,* W. A. Benjamin, New York. [§2.10]

Sargent, W. L. W. *See* Bahcall, Sargent, and Schmidt 1967.

Schäfke, F. W. *See* Meixner and Schäfke 1954.

Schatzman, E. *See* DeWitt, Veron, and Schatzman 1967.

Schiff, L. I., 1962, "General relativity: Theory and experiment," *J. Indust. & Appl. Math 10,* 795-801. [§§38.2, 39.3]

Schiff, L. I., 1967, "Comparison of theory and observation in general relativity," in Ehlers 1967. [§§38.2, 39.3]

Schiffer, M. *See* Adler, Bazin, and Schiffer 1965.

Schild, A., 1960, "Time," *Texas Quarterly, 3,* no. 3, 42-62. [§7.3]

Schild, A., 1962, "Gravitational theories of the Whitehead type and the principle of equivalence," in Møller 1962. [§§7.3, 38.5]

Schild, A., 1967, "Lectures on General Relativity Theory," in Ehlers 1967, pp. 1-105. [§7.3, endpapers]

Schild, A., 1970, "Tearing geometry to pieces: More on conformal geometry," unpublished lecture at Jan. 19 Princeton University relativity seminar. [Box 10.2]

Schild, A., *cited by name in* §10.3, Box 17.3, Ex. 10.6. *See also* Douglas *et al.* 1969, Ehlers, Pirani, and Schild 1972, Infeld and Schild 1949, Kerr and Schild 1965, *and* Robinson, Schild, and Schücking 1965.

Schilpp, P. A., ed., 1949, *Albert Einstein: Philosopher-Scientist,* Library of Living Philosophers, Evanston, Ill.; source of quotations from A. Einstein, K. Menger, and M. von Laue. [Box 1.11, epigraphs to §1.2, Chaps. 2, 9]

Schmidt, B. G., 1971, "A new definition of singular points in general relativity," *Gen. Rel. Grav. 1,* 269-280. [§34.6]

Schmidt, M., 1972, "Statistical studies of the evolution of extragalactic radio sources, I. Quasars," *Astrophys. J. 176,* 273-287. [Box 28.1]

Schmidt, M. *Cited by name in* Box 27.7, Ex. 29.7. *See also* Bahcall, Sargent, and Schmidt 1967 *and* Bahcall and Schmidt 1967.

Schoch, C. *See* Neugebauer and Schoch 1930.

Schouten, J. A., 1954, *Ricci-calculus,* Springer, Berlin, Germany. [§21.5, Ex. 17.8, 21.8, endpapers]

Schramm, D. N. *See* Wasserburg, Schramm, and Huneke 1969.

Schrödinger, E., 1950, *Space-Time Structure,* Cambridge Univ. Press, England. [endpapers]

Schücking, E. *See also* Douglas *et al.* 1969 *and* Robinson, Schild, and Schücking 1965.

Schücking, E., and O. Heckmann, 1958, "World models," in *Onzième Conseil de Physique Solvay,* Éditions Stoops, Brussels, pp. 149-158. [§§30.2, 30.3]

Schutz, B., *cited by name in* Ex. 35.20.

Schutz, S., 1966, statement in January 1966 final examination in course in relativity, Princeton University. [Epigraph to Chap. 16]

Schwartz, J. T. *See* Dunford and Schwartz 1958.

Schwartz, L., 1950-1951, *Théorie des distributions,* vols. 1 and 2, Hermann, Paris. [§4.7]

Schwarzschild, K., 1916a, "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie," *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech.,* 189-196. [Preface, §§14.1, 23.6]

Schwarzschild, K., 1916b, "Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flussigkeit nach der Einsteinschen Theorie," *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech.,* 424-434. [§23.2, Box 23.2]

Schwarzschild, K., *cited by name in* §§42.1, 42.7.

Schwinger, J., 1948, "Quantum electrodynamics, I: A covariant formulation," *Phys. Rev. 74,* 1439-1461. [Box 15.1]

Schwinger, J., ed., 1958, *Selected Papers on Quantum Electrodynamics,* Dover, New York.

Schwinger, J., 1963a, "Energy and momentum density in field theory," *Phys. Rev. 130,* 800-805. [Ex. 40.8]

Schwinger, J., 1963b, "Quantized gravitational field," *Phys. Rev. 130,* 1253-1258. [Ex. 40.8]

Sciama, D. W., 1957, "Inertia," *Sci. American 196,* no. 2, 99-109. [§21.12]

Sciama, D. W., 1961, *The Unity of the Universe,* Anchor, New York. [§21.12]

Sciama, D. W., 1971, *Modern Cosmology,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. [§28.1, Box 27.7]

Sciama, D. W., *cited by name in* Boxes 34.2, 34.3.

Scott, P. F., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Hewish *et al.* 1968.

Sears, F. W., 1953, *An Introduction to Thermodynamics, the Kinetic Theory of Gases, and Statistical Mechanics,* Addison-Wesley, Reading, Mass. [§23.4]

Seattle 1967, Battelles Rencontres. *See* DeWitt and Wheeler 1968.

Seckler, B. D. *See* Keller, Lewis, and Seckler 1956.

Seelig, C., ed., 1956. *See* Kollros 1956.

Seielstad, G. A., R. A. Sramek, and K. W. Weiler, 1970, "Measurement of the deflection of 9.602-GHz radiation from 3C279 in the solar gravitational field," *Phys. Rev. Lett. 24,* 1373-1376. [Box 40.1]

Sejnowski, T. J., 1973, personal communication. [Ex. 15.2]

Shakespeare, W., *quoted at end of* Chap. 44.

Shakura, N. I., and R. A. Sunyaev, 1973, "Black holes in binary systems: Observational appearance," *Astron. Astrophys. 24,* 337-355. [Box 33.3]

Shannon, C., 1938, "A symbolic analysis of relay and switching circuits," *Trans. Am. Inst. Elect. Eng. 57,* 713-723. [§44.5]

Shapiro, I. I., 1964, "Fourth test of general relativity," *Phys. Rev. Lett. 13,* 789-791. [§40.4]

Shapiro, I. I., 1967, "New method for the detection of light deflection by solar gravity," *Science 157,* 806-808. [§40.3]

Shapiro, I. I., 1968, "Fourth test of general relativity: preliminary results," *Phys. Rev. Lett. 20,* 1265-1269. [§40.4, Box 40.2]

Shapiro, I. I., 1970, results reported at Third Cambridge Conference on Experimental Relativity, New York City, June 1970. [Box 40.3]

Shapiro, I. I., 1971a. "Testing general relativity: progress, problems, and prospects," in Davies, 1971, pp. 136-147. [Box 40.3]

Shapiro, I. I., 1971b. "Testing general relativity: progress, problems, and prospects," lecture at Sixth International Conference on Gravitation and Relativity, published by NORDITA (Copenhagen) in multilith form for distribution at conference, also published in *Gen. Rel. Grav. 3,* 135-148 (1972). [§39.3, Box 40.3]

Shapiro, I. I., M. E. Ash, D. B. Campbell, R. B. Dyce, R. P. Ingalls, R. F. Jurgens, and G. H. Pettengill, 1971, "Fourth test of general relativity: New radar result," *Phys. Rev. Lett. 26,* 1132-1135. [Box 40.2]

Shapiro, I. I., W. B. Smith, M. E. Ash, R. P. Ingalls, and G. H. Pettengill, 1971, "Gravitational constant: Experimental bound on its time variation," *Phys. Rev. Lett. 26,* 27-30. [§40.8]

Shapiro, I. I., G. H. Pettengill, M. E. Ash, R. P. Ingalls, D. B. Campbell, and R. B. Dyce, 1972, "Mercury's perihelion advance: determination by radar," *Phys. Rev. Lett. 28,* 1594-1597. [Box 40.3]

Shapley, H., *cited by name in* Box 27.7.

Sharp, D. H., 1960, "One- and two-surface formulations of the boundary-value problem for Einstein-Maxwell theory and for 'already unified' field theory," Physics A. B. senior thesis, Princeton University, unpublished; deposited in Fine Library, Princeton University. [§21.9]

Sharp, D. H., *cited by name in* §21.1. *See also* Baierlein, Sharp, and Wheeler 1962, Hartle and Sharp 1965, *and* Misner and Sharp 1964.

Sheldon, S. E., 1971, "A complete redshift-magnitude formula," *Astron. J. 76,* 751-755. [§29.4]

Shelest, V. P., ed., 1972, *Gravitatsiya: Problemi i Perspektivi: pamyati Alekseya Zinovievicha Petrova posvashaetsya,* Naukova Dumka, Kiev.

Shields, M. C. *See* Boni, Russ, and Laurence 1960.

Shimmins, A. J., *cited by name in* Box 27.7.

Shirkov, D. V. *See* Bogoliubov, N. N.

Shu, F. H. *See* Lin, Mestel, and Shu 1965.

Siegel, C. L., 1956, *Vorlesungen über Himmelsmechanik,* Springer, Berlin. [Box 25.4]

Siegel, C. L., and J. K. Moser, 1971, *Lectures on Classical Mechanics,* translated by C. I. Kalme, Springer, Berlin and New York, 1971. [Box 25.4]

Silverberg, E. C. *See* Bender *et al.* 1971.

Simpson, O. C. *See* Estermann, Simpson, and Stern 1938.

Singer, D. W., 1950, *Giordano Bruno, His Life and Thought with Annotated Translation of His Work, On the Infinite Universe and Worlds,* Abelard-Schuman, New York. [Box 27.7]

Slee, O. B., *cited by name in* Box 27.7.

Slipher, V. M., *cited by name in* Box 27.7.

Smith, J. H. *See* Frisch and Smith 1963.

Smith, W. B. *See* Shapiro, Smith *et al.* 1971.

Snider, J. L. *See* Pound and Snider 1964 *and* 1965.

Snyder, H. *See* Oppenheimer and Snyder 1939.

Söding, P., J. Bartels, A. Barbaro-Galtieri, J. E. Enstrom, T. A. Lasinski, A. Rittenberg, A. H. Rosenfeld, T. G. Trippe, N. Barash-Schmidt, C. Bricman, V. Chaloupka, and M. Roos, 1972, "Review of particle properties," *Physics Letters, 39B,* 13. [endpapers]

Solvay 1958, Onzième Conseil de Physique Solvay, held at the Instituts Solvay, Brussels; proceedings: *La Structure et l'evolution de l'univers,* Éditions Stoops, Brussels, Belgium.

Sommerfeld, A., and J. Runge, 1911, "Anwendung der Vektorrechnung auf die Grundlagen der geometrischen Optik," *Ann. Phys. (Germany) 35,* 277-298. [§22.5]

Spencer, D. C. *See* Nickerson, Spencer, and Steenrod 1959.

Spitzer, L., Jr., 1971, "Dynamical evolution of dense spherical star systems," in *Semaine d'étude sur les noyeaux des galaxies 1970 (Pontificae Academiae Scientarum Scripta Varia no. 35).* [§§24.5, 24.6, Box 33.3]

Spivak, M., 1965, *Calculus on Manifolds,* W. A. Benjamin, New York. [§4.1, Box 4.1]

Sramek, R. A., 1971, "A measurement of the gravitational deflection of microwave radiation near the sun, 1970 October," *Astrophys. J. Lett. 167,* L55-L60. [Box 40.1]

Sramek, R. A. *See also* Seielstad, Sramek, and Weiler 1970.

St. Patrick. *See* Stokes 1887.

Stabell, R. *See* Refsdal, Stabell, and de Lange 1967.

Stanley, G. J., *cited by name in* Box 27.7.

Starobinsky, A. A. *See* Zel'dovich and Starobinsky 1971.

Steenrod, N. E. *See* Nickerson, Spencer, and Steenrod 1959.

Stehle, P. *See* Corben and Stehle 1960.

Steigman, G., 1971, "Antimatter and cosmology," in Sachs 1971, pp. 373-382. [§§27.11, 28.4]

Stephenson, F. R., *contributed* Fig. 1.8.

Stern, O. *See* Estermann, Simpson, and Stern 1938.

Sternberg, S., 1969, *Celestial Mechanics,* W. A. Benjamin, New York. [§8.2]

Steuckelberg, E. C. G., and G. Wanders, 1953, "Thermodynamique en relativité général," *Helv. Phys. Act., 26,* 307-316. [§22.2]

Stewart, J. M., 1971, *Non-Equilibrium Relativistic Kinetic Theory,* lecture notes in Physics 10, Springer-Verlag, Berlin. [§22.6, Ex. 22.7]

Stewart, J. M., *cited by name in* §22.3.

Stewart, J. M., and G. F. R. Ellis, 1968, "Solutions of Einstein's equations for a fluid which exhibits local rotational symmetry," *J. Math. Phys. 9,* 1072-1082. [Ex. 32.1]

Stockton, A. N., *cited by name in* Box 27.7.

Stokes, G. C., *cited by name in* Box 4.6.

Stokes, W., 1887, *The Tripartite Life of St. Patrick With Other Documents Relating to That Saint,* Her Majesty's Stationery Office, London. [§19.4]

Stratimyer, H., *cited by name in* Box 16.3.

Struve, F. G. W., *cited by name in* Box 27.7.

Sunyaev, R. A. *See* Shakura and Sunyaev 1973.

Susskind, L. *See* Aharonov and Susskind 1967.

Symanzik, K., 1963, "Aspects of Euclidean field theory and Feynman path integrals," in Lurie and Mukunda 1963. [Box 21.1]

Synge, J. L., 1950, "The gravitational field of a particle," *Proc. R. Irish Acad. A 53,* 83-114. [§31.5, Box 31.1]

Synge, J. L., 1960a, "On certain identities connected with the Einstein tensor," *Proc. R. Irish Acad. A 61,* 29-36. [Ex. 35.14]

Synge, J. L., 1960b, *Relativity: The General Theory,* North-Holland, Amsterdam. [endpapers]

Synge, J. L., 1962, "Tensorial integral conservation laws in general relativity," in CNRS 1962, pp. 75-83. [Box 15.3]

Synge, John Lighton, *Festschrift* on the occasion of his 75th birthday, March 23, 1972. *See* O'Raifeartaigh 1972.

Szekeres, G., 1960, "On the singularities of a Riemannian manifold," *Publ. Mat. Debrecen 7,* 285-301. [§31.4, Box 31.1]

Taliaferro, R. C., trans. 1952, *Ptolemy, The Almagest,* in *Great Books of the Western World,* Encyclopedia Brittanica, Inc., Chicago, Ill., Volume 16. [Box 27.7]

Tamman, G. A., *cited by name in* Box 29.4. *See also* Sandage, Tamman, and Hardy 1972.

Tannenbaum, M. *See* Farley *et al.* 1966.

Tartaglia, N. F., 1560, *General Trattato dei Numeri et Misure,* Cited in *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* vol. III, part i, p. 1056, Leipzig 1914. [Box 13.1]

Taub, A. H., 1948, "Relativistic Rankine-Hugonoit equations," *Phys. Rev., 74,* 328-334. [§22.2, Box 22.2]

Taub, A. H., 1965, "Equations of motion of test particles," in London 1965. [§40.9]

Taub, A. H., 1971, "Relativistic Hydrodynamics," *Studies in Applied Mathematics—Math. Assoc. Amer. Studies in Math. 7,* 150-180. [§22.3]

Taub, A. H. *See also* Misner and Taub 1968.

Tauber, G. E., and J. W. Weinberg, 1961, "Internal state of a gravitating gas," *Phys. Rev. 122,* 1342-1365. [§22.6]

Taylor, D. J., *cited by name in* Box 34.3. See also Cocke and Taylor 1969.

Taylor, E. F., and J. A. Wheeler, 1966, *Spacetime Physics,* W. H. Freeman, San Francisco, Calif. [§2.1, Fig. 2.7, Ex. 6.9]

Tbilisi, USSR, 1968. Fifth International Conference on Gravitation and the Theory of Relativity, Tbilisi State University, August 1968. *See* Fock 1968.

Technion 1969, *International Seminar on Relativity and Gravitation* held at Technion City, Israel, in July 1969, in honor of the 60th birthday of Professor Nathan Rosen. *See* Kuper and Peres 1971.

Teitelboim, C., 1970, "Splitting of the Maxwell tensor: radiation reaction without advanced fields," *Phys. Rev. D 1,* 1572-1582. [§20.6, Ex. 20.8]

Teitelboim, C., 1971, "Radiation reaction as a retarded self-interaction," *Phys. Rev. D 4,* 345-347. [§20.6]

Teitelboim, C., 1972a, "Nonmeasurability of the baryon number of a black hole," *Nuovo Cimento Lett., II, no. 3,* 326-328. [Box 25.2, Boxes 32.2, 33.1]

Teitelboim, C., 1972b, "Nonmeasurability of the lepton number of a black hole," *Nuovo Cimento, II 3,* 397-400. [Boxes 25.2, 33.1]

Teitelboim, C., 1972c, "Nonmeasurability of the Quantum Numbers of a Black Hole," *Phys. Rev. D 5,* 2941-2954 [Boxes 25.2, 32.2, 33.1]

Teitelboim, C., *cited by name in* §21.1, Fig. 4.6.

Teller, E., 1948, "On the change of physical constants," *Phys. Rev. 73,* 801-802. [§38.6]

Teller, E., *cited by name in* Box 38.2. *See also* De Hoffman and Teller 1950.

Tempier, É., *cited by name in* Box 27.7.

Teukolsky, S. A., 1972. "Rotating black holes: Separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations," *Phys. Rev. Lett. 29,* 1114-1118. [§41.11, Box 33.3, Ex. 33.14]

Teukolsky, S. A., 1973, "Perturbations of a rotating black hole, I: Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations," *Astrophys. J.,* in press. [Ex. 33.14]

Teukolsky, S. A. *See also* Bardeen, Press, and Teukolsky 1972 *and* Press and Teukolsky 1972 *and* 1973.

Texas Symposia on Relativistic Astrophysics: 1963, *see* Robinson, Schild, and Schücking 1965 *and* Harrison *et al.* 1965; 1964, *see* Douglas *et al.* 1969; 1972, *see Trans. N.Y. Acad. Sci.*

Thirring, H., 1918, "Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie," *Phys. Z. 19,* 33-39. [§21.12]

Thirring, H., 1921, "Berichtigung zu meiner Arbeit: "Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie," *Phys. A. 22,* 29-30. [§21.12]

Thirring, H., and J. Lense, 1918, "Über den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie," *Phys. Z. 19,* 156-163. [§§21.12, 40.7]

Thirring, W. E., 1961, "An alternative approach to the theory of gravitation," *Ann. Phys. (U.S.A.) 16,* 96-117. [§§7.1, 18.1]

Thomas, L. H., 1927, "The kinematics of an electron with an axis," *Phil. Mag. 3,* 1-22. [§§40.7, 41.4, Ex. 6.9]

Thomson, A. *See* Farnsworth *et al.* 1972.

Thomson, J. J., 1907, *Electricity and Matter,* Archibald Constable, London, Chapter III. [Fig. 4.6]

Thomson, J. J., *cited by name in* Fig. 4.6.

Thomson, W., Lord Kelvin, 1889, *Popular Lectures and Addresses, Vol. I,* Macmillan, London. [Epigraph to Chap. 37]

Thomson, W., Lord Kelvin, 1904, *Baltimore Lectures on Mo-*

lecular Dynamics and the Wave Theory of Light, C. J. Clay, London. [Preface]

Thomson, W., Lord Kelvin, *cited by name in* Box 17.2, *quoted in* epigraph of Chap. 20.

Thorne, K. S., 1967, "The general relativistic theory of stellar structure and dynamics," in DeWitt, Schatzman, and Veron 1967, pp. 259-441. [§24.4, endpapers]

Thorne, K. S., 1969a, "Nonradial pulsation of general-relativistic stellar models, III: Analytic and numerical results for neutron stars," *Astrophys. J. 158,* 1-16. [§24.3, Box 36.1]

Thorne, K. S., 1969b, "Nonradial pulsation of general-relativistic stellar models, IV: The weak-field limit," *Astrophys. J. 158,* 997-1019. [§36.8, Box 36.1]

Thorne, K. S., 1971, "Relativistic stars, black holes, and gravitational waves," in Sachs 1971, pp. 238-283. [§40.7]

Thorne, K. S., 1972, "Nonspherical gravitational collapse, a short review," in Klauder 1972, pp. 231-258. [Box 32.3, Ex. 32.10]

Thorne, K. S., 1973a. "Relativistic shocks: The Taub adiabat," *Astrophys. J. 179,* 897-907. [§22.2, Box 22.2]

Thorne, K. S., 1973b, "Black-hole models for compact x-ray sources," *Astrophys. J.,* in press. [Box 33.3]

Thorne, K. S. *See also* Ames and Thorne 1968, Bardeen, Thorne, and Meltzer 1966, Bisnovatyi-Kogan and Thorne 1970, Fackerell, Ipser, and Thorne 1969, Fletcher *et al.* 1967, Harrison *et al.* 1965, Hartle and Thorne 1968 *and* 1974, Ipser and Thorne 1968, Meltzer and Thorne 1966, Morgan and Thorne 1973, Novikov and Thorne 1973, Press and Thorne 1972, *and* Trimble and Thorne 1969.

Thorne, K. S., W. T. Ni, and C. M. Will, 1971, "Theoretical frameworks for testing relativistic gravity: A review," in Davies 1971, pp. 10-31. [§17.6, Box 39.5]

Thorne, K. S., and C. M. Will, 1971, "Theoretical frameworks for texting relativistic gravity, I: Foundations," *Astrophys. J. 163,* 595-610. [§§38.2, 39.2]

Tikhonov, M. Yu. *See* Braginsky, Manukin, and Tikhonov 1970.

Tobey, R. G., *et al.* 1967, *PL/1 Formac Interpreter, Users Reference Manual* IBM Controlled Program Library 360D 03.3004, Hawthorne, N.Y. [Box 14.3]

Tolman, R. C., 1934a, *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology,* Clarendon Press, Oxford. [§44.1, Ex. 22.7, endpapers]

Tolman, R. C., 1934b, "Effect of inhomogeneity on cosmological models," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 20,* 169-176. [§30.6, Ex. 32.8]

Tolman, R. C., 1939, "Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid," *Phys. Rev. 55,* 364-373. [§23.2, Ex. 23.9]

Tomonaga, S., 1946, "On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields," *Prog. Theor. Phys. 1,* 27-42, reprinted in Schwinger 1958. [Boxes 15.1, 21.1, Ex. 43.5]

Tonnelat, M. A., *quoted at end of* Chap. 44.

Torrence, R. J. *See* Couch *et al.* 1968 *and* Newman *et al.* 1965.

Trautman, A., 1965, "Foundations and current problems of general relativity theory," in Trautman, Pirani, and Bondi 1965. [§12.1, Boxes 8.1, 12.4, endpapers]

Trautman, A., 1972, "On the Einstein-Cartan equations, I," *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences (math., astr., phys.) 20,* 185-190. [§§38.2, 39.2]

Trautman, A., F. A. E. Pirani, and H. Bondi, 1965, *Lectures on General Relativity,* Brandeis 1964 Summer Institute on Theoretical Physics, vol. I, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Treder, H. J., 1962, *Gravitative Stosswellen, Nichtanalytischen Wellenlösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen,* Akademie-Verlag, Berlin. [§21.13]

Treder, H. J. *See also* Papapetrou and Treder 1959 *and* 1962.

Trimble, V. L., and K. S. Thorne, 1969, "Spectroscopic binaries and collapsed stars," *Astrophys. J. 156,* 1013-1019. [Box 33.3]

Trumpler, R. J. *See* Campbell and Trumpler 1928.

Truran, J. *See* Cameron and Truran 1971.

Truran, J., and A. G. W. Cameron, 1971, "Evolutionary models of nucleosynthesis in the galaxy," *Astrophys. & Space Sci. 14,* 179-222. [Box 33.3]

Tukey, J. W. *See* Blackman and Tukey 1959.

Turkevich, A. *See* Fermi and Turkevich 1950.

Turner, K. C., and H. A. Hill, 1964, "New experimental limit on velocity-dependent interactions of clocks and distant matter," *Phys. Rev. B 134,* 252-256. [§38.7, Fig. 38.3]

Tyson, J. A., *cited by name in* Ex. 37.13. *See also* Douglass and Tyson 1971.

Ulam, S. *See* Kac and Ulam 1968.

Unruh, W. G., 1971, "Dirac particles and geometrodynamical charge in curved geometries," doctoral dissertation, physics, Princeton University. [§21.9]

Unt, V., and P. Keres, 1972. "Tails of waves in the Schwarzschild field" (in Russian), *Izv. Akad Nauk Estonian S.S.R., Fiz. Mat., 21,* 17-30. [§35.14]

Urey, H. C. *See* Ruark and Urey 1930.

Van de Kamp, P., 1958, "Visual binaries," *Ann. Phys. (U.S.A.) 50,* 187-224. [Box 36.3]

Van der Waerden, B. L., 1967, *Sources of Quantum Mechanics,* North-Holland, Amsterdam, Holland. Reprinted in 1968 by Dover, New York.

Varenna, International School of Physics "Enrico Fermi," organized at Varenna on Lake Como by the Italian Physical Society; 1961, *see* Mǿller 1962; 1965, *see* Gratton 1966; 1969, *see* Sachs 1971; 1972, *see* Bertotti 1973.

Vatican 1970, Study Week on the Nuclei of Galaxies, April 13-18, 1970, at the Vatican; proceedings published in *Semain d'etude sur les noyeaux des galaxies, Pontificae Academiae Scientarum Script Varia no. 35,* 1971.

Veblen, O., and J. H. C. Whitehead, 1932, *The Foundations of Differential Geometry,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. Reprinted 1953. [§2.2]

Veron, P. *See* DeWitt, Schatzman, and Veron 1967.

Vishveshwara, C. V., 1970, "Stability of the Schwarzschild Metric," *Phys. Rev. D 1,* 2870-2879. [Box 33.3]

Volkoff, G. *See* Oppenheimer and Volkoff 1939.

Voltaire, François Marie Arouet de, 1738, *Éléments de Philosophie de Newton,* Pt. 3, chap. III; reprinted in vol. 5 of *Oevres de Voltaire,* Bacquenois, Paris, 1836. [epigraph to §1.1]

von Karman, T., *cited by name in* Box 38.2.

von Klüber, H., 1960, "The determination of Einstein's light deflection in the gravitational field of the sun," in Beer 1960, pp. 47-77. [Box 40.1]
von Oppolzer, T. R., 1887, "Canon der Finsternisse," *Sitzber. Kais. Akad. Wiss. Wien Math.—Nat. Kl. 52,* i-xviii, 1-321. [Fig. 1.8]
von Neumann, J., *cited by name in* Box 38.2.
Vourloumis, Hypatia, 1971, statement made at Knossos, May 1971, while serving as guide on Swan's Hellenic tour. *Quoted at end of* Chap. 44.
Vyasa, about 400 A.D., *The Mahabharata,* translated from the Sanskrit by P. Lal, Writers Workshop, Calcutta. [Epigraph to §1.5]
Waage, H., *cited by name in* Fig. 1.7.
Wagoner, R. V., 1967, "Some effects of an intervening galaxy on the radiation from very distant objects," *Astrophys. J. 149,* 465-480. [Ex. 29.8]
Wagoner, R. V., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Bardeen and Wagoner 1971 *and* Salpeter and Wagoner 1971.
Wagoner, R. V., W. A. Fowler, and F. Hoyle, 1967, "On the synthesis of elements at very high temperatures," *Astrophys. J. 148,* 3-49. [§28.1]
Wakano, M. *See* Harrison *et al.* 1965 *and* Klauder *et al.* 1959.
Wald, R. M., 1971. *See* Cohen and Wald 1971.
Walker, A. G., 1932, "Relative coordinates," *Proc. R. Soc. Edinburgh 52,* 345-353. [§6.3]
Walker, A. G., 1936, "On Milne's theory of world-structure," *Proc. London Math. Soc. 42,* 90-127. [Ex. 27.5]
Walker, A. G. *cited by name in* §30.3, Box 27.7.
Walker, M., and R. Penrose, 1970, "On quadratic first integrals of the geodesic equations for type [22] spacetimes," *Commun. Math. Phys. 18,* 265-274. [§§33.4, 33.5]
Walker, R. *See* Mathews and Walker 1965.
Wallace, A. H., 1957, *An Introduction to Algebraic Topology,* Pergamon, London. [Box 34.1]
Walraven, Th. *See* Ledoux and Walraven 1958.
Wampler, E. J., *cited by name in* Box 27.7.
Wanders, G. *See* Steuckelberg and Wanders 1953.
Ward, W., 1970, "General-relativistic light deflection for the complete celestial sphere," *Astrophys. J. 162,* 345-348. [§40.3]
Warrington, J., trans. 1956, *Aristotle's Metaphysics,* E. P. Dutton, New York. [Box 27.7]
Wasserburg, G. J. *See* Papanastassiou and Wasserburg 1969.
Wasserburg, G. J., and D. S. Burnett, 1968, "The status of isotopic age determinations on iron and stone meteorites," in P. M. Millman, ed., *Meteorite Research,* Reidel, Dordrecht, Holland, pp. 467-479. [§29.7, Box 29.3]
Wasserburg, G. J., D. N. Schramm, and J. C. Huneke, 1969, "Nuclear chronologies for the galaxy," *Astrophys. J. 157,* L91-L96. [§29.7]
Weber, H., ed., 1953, *B. Riemann: Gesammelte Mathematische Werke,* 2d ed., paperback reprint, Dover, New York. The *Habilitationsvorlesung* of 1854 was translated into English by W. K. Clifford, *Nature, 8,* 14 (1873). [Box 8.5]
Weber, J., 1960, "Detection and generation of gravitational waves," *Phys. Rev. 117,* 307-313. [§37.3]
Weber, J., 1961, *General Relativity and Gravitational Waves,* Wiley-Interscience, New York. [§37.3, endpapers]
Weber, J., 1967, "Gravitational radiation," *Phys. Rev. Lett. 18,* 498-501. [§37.3, Fig. 37.2]
Weber, J., 1969, "Evidence for discovery of gravitational radiation," *Phys. Rev. Lett. 22,* 1320-1324. [§§37.3, 37.10, Fig. 37.2]
Weber, J., 1970a, "Gravitational radiation experiments," *Phys. Rev. Lett. 24,* 276-279. [§§37.3, 37.10]
Weber, J., 1970b, "Anisotropy and polarization in the gravitational-radiation experiments," *Phys. Rev. Lett. 25,* 180-184. [§§37.3, 37.10]
Weber, J., *cited by name in* Preface, Box 17.3.
Weil, A. *See* Allendoerfer and Weil 1943.
Weiler, K. W. *See* Seielstad, Sramek, and Weiler 1970.
Weinberg, J. W. *See* Tauber and Weinberg 1961.
Weinberg, S., 1965, "Photons and gravitons in perturbation theory: Derivation of Maxwell's and Einstein's equations," *Phys. Rev. B 138,* 988-1002. [§§7.1, 18.1]
Weinberg, S., 1972, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity,* Wiley, New York. [endpapers]
Weingarten, J., *cited by name in* §21.5.
Weisskopf, V. F. *See* Blatt and Weisskopf 1952 *and* Fierz and Weisskopf 1960.
Wells, J. S. *See* Evenson *et al.* 1972.
Welton, T. A., 1948, "Some observable effects of the quantum-mechanical fluctuations of the electromagnetic field," *Phys. Rev. 74,* 1157-1167. [Box 17.2 part 6]
Wentzel, G., 1949, *Quantum Theory of Fields,* Interscience, New York. [§21.3, Boxes 7.1, 21.2]
Werner, F. G., 1969, private remark to J. A. Wheeler on June 3 at the Cincinnati, Ohio, Relativity Conference in the Midwest. [§44.5]
Westermann, A. and J. F. Boissonade, eds. 1878, "Marini vita Procli," xxxvii, *in Dioginis Laertii de Clarorum Philosophorum,* II, Paris, p. 169. [Fig. 1.8]
Weyl, H., 1922, *Space-Time-Matter,* translated by H. L. Brose, Methuen, London. [endpapers]
Weyl, H., 1924a, "Massenträgheit und Kosmos: Ein Dialog," *Naturwissenschaften 12,* 197-204. [§21.12]
Weyl, H., 1924b, *Was Ist Materie,* Springer, Berlin, Germany. [Box 15.1]
Weyl, H., 1925, "Theorie der Darstellung kontinuierlichen halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I," *Math. Z. 23,* 271-309. [§2.2, Epigraph to Chap. 2]
Weyl, H., 1937, lectures at Princeton University. [§4.5]
Weyl, H., 1946, *Classical Groups: Their Invariants and Representation,* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 2d ed. [Box 27.2]
Weyl, H., 1949, *Philosophy of Mathematics and Natural Science,* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., p. 116. [Epigraph to Chap. 6, Box 8.5]
Weyl, H., *cited by name in* §4.5, Boxes 16.4, 27.7, *quoted in* epigraph of Chap. 10. *See also* Lorentz *et al.* 1923.
Wheeler, J. A., 1955, "Geons," *Phys. Rev. 97,* 511-536. [§§21.12, 25.5, Box 15.1, Ex. 32.11]
Wheeler, J. A., 1959, "View that the distribution of mass and energy determines the metric," in *Onzième Conseil de Physique Solvay: La Structure et l'évolution de l'univers,* Éditions Stoops, Brussels, Belgium. [§§21.12, 43.1]

Wheeler, J. A., 1961, "Geometrodynamics and the problem of motion," *Rev. Mod. Phys. 33,* 63-78. [§20.6]

Wheeler, J. A., 1962, *Geometrodynamics,* Academic Press, New York. [§§43.4, 44.3, Fig. 44.1, Boxes 33.3, 36.2, 44.3]

Wheeler, J. A., 1964a, "Geometrodynamics and the issue of the final state," in DeWitt and DeWitt 1964b. [§§27.10, 21.11, 34.6, 35.13, 42.6, 43.1, Boxes 27.7, 44.4, Ex. 21.18]

Wheeler, J. A., 1964b, "Gravitation as geometry, II," in Chiu and Hoffman 1964. [§15.3]

Wheeler, J. A., 1964c, "Mach's principle as boundary condition for Einstein's equations," in Chiu and Hoffman 1964, pp. 303-349. [§§21.10, 21.12, 43.1]

Wheeler, J. A., 1966, "Superdense stars," in *Annual Review Astron. and Astrophys. Vol. 4,* L. Goldberg, ed., Palo Alto, Calif. pp. 393-432. [§24.3, Ex. 36.3]

Wheeler, J. A., 1968a, "Superspace and the nature of quantum geometrodynamics," in DeWitt and Wheeler 1968. [§§21.1, 21.8, Box 44.3]

Wheeler, J. A., 1968b, *Einstein's Vision,* Springer, Berlin. Contained in part in Wheeler 1968a. [§§21.8, 21.12, Ex. 21.23]

Wheeler, J. A., 1970, "Superspace," in Gilbert and Newton 1970, pp. 335-378. [§43.1]

Wheeler, J. A., 1971a, notebook entry, "Pregeometry and the calculus of propositions," 9:10 A.M., April 10; seminar, Department of Mathematics, Kings College, London, May 10; letter to L. Thomas, "Pregeometry and propositions," June 11, unpublished. [Box 44.5]

Wheeler, J. A., 1971b, "Transcending the law of conservation of leptons," in *Atti del Convegno Internazionale sul Tema: The Astrophysical Aspects of the Weak Interactions; Quaderno N. 157,* Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, pp. 133-164. [§§41.11, 44.6, Box 25.2]

Wheeler, J. A., 1971c, "From Mendeléev's atom to the collapsing star," 189-233 in *Atti del Convegno Mendeléeviano,* Accademia delle Scienze, Torino; reprinted in *Trans. New York Acad. Sci., 33,* 745-779 (1971). *See also* Wyler 1971. [§28.3, Box 25.2]

Wheeler, J. A., 1971d, "Mechanisms for jets," in *Study week on nuclei of galaxies, Pontificiae Academiae Scientarum Scripta Varia no. 35,* 539-567. [Box 33.3]

Wheeler, John Archibald, *Festschrift* on the occasion of his sixtieth birthday, July 9, 1971. *See* Klauder 1972.

Wheeler, J. A., *cited by name in* §21.1, Box 8.5. *See also* Baierlein, Sharp, and Wheeler 1962, Brill and Wheeler 1957, DeWitt and Wheeler 1968, Douglas *et al.* 1969, Ford and Wheeler 1959a *and* 1959b, Fuller and Wheeler 1962, Harrison *et al.* 1965, Harrison and Wheeler 1958, Klauder *et al.* 1959, Lindquist and Wheeler 1957, Marzke and Wheeler 1964, Misner and Wheeler 1957 *and* 1972, Power and Wheeler 1957, Regge and Wheeler 1957, Ruffini and Wheeler 1970, 1971a, *and* 1971b, *and* Taylor and Wheeler 1966.

Wheeler, J. A., and R. P. Feynman, 1945, "Interaction with the absorber as the mechanism of radiation," *Rev. Mod. Phys. 17,* 157-181. [§4.7, Box 2.1]

Wheeler, J. A., and R. P. Feynman, 1949, "Classical electrodynamics in terms of direct inter-particle action," *Rev. Mod. Phys. 21,* 425-434. [§4.7, Box 2.1]

White, R. H. *See* Colgate and White 1966 *and* May and White 1966 *and* 1967.

Whitehead, A. N., 1922, *The Principle of Relativity,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, Eng. [§§38.2, 39.1, 39.3, 39.8, Box 17.3]

Whitehead, A. N., 1929, *The Function of Reason,* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. [Epigraph to Chap. 28]

Whitehead, J. H. C. *See* Veblen and Whitehead 1932.

Whitrow, G. J., and G. E. Morduch, 1965, "Relativistic theories of gravitation, a comparative analysis with particular reference to astronomical tests, in *Vistas in Astronomy 6,* 1-67. [§38.2]

Whittaker, E. R., 1904, "On an expression of the electromagnetic field due to electrons by means of two scalar potential functions," *Proc. R. Soc. London 1,* 367-372. [Ex. 4.10]

Wigner, E. P., 1960, "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences," *Commun. Pure & Appl. Math. 13,* 1-14, reprinted in *Symmetries and Reflections: Scientific Essays of Eugene P. Wigner,* W. J. Moore and M. Scriven, eds., Indiana Univ. Press, Bloomington, Ind., 1967. [§44.2]

Wigner, E. P., *cited by name in* Box 38.2. *See also* Bargmann and Wigner 1948 *and* Salam and Wigner 1972.

Wilkins, D., 1972, "Bound geodesics in the Kerr metric," *Phys. Rev. D 5,* 814-822. [Box 33.5]

Wilkinson, D. T., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Bender *et al.* 1971 *and* Dicke *et al.* 1965.

Will, C. M., 1971a, "Relativistic gravity in the solar system, I: Effect of an anisotropic gravitational mass on the earth-moon distance," *Astrophys. J. 165,* 409-412. [Box 39.5]

Will, C. M., 1971b, "Relativistic gravity in the solar system, II: Anisotropy in the Newtonian gravitational constant," *Astrophys. J. 169,* 141-156. [§§38.2, 39.1, 40.8, Boxes 17.3, 39.5]

Will, C. M., 1971c, "Theoretical frameworks for testing relativistic gravity, II: Parametrized post-Newtonian hydrodynamics, and the Nordtvedt effect," *Astrophys. J. 163,* 611-628. [§§38.2, 39.3, 40.9, Box 39.5]

Will, C. M., 1971d, "Theoretical frameworks for testing relativistic gravity, III: Conservation laws, Lorentz invariance, and values of the PPN parameters," *Astrophys. J. 169,* 125-140. [§39.9, Box 39.5, Ex. 39.15]

Will, C. M., 1972. "The theoretical tools of experimental gravitation," Caltech Orange-Aid Preprint 289, to be published in Bertotti 1973. [§§38.2, 39.3, Box 39.5]

Will, C. M., 1973, "Relativistic gravity in the solar system, III: Experimental disproof of a class of linear theories of gravitation," *Astrophys. J.,* in press. [§§39.3, 39.8]

Will, C. M. *See also* Nordtvedt and Will 1972, Thorne, Ni, and Will 1971, *and* Thorne and Will 1971.

Will, C. M., and K. Nordtvedt, Jr., 1972, "Conservation laws and preferred frames in relativistic gravity, I: Preferred-frame theories and an extended PPN formalism," *Astrophys. J. 177,* 757-774. [§§38.2, 39.2, 39.3, 39.9, 40.8, Boxes 39.1, 39.5]

Willey, R. *See* Klauder *et al.* 1959.

Williams, R. W. *See* Bailey *et al.* 1968.

Willmore, T. J., 1959, *An Introduction to Differential Geometry,* Clarendon Press, Oxford, [Box 8.1]

Wilson, O. C. *See* Minkowski and Wilson 1956.

Wilson, R. W., *cited by name in* Box 27.7. *See also* Penzias and Wilson 1965.

Winsor, F., *quoted at end of* Chap. 44.

Wintner, A., 1941, *Analytical Foundations of Celestial Mechanics,* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. [Box 25.4]

Witteborn, F. C., and W. M. Fairbank, 1967, "Experimental comparison of the gravitational force on freely falling electrons and metallic electrons," *Phys. Rev. Lett. 19,* 1049-1052. [§1.3]

Witteborn, F. C., L. V. Knight, and W. M. Fairbank, 1965, "Use of low-temperature techniques to measure gravitational forces on charged particles," in *Proceedings of the 9th International Conference on Low-Temperature Physics, Columbus 1964,* Plenum Press, New York, 1965, part B, pp. 1248-1252. [§1.3]

Witten, L., ed., 1962, *Gravitation: An Introduction to Current Research,* Wiley, New York.

Witten, L. *See also* Carmeli, Fickler, and Witten 1970.

Wong, C.-Y., 1971, "Application of Regge calculus to the Schwarzschild and Reissner-Nordstrom geometries at the moment of time-symmetry," *J. Math. Phys. 12,* 70-78. [§§42.6, 42.7]

Woolf, N. *See* Douglas *et al.* 1969.

Wright, J. P., 1964, "General relativistic instability," *Phys. Rev. B 136,* 288-289. [Box 26.2]

Wright, T., 1750, *An Original Theory or New Hypothesis of the Universe,* H. Chapelle, London. Reprinted in Munitz 1957. [Box 27.7]

Wyler, J. A. (pseudonym), 1971, "Rasputin, science, and the transmogrification of destiny," preprint bearing the Princeton University seal.

York, J. W., Jr., 1971, "Gravitational degrees of freedom and the initial-value problem," *Phys. Rev. Lett. 26,* 1656-1658. [§§21.11, 21.12, Ex. 21.22]

York, J. W., Jr., 1972a, personal communication. [Ex. 21.8, 21.9, 21.24]

York, J. W., Jr., 1972b, "The role of conformal 3-geometry in the dynamics of gravitation," *Phys. Rev. Letters 28,* 1082-1085. [§§21.6, 21.11, Ex. 21.24]

York, J. W., Jr., 1973a, "Conformally invariant orthogonal decomposition of symmetric tensors on Riemannian manifolds and the initial-value problem of general relativity;" *J. Math. Phys. 14,* in press. [§21.11]

York, J. W., Jr., 1973b, personal communication. [§§21.10, 21.11]

York, J. W., Jr., *cited by name in* §21.1, Ex. 21.8, 21.9. *See also* O'Murchadha and York 1973.

Yourgrau, W., and S. Mandelstam, 1968, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory,* W. B. Saunders, Philadelphia, Pa. [Box 21.1]

Yu, J. T. *See* Peebles and Yu 1970.

Zapolsky, H. S., 1968, "Can the redshift of quasistellar objects be gravitational?" *Astrophys. J. Lett. 153,* 163-169. [Ex. 25.29]

Zaret, H., *quoted at end of* Chap. 44.

Zeeman, E. C., 1964, "Causality implies the Lorentz group," *J. Math. Phys. 5,* 190-493. [Box 2.1]

Zel'dovich, Ya. B., 1963. "The theory of the expanding universe as originated by A. A. Friedmann," *Usp. Fiz. Nauk, 80,* 357-390. English translation in *Sov. Phys.—Uspekhi. 6,* 475-494 (1964). [§29.2]

Zel'dovich, Ya. B., 1967, "Cosmological constant and elementary particles," *Zh. Eksp. & Teor. Fiz. Pis'ma 6,* 883-884. English translation in *Sov. Phys.—JETP Lett. 6,* 316-317. [§17.3, Ex. 17.5, Box 17.2 part 6]

Zel'dovich, Ya. B., 1968, "The cosmological constant and the theory of elementary particles," *Usp. Fiz. Nauk 95,* 209-230. English translation in *Sov. Phys.—Uspekhi 11,* 381-393. [Ex. 17.5]

Zel'dovich, Ya. B., 1970, "Particle production in cosmology," *Zh. Eksp. Teor. Fiz.—Pis'ma 12,* 443-447. English translation in *Sov. Phys.—JETP Lett. 12,* 307-311. [§30.5, Ex. 27.12]

Zel'dovich, Ya. B., 1971, "Particle creation by gravitational fields in collapse and singularities," *Comm. Astrophys. & Space Phys. 3,* 179-184. [Ex. 27.12]

Zel'dovich, Ya. B., 1972, "Creation of particles and antiparticles in an electric and gravitational field," in Klauder 1972, pp. 277-288. [§30.8, Ex. 27.12]

Zel'dovich, Ya. B. *See also* Bisnovatyi-Kogan and Zel'dovich 1969, Braginsky, Zel'dovich, and Rudenko 1969, *and* Doroshkevich, Zel'dovich, and Novikov 1965.

Zel'dovich, Ya. B., and O. H. Guseynov, 1965, "Collapsed stars in binaries," *Astrophys. J. 144,* 840-841. [Box 33.3]

Zel'dovich, Ya. B., and I. D. Novikov, 1966, "The hypothesis of cores retarded during expansion and the hot cosmological model," *Astron. Zh. 43,* 758-760. English translation in *Sov. Astron.—A. J. 10,* 602-603. [Box 33.3]

Zel'dovich, Ya. B., and I. D. Novikov, 1971, *Relativistic Astrophysics, Vol. I: Stars and Relativity,* Univ. of Chicago Press, Chicago, Ill. [§§22.2, 23.1, 24.1, 24.3, 24.4, 24.6, 25.6, 32.1, Boxes 24.1, 24.2]

Zel'dovich, Ya. B., and I. D. Novikov, 1974, *Relativistic Astrophysics, Vol. II: The Universe and Relativity,* Univ. of Chicago Press, Chicago, Ill., in press. [§§23.1, 28.1, 28.2, 30.1]

Zel'dovich, Ya. B., and M. A. Podurets, 1965, "The evolution of a system of gravitationally interacting point masses," *Astron. Zh. 42,* 963-973. English translation in *Sov. Astron.—A. J. 9,* 742-749 (1966). [§§24.6, 25.7, Boxes 24.1, 25.9]

Zel'dovich, Ya. B., and Yu. P. Rayzer, 1967, *Physics of Shock Waves and High-temperature Hydrodynamic Phenomena,* Academic Press, New York. [§22.2, Box 22.2]

Zel'dovich, Ya. B., and A. A. Starobinsky, 1971, "Particle production and vacuum polarization in an anisotropic gravitational field," *Zh. Eksp. Teor. Fiz. 61,* 2161-2175. English translation in *Sov. Phys.—JETP 34,* 1159-1166 (1972). [§30.5]

Zeno, *cited by name in* Box 30.1; *see* A. Grünbaum, 1967, *Modern Science and Zeno's Paradoxes,* Wesleyan Univ. Press, Middletown, Conn.

Zerilli, F. J., 1970a, "Effective potential for even-parity Regge-Wheeler gravitational perturbation equations," *Phys. Rev. Lett. 24,* 737-738. [Box 33.3]

Zerilli, F. J., 1970b, "Gravitational field of a particle falling in Schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics," *Phys. Rev. D 2,* 2141-2160. [§36.5, Fig. 36.2, Box 33.3]

Zimmer, H., 1946, *Myths and Symbols in Indian Art and Civilization,* Bollingen Foundation, Washington, D.C.; paperback reprint, Harper and Row, New York, 1962. [Box 27.7]

Zimmerman, B. A. *See* Fletcher *et al.* 1967.

Zwicky, F. *See* Baade and Zwicky 1934a *and* 1934b.

事項索引

[和文]

あ

い

う

え

お

か

訳者の略歴

1954 年　京都大学理学部卒業.
1961 年　プリンストン大学大学院博士課程修了. Ph.D.
1961 年　京都大学助手.
1965 年　京都大学理学博士.
1982 年　京都大学教養部教授.
1994 年　帝京大学教授.
2001 年　帝京大学退職.
現在に至る. 京都大学名誉教授.

重力理論
Gravitation——古典力学から相対性理論まで,
時空の幾何学から宇宙の構造へ

平成 23 年 3 月 30 日　発　　行
平成 23 年 8 月 10 日　第 2 刷発行

訳　者　若　野　省　己

発行者　吉　田　明　彦

発行所　丸善出版株式会社
〒140-0002 東京都品川区東品川四丁目13番14号
編集：電話 (03) 6367-6033／FAX (03) 6367-6156
営業：電話 (03) 6367-6038／FAX (03) 6367-6158
http://pub.maruzen.co.jp/

組版印刷・三美印刷株式会社／製本・株式会社 星共社

ISBN 978-4-621-08327-7 C 3042　　Printed in Japan